Temas Tratados en el Trabajo Práctico 5

- Comportamiento y operaciones bajo incertidumbre.
- Teorema de Bayes.
- Representación de la información incierta en Redes Bayesianas.
- Inferencia por enumeración.
- Redes de Markov y matrices de transición.
- Tiempo esperado y probabilidad de absorción.

Ejercicios Teóricos

1. ¿Cuáles son los tres axiomas de Kolmogorov?

Sea un espacio de muestra E, y A un suceso de dicho espacio muestral, entonces la probabilidad de A P(A) cumple los siguientes axiomas:

- 1 La probabilidad de cualquier suceso es mayor a cero P(A) $\geq$ 0
- 2 La probabilidad del espacio de muestra es *siempre* 1 P(E)=1.
- 3 Si tenemos un conjunto de suceso incopatibles entre si (su interseccion es el vacio), entonces la probabilidad de la union es igual a la suma de las probabilidades de cada suceso por separado. P(AUB)= P(A) + P(B).

2. Una fábrica de clavos dispone de 2 máquinas que elaboran el 30% y 70% de los clavos que producen respectivamente. El porcentaje de clavos defectuosos de cada máquina es del 2% y 3%, respectivamente. Si se selecciona al azar un clavo de la producción y este fue defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina?

Maquina A : P(A)=0.30 Defectos de A P(D/A)=0.02; (probabilidad de clavos defectuosos hechos por A)
Maquina B: P(B)=0.70 Defectos de B P(D/B)=0.03; (probabilidad de clavos defectuosos hechos por B)

Vamos a calcular cual es la probabilidad de que un clavo defectuoso provenga de la maquina B, es decir P(B/D)

- Para ello usamos el teorema de Bayes:

$$P(B/D) = \frac{P(D/B) * P(B)}{P(D)}$$

- Nos falta P(D) que se calcula como

P(D)= P(A)*P(D/A) +P(B)*PD/(B)= 0.30*0.02 + 0.70*0.03
P(D)=0.027

- Volviendo al teorema de Bayes:

$P(B/D) = \frac{0.03*0.7}{0.027}$
P(B/D)= 0.7778

La probabilidad de que un clavo defectuoso provega de la maquina B es del 77.78%
Por complemento, la probabilidad de que un clavo defectuoso provenga de la maquina A es del 22.22%

3. La probabilidad de que un motor que sale de una fábrica con una *avería eléctrica* es de 10^{-3}, y la probabilidad de que salga con una *avería mecánica* es de 10^{-5}. Si existe un tipo de avería no se producen averías del otro tipo.

   Si el motor presenta *temperatura elevada* se enciende un *piloto luminoso* el 95% de las veces, cuando la *temperatura es reducida* el *piloto luminoso* se enciende el 99% de las veces, y a veces cuando la *temperatura se encuentra en un rango normal* el *piloto luminoso* se enciende erróneamente en un caso por millón.

   Cuando *no hay averías*, la *temperatura se eleva* en el 17% de los casos y es *reducida* el 5% de las veces. Si hay una *avería eléctrica*, la *temperatura se eleva* en el 90% de los casos y es *reducida* en el 1% de los casos. Finalmente cuando la *avería es mecánica*, la *temperatura está elevada* el 10% de los casos y *reducida* el 40% de las veces.

   Construya una Red Bayesiana y utilice inferencia por enumeración para calcular:

   ```
    3.1 La probabilidad de que el motor tenga una avería mecánica si
   se enciende el piloto.

    3.2 La probabilidad de que el motor tenga una avería mecánica si
   se enciende el piloto y la temperatura es elevada.
   ```

Las variables que vamos a definir son:

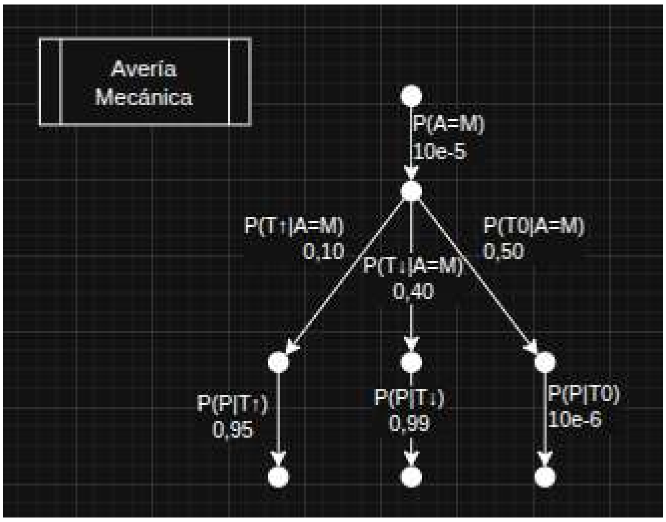
Temperatura(T) = {T↑; T↓; To}

Avería(A) = {M; E; N}

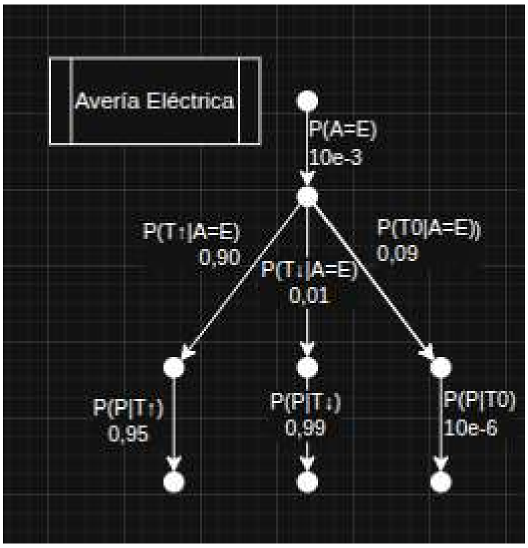
Piloto(P) = {On; Off}

Además, vamos a definir los árboles de enumeración parciales partiendo de cada posible estado de avería

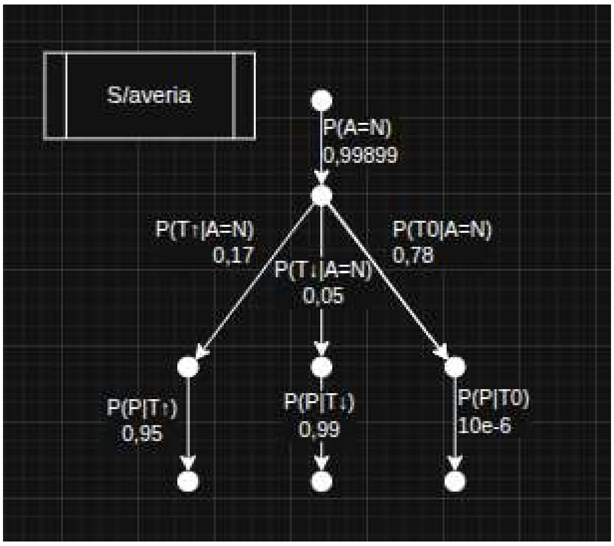
raíz: Avería = M



raíz: Avería = E



raíz: Avería = N



3.1 Nos piden calcular P(A=M|P=On)

Para ello partimos de: $P(A = M|P = On) = \frac{P(A=M, P=On)}{P(P=On)}$

P(A=M|P=On) la calculamos del árbol de enumeración parcial con raíz Avería = M

P(A=M|P=On) = 10e-5 * (0,10 * 0,95 + 0,40 * 0,99 + 0,50 * 10e-6) = 4,910005 e-6

para P(P=On), usamos exactamente lo que hicimos arriba e incorporamos las probabilidades de los otros dos árboles parciales

P(P=On) = P(A=M,P=On) + P(A=E,P=On) + P(A=N,P=On) = 0.21166

finalmente:

$$P(A = M|P = On) = 0.00002319788$$

3.2 Ahora debemos calcular P(A=M|P=On,T↑)

Como

$$P(A = M|P = On, T\uparrow) = \frac{P(A = M)P(T\uparrow|A = M)P(P = On|T\uparrow)}{P(P = On|T\uparrow)\sum_{a\in A} P(a)P(T\uparrow|a)}$$

queda

$$P(A = M|P = On, T\uparrow) = P(A = M|T\uparrow) = \frac{P(A = M, T\uparrow)}{P(T\uparrow)}$$

$$P(T\uparrow) = P(A = N) * P(T\uparrow|A = N) + P(A = M) * P(T\uparrow|A = M) + P(A = E) *$$

$$P(A = M, T\uparrow) = P(A = M) * P(T\uparrow|A = M) = 10^{-5} * 0,10 = 10^{-6}$$

Quedando finalmente:

$$P(A = M|P = On, T\uparrow) = 5,8510^{-6}$$

4. Cada día se procesa un producto en secuencia en dos máquinas, M1 y M2. Una inspección se realiza después de que una unidad del producto se completa en cualquiera de las máquinas.

   Hay un 5% de probabilidades de que una unidad sea desechada antes de inspeccionarla. Después de la inspección, hay un 3% de probabilidades de que la unidad sea desechada y un 7% de probabilidades de ser devuelta a la misma máquina para trabajarla de nuevo. Si una unidad pasa la inspección en ambas máquinas es buena.

   ```
   4.1 Dibuje la cadena de Markov que representa este problema y
   describa para cada estado si es transitorio, recurrente, o
   absorbente.
   ```

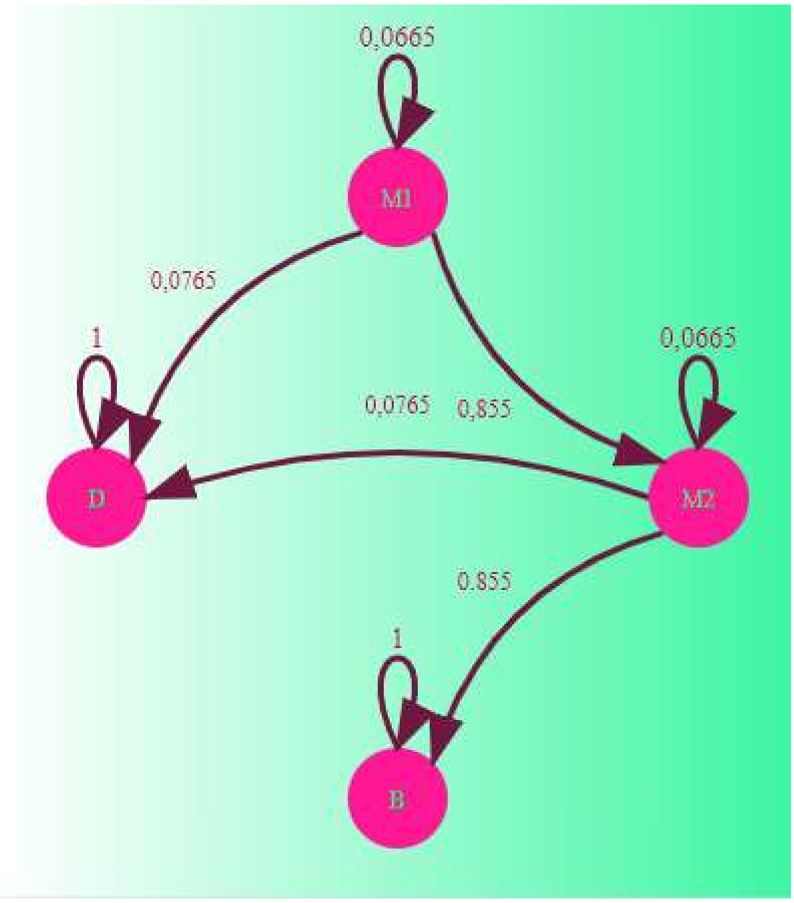
   ```
   4.2 Arme la matriz de transición
   ```

   ```
   4.3 Calcule la probabilidad de que una pieza que inicia el proceso
   en la máquina M1 sea desechada.
   ```

4.4 Calcule la probabilidad de que una pieza de la máquina M2 sea terminada.

4.5 Si los tiempos de procesamiento en las máquinas M1 y M2 son respectivamente de 20 y 30 minutos y los tiempos de inspección son respectivamente de 5 y 7 minutos, ¿cuánto tiempo tarda en ser procesada una pieza que inicia en la máquina M1?

4.1 La Cadena de Markov que representa al problema tratado se muestra a continuación:



En esta cadena se tienen los estados M1 (Máquina 1, transitorio), M2 (Máquina 2, transitorio), D (Descarte, absorbente y recurrente) y B (Bueno, absorbente y recurrente).

4.2 La Matriz de Transición asociada a este problema es:

////	M1	M2	B	D
M1	0,0665	0,855	0	0,0785
M2	0	0,0665	0,855	0,0785
B	0	0	1	0
D	0	0	0	1

4.3 La probabilidad de que el producto sea descartado luego de haber salido de la máquina se calcula como sigue:

1. La pieza tiene un 0.05 de probabilidad de ser descartada luego de haber salido de la máquina y sin ser inspeccionada.

2. La probabilidad de que la pieza sea inspeccionada es entonces 1-0.05=0.95
3. De las piezas que llegan a inspección, el 0.03 es descartado luego de ser inspeccionado, por lo tanto probabilidad de descarte luego de inspección es 0.95*0.03=0.0285.
4. La probabilidad de que una pieza sea descartada luego de salir de M1 es finalmente 0.05 (prob. de descarte sin inspección) + 0.0285 = 0.0785

4.4 La probabilidad de que una pieza de la maquina M2 sea terminada se calcula como: La probabilidad de que una pieza sea aprobada se calcula como: P(ap)=0,95x0,90=0,855. La probabilidad de que la pieza vuelva a la maquina es P(vu)=0,95x0,07=0,0665. La probabilidad de ser aprobada se calcula como una serie de intentos: aprobar a la primera: 0,855 aprobar a la segunda: 0,855 x 0,0665 aprobar a la tercera: 0,855 x (0,0665)^2 esto forma una serie geometrica que converge a P(ap M2)=0,855/(1-0,0665). Asi la prob de que una pieza sea aprobada en M2 es 91,6%.

4.5 en M1, el procesado tarda 20 min. Solo si hay inspeccion (prob 0,95), se adicionan 5 min. Asi, tiempo medio de visita M1 es 20+0,95x5=24,75 min. en M2 seria 30+0,95x7=36,65 min. Para calcular el tiempo esperado si la pieza esta en M2, tenemos que considerar el caso que la pieza fuera devuelta, en cuyo caso volvemos a empezar en M2 y hay otra espera igual. T2= 30 + 0,95 x (7 + 0,07x T2) de donde al despejar T2 resulta T2=39,26 min. Asi, si arrancamos en M2,en promedio el tiempo que se toma es de 39,26 min. Para calcular el tiempo si arrancamos en M1, con prob 0,07 la pieza es devuelta, asique sumamos T1 con prob 0,03 o 0,05 la pieza es desechada y termina el proceso con prob 0,9 pasamos a M2, sumamos T2 asi, T1= 20 + 0,95 x (5+0,07 x T1 + 0,9 x T2) Despejando y sustituyendo T2, obtenemos el tiempo de espera si la pieza inicia en M1, el cual seria 62,47 min. Asi, tiempo medio en M1: 24,75min; M2: 36,65min. tiempo esperado si inicia en M2: 39,26 min. tiempo esperado si inicia en M1: 62,47min.

Bibliografía

Russell, S. & Norvig, P. (2004) *Inteligencia Artificial: Un Enfoque Moderno*. Pearson Educación S.A. (2a Ed.) Madrid, España

Poole, D. & Mackworth, A. (2023) *Artificial Intelligence: Foundations of Computational Agents*. Cambridge University Press (3a Ed.) Vancouver, Canada