

Clase 04

Teoría de Colas



Teoría de Colas

Sistemas M/M/1/N: Son similares a los sistemas M/M/1 con la diferencia que las capacidades son limitadas, es decir en el sistema nunca puede haber más de N clientes.

La capacidad de un sistema es el máximo que puede alcanzar. Por ejemplo si un tanque de agua tiene una capacidad máxima de 500 litros, puede estar lleno hasta la mitad, pero si bien hay 250 litros la capacidad sigue siendo 500 litros.

En cambio en los sistemas M/M/1 pueden tener un número de clientes indefinido, es decir, todo cliente que llega a solicitar un servicio puede ponerse en la cola cualquiera sea la cantidad que haya en el sistema.

Teoría de Colas

Características de una M/M/1/N

- ✓ Los arribos se distribuyen Poisson.
- ✓ Los tiempo de servicios tienen distribución exponencial.
- ✓ Hay un solo servidor con cola única
- ✓ Las salidas son independiente de las entradas.
- ✓ La disciplina de atención es FIFO.
- ✓ La capacidad del sistema es N. Cuando se colma la capacidad el sistema, se bloquea y comienza a rechazar clientes hasta que se produzca una salida, entonces vuelve a aceptar clientes. Cuando vuelva a haber N clientes en el sistema (1 en el servidor y N-1 en cola) volverá a bloquearse y así siguiendo....

Teoría de Colas

Esquema básico



Tasa de rechazo (τ): es la parte de la tasa de arribos que corresponde a los clientes que son rechazados. Es un valor promedio y representa el numero de clientes que son rechazados por unidad de tiempo. Por ejemplo $\tau = 3 \text{ cli / seg.}$

$$\tau = \lambda \cdot P_B$$

Probabilidad de bloqueos (P_B): Es la probabilidad que llegue un cliente y encuentre el sistema bloqueado y no pueda acceder, es decir, es la probabilidad que al llegar el cliente sea rechazado.

Teoría de Colas

Deducción de la formula $\pi_n = f(n)$ para un M/M/1/N

Para una M/M/1 la deducción es $\pi_n = \rho^n (1 - \rho)$ y existen infinitos estados posibles porque cualquier cliente que llega se puede poner en cola (no tiene bloqueos). No hay un máximo en el valor de n .

En cambio en una M/M/1/N el máximo de clientes posibles es N , es decir que el mayor valor de n es N y existen $N+1$ estados posibles (se considera el cero) y la masa unitaria de probabilidad se reparte entre los $N+1$ estados posibles. Los estados superiores a N no existen y toda la probabilidad que hubiera correspondido a esos estados ahora debe repartirse entre los estados que realmente hay.

Teoría de Colas

Por lo que se necesita agregar un factor de corrección a la deducción de n de una M/M/1, el cual es $1 - \rho^{N+1}$

$$\pi_n = \frac{\rho^n (1 - \rho)}{1 - \rho^{N+1}}$$

Probabilidad ociosa: $\pi_0 = \frac{\rho^0 (1 - \rho)}{1 - \rho^{N+1}} \Rightarrow \pi_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}}$

Probabilidad de bloqueo: Ocurre cuando el número de clientes en el sistema es $n = N$

$$PB = \pi_N = \frac{\rho^N (1 - \rho)}{1 - \rho^{N+1}}$$

Teoría de Colas

Rendimiento: Es el verdadero aprovechamiento del sistema. Puede medirse a la entrada o a la salida.

Rendimiento a la entrada: Es la parte de la tasa de arribos que verdaderamente se aprovecha, es decir es la verdadera tasa de ingreso al sistema descontando los rechazos.

$$\gamma_i = \lambda - \tau$$

$$\gamma_i = \lambda - \lambda \cdot P_B$$

$$\gamma_i = \lambda \cdot (1 - P_B)$$

Teoría de Colas

Rendimiento a la salida: Es la parte de la tasa de servicio que realmente se aprovecha descontando la parte correspondiente a los tiempos ociosos del servidor. Es la verdadera tasa de salida del sistema.

$$\gamma_o = \mu - \mu \cdot \pi_0$$

$$\gamma_o = \mu \cdot (1 - \pi_0)$$

El sistema tiene un solo rendimiento, es decir el rendimiento a la entrada es igual al rendimiento a la salida.

$$\gamma_i = \gamma_o = \gamma$$

Teoría de Colas

Independientemente de la metodología utilizada o el lugar donde se realice el calculo, el rendimiento tiene que dar lo mismo.

Todos los clientes que ingresan dentro del tiempo de funcionamiento del sistema deben ser atendidos dentro de ese tiempo.

La unidad del rendimiento es cli / seg.



Teoría de Colas

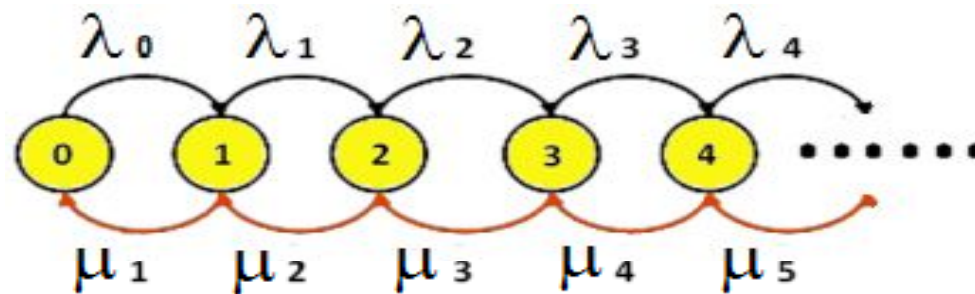
Sistemas dependientes de estado: Son sistemas en los cuales la tasa de arribos y la tasa de servicios no son constantes sino variables que dependen del estado del sistema y carecen de parámetros.

Los sistemas dependientes de estados presentan una analogía con los sistemas nacimiento/muerte, por tal motivo también se los llaman de esa manera.

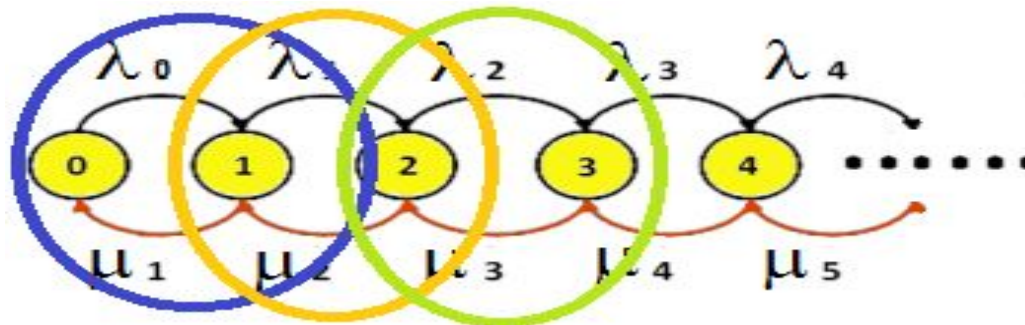
En los sistemas de nacimiento/muerte la tasa de natalidad equivale a la tasa de arribos (λ) y la tasa de mortalidad equivale a la tasa de servicio (μ) y depende del tamaño poblacional (cuando mayor es la población entonces mayor son las tasa).

Teoría de Colas

Deducción de estado para sistemas dependientes de estado



Deducción de la formula n



Teoría de Colas

Entradas

=

Salidas

$$\lambda_0 \cdot \pi_0 = \mu_1 \cdot \pi_1$$

$$\frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot \pi_0 = \pi_1$$

$$\lambda_1 \cdot \pi_1 = \mu_2 \cdot \pi_2$$

$$\frac{\lambda_1}{\mu_2} \cdot \pi_1 = \pi_2$$

$$\frac{\lambda_1}{\mu_2} \cdot \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot \pi_0 = \pi_2$$

Teoría de Colas

$$\lambda_2 \cdot \pi_2 = \mu_3 \cdot \pi_3$$

$$\frac{\lambda_2}{\mu_3} \cdot \pi_2 = \pi_3$$

$$\frac{\lambda_2}{\mu_3} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\mu_2} \cdot \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot \pi_0 \right) = \pi_3$$

$$\pi_3 = \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3} \cdot \pi_0$$

Teoría de Colas

$$\pi_n = \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_n} \cdot \pi_0$$

$$\pi_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{j=1}^n \mu_j} \cdot \pi_0$$

Formula dependencia de estado
o Formula Nacimiento/Muerte

Preguntas

