# Herramientas básicas de combinatoria

En estas notas introduciremos algunas herramientas básicas necesarias para encarar la resolución de problemas combinatorios. El objetivo es mostrar al lector la necesidad de ir incorporando estas herramientas a través de diversos ejemplos. Específicamente introduciremos dos principios básicos: el de adición y el de multiplicación. Luego veremos cómo dos estructuras combinatorias como las permutaciones y las combinaciones, usadas junto con estos dos principios, nos permitirá resolver problemas combinatorios algo más complejos.

## 1. Principios básicos

### 1.1. Principio aditivo

Supongamos que queremos contar el número total de cursos ofrecidos por la **UNGS**. Asumiendo que no hay cursos que sean ofertados indistintamente por dos o más institutos, el número total de cursos ofrecidos por los **UNGS** es igual a la suma de la cantidad de cursos que dicta cada uno de los cuatro institutos que componen la universidad: **ICI**, **ICO**, **IDEI** e **IDH**. Demos un pequeño salto de abstracción que nos permita enunciar el principio básico de combinatoria utilizado para resolver este problema. Estamos interesados en contar la cantidad de elementos del conjunto formado por todos los cursos ofertados por la **UNGS**, llamémosle $S$. Pero este conjunto se puede partir en cuatro subconjuntos distintos, el subconjunto $S_1$ formado por los cursos ofertados por el **ICI**, el subconjunto $S_2$ formado por los cursos ofertados por el **ICO**, el subconjunto $S_3$ formado por los cursos ofertados por el **IDEI** y finalmente el subconjunto $S_4$ formado por los cursos ofertados por el **IDH**. Notemos que los conjuntos $S_i$'s satisfacen las siguientes dos condiciones: la unión de los cuatro subconjuntos nos da como resultado el conjunto $S$ y además $S_i \cap S_j = \emptyset$ para todo $i, j \in \{1,2,3,4\}$ con $i \neq j$; es decir, estos cuatro subconjuntos son disjuntos dos a dos. Esto se debe a que no hay cursos que sean ofertados por dos o más institutos. Esto nos da lugar a la primera definición. A una colección $S_1, S_2, \ldots, S_m$ de subconjuntos de un conjunto $S$ se la llama *partición del conjunto* $S$ si cada uno de los elementos de $S$ pertenece a exactamente uno de estos subconjuntos:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m,$$

$$S_i \cap S_j = \emptyset \text{ para todo} i \neq j.$$

Este concepto nos permitirá definir el siguiente principio, antes usado de manera intuitiva. Vamos a denotar por $|X|$ al número de elementos de un conjunto $X$.

**Principio 1.** *Principio aditivo: Dado un conjunto $S$ y una partición $S_1, S_2, \dots, S_m$ de $S$. Entonces el número de elementos de $S$ es igual a la suma de la cantidad de elementos de cada subconjunto $S_i$; es decir,*

$$|S| = |S_1| + |S_2| + \cdots + |S_m|.$$

## 1.2. Principio multiplicativo

Para ilustrar el principio multiplicativo vamos a comenzar por un ejemplo simple.

**Ejemplo 1.** *Una tienda de indumentaria ofrece cinturones en 5 modelos distintos y por cada uno de estos modelos hay 7 talles distintos ¿Cuántos tipos de cinturones ofrece la tienda?*

Claramente la respuesta a esta pregunta es $5 \cdot 7 = 35$. Esto es una consecuencia directa del principio aditivo, ya que por cada uno de los 5 modelos disponibles hay 7 talles distintos. Es decir que si particionamos el conjunto de los cinturones ofrecidos por la tienda en los 5 subconjuntos correspondientes a cada uno de los 5 modelos se sigue que, como cada uno de estos subconjuntos tiene un elemento distinto por cada uno de los 7 talles, la respuesta es $7+7+7+7+7 = 5 \cdot 7$. □

Enunciemos ahora el principio multiplicativo

**Principio 2.** *Principio multiplicativo: Si una colección de objetos puede ser particionada en $p$ diferentes tipos de objetos y a su vez cada uno de estos tipos de objetos pueden ser particionados en $q$ tipos diferentes, entonces hay un total de $p \cdot q$ diferentes tipos de objetos.*

Este principio incluso se puede utilizar cuando los objetos son clasificados mediante más de dos propiedades.

**Ejemplo 2.** *Un comercio ofrece tizas de tres largos distintos, por cada uno de estos largos ofrece cuatro diámetros distintos, a su vez cada uno de ellos se ofrece en ocho colores distintos. ¿Cuántos tipos diferentes de tizas ofrece el comercio?*

Como por cada uno de los tres largos distintos se ofrecen cuatro diámetros distintos lo que da un total de $3 \cdot 4 = 12$ tipos de tizas ofrecidas que difieren entre si en el largo o el diámetro. A su vez por cada una de estos 12 tipos de tizas se ofrece en 8 posibles colores distintos, y por lo tanto, se sigue del principio multiplicativo, que la respuesta a la pregunta es $3 \cdot 4 \cdot 8 = 96$ tipos diferentes de tizas. □

**Ejemplo 3.** *Calcular el número de divisores positivos del número 55115678475.*

Factorizando en primos este número se sigue que

$$55115678475 = 3^4 \cdot 5^2 \cdot 11^5 \cdot 13^2.$$

Sabemos por el principio fundamental de la aritmética que los divisores positivos son de la forma

$$3^i \cdot 5^j \cdot 11^k \cdot 13^\ell$$

con $i, j, k$ y $\ell$ enteros tales que $0 \leq i \leq 4$, $0 \leq j \leq 2$, $0 \leq k \leq 5$ y $0 \leq \ell \leq 2$. Como hay 5 posibles elecciones para $i$, 3 posibles elecciones para $j$, 6 posibles elecciones para $k$ y 3 posibles elecciones para $\ell$, se sigue por el principio multiplicativo que hay un total de $5 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3 = 270$ divisores positivos de 55115678475. $\square$

A veces resulta útil enunciar el principio multiplicativo en términos de eventos.

**Principio 3.** *Principio multiplicativo: Si un evento tiene p resultados posibles y un segundo evento que ocurre de manera independiente con respecto al primero puede ocurrir de q maneras distintas, entonces ambos eventos pueden ocurrir de $p \cdot q$ maneras distintas.*

**Ejemplo 4.** *Una persona que reside en Buenos Aires decide ir de vacaciones a Bariloche. El viaje de ida lo hará por avión y el de regreso por micro. ¿De cúantas formas puede realizar el viaje?, si hay 7 aerolíneas que cubre el tramo Buenos Aires - Bariloche y 10 empresas de ómnibus de larga distancia que cubre el tramo Bariloche - Buenos Aires.*

Como por cada una de las posibles elecciones entre las siete aerolíneas puede elegir independientemente de esta elección entre 10 compañías de ómnibus, se sigue, por el principio multiplicativo, que el viaje lo puede realizar de $7 \cdot 10 = 70$ formas distintas. $\square$

Notar que en esta forma de enunciar el principio multiplicativo es imprescindible que ambos eventos ocurran de forma independiente. Veamos que esto es así en un ejemplo simple. Supongamos que una persona tiene en su guardarropa 7 remeras y 5 pantalones para vestirse. Si esta persona no tuviera inconvenientes en combinar cualquier tipo de colores, la elección de la remera sería independiente de la elección del pantalón. En cambio, si esta persona no estuviera dispuesta a combinar determinados tipos de colores, la elección del pantalón estaría supeditada a la elección de la remera y viceversa. En este último caso no habría independencia entre ambos eventos involucrados.

Para finalizar esta sección consideremos algunos ejemplos más de aplicación directa del principio multiplicativo.

**Ejemplo 5.** *¿Cuántas palabras distintas de cuatro letras se pueden escribir usando las letras A, B, C y D, sin repetir ninguna de estas letras?*

Claramente, cada una de las cuatro letras ocupa una de las cuatro posiciones por cada palabra. Consideremos que las posiciones son enumeradas de la primera hasta la cuarta empezando por la izquierda. Para la elección de la letra que va en la primera posición tengo 4 posibilidades. Para la segunda letra, dado que las letras no pueden repetirse, tengo 3 posibles elecciones (por ejemplo: si pongo la A en el primer lugar en el segundo puedo poner las letras B, C o D). Para la tercera posición puedo elegir entre las dos letras restantes que quedan después de haber elegido una letra para que ocupe la primera posición y otra distinta para que ocupe la segunda posición. Finalmente, para la cuarta y última posición dispongo de la única letra restante. Se sigue por el principio multiplicativo que se pueden escribir $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ palabras distintas. $\square$

**Ejemplo 6.** *En una ciudad con muy pocos habitantes las patentes están formadas por tres letras de un alfabeto con 26 letras. ¿Cuántas patentes distintas se pueden fabricar?*

Dado que en este caso puede haber patentes con letras repetidas, razonando de forma análoga al ejemplo anterior deducimos que tenemos 26 posibles elecciones por cada una de las tres posiciones. Por lo tanto, por el principio multiplicativo, se sigue que hay un total de

$$26 \cdot 26 \cdot 26 = 17576$$

patentes distintas. $\square$

**Ejemplo 7.** *¿Cuál sería la respuesta a la pregunta del ejemplo 7 si no se admiten patentes con letras repetidas?*

Usando un argumento análogo al utilizado en el ejercicio 5 se sigue que la respuesta es
$26 \cdot 25 \cdot 24 = 15600$. $\square$.

### 1.3. Principio de sustracción

Ilustraremos el uso de este principio con unos ejemplos antes de dar su enunciado formal.

**Ejemplo 8.** *La clave para tener acceso a una cuenta bancaria es una cadena de 6 símbolos. Dichos símbolos son números del 0 al 9 o alguna de las 26 letras de un alfabeto. ¿Cuántas de las claves bancarias que se pueden formar tienen al menos un símbolo repetido?*

Consideramos el conjunto $U$ formado por todas las posibles claves bancarias y llamemos $A$ al conjunto formado por las claves bancarias que contienen al menos un símbolo repetido. Tratar de contar la cantidad de elementos en $A$ de manera directa parece ser una tarea compleja. Sin embargo, cambiando levemente el enfoque que hemos seguido en todos los ejemplos vistos hasta el momento, podemos restarle al número total de todas las posibles claves el total de claves que no tienen ningún símbolo repetido, al conjunto formado por dichas claves $U \setminus A$ los vamos a denotar por $\overline{A}$. Esta resta, claramente, arroja como resultado la respuesta a la pregunta que nos compete.

$$|A| = |U| - |\overline{A}| = 36^6 - 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 = 774372096. \quad \square$$

Dado un conjunto $U$ y un subconjunto propio de $A$ de $U$ definimos el *conjunto complemento* de $A$ respecto a $U$ como

$$\overline{A} = \{x \in U \colon x \notin A\}.$$

El principio de sustracción se puede enunciar formalmente como sigue.

**Principio 4.** *Dado un conjunto $U$ y un subconjunto $A$ de $U$, entonces $|\overline{A}| = |U| - |A|$.*

## 2. Permutaciones

En muchas ocasiones los problemas de conteo están directamente vinculados con el problemas de contar el número de permutaciones de una determinada cantidad de objetos. Ese es el motivo principal por el cual es muy conveniente poder identificar aquellos problemas de combinatoria donde aparecen las permutaciones y también saber cómo calcular el número total de ellas involucradas en el problema. Dados dos números naturales $r$ y $n$ con $r \leq n$ llamamos una *$r$-permutación* de un conjunto $S$ con $n$ elementos a un ordenamiento en hilera de $r$ elementos elegidos entre los elementos de $S$. Por ejemplo, si $S = \{a, b, c\}$ las tres 1-permutaciones son $a$, $b$ y $c$ y las seis 2-permutaciones son $ab$, $ac$, $ba$, $bc$, $ca$ y $cb$. Vamos a denotar por $P(n, r)$ al número de $r$-permutaciones de un conjunto con $n$-elementos, también se lo llama habitualmente el número de *permutaciones de $n$ elementos tomados de a $r$*.

Consideremos nuevamente el ejemplo 5. A la luz de este nuevo concepto que hemos introducido, podemos interpretar este problema como aquel de contar el número de permutaciones de cuatro elementos tomados de a cuatro. En este caso particular el conjunto de cuatro elementos considerado es $\{A, B, C, D\}$. Por lo tanto la respuesta a la pregunta es

$$P(4,4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

En este punto se vuelve necesario introducir un notación usada habitualmente en combinatoria, el factorial. Dado un número natural $n$ definimos el *factorial de $n$*, denotado por $n!$, como sigue: $1! = 1$ y $n! = n \cdot (n-1)!$ para todo $n \geq 2$. Por lo tanto $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ y $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Usando esta notación se concluye que $P(4,4) = 4!$.

Razonando de manera análoga, si consideramos el Ejemplo 7, se sigue que el número de patentes con las tres letras distintas coincide con el número de permutaciones de 26 elementos tomados de a 3. Por lo tanto $P(26,3) = 26 \cdot 25 \cdot 24$. Es interesante notar que, usando la notación del factorial,

$$P(26,3) = 26 \cdot 25 \cdot 24 = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23!}{23!} = \frac{26!}{23!}.$$

Vamos a usar la notación del factorial y consideraremos el problema de ordenar $r$ objetos distintos en hilera elegidos entre $n$ objetos distintos. Para que la fórmula del siguiente teorema tenga sentido, necesitamos definir $0! = 1$.

**Teorema 1.** *Para todo par de números naturales $r$ y $n$ con $r \leq n$,*

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

*Demostración.* Consideremos un conjunto con $n$ elementos distintos. A continuación vamos a contar de cuántas formas puedo ordenar $r$ de ellos en hilera. Para realizar esta cuenta vamos a recorrer la hilera de $r$ elementos de izquierda a derecha, claramente esta elección del recorrido se puede hacer sin pérdida de generalidad. Tenemos $n$ elecciones posibles para ubicar un elemento en el primer lugar, como ya ubicamos el primer elemento para el segundo lugar tenemos $n-1$ elecciones posibles, razonando inductivamente, vemos que para el lugar $r$, como ya hemos ubicados los primeros $r-1$ elementos, tenemos $n-r+1$ elecciones posibles. Ahora, usando el principio multiplicativo, concluimos que

$$P(n,r) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1).$$

Note que si $r = n$, obtenemos que $P(n,n) = n!$. Además

$$n! = P(n,r) \cdot (n-r) \cdot (n-r-1) \cdots 1 = P(n,r) \cdot (n-r)!.$$

Por lo tanto, concluimos que

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

□

Extenderemos la definición de $P(n,r)$ para dos enteros no negativos cualesquiera definiendo $P(n,0) = 1$ para todo número natural $n$.

**Ejemplo 9.** *¿De cuántas formas se pueden ordenar en hilera las 26 letras de un alfabeto de forma tal que ningún par de las vocales: a, e, i, o y u, aparezcan en forma consecutiva?*

Este tipo de problemas, al igual que muchos otros, se resuelve de manera simple una vez que descubrimos cuál es la forma más conveniente para contar todas las posibles permutaciones. En este ejemplo procederemos como a continuación. Primero ubicamos todas las consonantes dejando un espacio entre ellas. La cantidad total de estos ordenamientos es $21!$. Dado que estamos contando los ordenamientos donde no aparecen dos vocales consecutivas vamos a contar las formas de ubicar cada una de las cinco vocales en exactamente uno de los 22 espacios totales que quedan definidos por los 20 espacios entre dos consonantes consecutivas, el espacio delante de todas las consonantes y el espacio detrás de todas las consonantes. Consecuentemente, hay 22 espacios posibles para ubicar la a, 21 espacios posibles para ubicar la e, 20 espacios posibles para ubicar la i, 19 espacios posibles para ubicar la o y 18 espacios posibles para ubicar la u. Por lo tanto hay

$$22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 = P(22,5)$$

formas de ubicar las cinco vocales en los 22 espacios que quedan definidos por las 21 consonantes ordenadas en hilera. Deducimos a partir del principio multiplicativo que hay un total $21! \cdot \frac{22!}{17!}$ ordenamientos de las 26 letras del alfabeto sin que haya dos pares de vocales consecutivos. □

**Ejemplo 10.** *¿Cuántos números de 7 dígitos hay cuyos dígitos son todos distintos entre si y distintos de cero, donde además el 5 y el 6 no aparecen en forma consecutiva en ningún orden?*

Representemos la cadena de dos símbolos 56 como un solo objeto al que llamaremos $x$. Por lo tanto el problema de contar la cantidad de 6-permutaciones que contienen al símbolo $x$ del conjunto $\{1,2,3,4,x,7,8,9\}$, es igual a la cantidad de números con 7 dígitos distintos y diferentes de 0 donde el 5 y el 6 aparecen en forma consecutiva y en el orden natural. El símbolo $x$ puede ser ubicados en 6 lugares distintos por cada una de las $P(7,5)$ formas distintas de ubicar los 5 dígitos restantes. Luego, se sigue por el principio multiplicativo, que el número total de números con dígitos distintos entre si y distintos de cero y donde el 5 y el 6 aparecen en forma consecutiva y en el orden natural es $6 \cdot P(7,5) = 15120$. Note que, razonando de manera análoga, se sigue que la cantidad de 7-permutaciones donde el 5 y el 6 aparecen uno junto al otro en orden inverso, es decir primero el 6 y luego el 5, es también $6 \cdot P(7,5) = 15120$. Luego por el principio 4 se sigue que el número total de los números del enunciado es $P(9,7) - 2 \cdot 15120 = 151200$. □

# 3. Combinaciones

Mientras que una permutación es una selección de objetos ordenados en hilera, una *combinación* es una selección de objetos sin tener en cuenta el orden de estos. Dados dos números naturales

$r$ y $n$, con $r \leq n$, vamos a notar el número de combinaciones de un conjunto de $n$ objetos tomados de a $r$ por $C(n,r)$ o $\binom{n}{r}$. Las combinaciones de $n$ objetos tomados de a $r$ las vamos a llamar $r$-combinaciones. Consideremos por caso el conjunto $\{A,B,C,D,E\}$. Enumeremos exhaustivamente a continuación las diez 3-combinaciones de este conjunto,

$$ABC, ABD, ABE, ACD, ACE$$

$$ADE, BCD, BCE, BDE, CDE.$$

Notar que por cada una de estas ternas tengo 6 permutaciones posibles. Más aún, como el orden no es tomado en cuenta en una combinación, cada una de estas ternas puede ser representada por cualquiera de sus seis posibles permutaciones. Por ejemplo, las combinaciones $ABC$ , $ACB$, $BAC$, $BCA$, $CAB$ y $CBA$ son todas iguales. Por lo tanto, podemos concluir que $P(5,3) = C(5,3) \cdot 3!$. A continuación generalizaremos este argumento para hallar una fórmula explícita para $C(n,r)$.

**Teorema 2.** *Dados dos números naturales $r$ y $n$ con $r \leq n$*

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

*Demostración.* Vamos a probar la validez de esta fórmula calculando $P(n,r)$ de otra manera. Consideremos un conjunto $S$ con $n$ elementos. Una permutación de los objetos en $S$ tomados de a $r$ se puede obtener realizando las siguientes dos tareas en orden:

1. Eligiendo $r$ objetos entre los $n$ que están en $S$ y
2. ordenando en hilera los $r$.

   La tarea 1 se puede realizar de $C(n,r)$ formas distintas y la tarea 2 de $P(r,r) = r!$ formas distintas. Se sigue del Principio 3

   $$P(n,r) = \binom{n}{r} \cdot r!.$$

   Luego aplicando el Teorema 1 se concluye que

   $$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}.$$

□

**Ejemplo 11.** *¿Cuántas palabras de 8 letras, si se usa un alfabeto de 26 letras, se pueden escribir con al menos tres vocales y a lo sumo cinco?*

Consideremos primero las palabras de 8 letras que tiene exactamente 3 vocales, hay $\binom{8}{3}$ formas distintas de elegir las tres posiciones donde van las vocales. Además, las 3 posiciones donde van las vocales pueden ser completadas en $5^3$ formas distintas y las 5 posiciones donde van las consonantes se pueden completar en $21^5$ formas distintas. Por lo tanto, se sigue del principio multiplicativo que hay un total de

$$\binom{8}{3} \cdot 5^3 \cdot 21^5 = 28588707000$$

de estas palabras.

Razonando de manera análoga si sigue el número de estas palabras con exactamente cuatro vocales es

$$\binom{8}{4} \cdot 5^4 \cdot 21^4 = 8508543750$$

y el número de palabras con exactamente 5 vocales es

$$\binom{8}{5} \cdot 5^5 \cdot 21^3 = 1620675000$$

Finalmente, si sigue por el Principio 1 que el número total de palabras con al menos tres vocales y a lo sumo 5 es

$$28588707000 + 8508543750 + 1620675000 = 38717925750 \quad \square$$

**Nota:** Vamos a extender la definición de $C(n,r)$ a todos los enteros $r$ y $n$ de la siguiente manera. Definimos $C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$ para todo par de enteros no negativos $n$ y $r$ con $0 \leq r \leq n$. Notar que de esta definición se deduce que $C(n,0) = 1$ para todo entero no negativo $n$. Finalmente, definimos $C(n,r) = 0$ para todo par de enteros $n$ y $r$ con $n < r$ o $r < 0$ o $n < 0$.

Se de deduce inmediatamente de la fórmula del teorema 2 la siguiente propiedad

**Corolario 1.** *Para todo par de enteros $r$ y $n$ con $0 \leq r \leq n$,*

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

Note que el resultado anterior tiene una interpretación. Consideremos por caso el conjunto $\{A,B,C,D,E\}$, las 3-combinaciones se corresponden biyectivamente con las dos combinaciones. Debajo listamos todas las 3-combinaciones y colocamos por cada una de ellas a la derecha y entre paréntesis los dos elementos que quedan sin elegirse por cada una de las 3-combinaciones. Esto claramente establece que hay tantas 3-combinaciones como 2-combinaciones, dado que por cada una de las 3-combinaciones hay 2 de los 5 elementos del conjunto que no están presentes en dicha combinación. Además, no hay dos 3-combinaciones distintas que se obtengan dejando sin elegir el mismo par de elementos. Recíprocamente por cada 2-combinación hay tres elementos que no fueron elegidos y que forman una 3-combinación.

$$\begin{array}{lll}
A,B,C,(D,E) & A,B,D,(C,E) & A,B,E,(C,D) \\
A,C,D,(B,E) & A,C,E,(B,D) & A,D,E,(B,C) \\
B,C,D,(A,E) & B,C,E,(A,D) & B,D,E,(A,C) \\
C,D,E,(B,C) & & 
\end{array}$$

Este razonamiento se puede generalizar como sigue. Dado un conjunto con $n$ elementos y $r$ un entero tal que $0 \leq r \leq n$, a cada $r$-combinación le podemos asignar una $n-r$-combinación formada por los $n-r$ elementos del conjuntos que no están presentes en la $r$-combinación. Además, no existen dos $r$-combinaciones distintas que no tengan presentes los mismos $n-r$ elementos del conjunto. Recíprocamente, como a cada $n-r$-combinación se le asigna la $r$-combinación formado por los $r$-elementos no elegidos de la $n-r$-combinación se sigue que el número de $r$-combinaciones es igual al de $n-r$-combinaciones. De esta manera queda establecida un biyección entre el número de $r$-combinaciones y $n-r$-combinaciones de un conjunto con $n$ elementos.