Álgebra de Boole

Introducción

En esta Unidad se analizan los principios básicos de la lógica digital que se aplican al diseño de una computadora digital.

En 1884 **George Boole** publicó su trabajo sobre un Álgebra para representar la Lógica. Boole estaba interesado en capturar la matemática del pensamiento y desarrolló una representación para las declaraciones como "la puerta está abierta" o "la puerta está no abierta".

El Álgebra de Boole, en su forma actual fue desarrollada por Shannon (1916-2001). Ingeniero eléctrico y matemático estadounidense, considerado el fundador de la teoría de la información. Demostró que el Álgebra booleana se podía utilizar en el análisis y la síntesis de la conmutación de los circuitos digitales.

Introducción

- ✓ Los circuitos en computadoras digitales y otros sistemas digitales se diseñan y se analizan a través del algebra de Boole.
- ✓ Análisis -> Es una forma concisa de describir el funcionamiento de los circuitos digitales.
- ✓ Diseño -> Dada una función deseada, se puede aplicar el algebra de Boole para desarrollar una función simplificada de la dada.

Operadores Fundamentales

- ✓El algebra de Boole utiliza variables y operaciones.
- ✓Las variables pueden tomar el valor 1, es decir Verdadero y 0, es decir falso.
- ✓El algebra de Boole reconoce dos operadores fundamentales:
  - SUMA LOGICA (+; OR)
  - PRODUCTO LOGICO (•; AND)
  - COMPLEMENTO O NOT (-)
- ✓Algunos autores también consideran al COMPLEMENTO (NO) entre las operaciones fundamentales.
- ✓Estos operadores y cualquier función booleana quedan definidos mediante sus **Tablas de Verdad**.

Operadores Fundamentales

- ✓El algebra de Boole utiliza variables y operaciones.
- ✓Las variables pueden tomar el valor 1, es decir Verdadero y 0, es decir falso.
- ✓El algebra de Boole reconoce dos operadores fundamentales:
  - SUMA LOGICA (+; OR)
  - PRODUCTO LOGICO (•; AND)
  - COMPLEMENTO O NOT (-)
- ✓Algunos autores también consideran al COMPLEMENTO (NO) entre las operaciones fundamentales.
- ✓Estos operadores y cualquier función booleana quedan definidos mediante sus **Tablas de Verdad**.

Propiedades del Álgebra de Boole

❖ Leyes conmutativa

Ambas operaciones binarias (suma y producto) son conmutativas, esto es que si a y b son elementos del Álgebra se verifica que:

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

❖ Leyes Distributivas

Cada operación binaria (suma y producto) es distributiva respecto de la otra:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$$

❖ Leyes de Identidad

Dentro del Álgebra existen dos elementos neutros, el 0 y el 1, que cumplen la propiedad de identidad con respecto a cada una de las operaciones binarias:

$$a + 0 = a$$

$$a \cdot 1 = a$$

Propiedades del Álgebra de Boole

❖Propiedad o Ley de Complementación o Inverso

Para cada elemento a del Álgebra, existe un elemento denominado a negada, tal que:

$a + \overline{a} = 1$

a y $\overline{a}$ no pueden ser cero al mismo tiempo,

$a \cdot \overline{a} = 0$

a y $\overline{a}$ no pueden ser uno al mismo tiempo. Estas dos leyes definen el complemento de una variable.

❖Propiedad o Ley Anulación de la variable

Para cada elemento del Álgebra de Boole se verifica que:

$$a + 1 = 1$$

$$a \cdot 0 = 0$$

Según esta propiedad y las "leyes de identidad" citadas anteriormente, se deduce que:

$$0 + 0 = 0 \qquad 0 \cdot 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1 \qquad 0 \cdot 1 = 0$$

$$1 + 1 = 1 \qquad 1 \cdot 1 = 1$$

Propiedades del Álgebra de Boole

❖Propiedad o Ley de ídem potencia

Para cada elemento a de un Álgebra de Boole se verifica que:

$$a + a = a$$

$$a \cdot a = a$$

❖Propiedad o Ley de absorción

Para cada par de elementos del Álgebra de Boole, a y b, se verifica que:

$$a + (a \cdot b) = a$$

$$a \cdot (a + b) = a$$

Confeccionando la tabla de verdad se puede demostrar, por ejemplo, para la primera igualdad:

Tabla 5-5

a	b	$a \cdot b$	$a + a \cdot b$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Propiedades del Álgebra de Boole

❖ Propiedad Asociativa

En el Álgebra de Boole la suma y el producto son asociativos:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

❖ Propiedad de la doble negación o Ley de involución

Para todo elemento a de un Álgebra de Boole, se verifica que:

$$\bar{\bar{a}} = a$$

a	$\bar{a}$	$\bar{\bar{a}}$
0	1	0
1	0	1

Propiedades del Álgebra de Boole

Teorema o Ley de DeMorgan

En todo Álgebra de Boole se verifican las siguientes igualdades permiten transformar sumas en productos y productos en sumas:

1) $\overline{a + b} = \overline{a} \,.\, \overline{b}$
2) $\overline{a \,.\, b} = \overline{a} + \overline{b}$

$$\overline{a + b + c + \ldots} = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \ldots$$

$$\overline{a \cdot b \cdot c \cdot \ldots} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \ldots$$

Consecuencia:

1) $\overline{\overline{a + b}} = \overline{\overline{a} \,.\, \overline{b}} = a + b$

2) $\overline{\overline{a \,.\, b}} = \overline{\overline{a} + \overline{b}} = a \,.\, b$

Actividad

Simplificar utilizando las propiedades del Algebra de Boole

$Z = \overline{A} . B . C + A . \overline{B} . C + A . \overline{B} . \overline{C} + A . B . C$

Actividad

Simplificar utilizando las propiedades del Algebra de Boole

$$Z = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C$$

$$Z = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot (\overline{B} \cdot C + \overline{B} \cdot \overline{C} + B \cdot C)$$ Distributiva

$$Z = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot (\overline{B} \cdot (C + \overline{C}) + B \cdot C)$$ Distributiva

$$Z = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot (\overline{B} \cdot 1 + B \cdot C)$$ Elemento inverso

$$Z = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} + A \cdot B \cdot C$$ Identidad y Distributiva

$$Z = (B \cdot C) \cdot (\overline{A} + A) + A \cdot \overline{B}$$ Elemento inverso

$$Z = B \cdot C + A \cdot \overline{B}$$

Actividad

Algunos ejercicios mas…

Simplificar utilizando las propiedades del Algebra de Boole

1) $(\overline{A} \, . \, B).(\overline{A} + B) + A \, . \, B \, . \, \overline{C} + A \, . \, B$ -> Solución B

2) $\overline{A}.B.\overline{C}.D + \overline{A}.B.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.B.C.D + \overline{A}.\overline{B}.C.D$ ->

Solución $\overline{A}.(B.\overline{C} + C.D)$

3) $A.B.C.D + A.B.C.\overline{D} + A.B.\overline{C}.D + A.B.\overline{C.D}$ ->

Solución A.B

4) $\overline{(\overline{A} + B) \, . \, (\overline{C} + A)}$ -> Solución $(A \, . \, \overline{B}) + (C \, . \, \overline{A})$