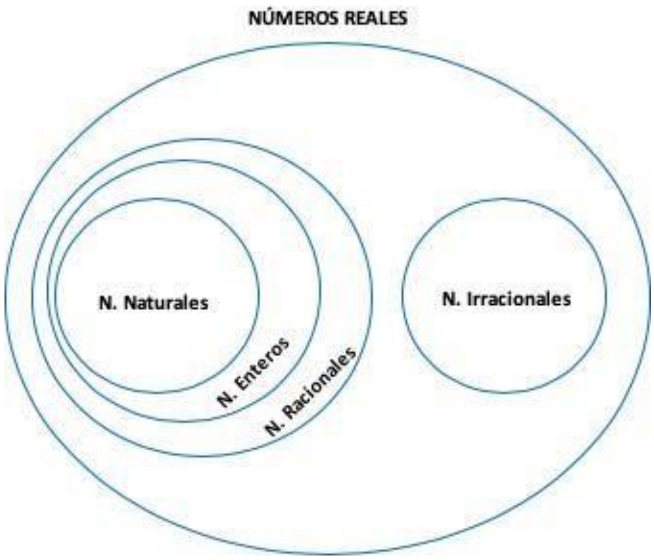
UNIDAD I:

LOS NÚMEROS REALES

El conjunto de los números reales (**IR**) es la unión entre el conjunto de los números racionales (**Q**) y los irracionales (**I**). Recordemos que el conjunto de los números racionales incluye a los conjuntos de los números naturales (**IN**) y de los números enteros (**Z**). La diferencia entre los números racionales y los irracionales es que los segundos no pueden ser expresados como cociente de dos números enteros (por ejemplo $\sqrt{2}$, π, etc.)

A continuación, se presenta un diagrama con la organización de los números reales:

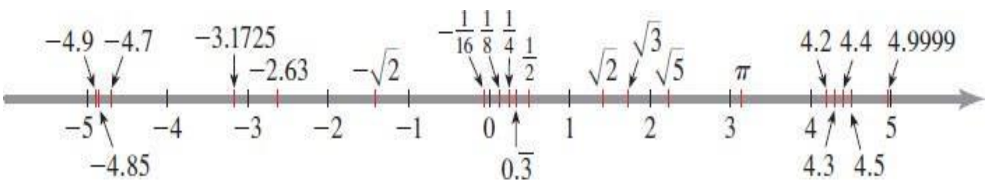


Algunas propiedades de los números reales son:

- Es un conjunto con infinitos números, no hay primer ni último elemento.

- Es un conjunto denso, lo cual quiere decir que entre dos números reales hay infinitos números reales.

- Todos los números pueden ser representados en una recta numérica, la cual recibe el nombre de *Recta Real*. Esta recta tiene la particularidad de que a cada número real le corresponde un punto en la recta, y a todo punto de la recta le corresponde un número real.



Operaciones en **IR**:

1. ADICIÓN

Propiedades de la adición en **IR**:

a) Asociativa: para todo número real x, y, z se cumple que:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

b) Conmutativa: para todo número real x, y se cumple que:

$$x + y = y + x$$

c) Existencia del elemento neutro "0": para todo número real x existe el número real 0, el cual cumple que:

$$x + 0 = 0 + x = x$$

d) Existencia de elemento opuesto: para todo número real x existe el número real -x, el cual cumple que:

$$x + (-x) = (-x) + x = 0$$

2. MULTIPLICACIÓN

Propiedades de la multiplicación en **IR**:

a) Asociativa: para todo número real x, y, z se cumple que:

$$(x \,.\, y) \,.\, z = x \,.\, (y \,.\, z)$$

b) Conmutativa: para todo número real x, y se cumple que:

$$x \,.\, y = y \,.\, x$$

c) Existencia del elemento neutro "1": para todo número real x existe el número real 1, el cual cumple que:

$$x \,.\, 1 = 1 \,.\, x = x$$

d) Existencia de elemento inverso: para todo número real x existe el número real $x^{-1} = \frac{1}{x}$, el cual cumple que:

$$x \,.\, x^{-1} = x^{-1} \,.\, x = 1$$

e) Distributiva de la multiplicación con respecto a la adición: para todo número real x, y, z se cumple que:

$$x \,.\, (y + z) = x \,.\, y + x \,.\, z$$

3. POTENCIACIÓN

Antes de ver las propiedades de la potenciación en **IR**, recordemos que:

$$x^n = x \,.\, x \,.\, x \,.\, x \dots (n\ veces)$$

Donde x es la base, n es el exponente y x^n es la potencia.

a) Producto de potencias de igual base:

$$a^n \,.\, a^m = a^{n+m}$$

b) Cociente de potencias de igual base:

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

c) **Potencia de una potencia**:

$$(a^n)^m = a^{n.m}$$

d) **Distributiva de potenciación con respecto a la multiplicación**:

$$(a \,.\, b)^n = a^n \,.\, b^n$$

e) **Distributiva de potenciación con respecto a la división**:

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

f) **Para cualquier número real a**: $a^1 = a$

Para cualquier número real a, con a≠0: $a^0 = 1$

g) **Para cualquier número real a, con a≠0, se cumple que**:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

4. RADICACIÓN:

Antes de ver las propiedades de radicación en **IR**, recordemos que:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

Donde n es el índice de la raíz, a es el radicando y b es la raíz.

a) **Raíz de una raíz**:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$$

b) **Distributiva de radicación con respecto a la multiplicación**:

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}$$

c) **Distributiva de radicación con respecto a la división**:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

d) **Multiplicación y división de índice y exponentes por un mismo valor**:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.r]{a^{m.r}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{r}]{a^{\frac{m}{r}}}$$

e) **Expresión de un radical como potencia de exponente fraccionario**:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Extracción de factores fuera del radical

Con las propiedades estudiadas anteriormente, podemos simplificar diferentes expresiones que contengan raíces, lo cual nos servirá para resolver diferentes ejercicios. ¡Recordar de, siempre que sea posible, factorizar el radicando!
Algunos casos son:

1. Si el exponente del radicando es menor que el índice, el factor correspondiente se deja en el radicando. Por ejemplo:
   a) $\sqrt{6} = \sqrt{2.3}$

   b) $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2}$

2. Si el exponente del radicando es igual al índice, el factor correspondiente sale fuera del radicando. Por ejemplo:
   a) $\sqrt{12} = \sqrt{2^2.\,3} = 2\sqrt{3}$

   b) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3.\,3} = \; 2^1\ \sqrt[3]{3}.$

   factorización
   24:2
   12:2
   6:2
   3:3
   1= $2^3.3 = 24$

3. Si el exponente del radicando es mayor que el índice, se divide dicho exponente por el índice. El cociente obtenido (es decir, el resultado de la división) es el exponente del factor fuera del radicando y el resto es el exponente del factor dentro del radicando. Por ejemplo:
   a) $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^5} = 2\ \sqrt[3]{2^2}$

   b) $\sqrt{48} = \sqrt{2^4\,.\,3} = 2^2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

Introducción de factores en un radical:

Para introducir factores en un radical se elevan los factores (que queramos introducir al radical) al índice del radical. Es decir:

$a\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n.\,b}$

Por ejemplo:

$5\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{5^4 . 3}$

$25\sqrt{2} = \quad 5^2\sqrt{2} \quad = \sqrt{2.5^4}$

Suma de radicales semejantes:

Solamente pueden sumarse (o bien, restarse) dos radicales cuando son **semejantes**. Pero, ¿Qué quiere decir que dos radicales sean semejantes? Dos radicales son semejantes cuando tienen mismo índice y radicando. Por ejemplo:

a) $\sqrt{6} + \sqrt{5}$: como no tienen igual radicando no son semejantes, con lo cual no puedo sumarlos.

b) $\sqrt{8} - \sqrt{32}$: a primera vista uno diría que estos radicales no son semejantes, pero para ello estudiamos las propiedades anteriores.

c) Observemos que:

$$\sqrt{8} - \sqrt{32} = \sqrt{2^3} - \sqrt{2^5} = 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

Los pudimos operar porque ambos radicales son semejantes.

Multiplicación de radicales:

Los radicales pueden multiplicarse entre sí y encontraremos dos casos. Cuando los índices son iguales y cuando los índices son diferentes. Analicemos cada caso:

1. **Radicales de igual índice**:
Para multiplicar radicales con el mismo índice se multiplican los radicandos y se deja el mismo índice. Por ejemplo:
a) $\sqrt{5}\,.\sqrt{5} = \sqrt{5\,.\,5} = \sqrt{25} = 5$
b) $\sqrt[3]{3.\,x^2}\,.\sqrt[3]{9.\,x^5} = \sqrt[3]{3\,.\,9\,.\,x^2\,.\,x^5} = \sqrt[3]{3^3\,.\,x^7} = 3\,x^2\,\sqrt[3]{x}$

2. **Radicales de distinto índice**:
Para multiplicar radicales de distinto índice, debemos hallar el m.c.m. (mínimo común múltiplo) entre los índices con el fin de que nos queden radicales de igual índice. Pero debemos multiplicar también a los exponentes de los factores que forman el radicando (es conveniente repasar la propiedad d) de radicación, en la página 3). Veamos un ejemplo:
a) $\sqrt{2}\,.\sqrt[3]{25} = \sqrt[2.3]{2^{1.3}}\,.\sqrt[3.2]{5^{2.2}} = \sqrt[6]{2^3}\,.\sqrt[6]{5^4}$
b) $\sqrt{3}\,.\sqrt[3]{9}\,.\sqrt[4]{27} = \sqrt[2.6]{3^{1.6}}\,.\sqrt[3.4]{3^{2.4}}\,.\sqrt[4.3]{3^{3.3}} = \sqrt[12]{3^6}\,.\sqrt[12]{3^8}\,.\sqrt[12]{3^9} = \sqrt[12]{3^{23}} = 3\,\sqrt[12]{3^{11}}$

Racionalización de denominadores:

La racionalización de denominadores consiste en eliminar los radicales del denominador, con el fin de facilitar el cálculo de diferentes como la suma o resta de fracciones. Recordemos que multiplicar y dividir por el mismo número equivale a multiplicar por 1, lo cual sabemos que no altera la expresión que tengamos (este será el truco que usaremos en general). Distinguiremos 3 casos, los cuales se desarrollarán a continuación:

1. Del tipo: $\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}\sqrt{\boldsymbol{c}}}$
En este caso multiplicaremos y dividiremos por $\sqrt{c}$.

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a}{b\sqrt{c}}\,.\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b.\sqrt{c^2}} = \frac{a\sqrt{c}}{b.\,c}$$

Por ejemplo:

$$\frac{3}{4\sqrt{7}} = \frac{3}{4\sqrt{7}}.\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{4\sqrt{49}} = \frac{3\sqrt{7}}{28}$$

2. Del tipo: $\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{m}}}}$
En este caso multiplicaremos y dividiremos por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$, con el fin de que los exponentes de los factores del radicando sean múltiplos del índice (y así poder simplificar la raíz).

Por ejemplo:

$$\frac{7}{3\sqrt[5]{16}} = \frac{7}{3\sqrt[5]{2^4}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{2}} = \frac{7\sqrt[5]{2}}{3.\sqrt[5]{2^5}} = \frac{7\sqrt[5]{2}}{3.2} = \frac{7\sqrt[5]{2}}{6}$$

3. Del tipo: $\frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{\boldsymbol{b}}+\sqrt{\boldsymbol{c}}}$

También se incluyen en este caso cuando el denominador sea un binomio con al menos un radical.

Multiplicaremos y dividiremos por el conjugado del denominador (recordemos que el conjugado de un binomio es igual a dicho binomio con el signo central cambiado).

También usaremos uno de los casos de factoreos (los cuales veremos con detalle más adelante): la diferencia de cuadrados. La diferencia de cuadrados dice que

$$(a + b).(a - b) = a^2 - b^2$$

Entonces:

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a.(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c}).(\sqrt{b}-\sqrt{c})} = \frac{a.(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{\sqrt{b^2}-\sqrt{c^2}} = \frac{a.\sqrt{b}-a.\sqrt{c})}{b-c}$$

Por ejemplo:

$$\frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{4.(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{\sqrt{2^2}-\sqrt{5^2}} = \frac{4\sqrt{2}+4\sqrt{5}}{2-5} = -\frac{4\sqrt{2}+4\sqrt{5}}{3}$$

<u>Notación decimal y números periódicos</u>

La notación decimal es otra manera de escribir a los números que son expresados en fracciones decimales (o simplemente fracciones). Por ejemplo:

$$4 = \frac{4}{1} = 4{,}0$$

$$\frac{8}{10} = 0{,}8$$

Un número decimal periódico es un número racional con parte fraccionaria caracterizado por tener un período (cifras distintas de cero que se repiten indefinidamente). Los números periódicos pueden ser de dos tipos:

- Número periódico puro: cuando inmediatamente después de la coma hay una o más cifras repetitivas hasta el infinito, sin ser todas cero.
  Ejemplo: $34{,}555\ldots = 34{,}\hat{5}$

- Número periódico mixto: cuando después de la coma hay una o más cifras que no se repiten, seguidas por una o más cifras que sí lo hacen, sin ser todas cero.
  Ejemplo: $21{,}17888\ldots = 21{,}17\hat{8}$

Para pasar un número periódico expresado en notación decimal a fracción debemos seguir la siguiente regla. En el numerador irá todo el número (sin la coma) menos la parte NO periódica y en el denominador tantos 9 como cifras periódicas tenga el número y tantos 0 (luego del o los 9) como cifras decimales no periódicas tenga el número. Por ejemplo:

$3{,}\hat{6} = \frac{36-3}{9} = \frac{33}{9}$ $\quad 1{,}\acute{3} = \frac{13-1}{9} = \frac{12}{9}$

$4{,}\widehat{12} = \frac{412-4}{99} = \frac{408}{99}$

$2{,}1\hat{6} = \frac{216-21}{90}$ $\quad 34{,}\acute{5} = \frac{345-34}{9} = \frac{311}{9}$

Redondeo

Para redondear un número a un determinado orden tenemos que fijarnos en la cifra que se encuentra a la derecha de la que queremos redondear:

- Si esa cifra es mayor o igual que 5, aumentamos en una unidad la cifra a redondear.
- Si esa cifra es menor que 5, la dejamos igual.

Por ejemplo:

2,5781 redondeado al orden de los décimos es 2,6.

2,5781 redondeado al orden de los centésimos es 2,58.

2,5781 redondeado al orden de los milésimos es 2,578.

Notación científica

La notación científica se utiliza para escribir números muy grandes o muy pequeños de manera abreviada. Un número está escrito en notación científica cuando se expresa como producto entre una potencia de 10 y un número mayor que 1 y menor que 10.

Por ejemplo:

$1.600 = 1{,}6 \,.\, 10^3$

$23.600.000 = 2{,}36 \,.\, 10^7$

$0{,}0345 = 3{,}45 \,.\, 10^{-2}$

$0{,}00078 = 7{,}8 \,.\, 10^{-4}$

UNIDAD II

Relaciones Binarias

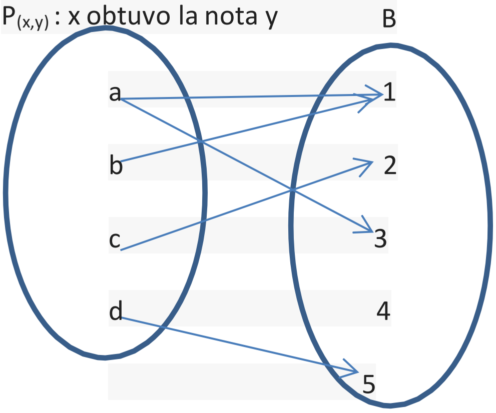
Sean A y B dos conjuntos y $P_{(x,\ y)}$ una propiedad relativa a los elementos x e A y x e B, en ese orden. Esto nos sugiere la consideración del producto cartesiano AxB, y la determinación de los pares ordenados (a,b) para los cuales $P_{(a,b)}$

Ejemplo:

A:{a,b,c,d} y B={1,2,3,4,5}

De este modo queda definido un subconjunto R c AxB

$P_{(x,y)}$: x obtuvo la nota y



R= {(a,1), (a,3), (b,1), (c,2), (d,5)}

D_R= {a,b,c,d}

I_R= {1,2,3,5}

R_R={1,2,3,4,5}

R^{-1}={(1,a), (3,a), (1,b), (2,c), (5,d) }

Definición: la relación entre A y B es todo subconjunto del producto cartesiano AxB.

Representación de Relaciones

Se pueden representar mediante:

Diagramas de Venn

Gráfico cartesiano

Mediante una matriz

Dominio e Imagen de una relación

Dominio de R: es la totalidad de los elementos de A que admiten imagen en B

Imagen de R: es el conjunto de los elementos de B, que admiten antecedente en A

Funciones

Definición: ***f*** es una función o aplicación de A en B si y sólo si ***f*** es una relación entre A y B, tal que, todo elemento de A tiene un único correspondiente en B.

O bien podemos decir que:

f es una función de A en B si y sólo si es un subconjunto de AxB que satisface las condiciones de existencia y unicidad:

i) ∀ a e A , ∃b e B / (a,b) e ***f***
ii) (a,b) e ***f*** ^ (a,c) e ***f*** ---> b = c

Dominio e Imagen de una función

Se llama dominio de una función *f* y se designa Dom, al conjunto de valores de la variable independiente x, para los que existe la función, es decir para los que hay un valor de la variable dependiente y.

Se llama imagen o recorrido de una función y se designa Im a todos los valores de la dependiente y, que tienen algún valor de la variable independiente.

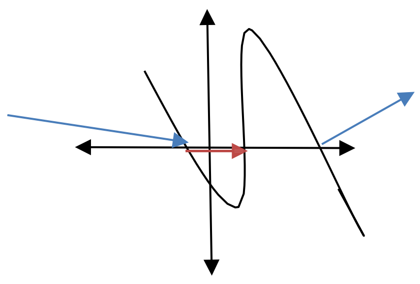
Ejemplo:

$f_{(x)}$= 2x+1

x	2x+1	y
-1/2	2.-1/2 + 1	0
0	2.0 +1	1
1	2.1 + 1	3
2	2.2 + 1	5

Dom={0,1,2}
Im={1,3,5}

Ceros o Raíces de una función
Los ceros o raíces de una función *f* son aquellos valores del dominio cuya imagen es cero.
Gráficamente los ceros o raíces son puntos de la función ubicados sobre el eje x.



Ordenada al origen
La ordenada al origen de una función *f* es aquel valor cuya variable independiente es cero.
Gráficamente la ordenada está ubicada en el eje y, corta al eje y.

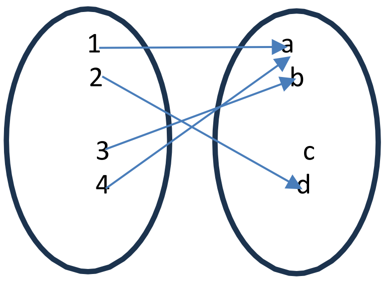
Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento
Un intervalo de Crecimiento de una función es un subconjunto del dominio para el cual a mayores valores de la variable independiente x, le corresponden mayores valores de la variable dependiente y.
Un intervalo de Decrecimiento de una función es un subconjunto del dominio para el cual a mayores valores de la variable independiente x, le corresponden menores valores de la variable dependiente.

Máximos y Mínimos de una función (investigación)

Conjunto de Positividad y Negatividad de una función
El conjunto de positividad C^+ de una función es el subconjunto del dominio cuyas imágenes son número positivos.
El conjunto de Negatividad C^- de una función es el subconjunto del dominio cuyas imágenes son números negativos.

Funciones pares e impares (Investigación)

Clasificación de funciones
Una función *f* puede ser Inyectiva, Sobreyectiva – Biyectiva
Una función es inyectiva cuando a los elementos del dominio le corresponde una única imagen.
Una función sobreyectiva es cuando todos los elementos de la imagen tienen por lo menos un dominio.



Sobreyectiva

Función Inversa
Se llama función inversa de una función biyectiva f: A---B a la función f^{-1}: B----A/$f^{-1}{}_{(y)}$= x si y sólo si $f_{(x)}$=y
Ejemplo:
La función :R---- R/ $f_{(x)} = x^3$ es biyectiva y su inversa es:
f^{-1}: R---R/ $f^{-1}{}_{(y)} = \sqrt[3]{x}$
para hallar la función inversa se realizan dos pasos:

1) Se parte de la función biyectiva $f_{(x)} = x^3$ o $y=x^3$ y despejamos la variable x

$y= x^3$
$\sqrt[3]{y}=x$

2) Se realiza el cambio de variables

$$\sqrt[3]{x} = y$$

O bien $f^{-1}{}_{(y)} = \sqrt[3]{x}$
Ejercitación:

a) Dada la función biyectiva $f_{(x)} = \sqrt{x+1} - 2$, hallar la función inversa.

$y = \sqrt{x+1} - 2$
$y+2 = \sqrt{x+1}$
$(y+2)^2 = x+1$
$(y+2)^2 - 1 = x$

$y = (x+2)^2 - 1$ ó $f_{(y)}^{-1} = (x+2)^2 - 1$

Análisis de funciones especiales

Función Afín

A la función polinómica de primer grado $f_{(x)} = ax + b$, siendo a y b números reales, se le denomina función afín.
La representación gráfica de una función afín es una recta.
Toda función afín tiene una pendiente y una ordenad al origen.

→ Término dependiente

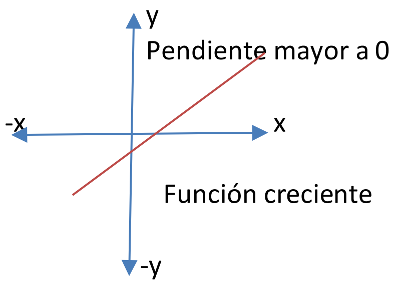
y = a x + b → Término independiente u ordenada al origen

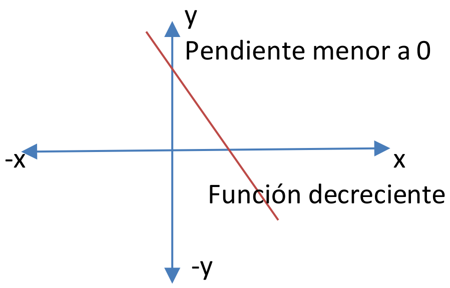
→ variable independiente

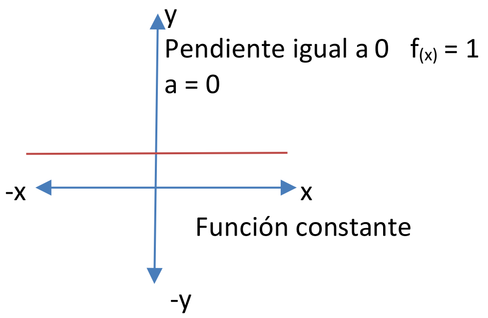
→ Pendiente

→ Variable dependiente

La pendiente de una recta es el aumento o disminución de la variable dependiente y, por cada aumento unitario de la variable independiente x.
El valor de la pendiente determina que una función afín sea creciente o decreciente.



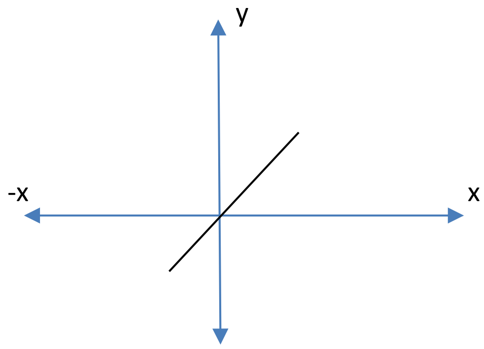




La ordenada al origen es el valor donde la recta interseca (corta) al eje y. Es el termino independiente de la función polinómica. Si la ordenada b=o, la recta pasa por el origen de coordenadas y de denomina función lineal.

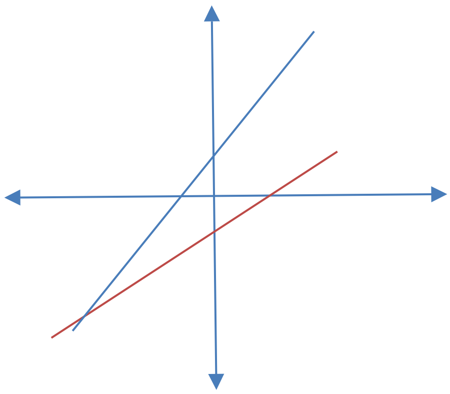
$f_{(x)} = 2x$

x	2 x	y
0	2.0	0
1	2.1	2
2	2.2	4
3	2.3	6



Función lineal
Dom={0,1,2,3}
Im={0,2,4,6}
Función Creciente
Inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.

Gráfica de una recta dada su pendiente y su ordenada
Ejemplo:
Vamos a graficar la función: $f_{(x)} = \frac{2}{3}x - 1$



Función Afín
Dom= {0,3}
Im={-1, 1}
Función creciente
Inyectiva, sobreyectiva, biyectiva

$y = \frac{2}{3}x - 1$

$y+1 = \frac{2}{3}x$

$(y+1).\frac{3}{2} = x$

$$\frac{3}{2}y + \frac{3}{2} = x$$
$$y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

La ecuación de una recta se puede expresar en forma:

Explícita: y= ax+b

Implícita: cx + dy +e = 0

Segmentaria: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$

Toda ecuación de la forma: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ representa una recta en forma segmentaria. Los denominadores m y n, representan a la abscisa y a la ordenada respectivamente.

Ecuación de la recta dada la pendiente y un punto de la misma.

Para hallar la ecuación de la una recta dada su pendiente a y un punto perteneciente a la misma (x_1, y_1), se utiliza la siguiente fórmula:

$y – y_1 = a (x – x_1)$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente a es 2 y pasa por el punto (1,3)

$y – y_1 = a (x – x_1)$

y – 3 = 2 (x – 1)
y = 2x – 2 + 3
y= 2x + 1

Ecuación de la recta dados dos puntos de la misma

Para hallar la ecuación de la recta dados dos puntos pertenecientes a ella (x_1, y_1) y (x_2, y_2) su fórmula es:

$$\frac{y - y1}{y2 - y1} = \frac{x - x1}{x2 - x1}$$

Ejemplo: hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2, 1) y (5, 3)

$$\frac{y - 1}{3 - 1} = \frac{x - 2}{5 - 2}$$

$$\frac{y - 1}{2} = \frac{x - 2}{3}$$

$$3(y - 1)) = 2(x - 2)$$

3y – 3 = 2x – 4
3y= 2x – 4 + 3
$Y = \frac{2x - 1}{3}$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

Función Cuadrática

La función polinómica de segundo grado $f_{(x)} = ax^2 + bx + c$, con a,b y c números reales y a distinto de cero, se denomina función cuadrática.

Los términos de la función reciben los siguientes nombres:

$f_{(x)} = ax^2 + bx + c$ → término independiente

ax^2 → término cuadrático

bx → término lineal

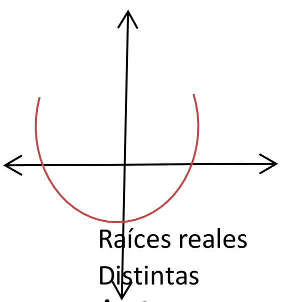
La representación gráfica de una función cuadrática es una parábola.

Ceros o raíz: son los puntos que de intersección de la gráfica con el eje x, es válido decir que $f_{(x)} = 0$

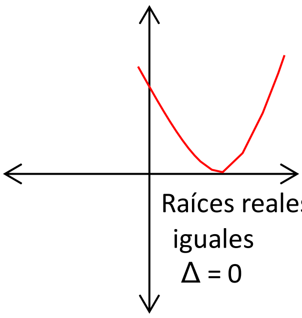
Para hallar los ceros o raíces de una función utilizaremos la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

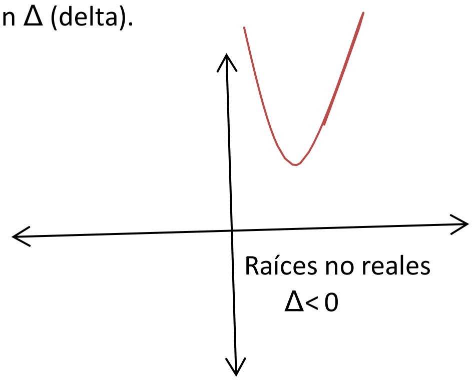
Al radicando $b^2 - 4ac$ se lo llama discriminante y se lo simboliza con Δ (delta).



Raíces reales Distintas $\Delta > 0$



Raíces reales iguales $\Delta = 0$



Raíces no reales $\Delta < 0$

Vértice de la parábola: hay que buscar las coordenadas del punto $V = (x_v , f_{(xv)})$

$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ó $x_v = \frac{-b}{2a}$ $y_v = f_{(xv)}$

Eje de simetría: es la recta que tiene por ecuación $x = x_v$

Ordenada al origen: es el punto de intersección de la gráfica con el eje y, vale decir que $f_{(0)} = c$

Una función cuadrática puede ser expresa de distintas formas:

Polinómica: $ax^2 + bx + c$

Canónica: $a(x - x_v)^2 + y_v$

Factorizada: $a (x - x_1) . (x - x_2)$

Ejemplo: a b c

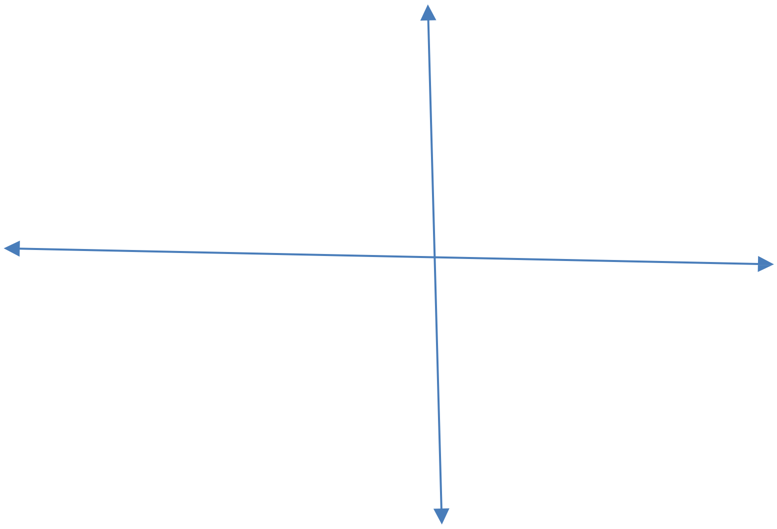
Dada la función cuadrática: $f_{(x)}= x^2 + 2x - 3$ $f_{(x)}= x^2 - 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.(-3)}}{2.1} = == \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2.1} = = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} =$$

$$x_1 \frac{-2+4}{2} = 1$$

$$X_2 = \frac{-2-4}{2} = -3$$



$$\frac{-b}{2.a}$$

$$\frac{-2}{2.1} = -1$$

$X_{v=-1}$

$f_{(x)}= x^2 + 2x - 3$

$Y_v= -4$

$f_{(x)}= x^2 + 2x - 3 = (-1)^2 + 2.(-1) - 3 = 1-2-3= -4$

Ejercitación: dada la función $\mathbf{f_{(x)}= 2x^2 + 4x + 6}$

. Buscar ceros o raíces, vértices y graficar

. Realizar el análisis de la función

Funciones Racionales

Una función de la forma $f_{(x)} = \frac{Px}{Qx}$, donde $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ son polinomios.
El dominio de una función racional es el conjunto de los valores de la variable que no anulan el denominador.

$f_{(x)} = \frac{x+3}{x-3}$ Df= R = { -3}

Para graficar una función racional de éste tipo debemos:
. Buscar el punto en x
. Buscar el punto en y
. Asíntota Vertical → (A. V)
. Asíntota Horizontal⟶ (A. H)

$f_{(x)} = \frac{x+3}{x-3}$

. Punto en x: para hallar el punto en x, tomamos el numerador del polinomio, lo igualamos a 0 y despejamos la variable independiente x:
x + 3 = 0
x = -3
. Punto en x= -3

. Punto en y: para hallar el punto y, tomamos los términos independientes del polinomio

$\frac{3}{-3}$ **= -1**
. Punto en y= -1

. Asíntota Vertical: tomamos el denominador, lo igualamos a 0 y despejamos la variable x:
x – 3 = 0
x = 3
. Asíntota Vertical= 3

. Asíntota Horizontal: para hallar la asíntota horizontal dividimos el grado de los polinomios entre sí, en este caso ambos polinomios son de grado 1. ***(Recordemos que el grado del polinomio nos lo indica el exponente que contenga la variable independiente x).***

A.H = $\frac{1}{1}$ **= 1**
Observación: otra forma de hallar la asíntota horizontal es haciendo que el límite de x tienda a infinito.
Veamos:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{x-3}\right)$$

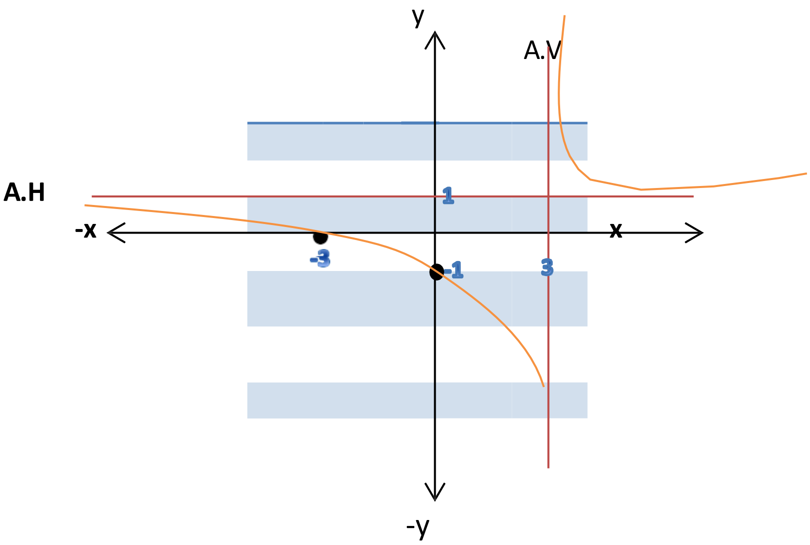
El paso siguiente es observar el grado del polinomio y vamos a dividir por la variable del mayor grado en cada uno de los términos de nuestros polinomios.
Para tener en cuenta todo número dividido por infinito da como resultado 0. **(** $\frac{x}{\infty}$ **= 0)**

Aplicando el límite de x teniendo a infinito, nos queda:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\frac{x}{x}+\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{3}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\frac{\infty}{\infty}+\frac{3}{\infty}}{\frac{x}{\infty}-\frac{3}{\infty}}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1+0}{1-0}\right) = 1$$

A.H = 1

Ahora bien ya con todos los datos que contamos podemos realizar la gráfica de nuestra función racional



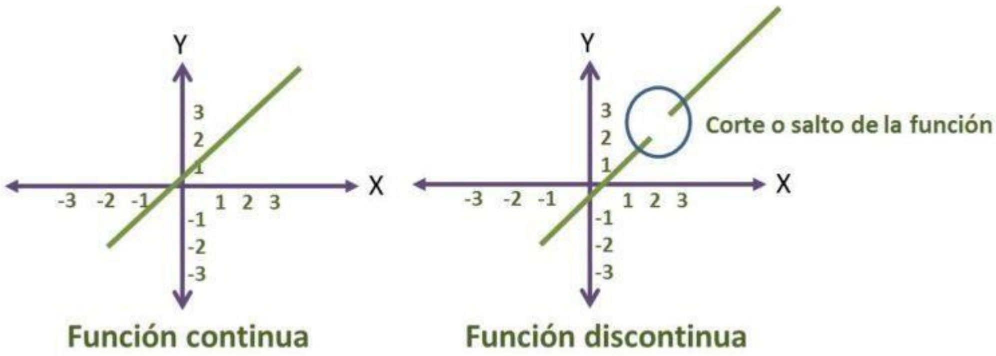
Ejercitación: Graficar y analizar las siguientes funciones

1) $f_{(x)} = \frac{x-2}{x-1}$
2) $f_{(x)} = \frac{x+5}{x^2-4}$
3) $f_{(x)} = \frac{1}{x}$

Unidad III

Continuidad y Discontinuidad de una función

Se dice que una función es continua cuando para cada valor de X le corresponde un valor real en Y, esto va permitir que al graficar se mantenga un trazo continuo, de existir un salto se dice que la función es discontinua. A continuación podemos ver un ejemplo de función continua y discontinua:



Continuidad de una función

Por definición existe continuidad en una función cuando:

Una función f(x) es continua en el punto x_0 cuando en este punto (a), un incremento infinitimente pequeño de la variable independiente le corresponde igualmente un incremento infinitamente pequeño de la función.

Esto expresado matemáticamente sería:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)] = 0$$

Para que exista continuidad de una función en un punto x_0 es necesario que se cumpla las siguientes condiciones:
.- Que la función exista en dicho punto o lo que es lo mismo, que la función esté definida en el punto:

$$\exists \boldsymbol{f(x_0) \epsilon R}$$

.- Que la función tenga limite y sea finito:

$$\lim_{x \to 0} \boldsymbol{f(x) = L \epsilon R}$$

.- El valor de la función en x_0 sea igual al valor del límite en x_0:

$$\boldsymbol{f(x_0) = \lim_{x \to 0} f(x) = L}$$

Función discontinua

Una función es discontinua cuando una pequeña variación de la variable independiente produce un saldo en los valores de la variable dependiente, el punto de salto se le denomina punto de discontinuidad.

Existen dos puntos de discontinuidad:

1.- Puntos de discontinuidad donde la función no está definida, es decir, no pertenecen al dominio.
2.- Puntos de discontinuidad donde la gráfica presenta un salto.

Existe una discontinuidad llamada evitable, siendo aquella en la cual existe el límite de la función en el punto, pero la función no está definida para el mismo. Por ejemplo cuando la función es racional y al sustituir f(a) el denominador nos da cero, en este caso lo podemos evitar al manipular la función para evitar la indeterminación. Pero también si al evaluar el limite por la izquierda y la derecha nos da el mismo valor y existe un punto diferente podemos removerlo y rellenar ese punto vació.

Para evitar la discontinuidad y transformarla en una continua se procede de la siguiente manera:

- Se calcula el valor del límite de la función en el punto a.
- Se añade el punto a al dominio de definición de la función, y se le asigna el valor.

Es de acotar que no todas las discontinuidades son evitables, existen las no evitable, por tanto no se pueden resolver siendo clasificadas en:

- ***Discontinuidades de salto****:* Cuando existen ambos límites laterales pero no coinciden.
- ***Discontinuidades asintóticas****:* Cuando el límite es infinito.
- ***Discontinuidades por el dominio de definición****:* Cuando existiendo el límite con la función definida en un punto, los valores no coinciden.

Ejercitación: determinar la continuidad o discontinuidad de cada función.

1. $f(x) = \frac{2}{x^2-9}$

2. $f(x) = \begin{cases} x+6 & si\ x < 1 \\ 2x+5 & si\ x > 1 \end{cases}$

Límite de una función

La denotación de límites en matemáticas es una notación especial que se utiliza para expresar cómo una función se comporta cuando la variable independiente se acerca a cierto valor. La denotación estándar para expresar límites implica el uso del símbolo lim, seguido de la variable independiente que se aproxima a cierto valor, y luego la función que estamos evaluando. La notación general es la siguiente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Esto se lee: el límite cuando x tiende a a de la función f de x es L.

Es importante destacar que el límite de una función puede existir o no existir. Si el límite existe y es finito, entonces la función está bien definida en ese punto y tiene un comportamiento claro cuando ***x*** se acerca a ***a***. Si el límite no existe o es infinito, indica que la función puede tener un comportamiento oscilante o no definido cerca del punto ***a***.

El concepto de límite se refiere a la idea de qué valor se acerca una función a medida que la variable independiente se acerca a cierto punto. Es decir, representa el valor al que se aproxima una función cuando la variable independiente se acerca a un determinado valor, sin necesariamente alcanzarlo.

Tipos de límite

Los tipos de límites dependerá del valor al que tienda la variable independiente X de una determinada función F(x) o el valor correspondiente que tome su límite, es decir, si:

. Límite finito:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

. Límite infinito:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

. Límites indeterminados:

Al iniciar el estudio de límites indeterminados se cree que el límite no existe, criterio erróneo, la indeterminación nos indica que debemos aplicar o desarrollar una serie de operaciones adicionales, como por ejemplo emplear casos de factoreos, para eliminar dicha indeterminación y finalmente logremos hallar el valor del límite.

Entre las indeterminaciones tenemos: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$; $0.\infty$; 1^{∞} ; ∞^{0}; 0^{0}

Para la resolución de estos límites emplearemos casos de factoreos.

Ejercitación:

Calcular los siguientes ejercicios de límite, en caso de que el mismo esté indeterminado utilizar algunos de los casos de factoreos para romper con la indeterminación.

1) $\lim_{x \to 0} \frac{x+4}{(x-2)}$

2) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x+3}{2}\right)$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^2-1}{x}$

4) $\lim_{x \to 3} \frac{(x^2-9)}{(x-3)}$

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$$

A(2,1) B (4,2) C (6,a)
$X_1=2$ $y_1= 1$
$X_2= 4$ $y_2= 2$
$X_3= 6$ $y_3 = a$

$$\frac{4-2}{6-4} = \frac{2-1}{a-2}$$

$$\frac{2}{2} = \frac{1}{a-2}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{a-2}$$

$$1.(a-2) = 1.1$$

$$a - 2 = 1$$

$$a = 1 + 2$$
$$a = 3$$