Analisando os Resíduos de um Modelo de Regressão Linear

O modelo de regressão linear é bastante usado na predição de variáveis contínuas, onde há uma ou mais variáveis independentes buscando mapear o comportamento de uma variável dependente. O modelo é bastante simples e lembro ser um dos primeiros a ser ensinado nas aulas de econometria. Porém, apesar de sua simplicidade, é preciso se atentar a alguns detalhes sobre suas premissas para que os resultados deste modelo possam ser usados para a tomada de decisão.

Abaixo vou listar algumas premissas da regressão linear, que sendo atendidas, fazem com que o modelo gere conclusões confiáves:

i) Ausência de multicolinearidade entre as variáveis independentes.

ii) Ausência de autocorrelação na variável dependente.

iii) Ausência de padrão no comportamento dos resíduos do modelo, ou seja, ausência de heterocedasticidade.

iv) Resíduos se distribuem de acordo com uma distribuição normal.

Neste post vou calcular uma regressão linear simples e analisar os resíduos para ver se as premissas **iii** e **iv** estão sendo atendidas. Para começar, vamos trazer os pacotes necessários no R:

```
library(tidyverse)
library(lmtest)
library(corrplot)
library(readxl)
```

O exemplo que tenho apresenta dados de preço e oferta de cana de açúcar. A variável independente é o preço da cana de açúcar e a variável dependente é a área plantada deste produto, que representando uma proxy para sua oferta. O objetivo da regressão será quantificar a elasticidade da oferta em função do preço, ou seja, quantificar quão sensível é a oferta da cana de açúcar quando ocorre uma variações em seu preço. Os dados deste exercício estão no meu repositório do Github, vamos trazê-los com o comando abaixo, salvando-os na variável df:

```
path <-
  paste("https://raw.githubusercontent.com/FranciscoPiccolo/",
        "franciscopiccolo.github.io/master/code/",
        "20190905_residual_analysis_in_econometric_models/dataset/",
        "dataset_1.csv",
        sep = "")

df <- read.csv(file = path,
               sep = ";",
               dec = ",")
```

```
# Amostra do dataset
df[sample(nrow(df),5), ] %>%
    as_tibble()
```

```
## # A tibble: 5 x 3
##   period  area  price
##    <int> <int>  <dbl>
## 1     26   124 0.288
## 2     34   235 0.392
## 3     27    97 0.401
## 4      1    29 0.0753
## 5     15   125 0.236
```

O modelo de regressão linear para este cenário será desenvolvido de acordo com a fórmula abaixo:

$$lnY_t = \beta_0 + \beta_1(lnX_t) + \mu_t$$

Onde:

Y_t = Área plantada após a transformação com log natural (e)

X_t = Preço da cana de açúcar também após a transformação com log natural

β_0 = Intercepto

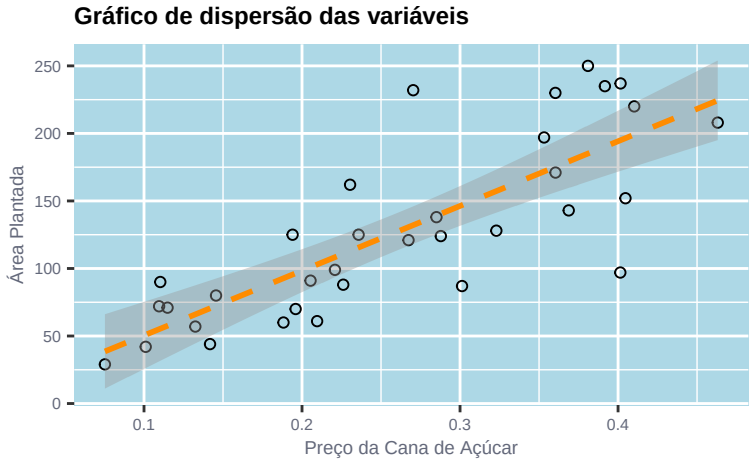
β_1 = Inclinação

μ_t = Resíduos

Os dados precisam ter a aplicação do log natural, pois esta transformação faz com que as variações entre os períodos possam ser interpretadas como variações percentuais, e isso é necessário por conta de que a elasticidade é quantificada em termos percentuais. Esta característica ocorre apenas na transformação com logarítmo natural, se a transformação fosse feita com outros logs, a interpretação não seria válida.

O gráfico abaixo irá mostrar o comportamento das variáveis do dataset, bem como a curva de regressão linear, antes de aplicar a transformação log natural.

```
df %>%
  ggplot()+
  geom_point(mapping = aes(x = price, y = area), shape = 1)+
  geom_smooth(mapping = aes(x = price, y = area),
              method = "lm",
              formula = y ~ x,
              se = T,
              lty = 2,
              color = "dark orange")+
  theme_graph()+
  labs(title = "Gráfico de dispersão das variáveis",
       x = "Preço da Cana de Açúcar",
       y = "Área Plantada")
```



Podemos ver que há uma correlação positiva entre o preço do produto e sua oferta. Agora vamos aplicar o log natural no modelo de regressão. Para isso, o R nos fornece duas opções:

- Ajustar as variáveis no dataset e construir o modelo usando as variáveis ajustadas.
- Construir o modelo e indicar “dentro dele” que é necessário fazer a transformação antes de computar os resultados.

Vamos ver na prática como cada opção pode ser usada. O resultado final será idêntico.

Primeiro vou criar duas variáveis com os resultados dos dois métodos:

```
# Método 1, criando novos campos no dataset com a transformação log (e)
first_method <-
  df %>%
  mutate(area_log = log(area),
         price_log = log(price)) %>%
  lm(formula = area_log ~ price_log)

second_method <-
  df %>%
  lm(formula = log(area) ~ log(price))
```

Com as duas variáveis criadas, vamos criar uma tabela comparando os principais resultados do modelo (i.e. coeficiente e intercepto):

```
data.frame("1º Método" = c(first_method$coefficients),
           "2º Método" = c(second_method$coefficients))
```

```
##             X1º.Método X2º.Método
## (Intercept)  6.1113284  6.1113284
## price_log    0.9705823  0.9705823
```

Conforme indicado, ambos os métodos geram o mesmo valor. Eu prefiro o segundo, que exige menos linhas de código. Com base nos coeficientes estimados, temos a seguinte equação:

$$\hat{Y} = 6.11 + 0.97X_1 + \mu$$

O resultado é estatisticamente significativo, visto que tanto o intercepto quanto a inclinação apresentam um valor-p baixo. Veja abaixo estes valores bem como o R^2.

```
second_method %>% summary()
```

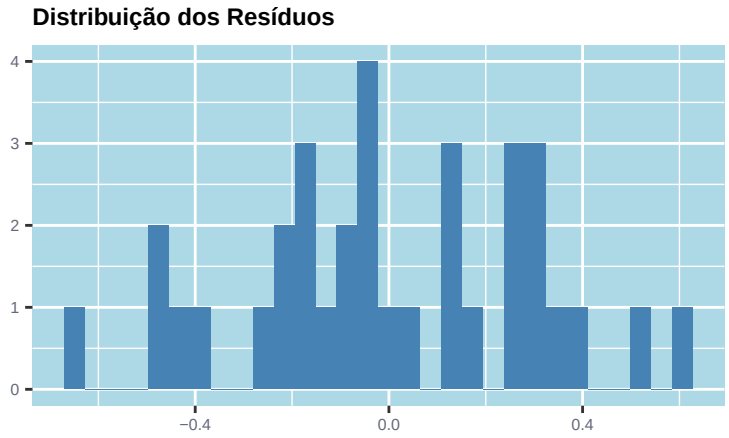
```
##
## Call:
## lm(formula = log(area) ~ log(price), data = .)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -0.65076 -0.18823 -0.03096  0.24914  0.60492
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   6.1113     0.1686  36.254  < 2e-16 ***
## log(price)    0.9706     0.1106   8.773 5.03e-10 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.3088 on 32 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.7063, Adjusted R-squared:  0.6972
## F-statistic: 76.97 on 1 and 32 DF,  p-value: 5.031e-10
```

Apesar destes dados mostrarem que a reta se ajustou bem aos dados e que o modelo consegue explicar ~70% da variação na variável dependente, é preciso ainda analisar os resíduos para poder ter confiança no resultado e fazer projeções. No gráfico abaixo, vamos ver como se distribuem os resíduos do modelo.

```
model_residuals <-
  data.frame(values = second_method$residuals)
```

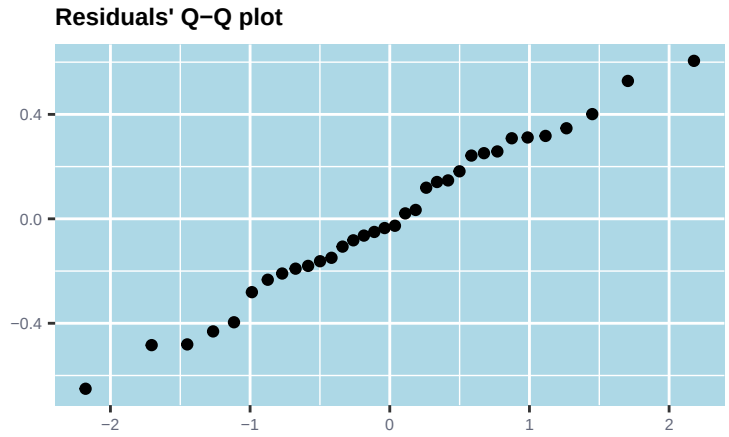
Eu opto primeiro por analisar um histograma dos reísduos, pois ele indicará se a distribuição se assemelha a uma distribuição normal. Vamos ver isso no gráfico abaixo.

```
# Histogram
model_residuals %>%
  ggplot()+
  geom_histogram(mapping = aes(x = values), fill = "steel blue")+
  theme_graph()+
  labs(title = "Distribuição dos Resíduos",
       x = "",
       y = "")
```



Aparentemente os resíduos se distribuem normalmente. Outro gráfico interessante para analisar é o **q-q plot**, que também indicará quão parecido com a distribuição normal é a distribuição de uma variável.

```
# q-q plot
model_residuals %>%
  ggplot()+
  geom_qq(mapping = aes(sample = values))+
  theme_graph()+
  labs(title = "Residuals' Q-Q plot",
       x = "",
       y = "")
```



Este gráfico também aponta para a ideia de resíduos normalmente distribuídos. Apesar de estes métodos serem bons e práticos, as vezes é necessário usar métodos formais para gerar uma conclusão. Para validação da independência no comportamento dos resíduos pode-se usar o teste **Durbin Watson**. O código abaixo realiza este teste.

```
# Necessário instalar e chamar o pacote 'lmtest'
lmtest::dwtest(df %>%
                 lm(formula = log(area) ~ log(price)))
```

```
##
##  Durbin-Watson test
##
## data:  df %>% lm(formula = log(area) ~ log(price))
## DW = 1.2912, p-value = 0.009801
## alternative hypothesis: true autocorrelation is greater than 0
```

O resultado do teste foi de 1.2912, mas apenas com este valor não é possível fazer uma conclusão. Em conjunto com este valor, é preciso saber os valores limiares **DL** e **DU**, que podem ser encontrados nesta tabela. Para encontrar os valores com esta tabela, basta saber o número de observações no dataset (i.e. n = 33), o nível de significância do teste (i.e. 0.05) e os graus de liberdade (i.e. 1). Com isso, tem-se:

DL = 1.35

DU = 1.49

Tendo DW igual a 1.2912, acima de 0 e abaixo de DL, pode-se concluir que os resíduos são independentes.

Com isso, podemos concluir que de fato o modelo é confiável para realizar projeções, pois tanto os gráficos quanto o teste formal indicam que as premissas (iii) e (iv) estão sendo atendidas. Desta forma, podemos concluir que há elasticidade na oferta de cana de açúcar com relação ao seu preço.