Instituto Superior Técnico

Matemática Computacional

2023/2024

Relatório:
Projeto I

Francisco Augusto 99218 - francisco.augusto@tecnico.ulisboa.pt
Mariana Andrade 106814 -mariana.mendonca.andrade@tecnico.ulisboa.pt
Beatriz Dinis 103941- beatrizdinis@tecnico.ulisboa.pt
Gonçalo Moniz 99469 - goncalomoniz@tecnico.ulisboa.pt

Professora Margarida Baía

17/12/23

Conteúdo

1 Introdução

Este projeto, realizado no âmbito da cadeira de Matemática Computacional, visa um aprofundamento de conhecimentos sobre conceitos e fórmulas fundamentais de análise numérica, assim como nos apresenta a oportunidade de utilizar o software $Matlab$, uma ferramenta essencial nas áreas de engenharia. Será através de métodos de aproximação de raízes, neste caso o método da secante, que teremos a possibilidade de adaptar e resolver um problema da Mecânica, e assim passar para a sua análise a nível numérico.

1.1 Objetivos

A utilização do método da secante para a resolução de uma equação não linear é o foco principal deste projeto. Na figura 1 , está exemplificado um arco de circunfrência correspondente a um corte transversal de uma estrutura metálica, que poderá ser uma peça de revestimento de uma coluna cilindrica. Considerando que o ponto C representa o centróide do arco de circunfrência e a sua coordenada, $\bar{x}$, é dada pela equação

$$\bar{x} = \frac{rsen(\alpha)}{\alpha} \tag{1}$$

em que α > 0 é o ângulo de abertura e r >0 é o raio do arco. Temos assim como objetivo determinar α sabendo que

$$\bar{x} = Kr \tag{2}$$

em que K>0.

Este problema será resolvido tanto a nível teórico como através de gráficos e funções no $Matlab$.

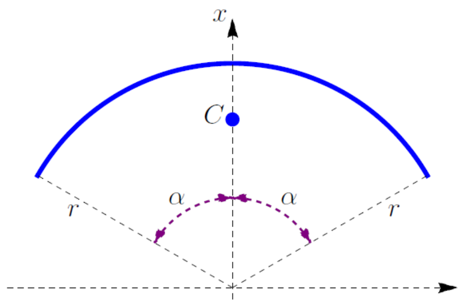

Figura 1: Centróide de um arco de circunfrência

2 Fundamentos teóricos

2.1 Método da Secante

Neste projeto, foi utilizado o método da secante, que consiste num método iterativo para equações não lineares. Isto é: dado uma função linear f definida num intervalo $[a, b]$, pretende-se determinar o valor de z que corresponde à raíz da função (ou seja $f(z) = 0$). Na maioria dos casos, o valor de z é uma dízima infínita (periódica ou não periódica), pelo qual, é necessário recorrer a métodos que tenham como objetivo atingir um valor aproximado de z.

2.1.1 Critério de Convergência

Um desses métodos é denominado como método de Newton (que não será explicado por razões de praticalidade) que envolve o cálculo da função derivada de $f(x)$ em cada iteração. Visto que esta exigência facilmente se torna um inconveniente, surgiu método da secante. Sabendo que z está contido no intervalo $[a, b]$, escolhem-se dois valores x_0 e x_1). Tal como no método de Newton, é necessário garantir que o método converge, de facto, e para tal existem dois critérios a ser verificados:

Critério 1: Seja $f(x) \in C^2$ ([a,b]) e $x_0 \in ([a, b])$:

1. $f(a)f(b) < 0$
2. $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$
3. $f''(x) \geq 0, \forall x \in [a, b] \vee f''(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$
4. $|\frac{f(a)}{f'(a)}| < b - a \wedge |\frac{f(b)}{f'(ab)}| < b - a$

Se todas as condições acima forem válidas, então o método da secante converge para a raiz de $f(x) = 0$, $\forall x_0 \in [a, b]$.

Critério 2: Se as condições do **critério 1** se verificarem e x_0, x_1 são escolhidos de modo que

$f(x_0)f''(x) \geq 0$
$f(x_1)f''(x) \geq 0$

então o método da secante converge para a única raiz de $f(x) = 0$.

2.1.2 Cálculo de Iterações

Com a verificação feita com sucesso, procede-se ao cálculo das iterações através da seguinte expressão

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \tag{3}$$

2.1.3 Cálculo do Erro

O cálculo do erro, isto é a discrepância entre o valor exato z e o valor aproximado x_{n+1} neste método é obtido através da seguinte fórmula:

$$|z - x_{n+1}| \leq K|z - x_{n-1}||z - x_n| \tag{4}$$

onde

$$K = \frac{max_{x\in[a.b]}|f''(x)|}{2min_{x\in[a.b]}|f'(x)|} \tag{5}$$

2.1.4 Ordem de Convergência

A ordem de convergência, que consite na quantificação do quão rapidamente um método numérico converge para a solução desejada, está relacionada com a expressão 6

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z - x_{n+1}|}{|z - x_n|^p} = \left(\frac{|f''(z)|}{2|f'(z)|}\right)^{\frac{1}{p}} = K_\infty \tag{6}$$

No caso do método da secante verifica-se, sob certas condições sobre a função em causa, e com x_n uma sucessão de iteradas pelo método, existe um número real p (ordem de convergência), com 1 < p < 2, e K_∞, o coeficiente assintótico de convergência.

3 Adaptação a Matlab

3.1 Implementação do método da secante para resolução da equação 1

A adaptação do método da secante para uma função em $Matlab$ encontra-se representada na figura 3. Foi utilizado o formato $long$ para que os resultados apresentem 10^{16} casas decimais e, assim, uma aproximação mais exata. Correspondendo ao valor de $f(x_k)$ temos a função $func$ com três argumentos, K, r, e x_n. A função $centroide$, que é descrita na figura 2 , corresponde à igualdade entre as equações 1 e 2.

```
%Funcao centroide. Funcao a ser analisada
function value = centroide(k, r, x)
    format long
    value = sin(x) - k*r*x;
end
```

Figura 2: Código da função centróide

Já $f(x_{k-1})$ é representado também por $func$, em vez de x_n utiliza $xant$, ou seja o valor da iterada anterior. Para este projeto, de forma a simplificar o código, considera-se um único valor para r ($r = 1$). Na figura 3, encontram-se $xant$ e xn que representam respetivamente x_{k-1} e x_k, e n=n+1, que permite passar à iterada seguinte. Nota-se que o valor de x, correspondente a α, se encontra no intervalo $[0, \pi]$, pois por análise da figura 1, estabeleceu-se que, para o que conjunto dos dois arcos de circunferência possam formar a base de um cilindro, faria apenas sentido que cada α, no seu valor máximo correspondesse π, ou seja o ângulo para metade de circunferência. Realça-se também a utilização de uma condição que garante que as iteradas iniciais se encontrem no intervalo $[a, b]$, seja este o intervalo que reúne todas as condições para existência de convergência do método.

```
function iteracoes = MetSec(func,a, b, x0, x1, K, max_iter, erro)
format long;

r = 1;

%verifica se x0 e x1 estão dentro do intervalo [a, b]
if (x0 < a || x0 > b) || (x1 < a || x1 > b)
    fprintf('Erro: x0 e x1 devem estar dentro do intervalo [a, b]\n');
    iteracoes = NaN;  % retorna NaN se x0 ou x1 não estão no intervalo
    return;
end

dif = abs(x1 - x0);
xn = x1;
xant = x0;

%inicialização do vetor de iterações
iteracoes = zeros(1, max_iter);

%armazena as iterações x0 e x1
iteracoes(1) = xant;
n=2;
iteracoes(2) = xn;

while (n <= max_iter && dif >= erro)
    xnext =  xn - func(K, r,xn)*(xn - xant)/(func(K, r, xn) - func(K, r, xant));
    xant = xn;
    xn = xnext;
    dif = abs(xn - xant);
    n = n + 1;

    iteracoes(n) = xn;
end

iteracoes = iteracoes(1:n);

if dif < erro
    fprintf('Convergência alcançada com erro %e\n', erro);
else
    fprintf('Número máximo de iterações atingido\n');
end
end
```

Figura 3: Função MetSec - responsável pelo cálculo das iterações

3.2 Valores de K que correspondem às soluções da equação (1)

De seguida, pretendeu-se determinar os valores do parâmetro K para os quais a equação (1) tem solução $\alpha \neq 0$.

Com o auxilio do $Matlab$ foi verificada a existência de soluções para $sin(x) = Kx$, obtendo-se os seguintes resultados:

K	x	y
0.002	3.1353	0.0063
0.004	3.1291	0.0125
0.006	3.1229	0.0187
0.008	3.1167	0.0249
.....	......	......
0.496	1.9047	0.9448
0.498	1.9001	0.9463
0.500	1.8955	0.9477
0.502	1.8909	0.9492
0.504	1.8862	0.9507
.....	......	......
0.994	0.1899	0.1888
0.996	0.1550	0.1544
0.998	0.1096	1.094
1	-	-

Ao analisar os dados, deduz-se que a partir de $K > 1$, a equação (1) deixa de ter soluções, diferentes de (0,0), uma conclusão que se torna mais evidente ao analisar a variação da reta Kx, à medida que K vai se aproximando de 1.

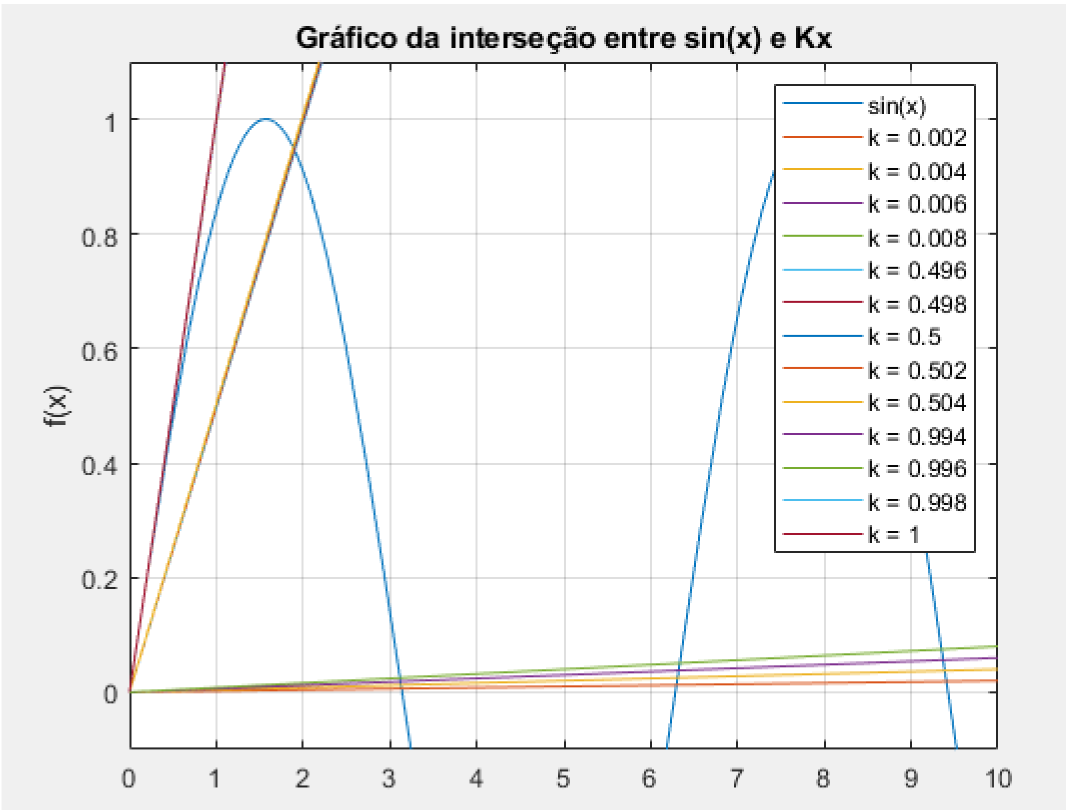

Figura 4: Gráfico da interseção entre sin(x) e Kx

Como se pode ver, para valores de K baixos, existem diversas soluções para a equação, algo que se torna evidente devido às diversas interseções que existem entre a reta e a função seno. Por outro lado para valores por volta dos 0.5, estes apresentam uma unica interseção para além do 0. Por fim, para valores de K próximos de 1 a reta Kx apresenta-se de forma quase tangente à função seno, o que nos permite concluir, em conjunto com os dados obtidos através do $Matlab$ que para $K > 1$ não deverão existir soluções para a equação.

3.3 Soluções para cada valor de K

Para se conseguir determinar qual o número de soluções para cada valor de K, será necessário conceber-se uma ideia de quantas interseções existem entre as duas funções Kx e $sin(x)$.

Primeiramente, é importante notar que, dado ambas as funções passarem pelo ponto (0,0), o mesmo vai ser sempre um ponto de interseção das duas, no entanto, não iremos considerar tal ponto como uma solução. Apesar disso, é de notar que para qualquer $K < 1$, haverá sempre uma solução no primeiro máximo da função seno, dado a função Kx intersetar sempre a área delimitada pela primeira crista da função $sen(x)$.

Quanto às restantes cristas, é possível deduzir que, para a função linear as intersetar, terá que pelo menos, intersetar o valor mais elevado que os mesmo atingem, ou seja 1. Um exemplo disso será o segundo pico que nos intereressa ou seja $x = \frac{5\pi}{2}$

$$K\frac{5\pi}{2} = 1 \longleftrightarrow K = \frac{2}{5\pi} = 0.12732395 \tag{7}$$

Podendo-se fazer a mesma verificar com outros pontos de interesse, nomeadamente, $x = \frac{7\pi}{2}$ e $x = \frac{9\pi}{2}$

$$K\frac{7\pi}{2} = 1 \longleftrightarrow K = \frac{2}{7\pi} = 0.09094568 \tag{8}$$

$$K\frac{9\pi}{2} = 1 \longleftrightarrow K = \frac{2}{9\pi} = 0.07035531 \tag{9}$$

Dessa forma, é tangível deduzir que para a função linear intersetar a crista n da função seno:

$$K = \frac{2}{(4n-3)\pi}, n \geq 1 \tag{10}$$

Quanto ao números de soluções, é de notar que quanto o K assume esse valor e atinge a crista n da função seno, a equação sin(x) -Kx = 0, passa a ter 2(n-1) soluções diferentes de (0,0), no entanto, se e só se:

$$\frac{2}{4(n-1)+1} < K < \frac{2}{4n+1} \tag{11}$$

Então, existiram 2n-1 soluções para a equação, podendo tal comprovar-se no gráfico seguinte.

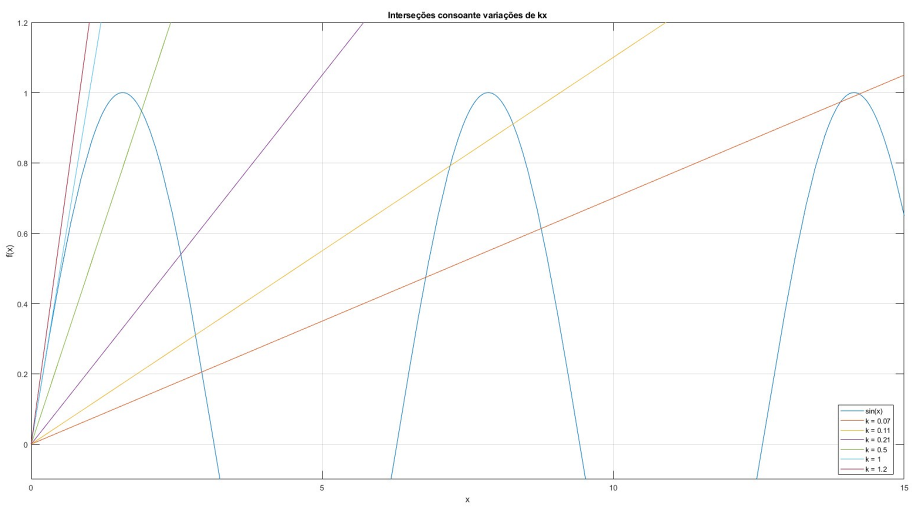

Figura 5: Soluções consoante o valor de K

3.4 Intervalo com solução não nula para K = $\frac{2}{\pi}$

Com o K definido como $\frac{2}{\pi}$, pretende-se determinar um intervalo de comprimento não superior a 1 no qual esteja contido a solução em que $f(x) = 0$, sendo $x \neq 0$

O método algébrico para comprovar a existência de zeros num determinado intervalo é o Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy:

Seja f uma função contínua num intervalo $[a, b] \subset$D$_f$, se $f(a)f(b) < 0$, então existe pelo menos um $z \in]a.b[$, tal que $f(z) = 0$.

A unicidade deste zero é comprovada através da monotonia da função f no intervalo $[a.b]$: se $f'(x) \geq 0$ ou $f'(x) \leq 0, x \in [a.b]$, então f é monótona no intervalo.

Com o apoio do $MatLab$, criou-se o gráfico de f limitado ao intervalo $[0, 6]$, para auxiliar a determinação do intervalo pretendido,

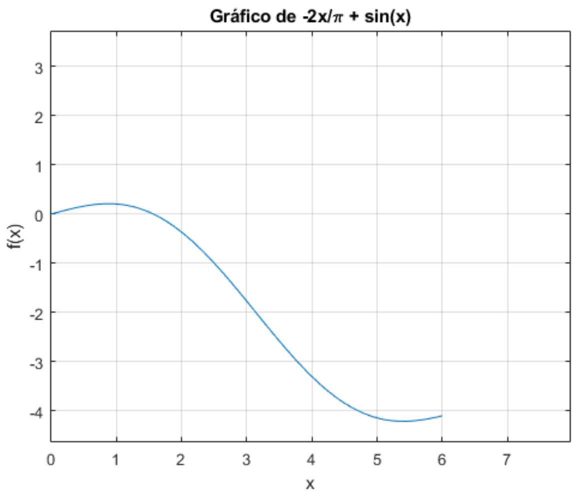

Figura 6: Gráfico de f para [0,6]

no qual se consegue perceber que a solução de $f(x) = 0$ com $x \neq 0$ se encontra dentro do intervalo $[1.2, 1.8]$, por exemplo.

Ora invocando a explicão teórica fornecida acima, é possível comprovar algebricamente a existência e unicidade do zero nesse mesmo intervalo. Primeiramente, deve-se garantir que f é monótona no intervalo $[1.2, 1.8]$.

Sendo

$$f(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x \tag{12}$$

então

$$f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi} \tag{13}$$

que, em $[1.2, 1.8]$ é negativo, comprovando-se que f é monótona nesse mesmo intervalo.

Em segundo, calcula-se o sinal de $f(1.2)f(1.8)$

$$f(1.2) = \sin(1.2) - \frac{2}{\pi}(1.2) > 0 \tag{14}$$

$$f(1.8) = \sin(1.8) - \frac{2}{\pi}(1.8) < 0 \tag{15}$$

logo

$$f(1.2)(1.8) < 0 \tag{16}$$

tendo-se comprovado que a solução para $f(x) = 0$ com $x \neq 0$ está contida no intervalo $[1.2, 1.8]$.

3.5 Valor aproximado da solução de 3.4 com erro < 10^{-6}

3.5.1 Cálculo da Raíz

Nesta alínea, tem-se como propósito obter o valor de x para o qual $f(x) = 0$, com $x \neq 0$, com erro inferior a 10^{-6}, tendo como iteradas iniciais ,$x_0 = 1.2$, $x_1 = 1.4$, mantendo o parãmetro $K = \frac{2}{\pi}$. Utilizando a função MetSec em $MatLab$, obtiveram-se 8 iterações (nas quais se incluem as iterações iniciais x_0 e x_1), chegando ao resultado $x_8 = 1.570796326794872$. Assim, implementou-se o método da secante para obter a raíz da função f, como ilustrado na figura 7.

```
%parâmetros do exercicio
    a = 0;
    b = pi;
    x0 = 1.2;
    x1 = 1.4;
    k=2/pi;
    max_iter = 100;
    erro = 1e-6;


solucao = MetSec(@centroide,a, b, x0, x1, k, max_iter, erro);
disp('Solução:');
disp(solucao);
```

Figura 7: Script para o calculo da aproximação da raíz da função

3.5.2 Arco de circunferência

A relação entre o ângulo, em radianos, α, e o arco de circunferência, s, é

$$\alpha = \frac{s}{R} \tag{17}$$

como ilustrado na figura 8.

No entanto, como o raio é uma unidade, $r = 1$, o arco de circunferência equivale ao valor do ângulo α, sendo, portanto, $s = 1.570796326794872$.

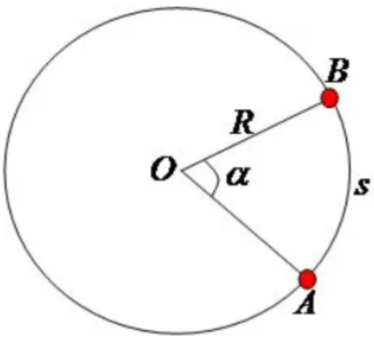

Figura 8: Circunferência de centro O e raio R

3.6 Ordem de convergência para K = $\frac{2}{\pi}$

Já foi possível compreender, a nível teórico, o significado e o cálculo tanto da ordem de convergência como do coeficiente assintótico de convergência, através da equação 18.

$$\frac{|\alpha - x_{n+1}|}{|\alpha - x_n|^p} \tag{18}$$

Para o caso em que $K = \frac{2}{\pi}$, e considerando as iteradas iniciais x_0 = 1.2 e x_1 = 1.4, construiu-se um gráfico, com o auxílio do $MatLab$, cujo eixo das ordenadas corresponde ao valor do coeficiente de convergência para cada iteração e o eixo das abcissas corresponde ao número de iterações. Através da análise do gráfico 12, observa-se que para a ordem de convergência $p = 1$, o coeficiente assintótico de convergência tende para 0, concluindo-se que a ordem de convergência é superior àquela que seria expectável neste caso; para a ordem de convergência $p = 2$, o coeficiente assintótico de convergência não parece tender para nenhuma constante; por fim, para $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ o coeficiente assintótico de convergência aparenta tender para 1. Assim, visto que só para $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, o coeficiente assintótico de convergência converge para uma constante positiva, deduz-se que esta é, de facto, a ordem de convergência do método da secante.

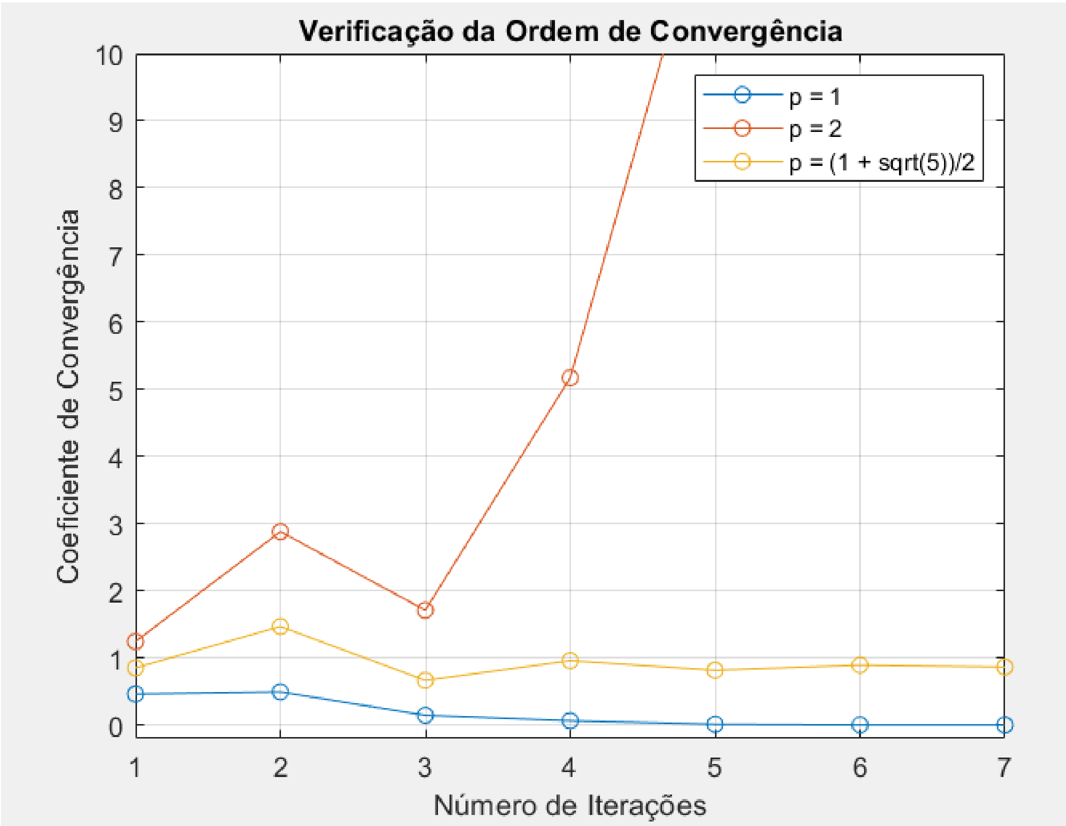

Figura 9: Coeficiente assintótico de convergência em função do número de iterações

```
0.460620331035188
0.492096626160403
0.143656812653946
0.062449270172288
0.009579374066538
5.925530381529590e-04
5.810471548818544e-06
```

Figura 10: Valores dos coeficientes assimptóticos de convergência para $p = 1$

```
1.242246208361109
2.881189750358877
1.709217428423661
5.172163283728406
12.704413624918738
82.036587996837312
1.357577119592893e+03
```

Figura 11: Valores dos coeficientes assimptóticos de convergência para $p = 2$

```
0.850417240555018

1.466914310297161

0.663749048569656

0.957207484863368

0.815118737610451

0.891688647319593

0.863498625318667
```

Figura 12: Valores dos coeficientes assimptóticos de convergência para $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

4 Conclusão

A resolução do problema mecânico através do método da secante perimitiu-nos aprofundar o conhecimento sobre este método iterativo e compreender a importância destes métodos que visam obter uma aproximação mais exata possível. São processos fundamentais a ínumeras áreas e, principalmente, em Engenharia, onde raramente se obtêm valores exatos, sendo portanto, fundamental, obter um valor aproximado com menor erro possível, pois, quando aplicados os cálculos a um dado estudo, um erro significativo pode resultar em baixa eficiência de um produto ou até falta de segurança, por exemplo, em infraestruturas.

Para além disso, a utilização da ferramente $MatLab$ introduziu-nos a uma questão fundamental da vida de qualquer Engenheiro: a criação e análise de gráficos como método de estudo de problemas de Engenharia.

5 Referências

https://brasilescola.uol.com.br/matematica/medida-de-um-arco.htm

https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312408383/NOTASdeAULAS_MC.pdf