2º Projeto de Matemática Computacional, 1s-23-24

Licenciatura de Eng. Aeroespacial

Prazo limite de entrega: 10-01-2024

Foi observado que o intervalo de tempo, em minutos, que separa a chegada de duas pessoas a uma paragem de autocarro pode ser descrito por uma variável aleatória com densidade de probabilidade:

$$D_\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \le 0, \\ \frac{2\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}} e^{-\sigma t^2} & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

onde $\sigma > 0$ é um parâmetro que depende da localização da paragem e do horário considerado. Neste caso, a probabilidade do intervalo de tempo entre duas pessoas ser menor ou igual a m minutos, é dada por

$$P[t \le m] = \int_0^m D_\sigma(t)\, dt.$$

Neste projeto, pretende-se aproximar $P(m) = \frac{2\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}} \int_0^m e^{-\sigma t^2}\, dt$ pelo método de integração numérica de Romberg.

I. Breve descrição do Método de Romberg.

Dada f, este método, que é uma aplicação importante da denominada fórmula de Euler-MacLaurin, permite aproximar o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)\ dx$$

a partir de várias aplicações da regra dos trapézios com subintervalos de tamanhos diferentes. Designando por $T(h)$ a regra dos trapézios com espaçamento $h > 0$, define-se uma sucessão de aproximações de $I(f)$, de forma recorrente, por

$$T_0(h) = T(h)$$

$$T_n(h) = \frac{4^n T_{n-1}(h/2) - T_{n-1}(h)}{4^n - 1},\ n = 1, 2, ...$$

Se f satisfizer certas condições de regularidade, pode-se provar que

$$E_n(h) = I - T_n(h) = O\Big(h^{2(n+1)}\Big)$$

(recordar que, como visto na aula, $E_0(h) = I - T_0(h) = O(h^2)$).

Considerando, para cada $k = 0, 1, 2...$,

$$h_k = \frac{b-a}{2^k}$$

$$T_0^{(k)} = T_0(h_k),$$

em termos práticos, por este método, pode-se construir o seguinte algoritmo para aproximar $I(f)$: dado $n_{\max} \in \mathbb{N}$,

$$T_0^{(k)} = T_0(h_k),\ \ k = 0, ..., n_{\max}$$

$$T_n^{(k-n)} = \frac{4^n T_{n-1}^{(k-n+1)} - T_{n-1}^{(k-n)}}{4^n - 1},\ \ n = 1, ..., n_{\max},\ \ k = n, ..., n_{\max}.$$

Note-se que os valores $\{T_n^{(k)}\}$ assim obtidos podem ser dispostos sob a forma de tabela:

$$\begin{array}{lllll}
T_0^{(0)} & & & & \\
T_0^{(1)} & T_1^{(0)} & & & \\
T_0^{(2)} & T_1^{(1)} & T_2^{(0)} & & \\
T_0^{(3)} & T_1^{(2)} & T_2^{(1)} & T_3^{(0)} & \\
\ldots & & & & \\
T_0^{(n_{\max})} & T_1^{(n_{\max}-1)} & T_2^{(n_{\max}-2)} & T_3^{(n_{\max}-3)} \quad \ldots & T_{n_{\max}}^{(0)}
\end{array}$$

sendo $T_{n_{max}}^{(0)}$ a melhor aproximação de $I(f)$.

Referência (livro): Burden, R. L., Faires, J. D., Numerical Analysis, 9th Edition, Brooks/Cole, Cengage, 2011.

II. Enunciado

1. Implemente uma função em Matlab ou Octave, que, dado um intervalo $[a, b]$, uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, e n_{max}, implemente o algoritmo da tabela anterior para calcular as aproximações $\{T_n^{(k)}\}$ de $I(f) = \int_a^b f(t)\,dt$, com $n = 0, 1, \ldots, n_{max}$. Esta função Matlab deverá ser utilizada nas restantes alíneas do projecto.

2. Considerando $n_{max} = 5$, $\sigma = 1$, obtenha valores aproximados de $P(m)$, com $m = 0.1, 0.2, \ldots, 2$. Em cada caso, considere o valor de $T_{n_{max}}^{(0)}$ como a aproximação do integral. Escreva os resultados numa tabela e esboce o gráfico de $P = P(m)$, $m = 0.1, 0.2, \ldots, 2$.

3. Tomando como valor exacto de $P(1)$ o valor obtido em Matlab/Octave pelo comando *integral* (e usando *format long*), faça uma tabela com o erro absoluto $E_n^{(k)} = I - T_n^{(k)}$ cometido nas aproximações de $P(1)$ (obtidas na alínea 2) para valores de n e k entre 0 e n_{max}.

4. Baseando-se na tabela da alínea anterior, construa uma nova tabela com os quocientes

$$Q_n^{(k)} = \frac{E_n^{(k)}}{E_n^{(k-1)}}.$$

   Sabendo que, em cada coluna da tabela dos erros, estes satisfazem $E_n(h) \leq C_n h^{\alpha_n}$, onde C_n não depende de h, e olhando para a tabela dos quocientes obtidos, que pode concluir em relação aos expoentes α_n? Esta conclusão está de acordo com o que foi dito na introdução sobre a precisão do método de Romberg?

5. Trace nos mesmos eixos gráficos semelhantes ao da alínea 2, com $\sigma = 1, 2, 3$.

6. Sabendo que o intervalo de tempo médio é dado pelo integral

$$M(\sigma) = \frac{2\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty te^{-\sigma t^2}\, dt,$$

calcule um valor aproximado de $M(1)$. Note que, ao aproximar o integral em $[0, \infty]$, deverá usar um certo intervalo $[0, t_{max}]$, onde t_{max} deve ser escolhido experimentalmente, de modo a obter a melhor aproximação possível. Repita o cálculo para $\sigma = 0.1, 0.2, \ldots, 2$ e trace o gráfico de $M(\sigma)$. Comente sobre os erros cometidos, com base na resolução analítica do problema.