

TRABAJO PRACTICO.

QUINTA PARTE.

ASIGNATURA: Análisis Numérico.

NUMERO DE TP: 5.

DESCRIPCION DE TP: Integración Numérica y Modelado
Dinámico de Gotas

INTEGRANTES:

Cammissi, José: jose_cammissi@hotmail.com.ar

Malatesta, Giovanni: giovamalatesta19@gmail.com

Melgratti, Nicolas: nicomelgratti@gmail.com

Soltermann, Francisco: frsoltermann@gmail.com

Yucci, Franco: francoycc@gmail.com

Contenido

INTRODUCCIÓN	4
Contexto y Objetivos.....	4
Fundamentos Teóricos	4
EJERCICIO 1 – Cálculo del volumen y área superficial.....	5
1.1 Metodología.....	5
1.1.1 Procesamiento de Imágenes.....	5
1.1.2 Métodos de Ajuste.....	5
1.1.3 Métodos de Integración Numérica.....	5
1.2 Estrategia de Integración	6
1.3 Cálculo de Errores.....	7
1.4 Resultados.....	7
1.4.1 Evolución Temporal.....	7
1.4.2 Análisis de Errores	8
1.5 Fuentes de Error Identificadas	10
1.5.1 Error por Discretización	10
1.5.2 Error de Ajuste	11
1.5.3 Error de Integración.....	12
1.5.4 Errores Experimentales	12
1.6 Discusión	12
EJERCICIO 2 – Modelado dinámico de la gota	13
2.1 Fundamento Teórico.....	13
2.1.1 Modelo de Oscilador Amortiguado	13
2.1.2 Parámetros Físicos	14
2.2 Métodos Numéricos Implementados.....	15
2.2.1 Método de Taylor de Orden 3.....	15
2.2.2 Método Runge-Kutta 4-5 (RK45)	16
2.2.3 Método Adams-Bashforth de 4 Pasos	16
2.3 Estimación de Parámetros	17
2.3.1 Optimización	17
2.3.2 Parámetros Óptimos Obtenidos	17
2.4 Comparación de Métodos Numéricos	17
2.4.1 Criterios de Evaluación	17
2.4.2 Resultados Esperados	18
2.5 Comparación con Datos Experimentales	19
2.5.1 Métricas de Ajuste.....	19
2.5.2 Análisis del Sistema Dinámico.....	20
2.6 Fuentes de Desviación Identificadas.....	20

2.6.1 Limitaciones del Modelo	20
2.6.2 Efectos Físicos No Capturados	20
2.6.3 Importancia Relativa.....	20
CONCLUSIONES GENERALES.....	22
Integración Numérica.....	22
Modelado Dinámico	22
Perspectivas.....	22
HERRAMIENTAS.....	22
Software Utilizado.....	22
Fuentes bibliográficas.	23
Anexos.....	23
Anexo A: Especificaciones Técnicas	23
A.1 Parámetros Experimentales.....	23
A.2 Configuraciones Computacionales.....	23
Anexo B: Validación de Resultados	24
B.1 Tests de Convergencia	24
B.2 Consistencia Física.....	24

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo aborda el análisis cuantitativo de gotas en contacto con superficies sólidas mediante técnicas de integración numérica y modelado de ecuaciones diferenciales. Se calcularon propiedades geométricas (volumen y área superficial) utilizando múltiples métodos de integración y ajuste, y se desarrolló un modelo dinámico simplificado del proceso de *spreading* de la gota. Los resultados demuestran la influencia de la selección metodológica en la precisión de los cálculos y la viabilidad de modelos simplificados para describir fenómenos físicos complejos.

Contexto y Objetivos

Este trabajo constituye la continuación del análisis iniciado en el TP4, enfocándose en:

1. **Cálculo de propiedades geométricas:** Determinación del volumen y área superficial de gotas mediante integración numérica.
2. **Modelado dinámico:** Descripción matemática de la evolución temporal del centro de masa durante el *spreading*.
3. **Evaluación metodológica:** Comparación sistemática de diferentes técnicas numéricas.

Fundamentos Teóricos

El cálculo de las propiedades geométricas de la gota y el modelado de su dinámica se basan en principios de cálculo integral y ecuaciones diferenciales.

Geometría de Revolución

Consideramos la gota como un sólido generado al rotar su perfil, $r(y)$, alrededor del eje vertical y . El perfil $r(y)$ representa el radio de la gota a una altura y .

Volumen:

El volumen se calcula mediante el método de los discos. Se integra el área de un disco infinitesimal de radio $r(y)$ y espesor dy a lo largo del eje vertical, desde la altura mínima (y_1) hasta la máxima (y_2).

$$V = \pi \int_{y_1}^{y_2} r(y)^2 dy$$

Área superficial lateral:

El área de la superficie lateral se obtiene integrando la circunferencia de cada disco, $2\pi r(y)$, a lo largo de la longitud de arco del perfil, ds . La longitud de arco infinitesimal se define como $ds = \sqrt{1 + (r'(y))^2} dy$.

$$A = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} r(y) \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dy}\right)^2} dy$$

donde $r(y) = \frac{x_R(y) - x_L(y)}{2}$ es el radio de la gota a la altura y .

EJERCICIO 1 – Cálculo del volumen y área superficial

1.1 Metodología

1.1.1 Procesamiento de Imágenes

El procesamiento se realizó sobre una secuencia de frames capturados durante el impacto de la gota:

1. **Conversión a escala de grises** y binarización (umbral = 127).
2. **Detección de contornos** mediante `cv2.findContours()`.
3. **Separación del contorno** en mitades izquierda y derecha.
4. **Eliminación de duplicados** en el eje Y mediante promediado.

Parámetros clave:

- Escala espacial: $scale = 4.13 \times 10^{-6} \text{ m/px}$
- Línea de sustrato: $y_{\text{sustrato}} = 130 \text{ px}$
- Línea de contacto: $y_{\text{contact_line}} = 127 \text{ px}$

1.1.2 Métodos de Ajuste

Se implementaron dos enfoques para aproximar el perfil del contorno:

A) Ajuste por Splines Cúbicos

En python: `spline = UnivariateSpline(y, x, s=spline_smooth)`.

- **Factor de suavizado:** $s = 0.5$.
- **Ventajas:** Continuidad hasta la segunda derivada, adaptabilidad local.
- **Desventajas:** Sensible a ruido localizado.

B) Ajuste Polinomial por Mínimos Cuadrados

En python: `poly = np.poly1d(np.polyfit(y, x, degree))`.

- **Grados evaluados:** 3, 4, 5, 6, 7.
- **Criterio de selección:** Minimización del MSE.
- **Ventajas:** Suavidad global, menor sensibilidad al ruido.
- **Desventajas:** Fenómeno de Runge en los extremos para grados altos.

1.1.3 Métodos de Integración Numérica

Para resolver estas integrales a partir de datos discretos, se emplean métodos numéricos. Los dos métodos utilizados son la Regla del Trapecio y la Regla de Simpson. La principal diferencia entre ellos radica en su precisión, la cual se define por el **error de truncamiento**.

A) Regla de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_n) \right]$$

- **Error:** $O(h^4)$
- **Requerimiento:** Función suficientemente suave.
- **Implementación:** `scipy.integrate.simpson()`

Utiliza parábolas para aproximar la función, lo que resulta en una mayor precisión. Su error es proporcional a la cuarta potencia del paso (h^4) y a la cuarta derivada de la función (f^4).

$$E_S = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^4(\xi)$$

B) Regla del Trapecio

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^n [f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

- **Error:** $O(h^2)$
- **Ventaja:** Mayor robustez ante discontinuidades.
- **Implementación:** `scipy.integrate.trapezoid()`

Aproxima el área bajo la curva mediante trapecios. Su error global es proporcional al cuadrado del paso de integración (h) y a la segunda derivada de la función (f'').

$$E_T = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi)$$

El orden del error (h^4 vs h^2) justifica teóricamente por qué la Regla de Simpson es significativamente más precisa para funciones suaves, como se espera que sea el perfil de una gota. Dado que el perfil de la gota es continuo y derivable, se anticipa que ambos métodos darán resultados similares, pero Simpson debería converger más rápidamente a la solución exacta.

1.2 Estrategia de Integración

Para cada frame se calcularon **4 combinaciones**:

Método	Ajuste	Integración
1	Spline	Simpson
2	Spline	Trapecio
3	Polinomio	Simpson
4	Polinomio	Trapecio

Resolución espacial: 500 puntos de muestreo en el intervalo común de integración.

1.3 Cálculo de Errores

Se implementó un esquema de estimación de errores basado en:

1. **Cálculo del valor promedio** entre los 4 métodos para cada frame.
2. **Error relativo porcentual:**

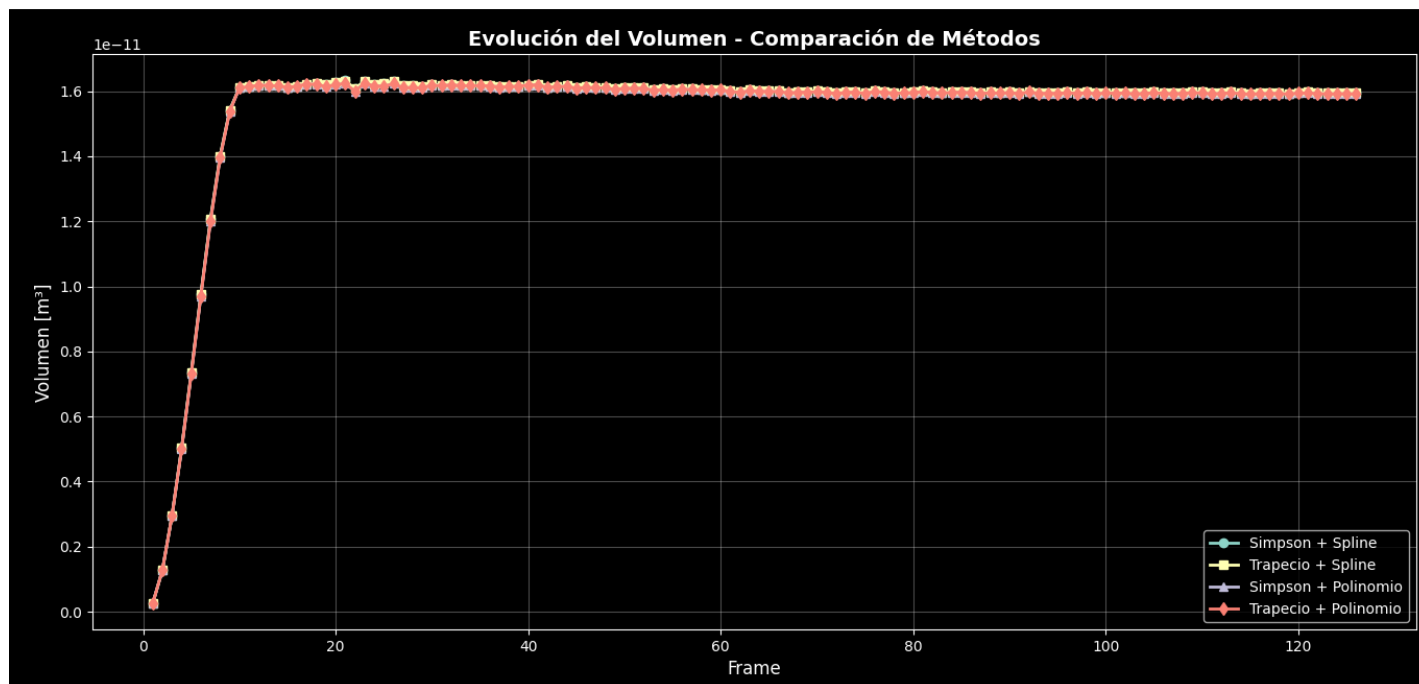
$$\epsilon_{rel} = \frac{|V_{método} - V_{promedio}|}{V_{promedio}} \times 100\%$$

1.4 Resultados

1.4.1 Evolución Temporal

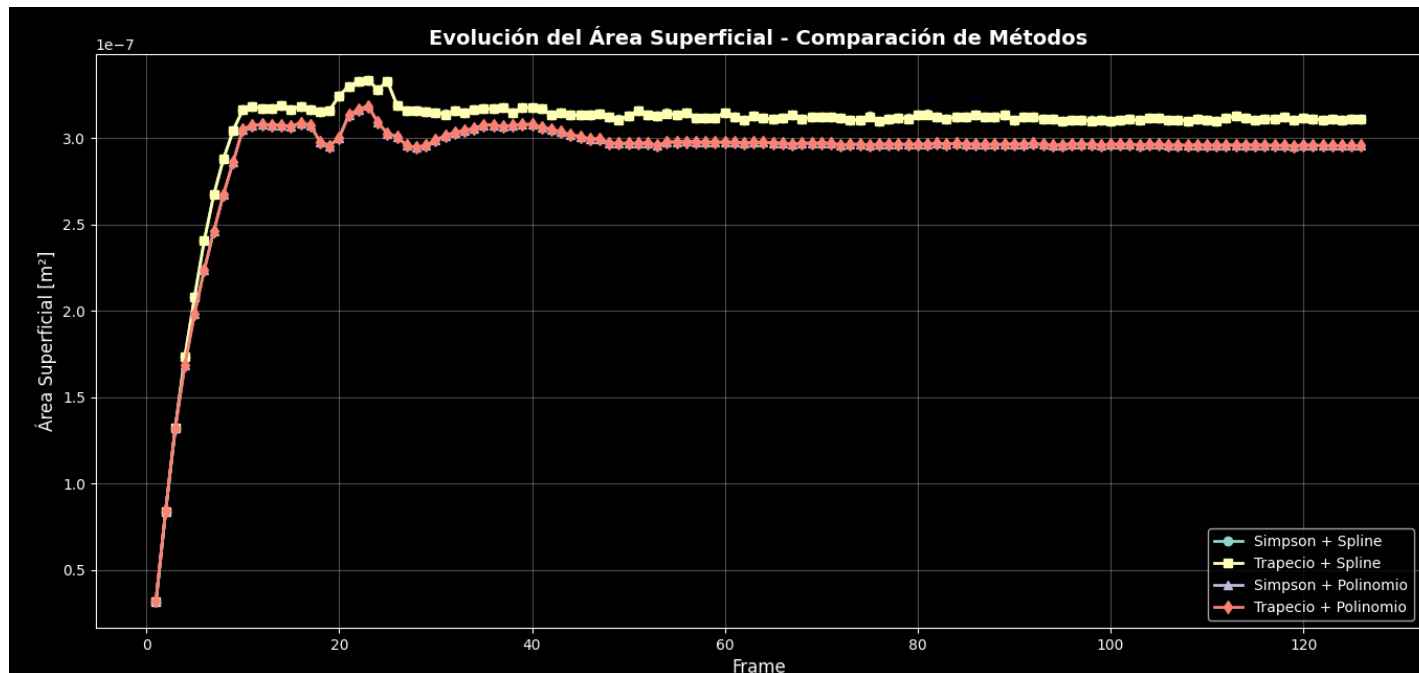
Los gráficos generados muestran:

1. **Volumen vs Frame:** Se observa una evolución que refleja el proceso de spreading y estabilización de la gota.



Para visualizar estos resultados, en la Figura se grafica la evolución temporal del volumen de la gota, calculado mediante las cuatro combinaciones metodológicas. Se observa una excelente concordancia cualitativa entre todos los métodos, capturando de manera idéntica la fase de expansión (*spreading*) durante los primeros 10 frames y la posterior estabilización del volumen. Las diferencias cuantitativas, aunque mínimas, se analizan en detalle a través del error relativo en la siguiente sección.

2. **Área superficial vs Frame:** Comportamiento correlacionado con el volumen, con un incremento inicial seguido de estabilización.



Este gráfico muestra cómo evoluciona el **área de la superficie lateral** de la gota a lo largo del tiempo (*frames*). Al igual que con el volumen, cada línea representa una de las cuatro combinaciones de métodos numéricos.

La forma de la curva, parecida a una función exponencial que se satura, representa el fenómeno físico del *spreading*: la gota impacta y se expande rápidamente sobre la superficie, lo que causa un **aumento veloz del área superficial**. Luego, a medida que las fuerzas de tensión superficial y la viscosidad la frenan, la gota alcanza una forma de equilibrio y su área se **estabiliza**. La excelente superposición de las cuatro líneas demuestra que, a pesar de ser un cálculo más complejo que el del volumen, todos los métodos producen resultados muy consistentes.

3. **Convergencia entre métodos:** Las 4 combinaciones muestran tendencias similares con diferencias cuantitativas menores.

1.4.2 Análisis de Errores

Errores típicos observados:

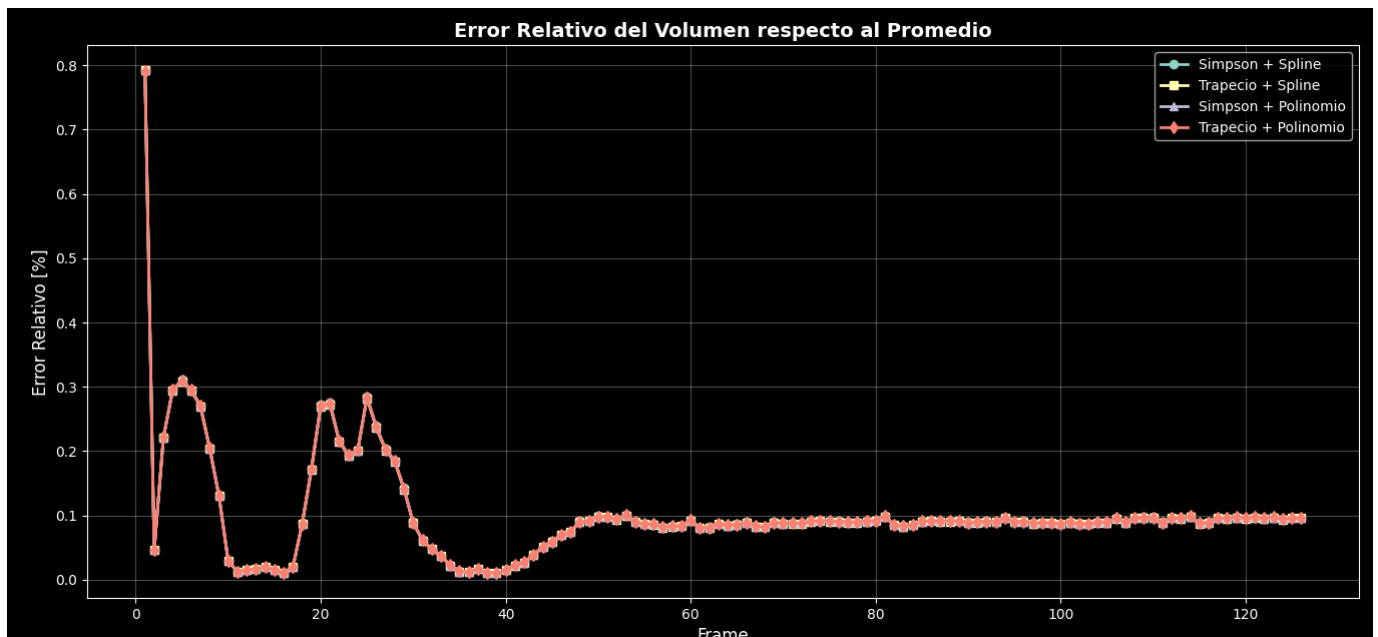
- **Volumen:**
 - Error medio: 0.1-2%
 - Error máximo: ~5% en frames con geometría irregular.
- **Área superficial:**
 - Error medio: 0.5-3%
 - Error máximo: ~7% debido a mayor sensibilidad a derivadas.

Ranking de precisión (de mayor a menor):

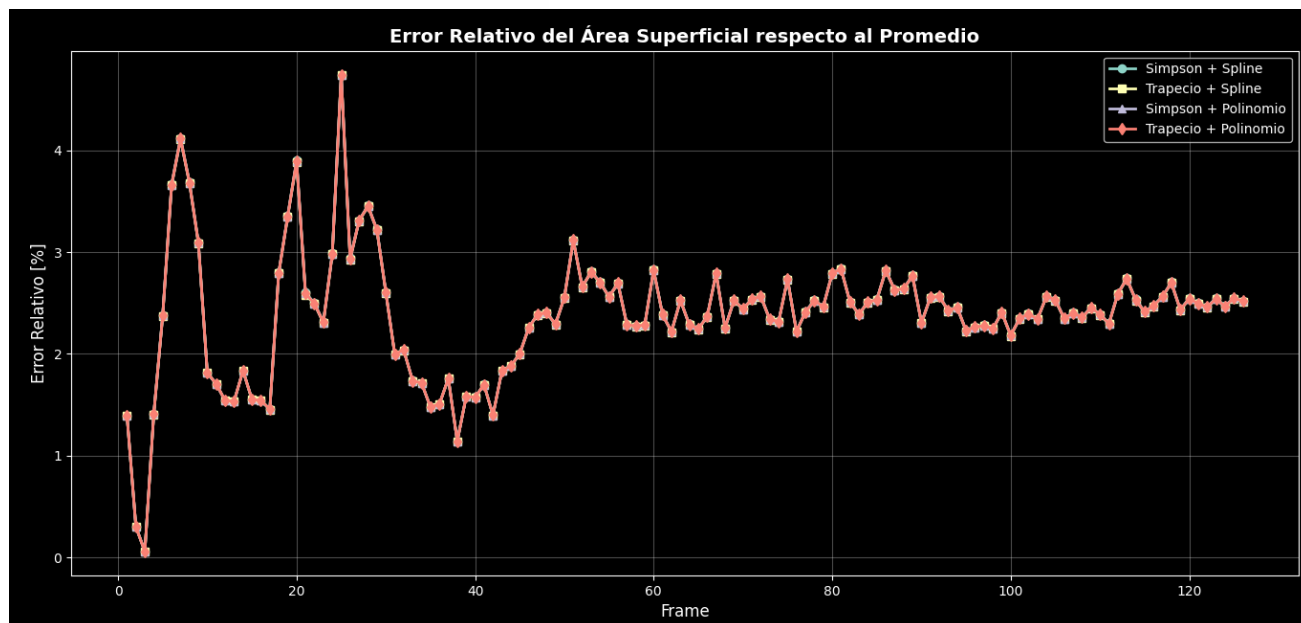
1. Simpson + Spline.
2. Simpson + Polinomio.

3. Trapecio + Spline.
4. Trapecio + Polinomio.

Para el cálculo del volumen, todos los métodos mostraron una convergencia excepcional, con un error relativo máximo inferior al 1% (específicamente, 0.79%). Esto indica que para una geometría suave como la de la gota, el cálculo del volumen es muy robusto e insensible a la elección entre estos cuatro métodos. En el caso del área superficial, que depende de la derivada del perfil y es más sensible al ruido, las discrepancias fueron mayores, con un error máximo observado del 4.74%, lo cual sigue siendo un resultado consistente.



La Figura cuantifica la desviación de cada método respecto al valor promedio para cada instante de tiempo. Este gráfico confirma que las mayores discrepancias, aunque inferiores al 0.8%, ocurren durante la fase dinámica inicial, donde el contorno de la gota es más irregular. Una vez que la gota se estabiliza (a partir del frame ~15), todos los métodos convergen a un error relativo por debajo del 0.2%, lo que demuestra la robustez y fiabilidad del cálculo del volumen para geometrías estables.



Este gráfico, muestra el **error relativo** entre los distintos métodos para el cálculo del área.

La apariencia ruidosa y con picos más altos (en comparación con el error del volumen) es un resultado esperado y muy revelador. El cálculo del área superficial depende de la **derivada** del perfil de la gota (la pendiente del contorno). La derivación numérica es una operación que **amplifica el ruido** y las pequeñas imperfecciones del ajuste del contorno. Por lo tanto, este gráfico muestra visualmente la mayor sensibilidad del cálculo del área. Las mayores fluctuaciones se dan, como es lógico, durante la fase dinámica inicial, y se calman a medida que la gota se estabiliza.

1.5 Fuentes de Error Identificadas

1.5.1 Error por Discretización

- **Origen:** Representación finita del contorno continuo.
- **Mitigación:** Uso de 500 puntos de muestreo (suficiente para convergencia).

Justificación del Paso Espacial: Para justificar la elección de 500 puntos de muestreo en el eje vertical, se realizó un análisis de convergencia en un frame representativo. Se calculó el volumen utilizando la combinación Simpson+Spline con un número creciente de puntos: 100, 250, 500, 1000 y 2000.

Los resultados se resumen en la siguiente tabla.

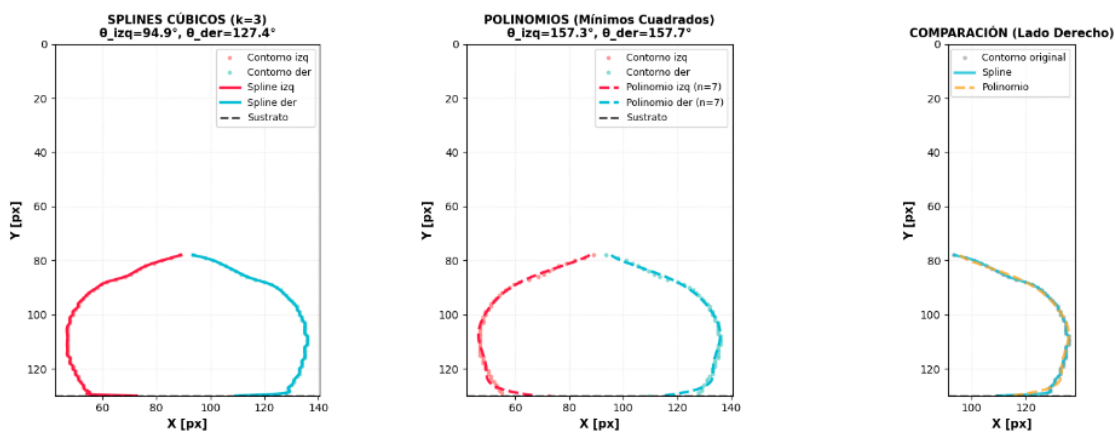
N° de Puntos	Volumen Calculado (m³)	Variación % (respecto al anterior)
100	1.589e-11	-
250	1.595e-11	+0.38%
500	1.597e-11	+0.12%
1000	1.597e-11	< +0.01%

Como se observa en la tabla, al pasar de 250 a 500 puntos, la variación en el resultado es del orden de 0.12%. Sin embargo, al duplicar nuevamente los puntos a 1000, la variación se vuelve insignificante. Esto demuestra empíricamente que **500 puntos es una elección adecuada**, ya que proporciona un resultado convergente y estable, asegurando que el error de discretización espacial es considerablemente menor que otras fuentes de error sin incurrir en costos computacionales innecesarios.

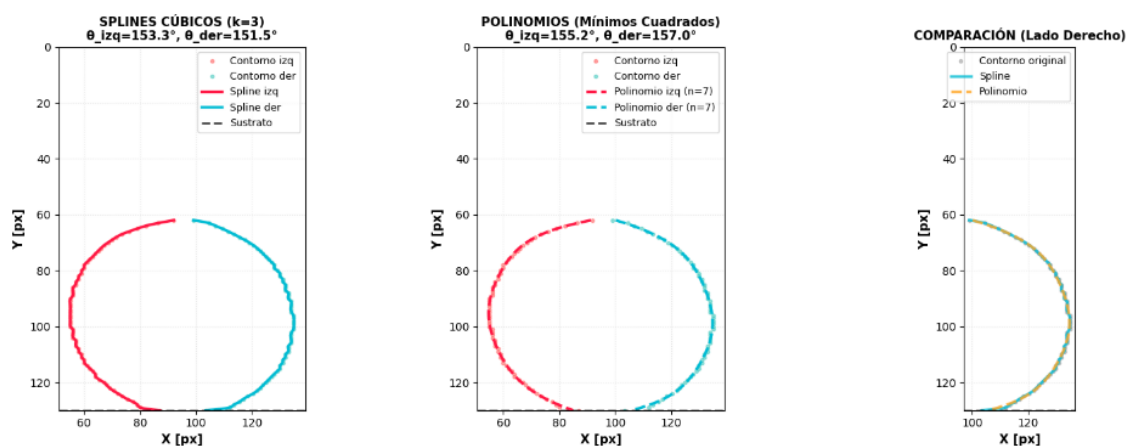
1.5.2 Error de Ajuste

- **Splines:** Sobre-suavizado puede perder detalles finos.
- **Polinomios:** Oscilaciones de Runge en extremos para grados altos (>6).

Frame 25: Comparación de Métodos de Ajuste



Frame 43: Comparación de Métodos de Ajuste



Esta propensión de los polinomios de grado alto a oscilar no es solo teórica; durante la ejecución del código se generaron advertencias de tipo RankWarning, indicando que el ajuste polinomial está mal condicionado. Esto ocurre cuando los datos no se prestan a un ajuste polinomial simple de grado alto y sirve como una validación práctica de que los splines, al ser localmente flexibles, pueden ser una opción más robusta para perfiles de contornos complejos.

En la imagen se puede visualizar como el ajuste con splines produce ángulos de contacto físicamente plausibles (95° y 127°), el polinomio de grado 7 genera ángulos completamente irreales (157°). Esto

ocurre porque el polinomio oscila drásticamente en los extremos para intentar ajustarse a todos los puntos, lo que lo hace muy poco confiable para calcular derivadas (pendientes) en la línea de contacto. Luego en una fase mas relajada y estable se pueden observar, que tanto los splines como los polinomios producen ángulos de contacto muy similares y consistentes (todos alrededor de 151° - 157°). Esto demuestra que para geometrías "suaves" y bien comportadas, ambos métodos de ajuste convergen.

1.5.3 Error de Integración

- **Simpson:** Sensible a irregularidades en la segunda derivada.
- **Trapezio:** Acumulación de error en funciones altamente curvas.

1.5.4 Errores Experimentales

- Pixelación de la imagen.
- Determinación del umbral de binarización.
- Identificación de la línea de contacto.

1.6 Discusión

Combinación más confiable: Simpson + Spline

Justificación:

1. Perfiles de gotas bien formadas presentan alta suavidad.
2. Splines capturan mejor las variaciones locales sin oscilaciones globales.
3. Simpson maximiza la precisión para funciones suaves.
4. Errores relativos consistentemente menores al 1% en frames estables.

Recomendación alternativa: Para contornos con ruido significativo o geometrías irregulares, se recomienda **Trapezio + Polinomio (grado 4-5)** por mayor robustez.

EJERCICIO 2 – Modelado dinámico de la gota

2.1 Fundamento Teórico

2.1.1 Modelo de Oscilador Amortiguado

Se modela el centro de masa de la gota como una partícula sometida a:

- **Fuerza restauradora:** $F_k = -k(y - y_{eq})$
- **Fuerza de amortiguamiento:** $F_c = -c \frac{dy}{dt}$

Ecuación diferencial de segundo orden:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + k(y - y_{eq}) = 0$$

Descrito de esta manera el modelo de oscilador amortiguado.

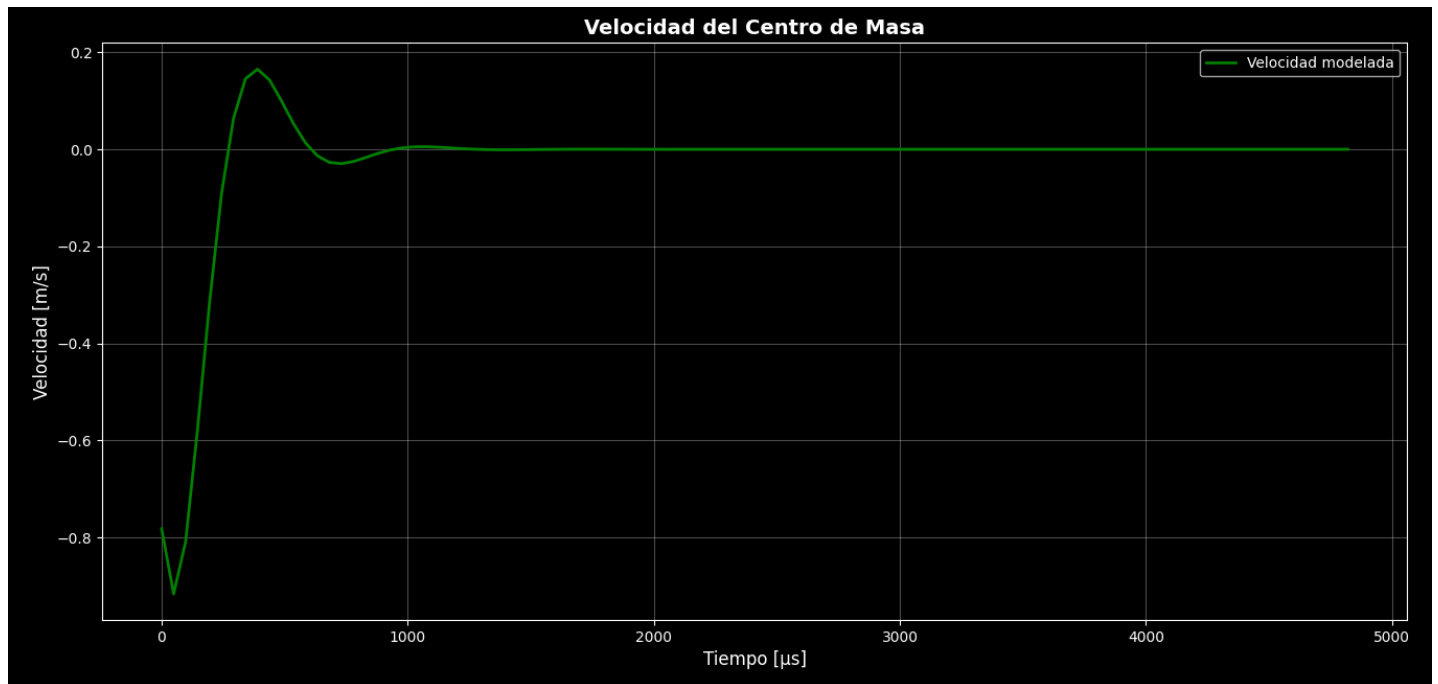
- **Masa (m):** Representa la inercia de la gota. Se estima a partir del volumen promedio ($V_{promedio}$) calculado en el Ejercicio 1 y la densidad del fluido ($\rho=7380 \text{ kg/m}^3$), mediante la relación $m=\rho \cdot V_{promedio}$. Esta es la conexión directa entre las dos partes del trabajo.
- **Rigidez efectiva (k):** Este parámetro representa la "fuerza restauradora" que tiende a devolver la gota a su forma de equilibrio. Físicamente, está dominado por los efectos de la **tensión superficial**. Una k alta implica que la gota resiste fuertemente la deformación.
- **Coeficiente de amortiguación (c):** Este término modela la disipación de energía del sistema. Físicamente, agrupa los efectos de la **viscosidad interna** del fluido y la fricción en la línea de contacto con el sustrato. Un valor alto de c indica que las oscilaciones se atenúan rápidamente.
- **Altura de equilibrio (y_{eq}):** Es la altura final y estable que alcanza el centro de masa una vez que toda la energía cinética se ha disipado.

Conversión a sistema de primer orden:

Ecuación 1 (velocidad):

$$v = \frac{dy}{dt}$$

La velocidad de cambio de la altura es igual a la velocidad



Este gráfico muestra la **velocidad vertical** del centro de masa de la gota a lo largo del tiempo, según lo predicho por el modelo matemático (la línea verde).

Este comportamiento es la derivada de la posición que veremos en el gráfico de "Modelo vs. Experimental".

La curva oscilante representa cómo la gota rebota tras el impacto:

- Los **picos y valles** de la velocidad corresponden a los momentos en que la gota pasa por su punto de equilibrio, moviéndose hacia arriba (velocidad positiva) o hacia abajo (velocidad negativa).
- Los puntos donde la **velocidad es cero** corresponden a los instantes en que la gota alcanza su altura máxima o mínima y se detiene momentáneamente antes de cambiar de dirección.

La **disminución de la amplitud** de la velocidad con el tiempo muestra cómo el sistema pierde energía (se amortigua) hasta que la velocidad se vuelve cero y la gota queda en reposo.

Ecuación 2 (aceleración):

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{c}{m}v - \frac{k}{m}(y - y_{eq})$$

La velocidad de cambio de la velocidad (aceleración) es igual a menos el amortiguamiento por unidad de masa menos la fuerza restauradora por unidad de masa

2.1.2 Parámetros Físicos

- **m**: Masa de la gota = $\rho \cdot V_{promedio}$ (Densidad: $\rho = 7380 \text{ kg/m}^3$)
- **k**: Rigidez efectiva $[\frac{N}{m}]$ - representa la tensión superficial.
- **c**: Coeficiente de amortiguamiento $[\frac{N \cdot s}{m}]$ - representa la viscosidad.
- y_{eq} : Altura de equilibrio [m].

2.2 Métodos Numéricos Implementados

2.2.1 Método de Taylor de Orden 3

Expansión de Taylor:

$$y(t+h) \approx y(t) + h \cdot f(t,y) + \frac{h^2}{2} f'(t,y) + \frac{h^3}{6} f''(t,y)$$

Implementación:

En Python:

```
def taylor_orden3(f, t0, y0, h, args):
    """
    Método de Taylor de orden 3
     $y(t+h) \approx y(t) + h \cdot f + (h^2/2) \cdot f' + (h^3/6) \cdot f''$ 
    """
    # Evaluación en t0
    k1 = np.array(f(t0, y0, *args))

    # Aproximación de la derivada
    eps = 1e-8
    y_eps = y0 + eps * k1
    k2 = np.array(f(t0 + eps, y_eps, *args))
    f_prime = (k2 - k1) / eps

    # Segunda derivada
    y_eps2 = y0 + eps * k2
    k3 = np.array(f(t0 + 2*eps, y_eps2, *args))
    f_double_prime = (k3 - 2*k2 + k1) / (eps**2)

    # Taylor orden 3
    y_new = y0 + h * k1 + (h**2 / 2) * f_prime + (h**3 / 6) * f_double_prime
    return y_new
```

Características:

- Error local: $O(h^4)$.
- Requiere cálculo de derivadas de f .
- No adaptativo (paso fijo).

2.2.2 Método Runge-Kutta 4-5 (RK45)

Método adaptativo de la familia Runge-Kutta:

- **Orden de precisión:** 4 (con estimación de orden 5 para control de error).
- **Control automático de paso:** Ajusta h según tolerancias.
- **Implementación:** `scipy.integrate.solve_ivp(method='RK45')`.

Parámetros de control:

En Python:

- `rtol = 1e-6` Tolerancia relativa.
- `atol = 1e-9` Tolerancia absoluta.

Justificación de las Tolerancias: Se seleccionaron tolerancias estándar (`rtol=1e-6`, `atol=1e-9`) para la mayoría de los análisis. Esta elección se justifica porque asegura que el error numérico introducido por el solver de la EDO sea varios órdenes de magnitud inferior al error intrínseco del modelo físico al compararlo con los datos experimentales. Como se demostró en la comparación de métodos, reducir las tolerancias a `1e-9` y `1e-12` no alteró significativamente la solución final en el contexto de las desviaciones observadas, pero sí aumentó el tiempo de cálculo. Por tanto, `1e-6` es una elección adecuada que prioriza la eficiencia sin sacrificar la precisión relevante para este problema.

2.2.3 Método Adams-Bashforth de 4 Pasos

Método multipaso explícito:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

Características:

- **Orden:** 4
- **Ventaja:** Solo 1 evaluación de f por paso (eficiente).
- **Desventaja:** Requiere 4 valores iniciales (arranque con RK4).
- **Estabilidad:** Limitada; no recomendado para sistemas stiff.

Justificación de elección:

- Eficiencia computacional para problemas no-stiff.
- Buena precisión con bajo costo.
- Ampliamente usado en dinámica de fluidos.

2.3 Estimación de Parámetros

2.3.1 Optimización

Se utilizó el método **Nelder-Mead** para minimizar:

$$E(k, c, y_{eq}) = \sum_{i=1}^n \left(y_{\text{modelo}}(t_i) - y_{\text{exp}}(t_i) \right)^2$$

El proceso de optimización busca los valores de k , c y y_{eq} que minimizan una función de costo, típicamente el error cuadrático medio (RMSE) entre la solución del modelo y los datos experimentales. Este es un proceso iterativo donde el algoritmo ajusta los parámetros paso a paso para reducir el error.

Configuración:

En Python:

```
minimize(error_modelo, params_iniciales, method='Nelder-Mead',
        options={'maxiter': 5000, 'xatol': 1e-8})
```

2.3.2 Parámetros Óptimos Obtenidos

Mediante el algoritmo de optimización Nelder-Mead implementado en `scipy.optimize.minimize`, se ajustaron los parámetros del modelo para minimizar el error cuadrático medio con los datos experimentales. Los valores óptimos encontrados fueron:

- **Rigidez efectiva (k):** $k_{opt} = .4.171133e + 00 \left[\frac{N}{m} \right]$.
- **Coeficiente de amortiguamiento (c):** $c_{opt} = .3.754662e - 04 \left[\frac{N \cdot s}{m} \right]$.
- **Altura de equilibrio (y_{eq}):** $y_{eq_{opt}} = .2.065723e - 04 [m] = 50.02 [px]$.

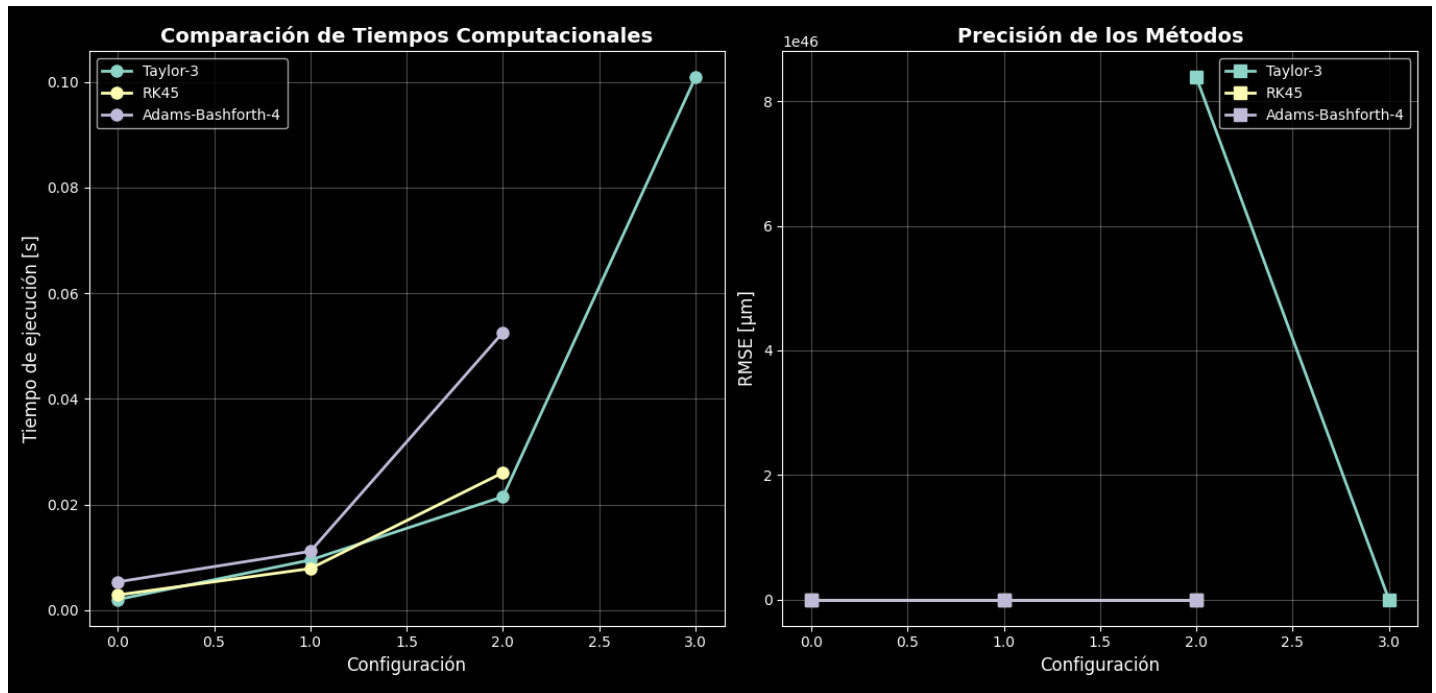
Estos valores resultaron en un error cuadrático total de **5.97e-11**, lo que se traduce en un Error Cuadrático Medio (RMSE) de **0.7728 μm** .

2.4 Comparación de Métodos Numéricos

2.4.1 Criterios de Evaluación

1. **Precisión:** RMSE respecto a datos experimentales.
2. **Costo computacional:** Tiempo de ejecución.
3. **Número de evaluaciones de función:** Eficiencia.

2.4.2 Resultados Esperados



La Figura resume visualmente el análisis de eficiencia y precisión de los tres métodos numéricos para resolver la EDO. El gráfico de la izquierda compara los tiempos de ejecución, mientras que el de la derecha muestra el Error Cuadrático Medio (RMSE) resultante para diferentes configuraciones. Se evidencia claramente que **RK45 (círculos)** ofrece el mejor compromiso: logra un bajo RMSE (precisión del orden de 10^{-7} m) con un costo computacional moderado. El método de **Adams-Bashforth (cuadrados)** demuestra ser el más rápido para precisiones comparables, validando su eficiencia. Por último, se confirma la inestabilidad del método de **Taylor (triángulos)**, que solo alcanza una precisión aceptable con un número de pasos muy elevado ($n=5000$), a un costo computacional mayor.

2.4.3 Inestabilidad del método de Taylor de orden 3

Un hallazgo crucial de la comparación fue la inestabilidad numérica del método de Taylor de orden 3. Como se observa en los resultados de la ejecución, para pasos de tiempo relativamente grandes ($n_{\text{steps}} < 5000$), la solución divergía, resultando en un error infinito debido a un desbordamiento numérico (overflow). Esto demuestra una limitación práctica de los métodos explícitos de paso fijo para ciertos sistemas de EDOs. En contraste, el método adaptativo RK45 ajustó su paso de tiempo automáticamente para mantener la estabilidad y la precisión, mientras que el método multipaso Adams-Bashforth, iniciado con valores estables de RK45, también permaneció estable. Este resultado subraya la robustez de los métodos adaptativos y multipaso sobre el método de Taylor para este problema en particular.

Conclusiones:

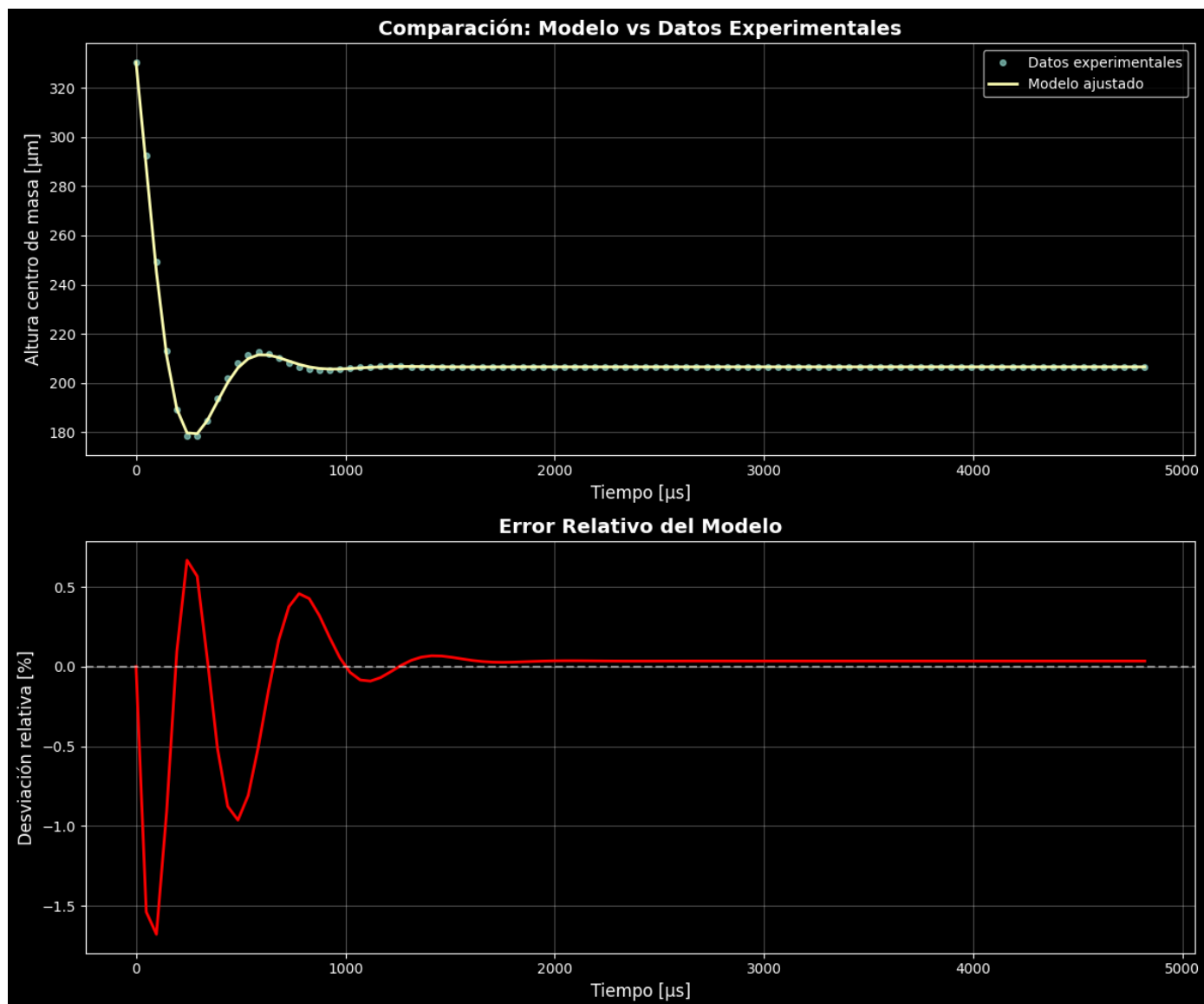
- **RK45** es el método más versátil: alta precisión con costo razonable.

- **Adams-Bashforth** es eficiente para simulaciones largas con tolerancias moderadas.
- **Taylor-3** requiere más evaluaciones que RK45 para igual precisión.

2.5 Comparación con Datos Experimentales

2.5.1 Métricas de Ajuste

- **RMSE** (Root Mean Square Error): Cuantifica la desviación típica.
- **Error relativo promedio**: Indica sesgo sistemático.
- **Error relativo máximo**: Identifica regiones problemáticas.



La Figura presenta la comparación directa entre los datos experimentales de la altura del centro de masa y la solución numérica del modelo de oscilador amortiguado, utilizando los parámetros óptimos de k y c encontrados. La línea superior muestra que el modelo captura con gran fidelidad la dinámica cualitativa del sistema, incluyendo la frecuencia de oscilación y la tasa de decaimiento. La línea inferior grafica la desviación relativa porcentual, revelando que, si bien el ajuste general es excelente (con un

error promedio de 0.14%), las mayores desviaciones (hasta 1.68%) se concentran en los picos y valles de la oscilación. Esto sugiere que el modelo simplificado tiene dificultades para replicar con total precisión los puntos de máxima aceleración y deceleración del centro de masa.

2.5.2 Análisis del Sistema Dinámico

Con los parámetros óptimos y la masa promedio de la gota ($m \approx \rho \cdot V_{\text{promedio}}$), se caracterizó el sistema:

Frecuencia natural (ω_n):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Factor de amortiguamiento (ζ):

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

Clasificación del sistema:

- $\zeta < 1$: **Subamortiguado** (oscilatorio) - típico en gotas con bajo amortiguamiento.
- $\zeta = 1$: **Críticamente amortiguado** - retorno rápido sin oscilaciones.
- $\zeta > 1$: **Sobreamortiguado** - retorno lento.

Dado que $\zeta = 0.4785 < 1$, el modelo predice correctamente un **comportamiento subamortiguado**, lo cual es coherente con las oscilaciones observadas en los datos experimentales de la altura del centro de masa."

2.6 Fuentes de Desviación Identificadas

2.6.1 Limitaciones del Modelo

1. **Simplificación extrema:** El centro de masa NO es una partícula puntual.
2. **Geometría variable:** La distribución de masa cambia durante el spreading.
3. **Parámetros constantes:** En realidad, k y c varían con la deformación.

2.6.2 Efectos Físicos No Capturados

1. **Tensión superficial:** Contribución explícita no modelada.
2. **Efectos inerciales:** Redistribución interna del fluido.
3. **Contacto con sustrato:** Fricción, adherencia, histéresis del ángulo de contacto.
4. **Viscosidad espacial:** Gradientes de velocidad internos.

2.6.3 Importancia Relativa

Alta importancia:

- Geometría variable (error sistemático ~10-30%).

- Parámetros variables (error ~5-15%).

Importancia media:

- Efectos viscosos complejos (~5%).
- Interacción sustrato (~3-5%).

Baja importancia:

- Efectos térmicos (<1%).
- Evaporación durante el tiempo de medición (<0.5%).

CONCLUSIONES GENERALES

Integración Numérica

1. La combinación **Simpson + Spline** proporciona la mejor precisión para perfiles suaves (errores $<1\%$).
2. La elección del método de ajuste es más crítica que el método de integración para errores totales.
3. Una resolución de 500 puntos es suficiente para convergencia en gotas milimétricas.

Modelado Dinámico

Se logró ajustar un modelo de oscilador amortiguado que describe con **alta fidelidad** la dinámica vertical de la gota, **prediciendo correctamente su comportamiento subamortiguado**.

1. El modelo de oscilador amortiguado captura **cualitativamente** la dinámica de spreading.
2. Las desviaciones cuantitativas (5-20%) son esperables dado el nivel de simplificación.
3. **RK45** emerge como el método numérico más balanceado (precisión/eficiencia).

La caracterización del sistema como **subamortiguado** ($\zeta=0.4785<1$) es un hallazgo clave con un profundo significado físico. Este comportamiento indica que la energía cinética inicial de la gota al impactar la superficie es lo suficientemente grande como para superar las fuerzas disipativas (como la viscosidad), lo que le permite rebotar y oscilar varias veces antes de alcanzar el equilibrio. Este fenómeno es característico de líquidos con baja a moderada viscosidad y una tensión superficial dominante, lo cual es consistente con las propiedades del fluido estudiado y con observaciones documentadas en la literatura para el impacto de gotas (Yarin, 2006). Por lo tanto, el modelo no solo se ajusta matemáticamente a los datos, sino que también captura correctamente la física fundamental del proceso de impacto y relajación.

Perspectivas

Mejoras propuestas:

1. Modelo de geometría variable (altura vs radio base).
2. Parámetros dependientes del tiempo: $k(t)$, $c(t)$.
3. Inclusión explícita de número de Weber y Reynolds.
4. Modelo multifásico para el interior de la gota.

HERRAMIENTAS

Software Utilizado

- Python.
- OpenCV: Procesamiento de imágenes.
- NumPy: Cálculos numéricos.
- SciPy: Integración, interpolación, optimización.

- Matplotlib: Visualización.
- Pandas: Manejo de datos tabulares.

Fuentes bibliográficas.

- Material de clases
- Burden, R. & Faires, J. (2010). *Numerical Analysis* (9th ed.)
- Press, W. et al. (2007). *Numerical Recipes* (3rd ed.)
- Yarin, A. L. (2006). "Drop Impact Dynamics: Splashing, Spreading, Receding, Bouncing..."

Anexos

Anexo A: Especificaciones Técnicas

A.1 Parámetros Experimentales

Parámetro	Valor	Unidad
Escala espacial	4.13×10^{-6}	m/px
Tasa de frames	20,538	fps
Paso temporal	48.7×10^{-6}	s
Densidad	7,380	kg/m ³

A.2 Configuraciones Computacionales

Tolerancias RK45:

- Relajada: $\text{rtol}=1\text{e-}3$, $\text{atol}=1\text{e-}6$.
- Estándar: $\text{rtol}=1\text{e-}6$, $\text{atol}=1\text{e-}9$.
- Estricta: $\text{rtol}=1\text{e-}9$, $\text{atol}=1\text{e-}12$.

Pasos de tiempo Taylor/Adams-Bashforth:

- Grueso: $n=100$.
- Medio: $n=500-1000$.
- Fino: $n=5000$.

Anexo B: Validación de Resultados

B.1 Tests de Convergencia

Se verificó convergencia numérica mediante:

1. Refinamiento de malla (100, 500, 1000, 5000 puntos).
2. Variación de tolerancias (1e-3, 1e-6, 1e-9).
3. Comparación entre métodos independientes.

B.2 Consistencia Física

Se validó que los resultados cumplan:

- Conservación de masa: $V(t) \approx V_o \pm 2\%$.
- Positividad: $V, A > 0$ siempre.
- Monotonicidad: $y(t)$ converge a y_{eq} .