

# Análisis del modelo neuronal *Integrate and Fire*

## Redes Neuronales - Trabajo Práctico 1

Christopher Gabaldón, Matías Ezequiel González, Franco Nicolás Nieto

Estudiantes de grado de Cs. Físicas en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEN) - UBA

Segundo Cuatrimestre 2023, Cátedra Francisco A. Tamarit

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FAMAF) - UNC

### Resumen

En el presente trabajo se analizó el modelo simplificado de una neurona conocido como *Integrate and Fire*. En un primer lugar se observó el comportamiento de este despreciando el mecanismo de disparo y luego se realizó un análisis similar incluyéndolo en el modelo. Se compararon resultados teóricos con numéricos frente a distintos estímulos. Además se estudió la relación entre la frecuencia de disparo de la neurona y la magnitud de una corriente constante  $I_0$  inyectada.

## 1. Introducción

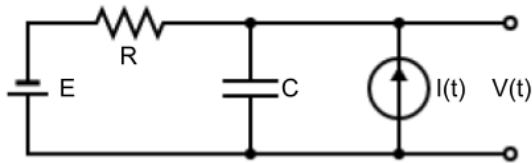
### 1.1. Motivación

Las neuronas se encargan del procesamiento de la información, de su transmisión y almacenamiento. El cerebro cuenta con un número del orden de  $10^{16}$  conexiones sinápticas (uniones funcionales entre neuronas) que permiten al humano realizar hazañas tan complejas e increíbles que van desde la invención del lenguaje hasta el desarrollo riguroso de todo tipo de ciencias para comprender el universo que lo rodea y en este caso a sí mismo.

En este trabajo se plantea la tarea de modelar, de manera simplificada, el potencial de la membrana de una neurona aislada frente a un estímulo arbitrario  $I(t)$ .

### 1.2. Introducción teórica

Uno de los modelos más simplificados para estudiar el comportamiento del potencial de la membrana de una neurona es el llamado *Integrate and Fire*. Este modelo plantea una analogía de un circuito eléctrico RC con el potencial entre las membranas de la célula. El circuito se aprecia en la Figura 1 [1].



**Figura 1:** Circuito eléctrico RC. El mismo contiene una fuente externa de corriente  $I(t)$ .

En el mismo, la fuente de voltaje  $E \approx -65mV$  representa el potencial de reposo de las membranas

de la célula. La resistencia  $R \approx 10M\Omega$  modela la oposición a la circulación de corriente, y el capacitor  $C$  la acumulación en ciertas regiones que sufrirán los iones. La corriente  $I(t) \approx 1nA$  podrá ser una señal inyectada externamente, por ejemplo, por una célula vecina. Por último la señal  $V(t)$  será el potencial de la membrana en cuestión, que será el principal objeto de estudio en este trabajo.

Si se emplea teoría elemental de circuitos eléctricos, se obtiene la ecuación diferencial ordinaria (ODE) que rige la variación temporal de dicho potencial :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\tau} (E - V(t) + RI(t)) \quad (1)$$

donde  $\tau \approx 10ms$  representa el tiempo de relajación relacionado con la capacidad  $C$  del sistema.

Por otro lado, la característica de disparo será gobernada por un potencial de umbral ( $V_u$ ), el cual al ser sobrepasado hará que nuestro potencial tienda a su potencial de reposo,  $E$ :

$$\text{Si, } V(t) > V_u \Rightarrow V(t) \rightarrow E \quad (2)$$

donde:

$V_u \approx -50mV$  representa el potencial umbral.

Notar que introducir este mecanismo de disparo, es de alguna manera quitarle la linealidad a la Ecuación (1). Esto encaminará al modelo a comportamientos más complejos, que se asemejarán en mayor medida al de una neurona real.

### 1.2.1. Resolución analítica

Antes de aventurarse con integraciones numéricas del modelo, se procuró tener una solución analítica para su contraste. Partiendo de (1) e introduciendo el cambio de variables  $\xi(t) = E - V(t)$  se puede reescribir la ODE de la siguiente manera:

$$\frac{d\xi(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}\xi(t) = -\frac{R}{\tau}I(t) = f(t) \quad (3)$$

La solución homogénea (con  $f(t) = 0$ ) de esta última ecuación diferencial tendrá forma de exponencial real. Mientras que la solución particular estará condicionada por la forma de la función  $I(t)$ . Es decir que se puede escribir la solución más general de la siguiente forma ( $B_0$  siendo definida por condiciones iniciales):

$$V(t) = B_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + E + V_{particular}(t) \quad (4)$$

Sin embargo en el caso de que la corriente sea constante  $I(t) = I_0$  la solución particular queda  $V_{particular} = -RI_0$  y por lo tanto se tiene que

$$V(t) = C_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + E + RI_0 ; C_0 = V_0 - E - RI_0 \quad (5)$$

## 2. Resultados y discusiones

Para analizar más en profundidad el modelo, primero se analizó la Ecuación (1) sin la condición de *trigger* (disparo) (2) y posteriormente se la incluyó en el análisis.

### 2.1. Mecanismo de disparo desactivado

A partir de la Ecuación (1) se puede estudiar el comportamiento a tiempos largos del sistema, lo cual resulta ventajoso. Más aún, este tipo de ODEs permite que se realicen análisis geométricos del sistema facilitando su interpretación.

Buscando un punto de equilibrio proponiendo la nulidad de  $\frac{dV}{dt}$ , se obtuvo que el mismo se da cuando

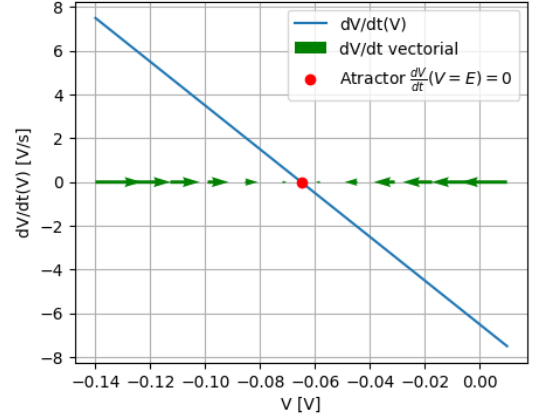
$$V^* = E + RI \quad (6)$$

Luego, para analizar la estabilidad de este equilibrio se puede recurrir a la Ec. (1) y observar que

$$\text{Si, } V \leq E + RI \Rightarrow \frac{dV}{dt} \geq 0 \quad (7)$$

Solución la cual al evaluar en los dos regímenes (mayor y menor), resulta en un equilibrio estable o *atractor*. Esta última característica se representa en

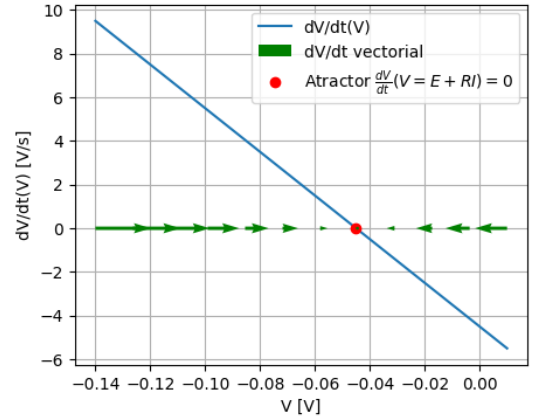
el campo vectorial demarcado en las Figuras 2 y 3. Estos gráficos suelen llamarse *Diagramas de fase*.



**Figura 2:** Diagrama de fase  $\frac{dV}{dt}$  vs  $V$  para  $I(t) = 0nA$ .

Como se puede observar en la Figura 2 que corresponde al caso en el que  $I_0 = 0$  el equilibrio se halla en  $V^* = E$  y se nota la linealidad entre  $\frac{dV}{dt}$  y  $V$ .

Por otro lado, se analizó el caso en que  $I_0 = 2nA$ . El estudio geométrico para este caso fue análogo al caso de corriente nula. Dicho análisis se observa en la Figura 3.



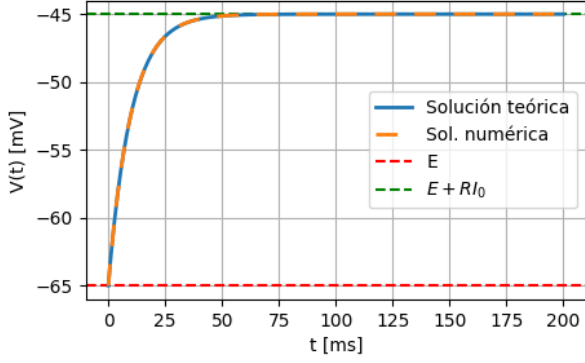
**Figura 3:** Diagrama de fase  $\frac{dV}{dt}$  vs  $V$  para  $I(t) = 2nA$ .

Se puede notar, que en este caso la diferencia reside en un corrimiento del punto de equilibrio debido a la corriente externa en nuestro circuito. En este caso resulta ser  $V^* = E + RI_0$  (notar que si se toma límite  $I_0 \rightarrow 0$  se recupera el caso anterior).

Viendo en estas figuras los campos vectoriales de  $\frac{dV}{dt}$  se puede corroborar que los equilibrios son efectivamente estables como se anticipó en la Ecuación (7).

En otra instancia se buscó resolver numéricamente la Ecuación (1) para  $V(t)$  y compararla con la solución exacta de la Ec. (5). Para ello se trabajó con un algoritmo de integración Runge-Kutta de orden 4 con un paso de integración de  $h = 0,05ms$  [4]. La comparación de ambas soluciones se registra en la Figura 4. En esta última cabe destacar la tendencia del

potencial  $V(t)$  al punto de equilibrio ya calculado.

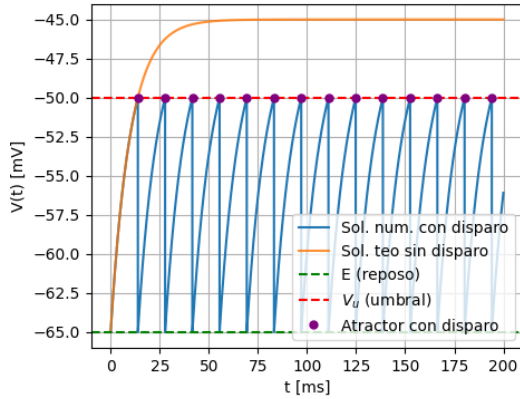


**Figura 4:** Comparación solución exacta y numérica de  $V(t)$  con  $V_0 = E$  e  $I(t) = 2nA$ .

Se observa que en este caso ambas soluciones son prácticamente indistinguibles. Aunque sabemos que existe una diferencia entre ambos por el error de computo del integrador.

## 2.2. Mecanismo de disparo activo

Para activar el mecanismo de disparo se modificó el método de integración imponiéndole la condición (2). Con los mismos parámetros de la sección anterior se procedió a simular el evolución del potencial en la Figura 5, comparando el modelo con y sin mecanismo de disparo.



**Figura 5:** Comparación solución de  $V(t)$  con y sin disparo con  $V_0 = E$ ,  $V_u = -50mV$  e  $I(t) = 2nA$ .

Se puede notar cómo al incluir el mecanismo de disparo, ahora la función  $V(t)$  resulta ser periódica. Esto se debe a que cada vez que se alcanza  $V_u$  esta vuelve al estado de reposo.

Este período de  $V(t)$  es igual al tiempo que tarda el potencial de la membrana en llegar de  $V_0$  a  $V_u$ , por lo tanto se puede plantear:

$$V(T) = C_0 e^{-T/\tau} + E + RI_0 = V_u$$

reacomodando esta expresión se llega a que el período  $T$  es:

$$T = -\tau \ln \left[ \frac{V_u - E - RI_0}{C_0} \right] \quad (8)$$

para este caso la frecuencia de disparo  $f = 1/T$  teórica y la obtenida numéricamente son

$$f_{teo} = 72,13 \text{ Hz} ; f_{num} = 71,94 \text{ Hz}$$

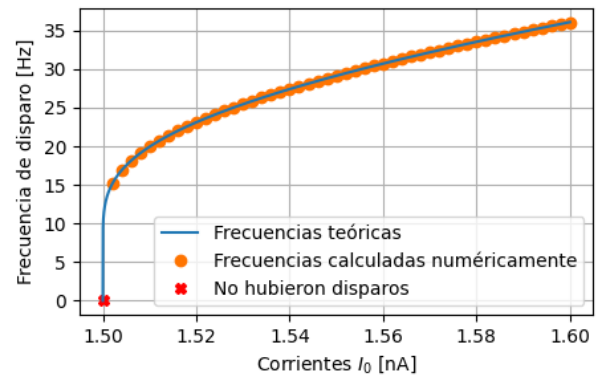
Cifras que difieren en un 0,2%. La precisión se puede mejorar al disminuir los pasos temporales  $h$  en la integración numérica. Por ejemplo, al modificar este valor de  $h = 0,05ms \rightarrow h = 0,005ms$  se obtiene  $f_{num} : 72,12Hz$  que discrepa del valor teórico solo en un 0,01%.

También hay que tener en cuenta la condición para que se produzcan disparos. Si se observa la Figura 4 donde la asíntota de  $V(t)$  está en  $V^* = E + RI_0$ . Se puede notar que para que ocurran disparos, el umbral tiene que cumplir que  $V_u \leq V^*$  y por lo tanto  $V_u \leq E + RI_0$  que lleva a la expresión (9).

$$I_0 \geq \frac{V_u - E}{R} = 1,5nA \quad (9)$$

Equivalentemente se llega a la misma expresión a partir de pedir que el argumento del logaritmo en (8) sea positivo y usando que para este caso  $V_0 = E$ .

Para ver cómo afecta la corriente  $I_0$  a la frecuencia de disparo se representaron en la Figura 5 los resultados obtenidos por métodos numéricos y también por la Ecuación (8). En esta se representan solamente valores de  $I_0$  cercanos a  $1,5nA$  para notar su tendencia logarítmica. Sin embargo si se extendiera el gráfico hasta  $I_0 = 2nA$ , se observarían los valores previamente reportados.



**Figura 6:** Frecuencias de disparo en función de corriente de entrada  $I_0$  con  $V_u = -50mV$ .

El primer valor en  $I_0 = 1,5nA$  corresponde a que numéricamente no se hallaron disparos ya que para esa corriente este sucede en un tiempo asintótico  $t \rightarrow \infty$ . Lo mismo hubiera pasado para cualquier valor  $I_0$  cuyo período de disparo sea mayor al tiempo de integración que en este caso fue de  $200ms$ .

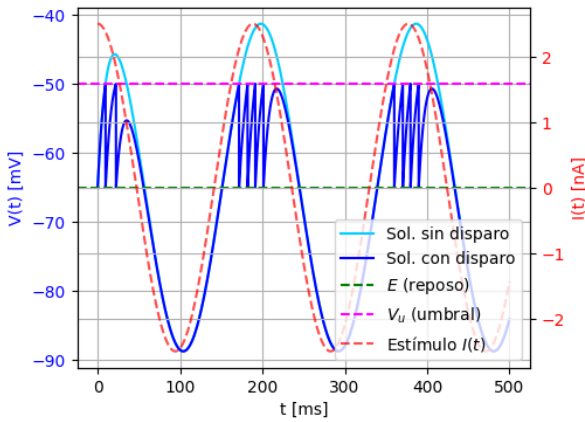
### 2.2.1. Estímulo arbitrario $I(t)$

En esta última sección, además del mecanismo de disparo, se introdujo una excitación  $I$  dependiente del tiempo. Se estudiaron funciones armónicas, con espectros frecuenciales claros. Esto puede llegar a ser importante para estudiar a futuro la respuesta de una neurona frente a distintas frecuencias. Además de la simplicidad matemática de esta familia de funciones.

En una primera instancia se trabajó con una corriente dada por:

$$I_1(t) = 2,5 \cos\left(\frac{t}{30ms}\right) nA \quad (10)$$

Con ésta se simuló la evolución temporal de  $V$ , y se graficó simultáneamente la corriente en la Figura 7.



**Figura 7:** Estímulo arbitrario  $I_1(t)$  con  $V_u = -50mV$ . Solución con y sin mecanismo de disparo.

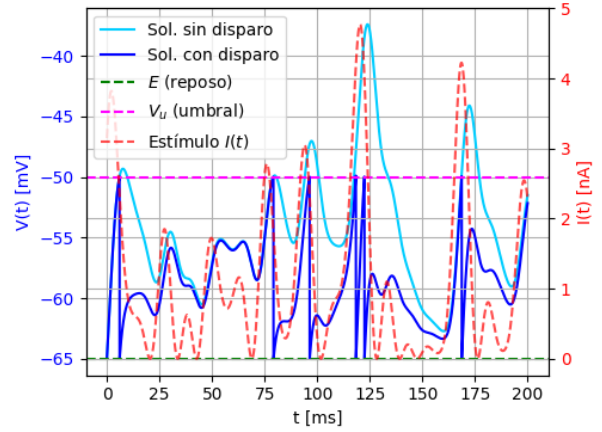
Se observó un desfase temporal entre  $I_1(t)$  y  $V(t)$ . Este desfase se entiende al recordar el carácter capacitivo que se le dotaba a la neurona en el modelo. El tiempo característico  $\tau$  cuantifica en cierto modo este comportamiento. Por otro lado se observa que cuando  $I_1(t)$  toma valores negativos, el potencial desciende a valores menores que el reposo, esto se desprende de la Ecuación (5).

Un detalle a notar en esta parte del análisis es que  $V$  no tenderá a un valor de equilibrio debido a que la forma exponencial que generaba tal comportamiento proveniente de la Ecuación (4) se verá modificada por la dependencia temporal de la corriente ( $I_1(t)$  no es constante).

En una segunda instancia, se estudió un diferente estímulo  $I_2(t)$  con un espectro frecuencial más amplio dado por:

$$I_2(t) = 0,35 \left[ \cos\left(\frac{t}{3ms}\right) + \cos\left(\frac{t}{7ms}\right) + \sin\left(\frac{t}{11ms}\right) + \sin\left(\frac{t}{5ms}\right) + \cos\left(\frac{t}{13ms}\right) \right]^2 nA \quad (11)$$

Nuevamente se graficó la evolución temporal tanto de  $I_2(t)$  como de  $V(t)$ , según se aprecia en la Figura 8.



**Figura 8:** Estímulo arbitrario  $I_2(t)$  con  $V_u = -50mV$ . Solución con y sin mecanismo de disparo.

El comportamiento en este caso es más complicado de interpretar a consecuencia de las múltiples respuestas del potencial a cada una de las componentes armónicas de la frecuencia en cuestión. Aunque puede notarse al ver los picos un desfase  $I_2(t) - V(t)$  al igual que para el caso anterior.

A su vez, algo a destacar de las Figuras 10 y 11, es que cuando se presentan ventanas temporales en las que  $V(t)$  no llega a  $V_u$ , ambas soluciones con y sin disparos vuelven a converger hasta que nuevamente suceda que  $V(t) = V_u$ .

## 3. Conclusiones

Se logró estudiar el modelo *Integrate and Fire* sin mecanismo de disparo. En este caso se obtuvieron resultados numéricos a la solución del potencial  $V(t)$  que eran congruentes con la teoría. Por otro lado, se le incorporó el mecanismo de disparo y se pudo obtener numéricamente la solución. Para corrientes constantes se estudió la relación entre la frecuencia del disparo y la magnitud de la corriente de excitación. Se observó que a partir de  $I_0 = \frac{V_u - E}{R}$  se empiezan a observar disparos y la frecuencia aumenta conforme aumente la corriente, lo cual era de esperarse según el marco teórico.

Finalmente se estudiaron estímulos  $I(t)$  arbitrarios oscilatorios con diversas frecuencias presentes, cuya motivación surge de poder analizar pulsos más complejos. En estos se observó un desfase de la respuesta  $V(t)$  de la membrana respecto del estímulo externo  $I(t)$  debido al tiempo de respuesta  $\tau$  de la neurona.

## Referencias

- [1] WIKIPEDIA-BIOLOGICAL MODEL, *Leaky integrate-and-fire*, 02/10/2023. [https://en.wikipedia.org/wiki/Biological\\_neuron\\_model](https://en.wikipedia.org/wiki/Biological_neuron_model)
- [2] STROGATZ S.H., *Nonlinear Dynamics and Chaos*, 1995.
- [3] NEUROMATCH ACADEMY, *The L.I.F model. Tutorial*, 2022. <https://compneuro.neuromatch.io/tutorials/>
- [4] WIKIPEDIA-MÉTODO DE RUNGE-KUTTA, 02/10/2023. [https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo\\_de\\_Runge-Kutta](https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Runge-Kutta)
- [5] APUNTES CURSO DE REDES NEURONALES, CLASE 07, *Dr. Tamarit, Francisco*, 2023. <https://www.famaf.unc.edu.ar/~ftamarit/redes2023/teoricos2023.html>