

Analisando os Resíduos de um Modelo de Regressão Linear

O modelo de regressão linear é bastante usado na predição de variáveis contínuas, onde há uma ou mais variáveis independentes buscando mapear o comportamento de uma variável dependente. O modelo é bastante simples e lembro ser um dos primeiros a ser ensinado nas aulas de econometria. Porém, apesar de sua simplicidade, é preciso se atentar a alguns detalhes sobre suas premissas para que os resultados deste modelo possam ser usados para a tomada de decisão.

Abaixo vou listar algumas premissas da regressão linear, que sendo atendidas, fazem com que o modelo gere conclusões confiáveis:

- i) Ausência de multicolinearidade entre as variáveis independentes.
- ii) Ausência de autocorrelação na variável dependente.
- iii) Ausência de padrão no comportamento dos resíduos do modelo, ou seja, ausência de heterocedasticidade.
- iv) Resíduos se distribuem de acordo com uma distribuição normal.

Neste post vou calcular uma regressão linear simples e analisar os resíduos para ver se as premissas **iii** e **iv** estão sendo atendidas. Para começar, vamos trazer os pacotes necessários no R:

```
library(tidyverse)
library(lmtest)
library(corrplot)
library(readxl)
```

O exemplo que tenho apresenta dados de preço e oferta de cana de açúcar. A variável independente é o preço da cana de açúcar e a variável dependente é a área plantada deste produto, que representando uma proxy para sua oferta. O objetivo da regressão será quantificar a elasticidade da oferta em função do preço, ou seja, quantificar quão sensível é a oferta da cana de açúcar quando ocorre uma variação em seu preço. Os dados deste exercício estão no meu repositório do Github, vamos trazê-los com o comando abaixo, salvando-os na variável `df`:

```
path <-
  paste("https://raw.githubusercontent.com/FranciscoPiccolo/",
        "franciscopiccolo.github.io/master/code/",
        "20190905_residual_analysis_in_econometric_models/dataset/",
        "dataset_1.csv",
        sep = "")

df <- read.csv(file = path,
               sep = ";",
               dec = ",")

# Amostra do dataset
df[sample(nrow(df),5), ] %>%
  as_tibble()
```

```
## # A tibble: 5 x 3
##   period area price
```

```
##      <int> <int> <dbl>
## 1      13    125 0.194
## 2      12     80 0.146
## 3      33   237 0.402
## 4       3    42 0.101
## 5      18    91 0.205
```

O modelo de regressão linear para este cenário será desenvolvido de acordo com a fórmula abaixo:

$$\ln Y_t = \beta_0 + \beta_1(\ln X_t) + \mu_t$$

Onde:

Y_t = Área plantada após a transformação com log natural (e)

X_t = Preço da cana de açúcar também após a transformação com log natural

β_0 = Intercepto

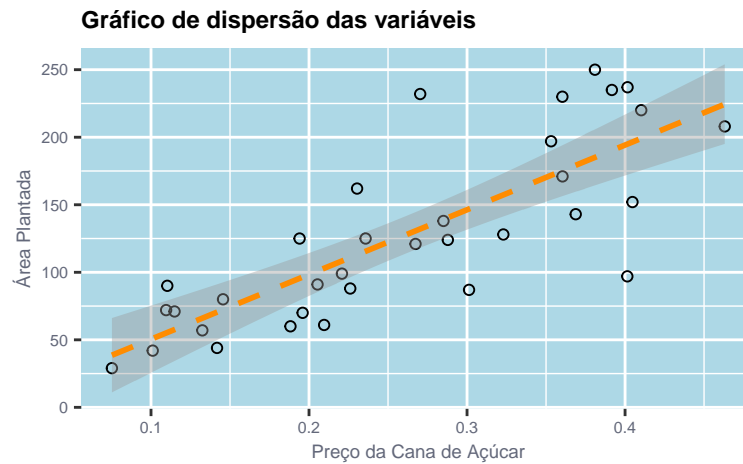
β_1 = Inclinação

μ_t = Resíduos

Os dados precisam ter a aplicação do log natural, pois esta transformação faz com que as variações entre os períodos possam ser interpretadas como variações percentuais, e isso é necessário por conta de que a elasticidade é quantificada em termos percentuais. Esta característica ocorre apenas na transformação com logaritmo natural, se a transformação fosse feita com outros logs, a interpretação não seria válida.

O gráfico abaixo irá mostrar o comportamento das variáveis do dataset, bem como a curva de regressão linear, antes de aplicar a transformação log natural.

```
#,fig.pos="F"
df %>%
  ggplot()+
  geom_point(mapping = aes(x = price, y = area), shape = 1)+
  geom_smooth(mapping = aes(x = price, y = area),
              method = "lm",
              formula = y ~ x,
              se = T,
              lty = 2,
              color = "dark orange")+
  theme_graph()+
  labs(title = "Gráfico de dispersão das variáveis",
       x = "Preço da Cana de Açúcar",
       y = "Área Plantada")
```



Podemos ver que há uma correlação positiva entre o preço do produto e sua oferta. Agora vamos aplicar o log natural no modelo de regressão. Para isso, o R nos fornece duas opções:

- Ajustar as variáveis no dataset e construir o modelo usando as variáveis ajustadas.
- Construir o modelo e indicar “dentro dele” que é necessário fazer a transformação antes de computar os resultados.

Vamos ver na prática como cada opção pode ser usada. O resultado final será idêntico.

Primeiro vou criar duas variáveis com os resultados dos dois métodos:

```
# Método 1, criando novos campos no dataset com a transformação log (e)
first_method <-
  df %>%
  mutate(area_log = log(area),
         price_log = log(price)) %>%
  lm(formula = area_log ~ price_log)

second_method <-
  df %>%
  lm(formula = log(area) ~ log(price))
```

Com as duas variáveis criadas, vamos criar uma tabela comparando os principais resultados do modelo (i.e. coeficiente e intercepto):

```
data.frame("1º Método" = c(first_method$coefficients),
          "2º Método" = c(second_method$coefficients))
```

```
##           X1º.Método X2º.Método
## (Intercept) 6.1113284 6.1113284
## price_log   0.9705823 0.9705823
```

Conforme indicado, ambos os métodos geram o mesmo valor. Eu prefiro o segundo, que exige menos linhas de código. Com base nos coeficientes estimados, temos a seguinte equação:

$$\hat{Y} = 6.11 + 0.97X_1 + \mu$$

O resultado é estatisticamente significativo, visto que tanto o intercepto quanto a inclinação apresentam um valor-p baixo. Veja abaixo estes valores bem como o R^2 .

```
second_method %>% summary()

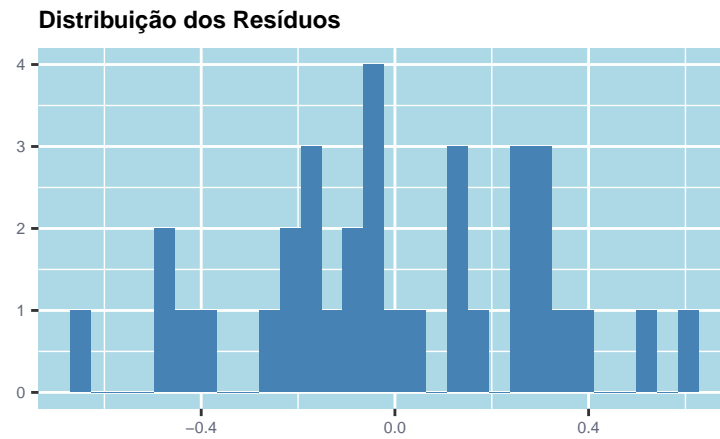
##
## Call:
## lm(formula = log(area) ~ log(price), data = .)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -0.65076 -0.18823 -0.03096  0.24914  0.60492
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   6.1113     0.1686   36.254 < 2e-16 ***
## log(price)    0.9706     0.1106    8.773 5.03e-10 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.3088 on 32 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.7063, Adjusted R-squared:  0.6972
## F-statistic: 76.97 on 1 and 32 DF,  p-value: 5.031e-10
```

Apesar destes dados mostrarem que a reta se ajustou bem aos dados e que o modelo consegue explicar ~70% da variação na variável dependente, é preciso ainda analisar os resíduos para poder ter confiança no resultado e fazer projeções. No gráfico abaixo, vamos ver como se distribuem os resíduos do modelo.

```
model_residuals <-
  data.frame(values = second_method$residuals)
```

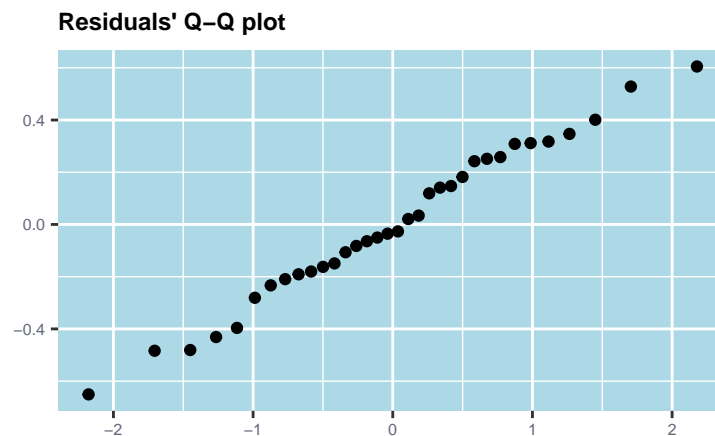
Eu opto primeiro por analisar um histograma dos resíduos, pois ele indicará se a distribuição se assemelha a uma distribuição normal. Vamos ver isso no gráfico abaixo.

```
# Histogram
model_residuals %>%
  ggplot()+
  geom_histogram(mapping = aes(x = values), fill = "steel blue")+
  theme_graph()+
  labs(title = "Distribuição dos Resíduos",
       x = "",
       y = "")
```



Aparentemente os resíduos se distribuem normalmente. Outro gráfico interessante para analisar é o **q-q plot**, que também indicará quão parecido com a distribuição normal é a distribuição de uma variável.

```
# q-q plot
model_residuals %>%
  ggplot()+
  geom_qq(mapping = aes(sample = values))+
  theme_graph()+
  labs(title = "Residuals' Q-Q plot",
       x = "",
       y = "")
```



Este gráfico também aponta para a ideia de resíduos normalmente distribuídos. Apesar de estes métodos serem bons e práticos, as vezes é necessário usar métodos formais para gerar uma conclusão. Para validação da independência no comportamento dos resíduos pode-se usar o teste **Durbin Watson**. O código abaixo realiza este teste.

```
# Necessário instalar e chamar o pacote 'lmtest'
lmtest::dwtest(df %>%
  lm(formula = log(area) ~ log(price)))
```

```
##
```

```
## Durbin-Watson test
##
## data:  df %>% lm(formula = log(area) ~ log(price))
## DW = 1.2912, p-value = 0.009801
## alternative hypothesis: true autocorrelation is greater than 0
```

O resultado do teste foi de 1.2912, mas apenas com este valor não é possível fazer uma conclusão. Em conjunto com este valor, é preciso saber os valores limiares **DL** e **DU**, que podem ser encontrados nesta [tabela](#). Para encontrar os valores com esta tabela, basta saber o número de observações no dataset (i.e. $n = 33$), o nível de significância do teste (i.e. 0.05) e os graus de liberdade (i.e. 1). Com isso, tem-se:

DL = 1.35

DU = 1.49

Tendo DW igual a 1.2912, acima de 0 e abaixo de DL, pode-se concluir que os resíduos são independentes.

Com isso, podemos concluir que de fato o modelo é confiável para realizar projeções, pois tanto os gráficos quanto o teste formal indicam que as premissas (iii) e (iv) estão sendo atendidas. Desta forma, podemos concluir que há elasticidade na oferta de cana de açúcar com relação ao seu preço.