Modelizacin 2020 - resumen de la materia

Cálculo Numérico (Universidad Abierta Interamericana)

Modelización numérica

ANGELILLO

ANA.ANGELILLO@UAI.EDU.AR (ENVIAR MAIL CON TÍTULO MATERIAL DE CATEDRA)

373 – LUNES - MIÉRCOLES (HASTA 22.20)

DESPUÉS DE LAS 19.30 → PONE AUSENTE

4 FALTAS POSIBLES

03-02-2020 - Clase 1

1er Parcial 7ma clase.

Penúltima 2do parcial. Nos da las formulas

Ultima recuperatorio.

Los parciales tienen parte teórica (5 preguntas) y practica (5 ejercicios).
Para aprobar, se aprueba con 3 bien de cada uno. 2 regulares hacen 1 bien.

Si se reprueba 1 de las 2 partes, se recupera solo la que se desaprobó.

El recu tiene solamente lo que hicimos mal.
Si el promedio da entre 4 y 5.99 → final completo

Si el promedio da 6 a 8.99, da teórico solo.

Si el promedio da mas de 9, da solamente las 2 primeras preguntas teóricas.

UNIDAD 1

- Sistemas
  - concepto
  - clasificación (repaso)
- Modelo
  - concepto
  - clasificación

- Simulaciones (concepto)
- Pasos para desarrollo de modelo
- Técnica de Montecarlo
  - series de números aleatorios
  - series de números pseudoaleatorios
  - lenguajes de simulación

UNIDAD 2

- Teoría de colas
  - Introducción
  - Notación de kendall
  - Sistemas M/M/1
    - Características
    - Esquema básico
    - Parámetros
    - Utilización del sistema
    - Tiempo medio de servicio
    - Congestionamiento
    - Diagrama de estados
    - Equilibrios (Conceptos)
      - Estático
      - Dinámico
    - Ecuación de steady-state (estado estable)
    - Ecuación general de estado
    - Formula de π n en función de n
    - Gráfico de π n = F(n)
  - Sistemas M/M/1/N
    - Características
    - Esquema básico
    - Dinámica del sistema
    - Cálculo de π n
    - Cálculo de π0 y **Pb**
  - Rendimiento *(Hasta 5ta clase)*
    - Concepto
    - Rendimiento a la entrada
    - Rendimiento a la salida

(6ta clase)

- Repaso

(7ma clase)

- **1er parcial**

(8va clase en adelante)

- Sistemas dependientes de estado
  - Concepto
  - Diagrama de estados
  - Fórmula para el cálculo de π n
- Sistemas m/m/2
  - Concepto
  - Esquema básico
  - Cálculo de **μ** (“mu”)s i **ρ** (“Rho”) s
- Sistemas M/M/2 con servidores de la misma velocidad
  - E(n) y E(t)
- Sistemas M/M/2 con un servidor rápido y uno lento
  - Evaluación de sistema M/M/1
    - Cálculo de **ρ** critico
    - Evaluación de la conveniencia de agregar el servidor lento
    - Diferentes configuraciones
    - Diagramas de estados
    - Cálculos de **ρ** critico
    - Cálculo de π**0** y N (ene raya) de la M/M/2
- Sistemas M/G/1
  - Características
  - Calculo de E(n) y E(t)
- Sistemas M/D/1
  - Características
  - Calculo de E(n) y E(t)
- Sistemas de colas con prioridades
  - Concepto
  - Sistemas con interrupción de servicio
  - Sistemas sin interrupción de servicio
  - Calculo de W1 y Wq1
- Sistemas complejos

    - Unión de trafico
    - Partición de trafico
    - Retroalimentación
- Sistemas de colas tándem
    - Concepto
    - Esquema básico
    - Diagrama de estados
    - Cálculo de $\pi_{i,j}$

Hasta acá la clase 10

Clase 11

- Repaso

Clase 12

- Parcial

Clase 13

- Recuperatorios y evaluación de TP machine learning
- Redes de colas

Buscar
- Machine learning en Azure

Investigación operativa = sentido común cuantificado

Sistema: Es un conjunto de elementos relacionados entre si para el logro de un objetivo común.

Los sistemas pueden ser:

- Abiertos: Intercambian elementos y/o información con el medio.
- Cerrados: No intercambian ni elementos ni información con el medio.
- Aislados: no intercambia ni materia ni energía con el medio (lo usan los químicos).

Modelo: Es una representación simbólica y simplificada de un sistema o de una realidad.

Simbólica: No se utilizan los elementos propios del sistema, sino otros que pueden tomar su lugar (Un símbolo es cualquier elemento capaz de tomar el lugar de otro).

Simplificada: No se consideran todos los elementos del sistema ni todas sus características, sino solamente aquellas que interesan para la aplicación que se le va a dar al modelo.

Puede haber mas de un modelo de un mismo sistema.

Ej: Diferentes mapas de la República Argentina.

Clasificación de modelos

- *Abstractos*: Son intangibles. No están hechos de materia.
  - Matemáticos:
    - Analíticos (fórmulas): Se obtienen por lo general mediante la técnica de los incrementos finitos, es decir que se plantean las ecuaciones diferenciales

representativas del sistema y al resolverlas se obtienen las fórmulas que se aplican para el cálculo de los valores de las variables.

<u>Simuladores</u>*: un modelo numérico o simulador es un programa representativo de un sistema. Es un modelo apto para ser procesado por computadora.*

Cuando obtener las ecuaciones diferenciales resulta muy complicado por la cantidad de variables del sistema, se suele recurrir al desarrollo de un simulador, lo cual es mas sencillo.

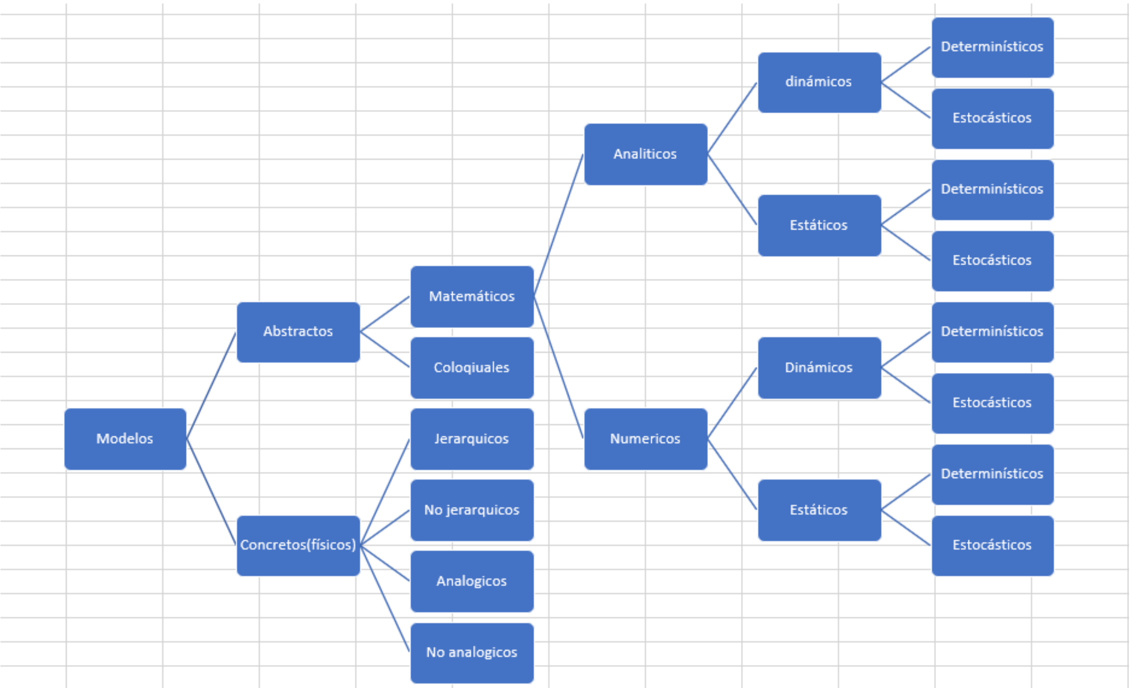
        - Numéricos (si tengo muchas variables y no puedo definir un método analítico): programas (simuladores).

    - Coloquiales: están hechos de palabras. Ej: un manual de normas y procedimientos (Cualquier descripción que se haga con palabras).
- *Concretos*: Aquellos que son tangibles. Están hechos de materia. También pueden llamarse <u>modelos físicos</u>.
    - Modelos físicos
        - Icónicos (referido a la forma): Los modelos icónicos son aquellos que han perdido al menos una dimensión. Ej: Representar un edificio con planos (No se visualiza la altura), mapas.
        - No icónicos (referido a la forma): Son aquellos que no han perdido dimensiones. Ej: Una maqueta de una casa.
        - Analógicos (referido a la dinámica): Ej: un termómetro de mercurio, en el cual se mide la dilatación del mercurio.
          Un sistema puede representarse por medio de otro sistema que no tiene un parecido en cuanto a su forma, pero si es similar su dinámica.
          Un ejemplo podría ser la representación de un sistema hidráulico, por medio de un circuito eléctrico.
            - Cauce del rio = cable
            - Represa = capacitor

- Agua = corriente eléctrica
- Estrechamiento de rio = resistencia
- Caudal = intensidad de corriente

▪ No analógicos (referido a la dinámica): son tanto el icónico como el no icónico.

- 05-02-2020 - Clase 2



Modeo estatico:

Es aquel que no es en función del tiempo. Es decir que el valor de sus variables no cambia en función del tiempo.

Ej ➔P.V = n.R.T

P = presión

V= volumen

N = moles

R = cte

T = Temperatura

En la formula no hay tiempo

Modelo Dinámico:

Los modelos dinámicos son aquellos en los cuales las variables son función del tiempo. A medida que transcurre el tiempo, sus valores van cambiando.

Ej ➔ $X(t) = X0 + V0\ (Tf – Ti) + ½\ (Tf – Ti)^2$

M.R.U.V

En esta fórmula hay tiempo

Modelo Determinístico:

Es aquel que no es función de probabilidad. Es decir que las probabilidades no intervienen.

Modelos Estocásticos:

Son aquellos que son función de probabilidad.

Información:

Es la reducción de la incertidumbre que tiene un receptor sobre alguna cuestión en particular, aportada por un símbolo(dato) de una fuente.

Es función logarítmica de la inversa de la probabilidad de aparición de un símbolo(dato) de una fuente.

$I_r(s) = LOG_r(1 / P(s))$ ➔ I sub r ➔ LOG sub r

- Si r = 10 , entonces:

  $I_{10}(s) = \log_{10}(1/P(s))$ → Hartley

- Si r = e , entonces:

  $I_e(s) = \ln(1/P(s))$ → nat (natural)

- Si r = 2 , entonces:

  $I_2(s) = \log_2(1/P(s))$ → bit (binary unit) o Shannon

- Si r = 3 , entonces: unidad trinaria de información
- Si r = 7 , entonces: unidad 7-aria de información
- Si r es la base ➔ unidad r-aria de información

En el parcial, si nos da un sistema para clasificar:

Si dice probabilidad, es estocástico

Si esta el tiempo, es dinámico

Si no está el tiempo, es estático.

Pasos para el desarrollo de un modelo

1) Tomar conocimiento del sistema
2) Fijar los límites del sistema. Si el sistema es abierto, hay que cerrarlo.
3) Reducir las variables para hacer más manejable el modelo.
4) Desarrollo del modelo
5) Prueba del modelo. Puede ocurrir:
    a. Que los resultados se aproximen mucho a los esperados, en ese caso se acepta el modelo.
    b. Que los resultados se aparten de los valores esperados más de lo deseado, pero que la dinámica este respetada (que tenga lógica el resultado). Puede deberse a que se haya suprimido alguna variable que incidía mucho, en ese caso se incorpora la/las variables y se vuelve a probar.
    c. Que los resultados no respeten la dinámica del sistema, es decir que no tengan lógica. En ese caso se desecha el modelo y se vuelve a empezar.

Hasta acá, la explicación del cuadro jerárquico de categorías de modelos.

Tecnica de Montecarlo

Es una metodología para el desarrollo de simuladores que no utiliza datos de la realidad (ni tomados de un archivo, ni introducidos arbitrariamente), sino que utiliza valores de variables aleatorias los cuales son generado a lo largo de la corrida del programa en base a series de números aleatorios o de números pseudo-aleatorios, los cuales también son generados durante la corrida del programa.

Series de números aleatorios

Una serie de números aleatorios se genera siempre por métodos físicos, como ser hacer girar una ruleta o sacar bolitas con números de adentro de una bolsa. La serie tiene longitud infinita, es decir que el orden en que aparecen los números nunca se repite, a demás es imposible volver a generar una serie igual a otra que se haya obtenido.

Tiene el inconveniente que no permite probar el modelo utilizando dos veces o más la misma serie.

Para poder ser utilizado por computadora los valores tienen que obtenerse por métodos electrónicos, por ejemplo, muestreando la frecuencia o la amplitud de una señal de ruido.

Serie de números pseudo-aleatorios

Son series generadas por medio de un algoritmo. Tienen la particularidad que su longitud es finita, es decir que al cabo de una cierta cantidad de números vuelve a repetirse en el mismo orden (como ocurre con los números periódicos). A demás puede generarse la misma serie tantas veces como se quiera porque utilizando las mismas entradas, siempre se obtienen las mismas salidas. La serie no es verdaderamente aleatoria, pero puede ser aceptada como tal si se cumplen 2 condiciones:

1) Tiene que tener un alto grado de desorden
2) Su longitud tiene que ser muy grande

Bajo estas 2 condiciones se los puede usar como números aleatorios.

Lenguaje de simulación

Pueden desarrollarse en lenguajes de propósitos generales o en lenguajes de propósitos específicos.

Los lenguajes de propósitos específicos tienen muchas rutinas desarrolladas y ahorran mucho tiempo de programación. El producto que se obtiene(programa) con el lenguaje de propósitos generales es mas flexible que el que se obtiene con el de propósitos específicos. Es más fácil conseguir un programador de propósitos generales que uno de propósitos específicos y el valor hora del de propósitos generales es menor que el valor hora del de propósitos específicos.

Algunos de los propósitos específicos son:

- GPSS
- SIMAN
- SIMSCRIPT
- SIMULA

UNIDAD 2 – TEORÍA DE COLAS

Sistema de colas

Son sistemas en los que hay uno o mas prestadores del servicio (servidores) y además hay quienes solicitan el servicio a los que vamos a denominar clientes.

Hay diferentes sistemas de colas, dependiendo de:

- La distribución de probabilidad de los arribos de los clientes
- Si la longitud de cola tiene un límite o es infinita
- Cuantos servidores hay
- La distribución de probabilidad de los tiempos de servicio
- Si hay una o más colas

De acuerdo a las características resultaría incomodo nombrarlas y por lo tanto se utiliza la notación de Kendall, que es una forma sintética de explicitar las características del sistema.

Ej: M/M/1

La primera M se refiere a la distribución de la probabilidad de los arribos.

La segunda posición me habla de la distribución de la probabilidad de los tiempos de servicio

El numero final, me indica cuantos servidores hay.

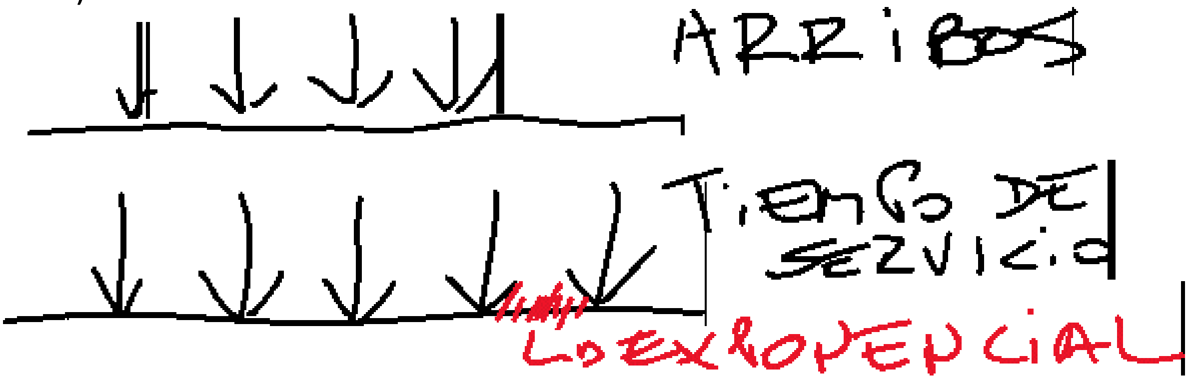
10-02-2020 - Clase 3

Sistemas M/M/1

La primera M proviene de Markov, y nos indica que los arribos son markovianos. Eso significa que se distribuyen en Poisson.

La segunda M también proviene de Markov. Indica que los tiempos de servicio son markovianos y esto implica que los tiempos de servicio tienen distribución exponencial.

El numero indica la cantidad de servidores. Si es 1, es un servidor (cola única)



Caracteristicas:

1) Los arribos se distribuyen poisson.
2) Los tiempos de servicio tienen distribución exponencial.
3) Hay un solo servidor y cola única.
4) Las salidas son independientes de las entradas.
5) La diciplina de atención es FIFO.

Los tiempos de servicio dependen de la velocidad del servidor, no del cliente. Ejemplo del empleado publico que tarda para hacer todo, haya mucha o poca cola de gente.

Si es cola, **FIFO**.

Si es pila, **LIFO**.

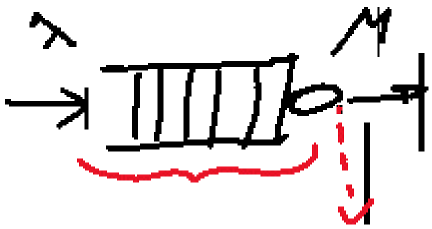
Tasa de servicio: velocidad del servidor. Con la velocidad que el mismo atiende.

Parámetros: son las constantes que caracterizan a un sistema. En la M/M/1 los parámetros son:

- **λ** (lamda) = tasa de arribos. Es la velocidad a la cual llegan los clientes (cualquiera que requiera un servicio).
  Números de clientes sobre unidad de tiempo.
  λ = n cli. / u. de tiempo
  Ej: λ = 3 cli/seg

- **μ** (mu) = tasa de servicio. Es la velocidad de trabajo del servidor, es decir, cuantos clientes puede atender el servidor, en promedio por unidad de tiempo. Cuantos clientes atiende cuando está ocupado.
  μ = n cli atendido / u. tiempo
  Ej: μ=10 cli / seg

Esquema básico

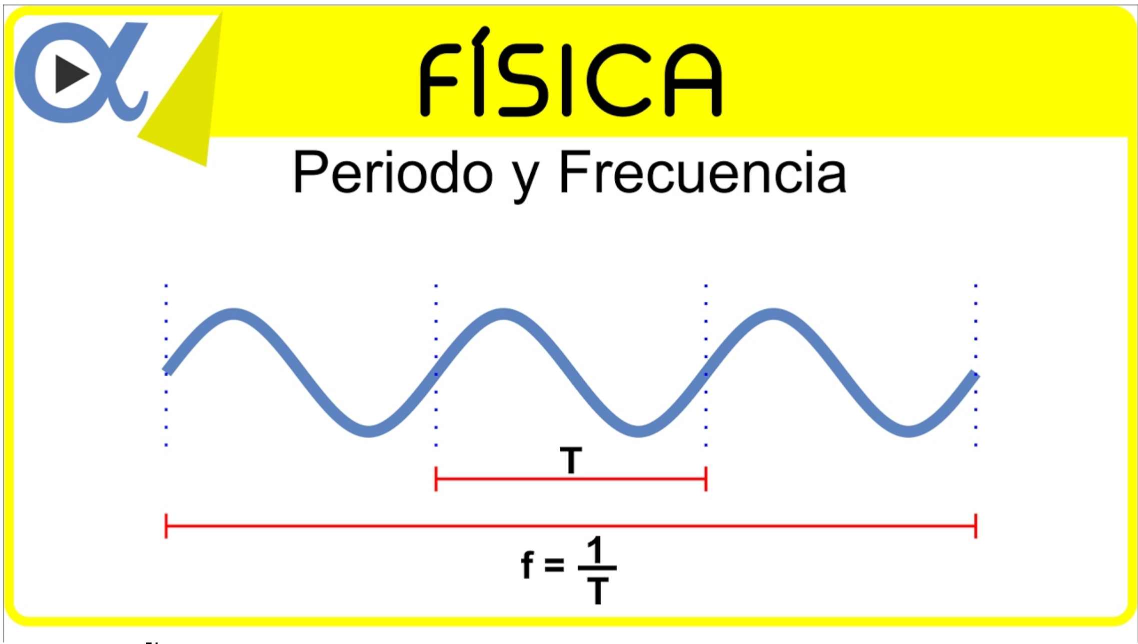


Area de espera Servidor

Tiempo medio de servicio(T_s): es el tiempo que en promedio tarda el servidor para atender a cada cliente.

T_s = tiempo medio / 1 cliente

Entoncces $\mu = 1 / T_s$ ➔ $T_s = 1 / \mu$



T = tiempo / 1 ciclo

F = n de ciclos /u tiempo

Utilización del sistema (o factor de tráfico)

Es la relación que existe entre la tasa de arribos y la tasa de servicio.

ρ (“Rho”) = **λ** / µ

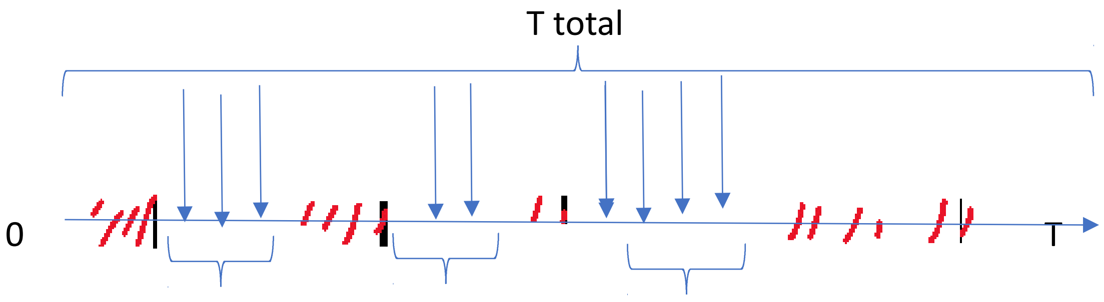
Lo deseable es que **ρ** este entre 0 y 1

Congestionamiento

Un sistema de colas se congestiona cuando la cola tiende a infinito, es decir que crece indefinidamente.

Una M/M/1 se congestiona si y solo si **ρ** (roh) >= 1

- *1er caso ρ > 1*: La velocidad de llegada es mayor que a velocidad de trabajo del servidor. Por lo tanto, la cola crece indefinidamente.
- *2do caso ρ = 1*: se congestiona porque si bien λ = μ, están λ y μ calculadas sobre tiempos diferentes; λ considera el tiempo total del funcionamiento del sistema y μ toma en cuenta solamente el tiempo de efectiva ocupación del servidor.



$\Delta t_1 \quad \Delta t_2 \quad \Delta t_3$

λ = n cliente arribo / T total

μ = n cliente atendido / ($\Delta t1 + \Delta t2 + \Delta tn$)

$$T_{total} > \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i \wedge \lambda = \mu$$

⇨ N cliente arribo > N cliente atendido

➢ Se congestiona.

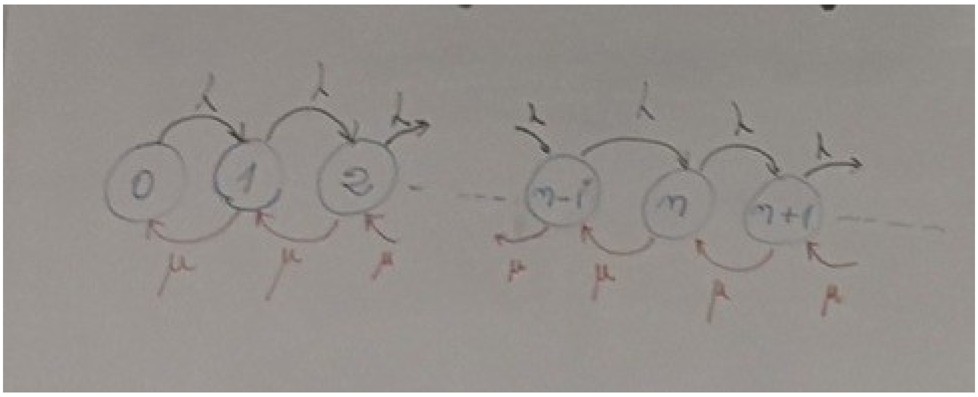
Eso ocurre porque los tiempos muertos no se recuperan nunca más.

Estado de un sistema

Es el conjunto de valores que toman sus variables en un instante determinado.

En una m/m/1 la variable que se considera es el número de clientes que hay en el sistema.

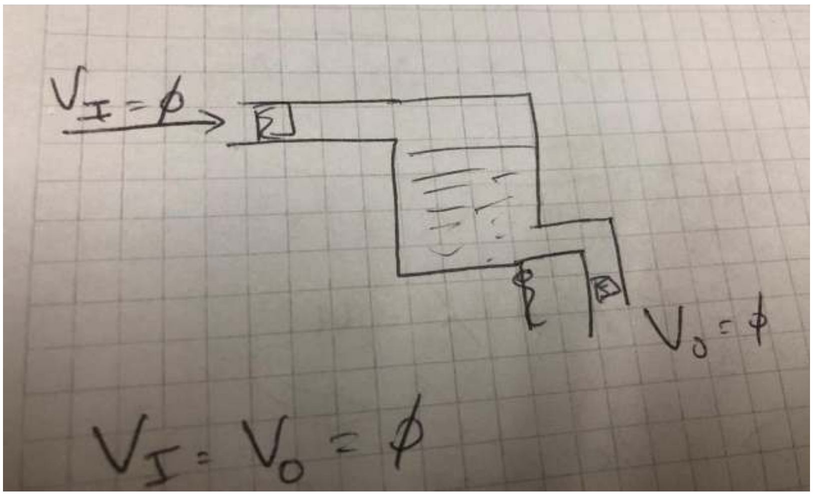
Diagrama de estados



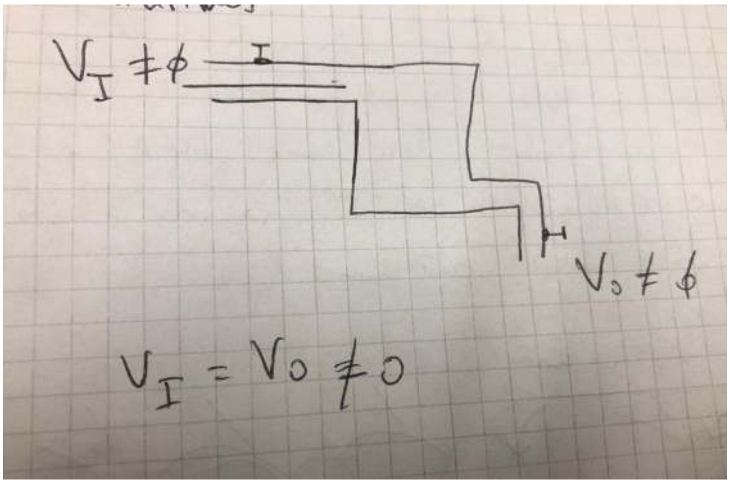
Equilibrio

Se considera que un sistema se considera en equilibrio cuando los valores de sus variables no cambian a través del tiempo.

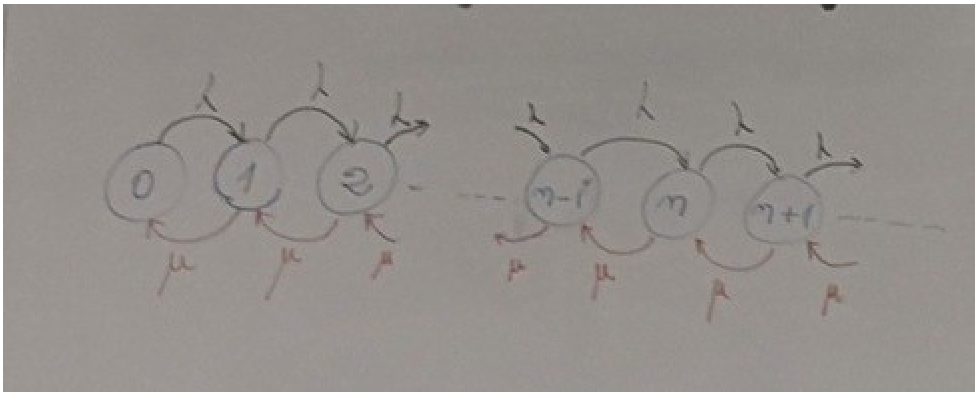
- *Equilibrio Estático*: se produce cuando no hay cambios cuantitativos ni cualitativos.



- *Equilibrio dinámico*: se produce cuando existen cambios cualitativos, pero no hay cambios cuantitativos.



Ecuación de strady-state (estado estable)



El sistema se encuentra en equilibrio dinámico.

Las entradas deben ser iguales a las salidas.

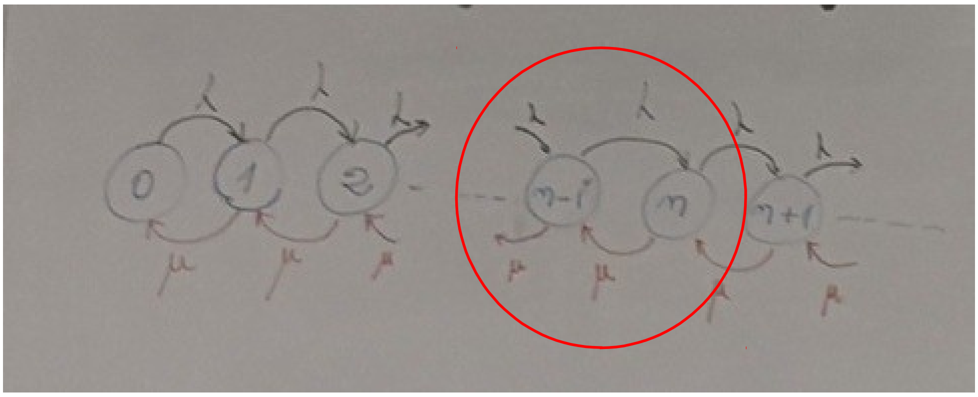
ENTRADAS = SALIDAS

$$\lambda \cdot \Pi_{n-1} + \mu \Pi_{n+1} = \lambda \Pi_n + \mu \Pi_n$$

$$\lambda \Pi_{n-1} + \mu \Pi_{n+1} = (\lambda + \mu) \Pi_n$$

$$\frac{\lambda \Pi_{n-1} + \mu \Pi_{n+1}}{\lambda + \mu} = \Pi_n$$

Ecuación general de estado



$$\lambda \Pi_{n-1} = \mu \Pi_n$$

$$\frac{\lambda}{\mu} \Pi_{n-1} = \Pi_n$$

$$\rho \Pi_{n-1} = \Pi_n \Rightarrow \boxed{\Pi_n = \rho \Pi_{n-1}}$$

Formula de $\pi_n = F_{(n)}$

$\pi_n = \rho\ \pi_{n-1}$

$\pi_0 = 1 - \rho$

$\pi_n = F_{(n)}$

$\pi_0 = 1 - \rho$

$\pi_1 = \rho\ \pi_0 = \rho\ (1- \rho)$

$\pi_2 = \rho\ \pi_1 = \rho.\ \rho\ (1- \rho) = \rho\text{^}2\ (1- \rho)$

$\pi_3 = \rho\ \pi_2 = \rho.\ P\text{^}2\ (1- \rho) = \rho\text{^}3\ (1- \rho)$

.

.

.

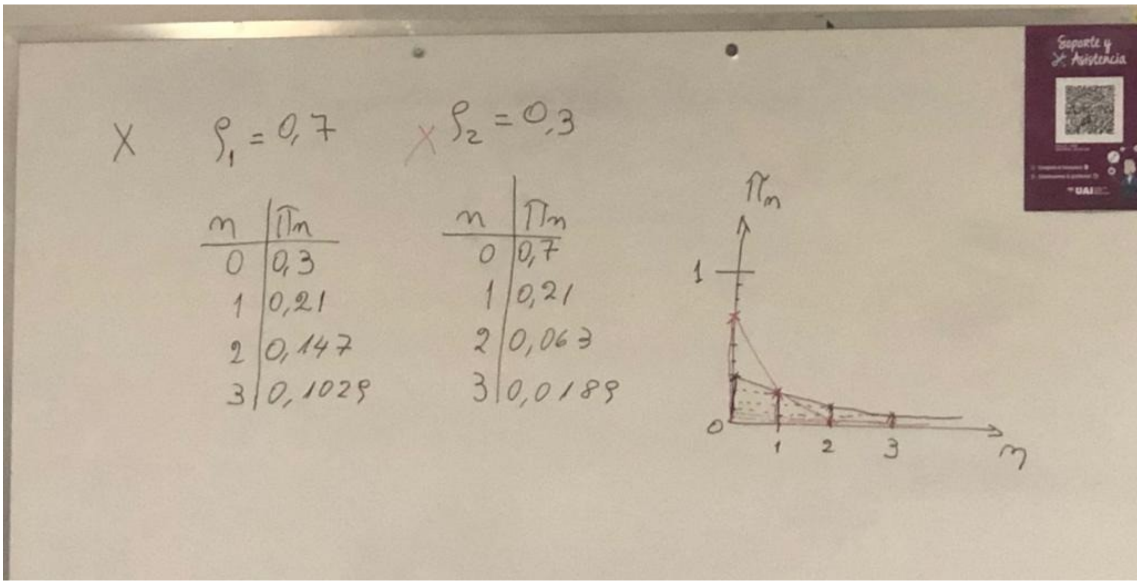
$\pi_n = \rho\text{^}n\ (1- \rho)$

Graficar $\pi_n = F(n)$, en un solo par de ejes siendo $\rho_1 = 0{,}7$ y $\rho_2 = 0{,}3$.

ρ_1 = 0,7 (multiplico por el anterior, salvo el 1ro)	
0	0,3
1	0,21
2	0,147
3	0,1029

ρ_2 = 0,3	
0	0,7
1	0,21
2	0,063

3	0,0189



12-02-2020 - Clase 3

Teorema de Little

El numero medio de clientes en una M/M/1 es directamente proporcional al tiempo medio de permanencia de los clientes en el sistema.

N = λ . W

N = nro medio de clientes en el sistema

λ = tasa de arribos

w = tiempo medio de permanencia de los clientes en el sistema

Ejemplo: Sea una M/M/1 que habiendo sido observada durante 30 segundos se ha obtenido la siguiente tabla de valores:

i = numero de orden de llegada	Tai = cuando llega luego de la apertura	Tsi = cuanto tarda para realizar el servicio	IN = hora de ingreso al servicio	OUT = a la hora que sale del servicio	Wi = todo el tiempo que estuvo dentro
Dato			Lo tengo que calcular yo		
1	3	5	3	8	5
2	6	3	8	11	5
3	11	5	11	16	5
4	19	4	19	23	4
5	22	5	23	28	6

Completar la tabla y hallar **N**

Tiempo de observación = 30 segundos

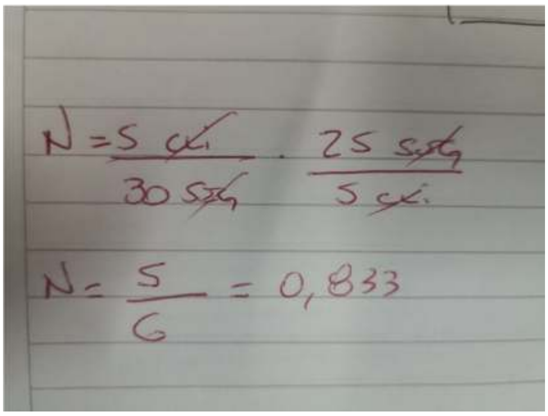
Todos los tiempos están en segundos.

λ = nro de clientes / Tiempo de observación.

λ	5 cli
	30 seg

$$w = \frac{\sum_{i=1}^{n} -\omega_i}{n}$$

W	25 seg
	5 cli



Ejemplo 2:

Tiempo de observación = **20 segundos**

i = numero de orden de llegada	Tai = cuando llega luego de la apertura	Tsi = cuanto tarda para realizar el servicio	IN = hora de ingreso al servicio	OUT = a la hora que sale del servicio	Wi = todo el tiempo que estuvo dentro
Dato			Lo tengo que calcular yo		
1	5	2	5	7	2
2	7	3	7	10	3
3	12	4	12	16	4
4	16	3	16	19	3
					$\sum = 12$

El $\sum = 12$ incluso puede ser mayor al 20 del tiempo de observacion, porque no solo se suma el tiempo del servidor sino que también el tiempo de espera de los que están afuera.

$$N = \lambda \cdot W$$

λ	4 cli
	20 seg

W	12 seg

	4 cli

N = (4 cli / 20 seg) . (12 seg / 4 cli)

N = 0,6

Problema 1:

Sea una M/M/1 tal que la tasa de arribos es 10 clientes /seg y la tasa de servicio es 16 clientes /seg.

Hallar:

a) Π_0 = 0,375
b) La probabilidad de que en el sistema haya al menos un cliente = 0,625 (probabilidad de Π_0)
c) La probabilidad de que en el sistema haya al menos un cliente y a lo sumo 4. 0,52962 (Sumatoria de $\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4$)
d) La probabilidad de que en el sistema haya como mínimo 3 clientes y a lo sumo 5. 0,18452 (Sumatoria de $\Pi_3 + \Pi_4 + \Pi_5$)
e) La probabilidad de que en el sistema haya menos de 3 clientes. Para sacar el E, hago 1 – la suma de todos los Π que me pide. 0,7558 .

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad \frac{10 \text{ clientes/seg}}{16 \text{ clientes/seg}} = 0{,}625$$

$$\boxed{\rho = 0{,}625}$$

$$\pi_0 = 1 - \rho$$

$$\boxed{\pi_0 = 0{,}375}$$

$$\pi_n = \rho^n \underbrace{(1-\rho)}_{\pi_0} \Rightarrow \pi_1 = 0{,}625^1 \cdot 0{,}375 = \boxed{0{,}23437}$$

$$\pi_2 = 0{,}625^2 \cdot 0{,}375 = \boxed{0{,}14648}$$

$$\pi_3 = 0{,}625^3 \cdot 0{,}375 = \boxed{0{,}09155}$$

$$\pi_4 = 0{,}625^4 \cdot 0{,}375 = \boxed{0{,}05722}$$

$$\boxed{\Sigma = 0{,}52962}$$

$$\pi_5 = 0{,}625^5 \cdot 0{,}375 = \boxed{0{,}03576}$$

$$E = 1 - (\pi_0 + \pi_1 + \pi_2)$$

$$E = 1 - (0{,}375 + 0{,}23437 + 0{,}14648)$$

$$\boxed{E = 0{,}2441}$$

$\pi_0 = 1 - \rho$

$\pi_1 = \rho \cdot \pi_0 = \rho.(1-\rho)$

Si quiero la probabilidad de al menos 1 => 1 – P(ninguno) => 1- π_0

Si quiero la probabilidad de a lo sumo 1 => $\pi_0 + \pi_1$

P(al menos 3) = 1- [$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2$]

P(mas de 3) = 1- [$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$]

P(3 <= x <= 5) = $\pi_3 + \pi_4 + \pi_5$

Problema 2:

Sea una M/M/1 tal que la probabilidad que haya uno y solo un cliente en el sistema es 0,24, hallar la probabilidad que en el sistema haya como mínimo 3 clientes.

Nos esta dando como dato π_1

π_1= 0,24 (me lo da el enunciado)

HOJA carpeta 1 – PROBLEMA 2

PROBLEMA 3

Sea una M/M/1 tal que la probabilidad que en el sistema haya K clientes en el sistema es 0,16. La probabilidad que haya K+ 2 clientes en el sistema es 0,08.

Hallar la probabilidad que en el sistema haya k-1 cliente

HOJA carpeta 1 – PROBLEMA 3

PROBLEA 4

Sea una M/M/1 tal que la probabilidad que haya uno y solo 1 cliente en el sistema es 0,22. Graficar $\pi n = F(n)$ en un único par de ejes para todos los sistemas posibles (todas las soluciones posibles).