Análise de Resíduos em Modelos de Regressão Linear

Testando Soluções com R

O modelo de regressão linear é bastante usado na predição de variáveis contínuas, onde há uma ou mais variáveis independentes buscando mapear o comportamento de uma variável dependente. O modelo é bastante simples e lembro ser um dos primeiros a ser ensinado nas aulas de econometria. Porém, apesar de sua simplicidade, é preciso se atentar a alguns detalhes sobre suas premissas para que os resultados deste modelo possam ser usados para a tomada de decisão.

Abaixo vou listar algumas das premissas da regressão linear:

i) Ausência de multicolinearidade entre as variáveis independentes.

ii) Ausência de autocorrelação na variável dependente.

iii) Absence of pattern on the behavior of the model residuals, in other words, absence of heteroscedasticity.

iv) Ausência de padrão no comportamento dos resíduos do modelo, ou seja, ausência de heterocedasticidade.

v) Resíduos se distribuem de acordo com uma distribuição normal.

Tendo estas premissas atendidas, o modelo pode gerar conclusões confiáveis. Neste post eu vou desenvolver alguns modelos de regressão linear para testar as premissas **iii** e **iv** que tratam dos resíduos, para ver alguns casos práticos.

Para começar, vamos trazer os pacotes necessários para execução das funções no R:

Também vou criar uma função para facilitar a padronização dos gráficos que serão gerados.

Exemplo 1: Elasticidade preço x oferta na produção de cana de açúcar

Este exemplo foi passado na minha aula de econometria em 2017. Na época o exercício foi realizado com o software **EViews**, por sorte eu guardei os dados e agora posso refazer o problema com mais facilidade com o uso do R.

No exercício, há a variável independente (X) sendo o preço da cana de açúcar e a variável dependente (Y) sendo a área plantada de cana de açúcar (representando uma proxy para a oferta do produto). O objetivo deste modelo é tentar quantificar a elasticidade da oferta em função do preço, ou seja, quantificar quão sensível é a oferta da cana de açúcar quando ocorre uma variações em seu preço. Os dados deste exercício estão no meu repositório do Github, vamos trazê-los com o comando abaixo, salvando-os na variável df (a.k.a data.frame):

Vamos ver uma amostra dos dados.

Table 1: Amostra do Dataset

	period	area	price
1	1	29	0.075258
30	30	220	0.410233
4	4	90	0.110309
2	2	71	0.114894
29	29	197	0.353188

O modelo de regressão linear para este cenário será desenvolvido de acordo com a fórmula abaixo:

$$lnY_t = \beta_0 + \beta_1(lnX_t) + \mu_t$$

Onde:

Y_t = Área plantada após a transformação com log natural (e)

X_t = Preço da cana de açúcar também após a transformação com log natural

β_0 = Intercepto

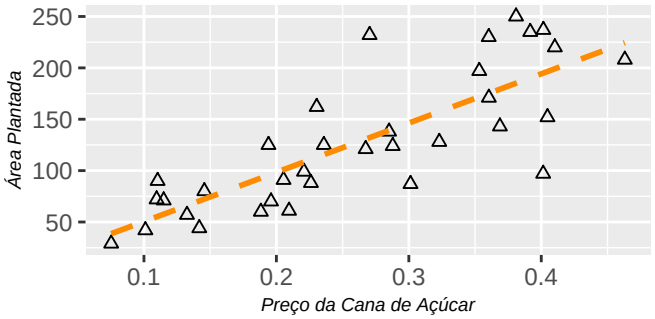
β_1 = Inclinação

μ_t = Resíduos

Os dados precisam ter a aplicação do log natural, pois esta transformação faz com que as variações entre os períodos possam ser interpretadas como variações percentuais, e isso é necessário por conta de que a elasticidade é quantificada em termos percentuais. Esta característica ocorre apenas na transformação com logarítmo natural, se a transformação fosse feita com outros logs, a interpretação não seria válida.

O gráfico abaixo irá mostrar o comportamento das variáveis do dataset, bem como a curva de regressão linear, antes de aplicar a transformação log natural.

Gráfico de dispersão das variáveis



Podemos ver que há uma relação entre o preço do produto e sua oferta. Agora vamos aplicar o log natural no modelo de regressão. Para isso, o R nos fornece duas opções:

- Ajustar as variáveis no dataset e construir o modelo usando as variáveis ajustadas.

- Construir o modelo e indicar “dentro dele” que é necessário fazer a transformação antes de computar os resultados.

Vamos ver na prática como cada opção pode ser usada. O resultado final será idêntico.

Primeiro vou criar duas variáveis com os resultados dos dois métodos:

Com as duas variáveis criadas, vamos criar uma tabela comparando os principais resultados dos modelos:

```
##             X1º.Método X2º.Método
## (Intercept)  6.1113284  6.1113284
## price_log    0.9705823  0.9705823
```

Conforme indicado, ambos os métodos geram o mesmo valor. Eu prefiro o segundo, que exige menos linhas de código. Com base nos coeficientes estimados, temos a seguinte equação:

$$\hat{Y} = 1.6416 + 0.9706X_1 + \mu$$

O resultado é estatisticamente significativo, visto que tanto o intercepto quanto a inclinação apresentam um valor-p baixo. Veja abaixo estes valores bem como o R².

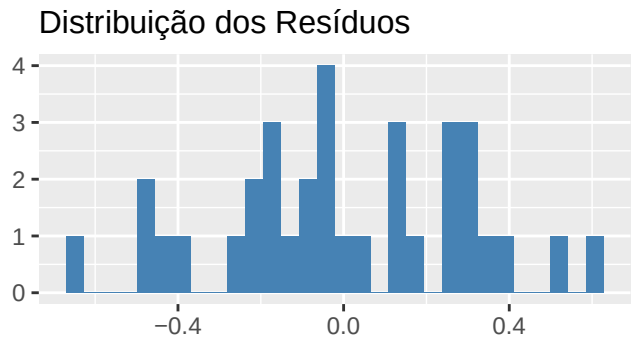
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
(Intercept)	6.111	0.1686	36.25	1.468e-27
log(price)	0.9706	0.1106	8.773	5.031e-10

Table 3: Fitting linear model: log(area) ~ log(price)

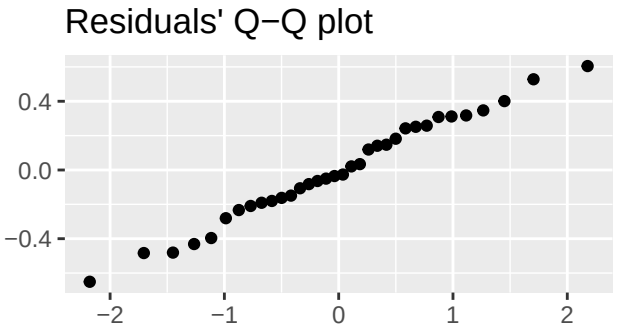
Observations	Residual Std. Error	R^2	Adjusted R^2
34	0.3088	0.7063	0.6972

Apesar destes dados mostrarem que a reta se ajustou bem aos dados e que o modelo consegue explicar ~70% da variação na variável dependente, é preciso anda analisar os resíduos para poder ter confiança no resultado para fazer projeções. No gráfico abaixo, vamos ver como se distribui os resíduos do modelo.

Eu opto primeiro por analisar um histograma dos reísduos, pois ele indicará se a distribuição se assemelha a uma distribuição normal. Vamos ver isso no gráfico abaixo.



Aparentemente os resíduos se distribuem normalmente. Outro gráfico interessante para analisar é o **q-q plot**, que também indicará quão parecido com a distribuição normal é a distribuição de uma variável.



Este gráfico também aponta para a ideia de resíduos normalmente distribuídos. Apesar de estes métodos serem bons e práticos, as vezes é necessário usar métodos formais para gerar alguma conclusão. Para validação da independência no comportamento dos resíduos pode-se usar o teste **Durbin Watson**. O código abaixo realiza este teste.

```
##
##  Durbin-Watson test
##
## data:  df %>% lm(formula = log(area) ~ log(price))
## DW = 1.2912, p-value = 0.009801
## alternative hypothesis: true autocorrelation is greater than 0
```

O resultado do teste foi de 1.2912, mas apenas com este valor não é possível fazer uma conclusão. Em conjunto com este valor, é preciso saber os valores limiares **DL** e **DU**, que podem ser encontrados nesta tabela. Para encontrar os valores com esta tabela, basta saber o número de observações no dataset (i.e. n = 33), o nível de significância do teste (i.e. 0.05) e os graus de liberdade (i.e. 1). Com isso, tem-se:

DL = 1.35

DU = 1.49

Tendo DW igual a 1.2912, acima de 0 e abaixo de DL, pode-se concluir que os resíduos são independentes.

Com isso, podemos concluir que de fato o modelo é confiável para realizar projeções, pois tanto

os gráficos quanto o teste formal indicam que as premissas (iii) e (iv) estão sendo atendidas, como como as outras premissas. Desta forma, podemos concluir que há elasticidade na oferta de cana de açúcar com relação ao seu preço.