Colonias y colmenas

Fernando Elizalde Ramírez

Diseño de algoritmos matemáticos bioinspirados
Departamento de Matemáticas
Tecnológico de Monterrey

August 30, 2023

Swarm Intelligent ("Enjambre inteligente")

- Modela la población de agentes interactivos o enjambres que son capaces de autoorganizarse.
- Algoritmos inspirados en el comportamiento colectivo de especies como hormigas, abejas, avispas, entre otros. En particular, nos enfocaremos en hormigas y abejas.
- Comportamiento social de especies que compiten por alimentos, donde las especies son agentes simples y no sofisticados que cooperan mediante una comunicación indirecta.

Colonia de Hormigas

- Las hormigas están enfocadas al desarrollo de la colonia como un todo.
- Tienen la habilidad de encontrar el camino más corto entre el hormiguero y la comida. En su recorrido, las hormigas depositan una sustancia llamada feromonas que todas pueden oler y este rastro les permite volver al hormiguero desde el punto donde se encuentra la comida.
- Cada vez que una hormiga llega a una intersección, decide el camino a seguir de un modo probabilístico. Los caminos que tienen mayor probabilidad de ser elegidos son aquellos que tienen mayor rastro de feromona.
- Las conexiones más prometedoras son las que están más cercanas a la comida y por tanto, van acumulando más feromonas al ser recorridas por más hormigas. Las menos prometedoras pierden feromonas por evaporación.
- La acción continua de la colonia da lugar a un rastro de feromona que permite a las hormigas encontrar un camino cada vez más corto.

Colonia de hormigas artificial

- Metaheurística inspirada en el comportamiento de las hormigas.
- Procedimientos de construcción estocástico de soluciones, lo que permite construir una amplia variedad de soluciones diferentes y por tanto, explorar una cantidad mucho mayor de soluciones que las heurísticas convencionales.
- Las hormigas encuentran la ruta más corta hacia su alimento basada en una comunicación indirecta.
- Las feromonas sirven como información numérica que las hormigas utilizan para construir soluciones probabilísticas al problema de optimización, las cuales son adaptadas durante la ejecución del algoritmo para reflejar su experiencia de búsqueda.

Colonia de hormigas artificial

- El uso de información heurística puede guiar a las hormigas hacia soluciones más prometedoras y su experiencia de búsqueda se puede influir para la construcciones de la solución en futuras iteraciones.
- Se sigue una política de construcción en función de las restricciones del problema pero, si es necesario, se pueden generar soluciones no factibles.
- Las hormigas se mueven concurrente e independientente y cada una es lo suficientemente compleja como para encontrar una solución al problema. Las soluciones buenas surgen como resultado de la interacción colectiva entre las hormigas y se obtiene a través de la comunicación indirecta mediada por la información que las hormigas lee/escriben en las variables que almacenan los valores del rastro de feromonas.

Las principales componentes del algoritmo son:

- Construcción de soluciones: Se mueven aplicando una política de decisión local estocástica usando el camino de feromonas e información heurística. Una vez que se construye una solución, ésta se evalúa ya que será usada para el procedimiento de actualización de feromonas (decidir cuanta feromona se depositará)
- Actualización de feromonas: El rastro se modifica. Los valores de los caminos se pueden incrementar conforme las hormigas depositan feromonas o pueden disminuir por la evaporación.
- Acciones independientes: Procedimientos utilizados para implementar acciones centralizadas que no pueden ser hechas por una sola hormiga.

Aspectos generales

- Disponemos inicialmente de k hormigas.
- A cada paso cada hormiga elige una ciudad no visitada anteriormente.
- Tras n pasos todas las hormigas han completado un ruta.
- Se procede a la modificación de la feromona.

A cada paso se elige una ciudad

- ¿Cómo se elige una ciudad? En general la kth hormiga se mueve del nodo i al nodo j con probabilidad

$$p_{i,j}^{k} = \frac{(\tau_{i,j})^{\alpha} \cdot (\eta_{i,j})^{\beta}}{\sum(\tau_{i,j})^{\alpha} \cdot (\eta_{i,j})^{\beta}}$$

donde

  - $\tau_{i,j}$ es la cantidad de feromonas depositadas en la transición del nodo i al j,
  - $0 \leq \alpha$ es un es un parámetro para controlar la influencia de $\tau_{i,j}$.
  - $eta_{ii,j}$ es la conveniencia de transición (i,j), típicamente $1/d_{i,j}$ donde d es el costo del arco (i,j)
  - $\beta \geq 1$ es un parámetro para controlar la influencia de $eta_{ii,j}$

Actualización de feromonas

Cuando todas las hormigas han completado una solución, los rastros son actualizados por

$$\tau_{i,j} = (1 - \rho)\tau_{i,j} + \sum_k \Delta\tau_{i,j}^k$$

en donde

- ρ coeficiente de evaporación de las feromonas.
- $\Delta\tau_{i,j}^k$ cantidad de feromonas depositadas por la hormiga k

$$\Delta\tau_{i,j}^k = \begin{cases} \frac{Q}{L_k} & \text{si la hormiga } k \text{ va de } i \text{ a } j \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

  - Q es una constante de aprendizaje
  - L_k Costo del camino por hormiga k

RentCar está desarrollando una política de reemplazo para su flotilla de automóviles en un horizonte de planeación de 4 años. Al inicio de cada año, un automóvil se reemplaza o se conserva en operación durante un año más. Un automóvil debe estar en servio de 1 a 3 años. La siguiente tabla proporciona el costo de reemplazo como una función del año en que se adquiere un automóvil y los años en operación.

Equipo adquirido al inicio del año	Costo de reemplazo ($) para años dados en operación		
	1	*2*	*3*
1	4000	5400	9800
2	4300	6200	8700
3	4800	7100	—
4	4900	—	—

Encuentre el plan para reducir los costos.

Colonia de hormigas

Para el caso presentado se hará uso de dos hormigas y un valor para $\alpha = \beta = 1$ y $\rho = 0.1$.

Para el caso presentado se hará uso de dos hormigas y un valor para $\alpha = \beta = 1$ y $\rho = 0.1$. Como no se tiene ninguna solución previa se propone un valor $\tau_{i,j} = 0.1 \ \forall \ A(i,j)$, teniendo entonces:

Camino	d_{ij}	$\eta_{i,j} = \frac{1}{d_{ij}}$	$\tau_{i,j}$
0-1	4000	0.00025	0.1
0-2	5400	0.000185185	0.1
0-3	9800	0.000102041	0.1
1-2	4300	0.000232558	0.1
1-3	6200	0.00016129	0.1
1-4	8700	0.000114943	0.1
2-3	4800	0.000208333	0.1
2-4	7100	0.000140845	0.1
3-4	4900	0.000204082	0.1

Hormiga 1

Camino	d_{ij}	$\eta_{i,j} = \frac{1}{d_{ij}}$	$\tau_{i,j}$
0-1	4000	0.00025	0.1
0-2	5400	0.000185185	0.1
0-3	9800	0.000102041	0.1
1-2	4300	0.000232558	0.1
1-3	6200	0.00016129	0.1
1-4	8700	0.000114943	0.1
2-3	4800	0.000208333	0.1
2-4	7100	0.000140845	0.1
3-4	4900	0.000204082	0.1

Hormiga 1

Camino	d_{ij}	$\eta_{i,j} = \frac{1}{d_{ij}}$	$\tau_{i,j}$
0-1	4000	0.00025	0.1
0-2	5400	0.000185185	0.1
0-3	9800	0.000102041	0.1
1-2	4300	0.000232558	0.1
1-3	6200	0.00016129	0.1
1-4	8700	0.000114943	0.1
2-3	4800	0.000208333	0.1
2-4	7100	0.000140845	0.1
3-4	4900	0.000204082	0.1

Arco	$\eta_{i,j} \cdot \tau_{i,j}$	$P^1_{i,j}$	Acumulado
0-1	0.000025	0.4654	0.4654
0-2	0.000019	0.3447	0.8101
0-3	0.000010	0.1899	1
$\sum$	0.000054		

Hormiga 1

Camino	d_{ij}	$\eta_{i,j} = \frac{1}{d_{ij}}$	$\tau_{i,j}$
0-1	4000	0.00025	0.1
0-2	5400	0.000185185	0.1
0-3	9800	0.000102041	0.1
1-2	4300	0.000232558	0.1
1-3	6200	0.00016129	0.1
1-4	8700	0.000114943	0.1
2-3	4800	0.000208333	0.1
2-4	7100	0.000140845	0.1
3-4	4900	0.000204082	0.1

Arco	$\eta_{i,j} \cdot \tau_{i,j}$	$P^1_{i,j}$	Acumulado
0-1	0.000025	0.4654	0.4654
0-2	0.000019	0.3447	0.8101
0-3	0.000010	0.1899	1
$\sum$	0.000054		

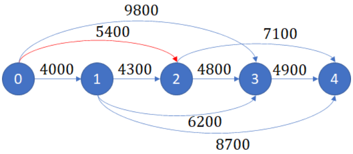
Aleatorio $= 0.6199$.

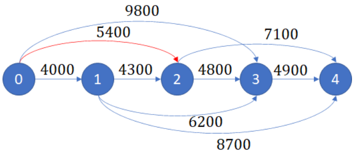
Hormiga 1

Camino	d_{ij}	$\eta_{i,j} = \frac{1}{d_{ij}}$	$\tau_{i,j}$
0-1	4000	0.00025	0.1
0-2	5400	0.000185185	0.1
0-3	9800	0.000102041	0.1
1-2	4300	0.000232558	0.1
1-3	6200	0.00016129	0.1
1-4	8700	0.000114943	0.1
2-3	4800	0.000208333	0.1
2-4	7100	0.000140845	0.1
3-4	4900	0.000204082	0.1

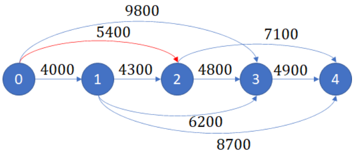
Arco	$\eta_{i,j} \cdot \tau_{i,j}$	$P^1_{i,j}$	Acumulado
0-1	0.000025	0.4654	0.4654
0-2	0.000019	0.3447	0.8101
0-3	0.000010	0.1899	1
$\sum$	0.000054		

Aleatorio $=$ 0.6199.Revisando la probabilidad acumulado se elige el arco 0-2



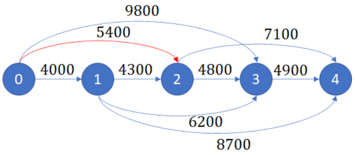


Camino	d_{ij}	$\eta_{i,j} = \frac{1}{d_{ij}}$	$\tau_{i,j}$
2-3	4800	0.000208333	0.1
2-4	7100	0.000140845	0.1



Arco	$\eta_{i,j} \cdot \tau_{i,j}$	$P^k_{i,j}$	Acumulado
2-3	0.000021	0.5966	0.5966
2-4	0.000014	0.4034	1
$\sum$	0.000035		

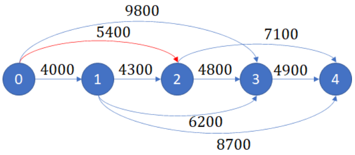
Camino	d_{ij}	$\eta_{i,j} = \frac{1}{d_{ij}}$	$\tau_{i,j}$
2-3	4800	0.000208333	0.1
2-4	7100	0.000140845	0.1



Arco	$\eta_{i,j} \cdot \tau_{i,j}$	$P^k_{i,j}$	Acumulado
2-3	0.000021	0.5966	0.5966
2-4	0.000014	0.4034	1
$\sum$	0.000035		

Camino	d_{ij}	$\eta_{i,j} = \frac{1}{d_{ij}}$	$\tau_{i,j}$
2-3	4800	0.000208333	0.1
2-4	7100	0.000140845	0.1

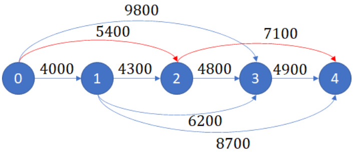
Aleatorio $= 0.8181$.

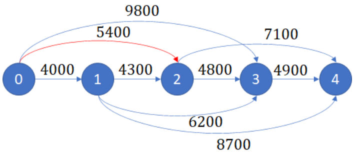


Arco	$\eta_{i,j} \cdot \tau_{i,j}$	$P^k_{i,j}$	Acumulado
2-3	0.000021	0.5966	0.5966
2-4	0.000014	0.4034	1
$\sum$	0.000035		

Camino	d_{ij}	$\eta_{i,j} = \frac{1}{d_{ij}}$	$\tau_{i,j}$
2-3	4800	0.000208333	0.1
2-4	7100	0.000140845	0.1

Aleatorio = 0.8181. Revisando la probabilidad acumulado se elige el arco 2-4

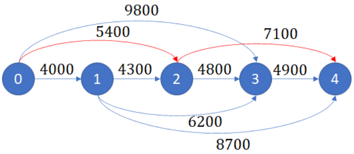




Arco	$\eta_{i,j} \cdot \tau_{i,j}$	$P^k_{i,j}$	Acumulado
2-3	0.000021	0.5966	0.5966
2-4	0.000014	0.4034	1
$\sum$	0.000035		

Camino	d_{ij}	$\eta_{i,j} = \frac{1}{d_{ij}}$	$\tau_{i,j}$
2-3	4800	0.000208333	0.1
2-4	7100	0.000140845	0.1

Aleatorio $= 0.8181$. Revisando la probabilidad acumulado se elige el arco 2-4



La hormiga 1 ha llegado al destino, el costo total es de: $5400 + 7100 = 12500$

Hormiga 2

Arco	d_{ij}	$\eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$	τ_{ij}		$\eta_{i,j} \cdot \tau_{i,j}$	$P^k_{i,j}$	Acumulado
0-1	4000	0.00025	0.1		0.000025	0.4653535	0.4653535
0-2	5400	0.000185185	0.1		0.000019	0.344706296	0.810059796
0-3	9800	0.000102041	0.1		0.000010	0.189940204	1
			$\sum$		0.000054		

Hormiga 2

Arco	d_{ij}	$\eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$	τ_{ij}		$\eta_{i,j} \cdot \tau_{i,j}$	$P_{i,j}^k$	Acumulado
0-1	4000	0.00025	0.1		0.000025	0.4653535	0.4653535
0-2	5400	0.000185185	0.1		0.000019	0.344706296	0.810059796
0-3	9800	0.000102041	0.1		0.000010	0.189940204	1
			$\sum$		0.000054		

Aleatorio $= 0.3003$.

Hormiga 2

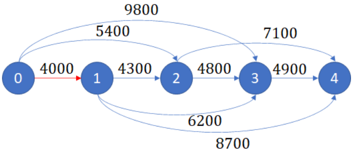
Arco	d_{ij}	$\eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$	τ_{ij}		$\eta_{i,j} \cdot \tau_{i,j}$	$P_{i,j}^k$	Acumulado
0-1	4000	0.00025	0.1		0.000025	0.4653535	0.4653535
0-2	5400	0.000185185	0.1		0.000019	0.344706296	0.810059796
0-3	9800	0.000102041	0.1		0.000010	0.189940204	1
			$\sum$		0.000054		

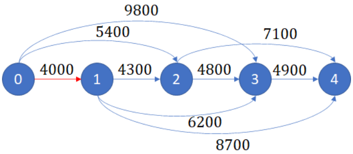
Aleatorio = 0.3003. Revisando la probabilidad acumulado se elige el arco 0-1

Hormiga 2

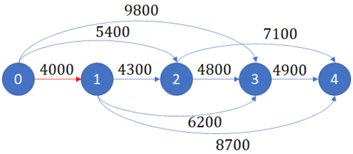
Arco	d_{ij}	$\eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$	τ_{ij}		$\eta_{i,j} \cdot \tau_{i,j}$	$P^k_{i,j}$	Acumulado
0-1	4000	0.00025	0.1		0.000025	0.4653535	0.4653535
0-2	5400	0.000185185	0.1		0.000019	0.344706296	0.810059796
0-3	9800	0.000102041	0.1		0.000010	0.189940204	1
			$\sum$		0.000054		

Aleatorio = 0.3003. Revisando la probabilidad acumulado se elige el arco 0-1



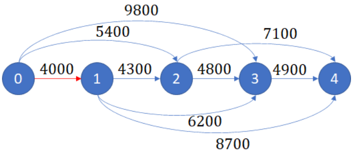


Arco	d_{ij}	$\eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$	τ_{ij}		$\eta_{i,j} \cdot \tau_{i,j}$	$P^k_{i,j}$	Acumulado
1-2	4300	0.000232558	0.1		0.000023	0.457079908	0.457079908
1-3	6200	0.00016129	0.1		0.000016	0.317007033	0.774086942
1-4	8700	0.000114943	0.1		0.000011	0.225913058	1
					0.000051		



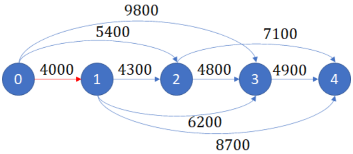
Arco	d_{ij}	$\eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$	τ_{ij}		$\eta_{i,j} \cdot \tau_{i,j}$	$P^k_{i,j}$	Acumulado
1-2	4300	0.000232558	0.1		0.000023	0.457079908	0.457079908
1-3	6200	0.00016129	0.1		0.000016	0.317007033	0.774086942
1-4	8700	0.000114943	0.1		0.000011	0.225913058	1
					0.000051		

Aleatorio $= 0.8867$.



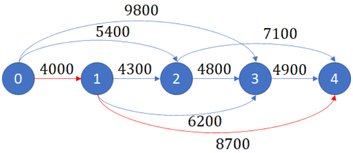
Arco	d_{ij}	$\eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$	τ_{ij}		$\eta_{i,j} \cdot \tau_{i,j}$	$P^k_{i,j}$	Acumulado
1-2	4300	0.000232558	0.1		0.000023	0.457079908	0.457079908
1-3	6200	0.00016129	0.1		0.000016	0.317007033	0.774086942
1-4	8700	0.000114943	0.1		0.000011	0.225913058	1
					0.000051		

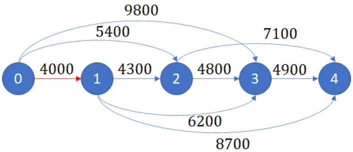
Aleatorio = 0.8867. Revisando la probabilidad acumulado se elige el arco 1-4



Arco	d_{ij}	$\eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$	τ_{ij}		$\eta_{i,j} \cdot \tau_{i,j}$	$P^k_{i,j}$	Acumulado
1-2	4300	0.000232558	0.1		0.000023	0.457079908	0.457079908
1-3	6200	0.00016129	0.1		0.000016	0.317007033	0.774086942
1-4	8700	0.000114943	0.1		0.000011	0.225913058	1
					0.000051		

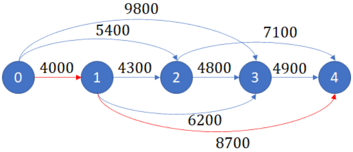
Aleatorio = 0.8867. Revisando la probabilidad acumulado se elige el arco 1-4





Arco	d_{ij}	$\eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$	τ_{ij}		$\eta_{i,j} \cdot \tau_{i,j}$	$P^k_{i,j}$	Acumulado
1-2	4300	0.000232558	0.1		0.000023	0.457079908	0.457079908
1-3	6200	0.00016129	0.1		0.000016	0.317007033	0.774086942
1-4	8700	0.000114943	0.1		0.000011	0.225913058	1
					0.000051		

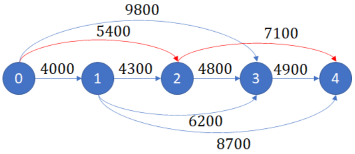
Aleatorio $= 0.8867$. Revisando la probabilidad acumulado se elige el arco 1-4



La hormiga 2 ha alcanzado el nodo destino, esto con un costo de 12700.

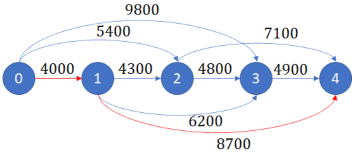
Una vez que cada hormiga ha completado una ruta, se procede a actualizar los valores para τ_{ij}

Hormiga 1 (H_1)



Costo: \$12500

Hormiga 2 (H_2)



Costo: \$12700

Actualizando $\tau_{ij} = (1-\rho)\cdot\tau_{ij} + \sum_k \Delta_{ij}^k$

Arco	Visito H_1	Δ_{ij}^1	Visito H_2	Δ_{ij}^2	$\sum_k \Delta_{ij}^k$	τ_{ij}
0-1	0	-	1	0.000079	0.000079	0.090079
0-2	1	0.000080	0	-	0.000080	0.090080
0-3	0	-	0	-	-	0.090000
1-2	0	-	0	-	-	0.090000
1-3	0	-	0	-	-	0.090000
1-4	0	-	1	0.000079	0.000079	0.090079
2-3	0	-	0	-	-	0.090000
2-4	1	0.000080	0	-	0.000080	0.090080
3-4	0	-	0	-	-	0.090000

Se itera de nuevo a partir de este punto.