

Ingeniería Económica y Financiera

Unidad 2: Tasas de Interés

Agenda

- I. Tiempo
- II. Tasa de Interés Simple.
- III. Ejercicios de Aplicación.



Tiempo



¿qué papel juega el tiempo?

En finanzas, el manejo del tiempo es de suma importancia, puesto que este sólo se puede administrar o programar (el tiempo no se detiene) y habrá que tener mucho cuidado con la aplicación de sus respectivas equivalencias (uso de múltiplos o submúltiplos).

El caso más importante en la idealización del tiempo lo da el número de días a considerar por año. Actualmente en Perú, la norma de transparencia no permite negociar al Sistema Financiero definir si éste se considerará con 360 o 365 días, es obligatorio usar año de 360 días.

¿qué papel juega el tiempo?

El **TIEMPO** es fundamental para **determinar las ganancias** o intereses percibidos (o pagados) sobre el capital, al aplicarle una tasa de interés.

Entonces ... ¿ como es el tiempo ?

- ✓ **No es controlable**: Sólo se puede programar o administrar.
- ✓ Además, la expresión **tiempo pasado no se usa en finanzas**; sin embargo, si deseamos referirnos a una fecha del pasado diremos **VALOR ACTUAL o VALOR PRESENTE**, y si este pertenece al futuro diremos **VALOR FUTURO**.

Flujos de Dinero

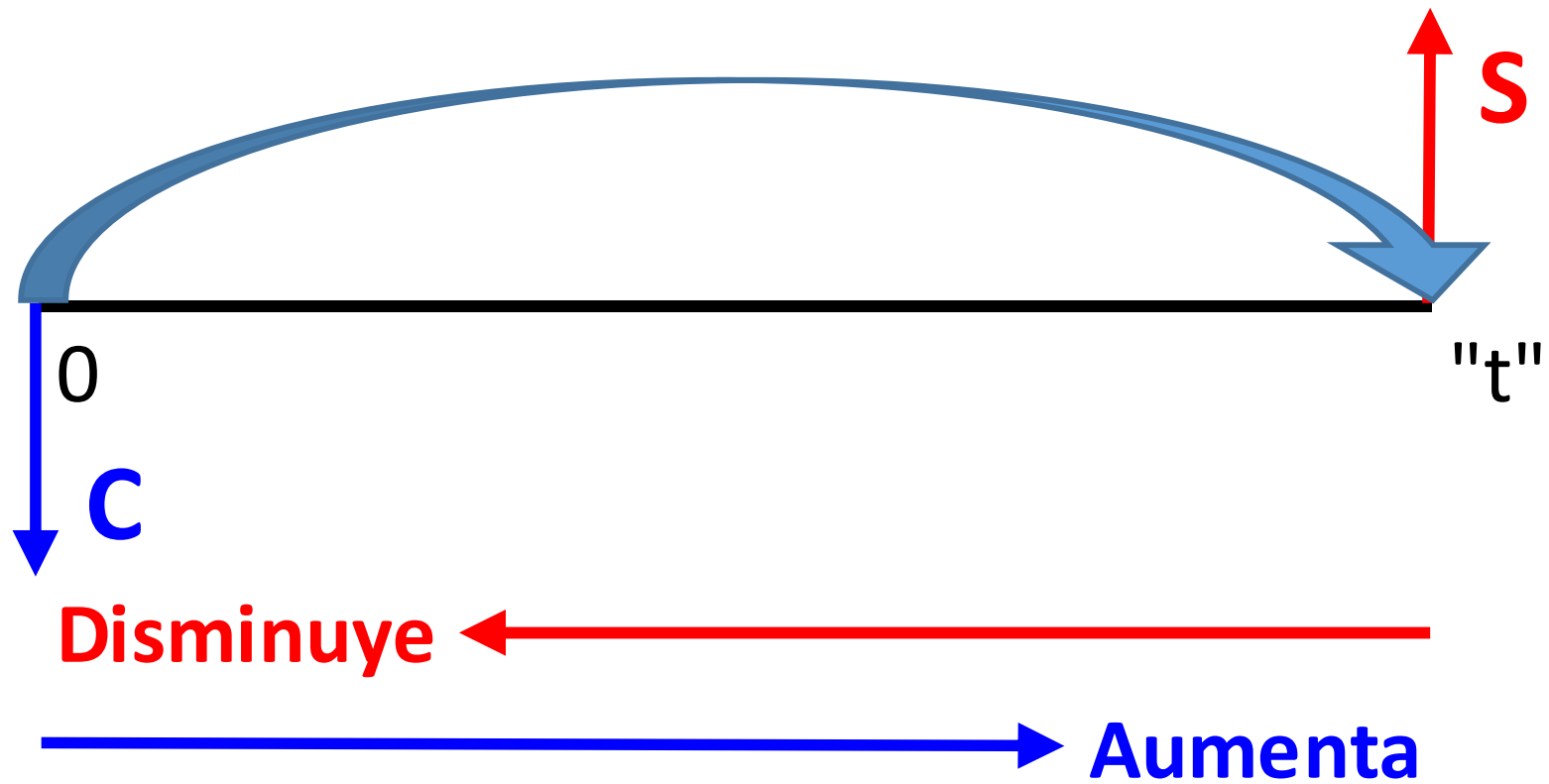
En finanzas, **FLUJO DE DINERO** es la representación gráfica de una cantidad monetaria de ingreso (préstamo, retorno) o egreso (pago, inversión).

Un flujo cambia de valor cuando se desplaza a lo largo del tiempo y sólo si está afecto a una tasa de interés.



Finanzas

Flujos de Dinero



El Tiempo transcurrido y sus Equivalencias

1 año =

- ✓ 2 semestres
- ✓ 3 cuatrimest.
- ✓ 4 trimestres
- ✓ 6 bimestres
- ✓ 12 meses
- ✓ 360 días

1 Semestre =

- ✓ 2 trimestres
- ✓ 3 bimestres
- ✓ 6 meses
- ✓ 12 quincenas
- ✓ 180 días

1 Cuatrimestre =

- ✓ 4 meses
- ✓ 8 quincenas
- ✓ 120 días

1 Quincena =

- ✓ 15 días

1 Trimestre =

- ✓ 3 meses
- ✓ 6 quincenas
- ✓ 90 días

1 Bimestre =

- ✓ 2 meses
- ✓ 4 quincenas
- ✓ 60 días

1 Mes =

- ✓ 2 quincenas
- ✓ 30 días

El Tiempo y sus Equivalencias

- ✓ Será importante especificar en un contrato si se hace referencia a un año ordinario o a un año calendario, puesto que debido a nuestras equivalencias, estos implicarían diferentes períodos de tiempo y por lo tanto diferentes valor futuros.
- ✓ El dinero crece o **aumenta** cuando se encuentra afecto por alguna tasa de interés y se dirige hacia el futuro.
- ✓ El dinero decrece o **disminuye** cuando se encuentra afecto por alguna tasa de interés y se dirige hacia el presente.

Año Exacto o Calendario

Sucede cuando se toma como base del cálculo para la tasa de interés el año de 365 días (sea o no sea bisiesto), con lo cual, el tiempo "t" expresado como una proporción del año se calculará como:

$$t = \frac{\text{Tiempo transcurridos en días}}{365}$$

Año Ordinario o Comercial

Sucede cuando se toma como base del cálculo para la tasa de interés el año de 360 días, con lo cual, el tiempo "t" expresado como una proporción del año se calculará como:

$$t = \frac{\text{Tiempo transcurrido en días}}{360}$$

Ejemplo

Pepe Barca acaba de abrir un certificado de depósitos a plazo, por un monto de US\$ 10,000.00 y con un vencimiento de un semestre ¿En este caso como se contabilizará el tiempo?

- 1) El tiempo transcurrido de la operación (numerador) será de un semestre o 180 días.
- 2) Para el número de días en un año (denominador) podría suceder:
 - 2.1) Si es **año ordinario** o de 360 días por año:
$$t = 180/360 = 0.50 \text{ años}$$
 - 2.2) Si es **año exacto** o 365 días por año:
$$t = 180/365 = 0.4931506849 \text{ años}$$

Ejemplo

El día de hoy 1° de marzo, Pepe Barca acaba de abrir un certificado de depósitos a plazo, por un monto de US\$ 10,000.00, el cual vencerá el 1° de setiembre del mismo año ¿En este caso como se contabilizará el tiempo?

1) El tiempo transcurrido de la operación (numerador) sería:

$$31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 = 184 \text{ días.}$$

2) Para el número de días en un año (denominador) podría suceder:

2.1) Si es **año ordinario** o de 360 días por año:

$$t = 184/360 = 0.5111111111 \text{ años}$$

2.2) Si es **año exacto** o 365 días por año:

$$t = 184/365 = 0.504109589 \text{ años}$$

Ejemplo

| | | Tiempo transcurrido (numerador) | |
|----------------------|------------------|------------------------------------|--------------------|
| | | Ordinario 180 días | Exacto 184 días |
| Año (denominador) | Ord. 360 días | 180/360 | 184/360 |
| | | 0.5000000000 | 0.5111111111 |
| | Exa. 365 días | 180/365 | 184/365 |
| | | 0.493150685 | 0.504109589 |



Tasa **de Interés Simple**



Interés Simple

Cuando un inversionista presta dinero a un prestatario, éste se compromete a pagar el dinero que pidió prestado o **Capital**, más los honorarios que se cobran por el uso del dinero ajeno, cuyo nombre más apropiado para este caso es **Interés**.

Entonces, desde el punto de vista del inversionista, el **interés se convertirá en un ingreso adicional** por el capital invertido.

Interés Simple

Al capital originalmente invertido se le llamará **Capital (C)**, Valor Actual (VA), Valor Presente (VP), Presente (P) o Principal (P).

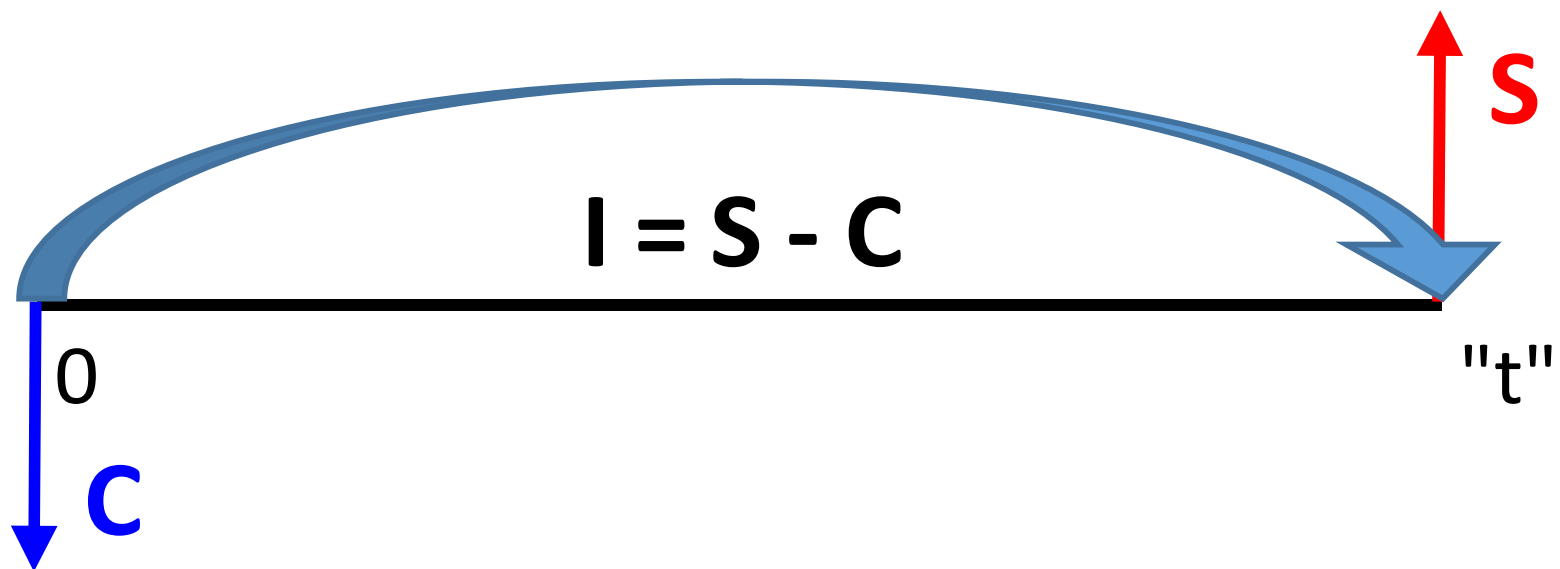
Al monto que se devuelve se le conoce como Monto o **Stock (S)**, Valor Acumulado (VA), Valor Futuro (VF) o Futuro (F).

A su diferencia se le llama **Interés (I)**.

Entonces podemos definir que:

$$I) \quad I = S - C$$

Interés Simple



Interés Simple

Ahora, por definición, el interés simple se obtiene multiplicando el **Capital**, por la **tasa de interés simple** (i , expresado como valor relativo) y por el **tiempo** (t) transcurrido de la inversión/deuda, el mismo que puede expresarse en número de períodos (años, meses, días, etc.):

$$\text{II) } I = C * i * t$$

Por lo que, si utilizamos la primera definición, tenemos:

$$S = C + I$$

Y si reemplazamos II) en I):

$$S = C + C * i * t$$

$$\text{1) } S = C * (1 + i * t)$$

Interés Simple

Al monto:

$$(1 + i * t)$$

Se le conoce como **factor de acumulación a tasa de interés simple** y al proceso de multiplicar este por el Capital o Valor Presente se le conoce como **acumulación a tasa simple**, siendo que:

$$S = C * (1 + i * t)$$

Interés Simple

Sin embargo por identidades algebraicas podemos reconocer que si:

$$S = C * (1 + i * t)$$

Entonces:

$$C = \frac{S}{(1 + i * t)}$$

Por lo que:

$$C = S * (1 + i * t)^{-1}$$

Interés Simple

Al monto:

$$(1 + i * t)^{-1}$$

Se le conoce como **factor de descuento a tasa de interés simple** y al proceso de multiplicar este por el Stock o Valor Futuro se le conoce como **descuento a tasa simple**, siendo que:

$$C = S * (1 + i * t)^{-1}$$

Interés Simple Exacto

Sucede cuando se toma como base del cálculo para la tasa de interés el año exacto de 365 días (sea o no sea bisiesto), con lo cual, si el interés simple se encuentra expresado en años se utilizará:

i expresado como % por año

$t = \frac{\text{Tiempo transcurrido en días}}{365}$

$$S = C * (1 + i * t)$$

Interés Simple Ordinario

Sucede cuando se toma como **base del cálculo** para la tasa de interés el **año ordinario de 360 días**, con lo cual, si el interés simple se encuentra expresado en años se utilizará:

i expresado como % por año

$t = \frac{\text{Tiempo transcurrido en días}}{360}$

$$S = C * (1 + i * t)$$

Interés Exacto versus Ordinario

Por un análisis directo y sencillo podemos verificar que si en el caso del interés simple ordinario el **denominador de la fracción** es un número menor (360), entonces el resultado será mayor que en el caso del interés simple exacto (365), por lo que el prestamista pagará un rendimiento mayor.

La práctica en EE.UU. y en general en las transacciones comerciales internacionales, es el de utilizar el interés simple ordinario (**año de 360 días**), por lo que en el cálculo que haremos en el curso este quedará establecido como año de 360 días **por defecto**, a menos que en algún caso se diga lo contrario.

Fórmulas para Interés Simple

1) Valor Futuro "S":

$$S = C * (1 + i * t)$$

2) Valor Presente "C":

$$C = \frac{S}{(1 + i * t)} = S * (1 + i * t)^{-1}$$

Fórmulas para Interés Simple

3) Tiempo transcurrido "t":

$$t = \frac{\left(\frac{S}{C}\right) - 1}{i}$$

4) Tasa de Interés simple "i":

$$i = \frac{\left(\frac{S}{C}\right) - 1}{t}$$

Nota importante!!!

Recuerde que para estos dos casos, si el tiempo se encuentra expresado en años, la tasa también lo estará; si el tiempo está expresado en meses, la tasa también deberá ser considerada como mensual, etc.

Ejemplo 1

¿Cuál es el Interés y el Valor Futuro que produce un capital de S/. 1,000.00 en un lapso de tiempo de cuatro años, si se encuentra afecto a una tasa de interés simple anual de 24%?

$$C = \text{S/. } 1,000.00$$

$$t = 4 \text{ años}$$

$$i = \text{TS} \mathbf{A} 24\%$$

Como el tiempo “t” está expresado en años, al igual que la tasa de interés simple, entonces ambos se utilizarán directamente en las fórmulas; además, por no estar mencionado, consideraremos año ordinario.

Ejemplo 1

$$I = C * i * t$$

$$I = 1,000.00 * 24\% \text{ (TSA)} * 4 \text{ (años)}$$

$$I = 960.00$$

$$S = C + I$$

$$S = 1,000.00 + 960.00$$

$$S = 1,960.00$$

O también:

$$S = C * (1 + i * t)$$

$$S = 1,000.00 * (1 + 24\% \text{ (TSA)} * 4 \text{ (años)}) = 1,960.00$$

$$I = S - C$$

$$I = 1,960.00 - 1,000.00 = 960.00$$

Ejemplo 2

¿Cuál es el Interés y el valor futuro que produce un capital de S/. 7,500.00 en nueve meses, si está afecto a una tasa de interés simple anual de 18%?

$$C = \text{S/. } 7,500.00$$

$$t = 9 \text{ meses}$$

$$i = \text{TS} \mathbf{A} 18\%$$

Como el tiempo y la tasa están expresadas en unidades de tiempo diferentes, debemos convertir ambos a la misma unidad de medida, por ejemplo, podemos convertir los 9 meses a años ordinarios.

Ejemplo 2

$$t = 9 \text{ (meses)} * 30 / 360 = 270 / 360 = 0.75 \text{ (años)}$$

$$I = C * i * t$$

$$I = 7,500.00 * 18\% \text{ (TSA)} * 0.75 \text{ (años)} = 1,012.50$$

$$S = C + I$$

$$S = 7,500.00 + 1,012.50 = 8,512.50$$

O también:

$$S = C * (1 + i * t)$$

$$S = 7,500.00 * (1 + 18\% \text{ (TSA)} * 0.75 \text{ (años)})$$

$$S = 8,512.50$$

$$I = 8,512.50 - 7,500.00 = 1,012.50$$

Ejemplo 2

Ojo, si se hubiera pedido el cálculo del interés simple exacto, los cálculos serían diferentes:

$$t = 9 \text{ (meses)} * 30 / 365 = 270 / 365$$

$$t = 0.7397260274 \text{ (años)}$$

$$I = C * i * t$$

$$I = 7,500.00 * 18\% \text{ (TSA)} * 0.7397260274 \text{ (años)}$$

$$I = 998.63$$

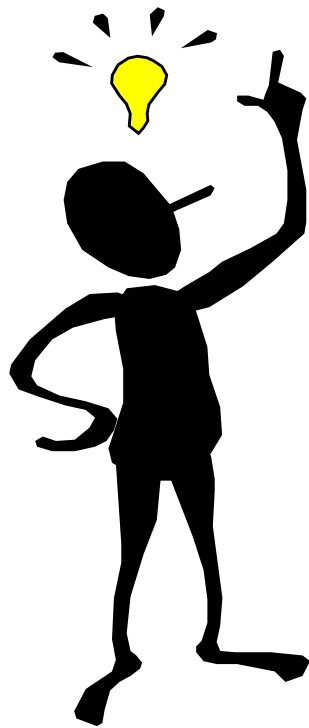
$$S = C + I$$

$$S = 7,500.00 + 998.63$$

$$S = 8,498.63 \text{ (contra 8,512.50 del año ordinario)}$$

Problemas

Desarrolle los problemas presentados a continuación



Ejercicio 1

Calcular el interés simple ordinario y el interés simple exacto, así como el valor futuro que habrá que pagar sobre un préstamo de US\$ 10,250.00 afecto a una tasa de interés simple anual de 15%, si este debe ser devuelto en un lapso de tiempo de 3 meses.

$$C = \text{US\$ } 10,250.00$$

$$t = 3 \text{ meses (ojo, meses de 30 días)}$$

$$i = \text{TS} \mathbf{A} \text{ } 15\%$$

$$I, S = ??$$

Ejercicio 1

a) Utilizando año ordinario:

$$t = 3 \text{ (meses)} * 30 / 360 = 90 / 360 \text{ (años)}$$

$$t = 0.25 \text{ años}$$

$$I = C * i * t$$

$$I = 10,250.00 * 15\% \text{ (TSA)} * 0.25 \text{ (años)}$$

$$I = 384.38$$

$$S = C + I$$

$$S = 10,250.00 + 384.38$$

$$S = 10,634.38$$

Ejercicio 1

b) Utilizando año exacto:

$$t = 3 \text{ (meses)} * 30 / 365 = 90 / 365 \text{ (años)}$$

$$t = 0.2465753425 \text{ (años)}$$

$$I = C * i * t$$

$$I = 10,250.00 * 15\% \text{ (TSA)} * 0.2465753425 \text{ (años)}$$

$$I = 379.11$$

$$S = C + I$$

$$S = 10,250.00 + 379.11$$

$$S = 10,629.11 \text{ (contra 10,634.38 del año ordinario)}$$

Nota: Observe que con 365 días S es menor

Ejercicio 1

Ahora, desarrollemos el ejercicio 1, asumiendo que la operación se inicia el 1° de julio y se cancela el 1° de octubre del mismo año (también serán 3 meses, pero esta vez son meses calendario).

$$C = \text{US\$ } 10,250.00$$

$$t = \text{del } 01/07/XX \text{ al } 01/10/XX$$

$$t = 31 + 31 + 30 = 92 \text{ días (los 3 meses calendario)}$$

$$i = \text{TS} \text{A } 15\%$$

$$I, S = ??$$

Ejercicio 1

a) Utilizando año ordinario:

$$t = 92 / 360 \text{ (años)}$$

$$t = 0.2555555556 \text{ años}$$

$$I = C * i * t$$

$$I = 10,250.00 * 15\% \text{ (TSA)} * 0.2555555556 \text{ (años)}$$

$$I = 392.92$$

$$S = C + I$$

$$S = 10,250.00 + 392.92$$

$$S = 10,642.92$$

Ejercicio 1

b) Utilizando año exacto:

$$t = 92 / 365 \text{ (años)}$$

$$t = 0.2520547945 \text{ (años)}$$

$$I = C * i * t$$

$$I = 10,250.00 * 15\% \text{ (TSA)} * 0.2520547945 \text{ (años)}$$

$$I = 387.53$$

$$S = C + I$$

$$S = 10,250.00 + 387.53$$

$$S = 10,637.53 \text{ (contra 10,642.92 del año ordinario)}$$

Ejercicio 1

| | | | Tiempo transcurrido (numerador) | |
|----------------------|---------------------|---|------------------------------------|-------------------|
| | | | Ordinario 90 días | Exacto 92 días |
| Año (denominador) | Ord. 360 días | t | 90/360 | 92/360 |
| | | I | 384.38 | 392.92 |
| | | S | 10,634.38 | 10,642.92 |
| | Exa. 365 días | t | 90/365 | 92/365 |
| | | I | 379.11 | 387.53 |
| | | S | 10,629.11 | 10,637.53 |

Ejercicio 2

¿A que tasa de interés simple se acumularán S/. 72.00, por el préstamo de S/. 1,200.00 en 6 meses?

$$I = \text{S/. } 72.00$$

$$C = \text{S/. } 1,200.00$$

$$\text{Tiempo} = 6 \text{ meses}$$

$$i = \text{TS} \text{A} \text{ ?? \%}$$

Asumimos año ordinario, porque no se especifica.

Ejercicio 2

$$t = 6 * 30 / 360 = 180 / 360 = 0.5 \text{ años}$$

$$t = 0.5 \text{ años}$$

Y como:

$$I = C * i * t$$

Entonces:

$$i = 72.00 / (1,200.00 * 0.5)$$

$$i = 0.12$$

$$i = 12\% \text{ TSA}$$

Ejercicio 3

¿Cuál es el monto que deberá cancelar Pedro el día de hoy (pre-pagar la deuda), por un préstamo de US\$ 11,125.00 que vence dentro de 9 meses, si se sabe que este fue contratado a una tasa de interés simple anual de 15%?

$$S = \text{US\$ } 11,125.00$$

Tiempo = 9 **meses** (ojo, meses de 30 días)

$$i = \text{TS} \mathbf{A} \text{ } 15\%$$

$$C = ??$$

Ejercicio 3

$$t = 9 * 30 / 360 = 270 / 360 \text{ años}$$

$$t = 0.75 \text{ años}$$

$$C = \frac{S}{(1 + i * t)} = \frac{11,125.00}{(1 + 15\% * 0.75)}$$

$$C = 10,000.00$$

O también:

$$C = S * (1 + i * t)^{-1} = 11,125.00 * (1 + 15\% * 0.75)^{-1}$$

$$C = 10,000.00$$

Ejercicio 4

¿Cuánto tiempo se tardará en hacer que un capital de US\$ 1,350.00 acumule un valor futuro de por lo menos US\$ 1,475.00, si se conoce que se encuentra expuesto a una tasa de interés simple anual de 9%?

Rpta. 1.028806584 años o 370.37 días, pero que financieramente debe ser 371 días.

$C = \text{US\$ } 1,350.00$

$S = \text{US\$ } 1,475.00$

$i = \text{TS} \mathbf{A} \text{ } 9\%$

$t = ?? \text{ años}$

Ejercicio 4

$$t = \frac{\frac{S}{C} - 1}{i} = \frac{\frac{1,475.00}{1,350.00} - 1}{9\%}$$

$$t = 1.028806584 \text{ años}$$

Expresado en días de año ordinario:

$$t = 1.028806584 * 360 \text{ días}$$

$$t = 370.3703702 \text{ días}$$

Pero debemos ir al banco en el momento que este abra sus puertas, por lo que la respuesta correcta es **371 días !!!!**

Ejercicio 4

Verificaremos si la conclusión es correcta:

a) Si el tiempo transcurrido “t” es **370 días**:

$$S = C * (1 + i * t)$$

$$S = 1,350.00 * (1 + 9\% * 370/360)$$

$S = 1,474.88 < 1,475.00$ =>> no es la respuesta!!!

b) Si el tiempo transcurrido “t” es **371 días**:

$$S = C * (1 + i * t)$$

$$S = 1,350.00 * (1 + 9\% * 371/360)$$

$S = 1,475.21 > 1,475.00$ =>> si es la respuesta!!!

Ejercicio 5

Debido a una urgencia familiar, Juan pidió prestado S/. 5,000.00 a su vecina, y acordó devolverle S/. 6,000.00 en 2 meses ¿Cuál es la tasa de interés simple anual implícita en la operación?

Rpta. 120%

$C = \text{S/. } 5,000.00$

$S = \text{S/. } 6,000.00$

Tiempo = 2 **meses** (meses de 30 días)

$i = \text{TS} \mathbf{A} \text{ } ??\%$

Ejercicio 5

$$i = \frac{\frac{S}{t} - 1}{C} = \frac{\frac{6,000.00}{2*30/360} - 1}{5,000.00}$$

$$i = \frac{\frac{6,000.00}{5,000.00} - 1}{(2*30/360)}$$

$$i = 1.2$$

$$i = \text{TSA } 120\%$$

Ejercicio 6

Para alentar el **pronto pago de facturas** (pagar por adelantado una factura que se convino pagar de forma diferida), Goodyear ofrece a sus clientes un descuento en efectivo por pagos adelantados a la fecha de vencimiento, información que suele estar impresa en la factura como **3/10, n/30**, estando por lo tanto las facturas expuestas a un descuento de 3% si se paga en un plazo menor o igual a 10 días, en caso contrario se deberá pagar en un lapso no mayor de 30 días el monto total facturado.....

Ejercicio 6

Si un comerciante recibe una factura por US\$ 2,800.00 en los términos descritos. Se pide:

- a) ¿Cuál es la tasa máxima a la que puede obtener un préstamo de una banco para poder aprovechar dicho descuento?
- b) ¿Qué utilidad puede lograr en la operación, si recibe un préstamo del banco Pyme a una tasa de interés simple anual de 18% y paga la factura al décimo día (10) de su expedición?

Rptas. 55.67010309% y US\$ 56.84

Ejercicio 7

Un Televisor tiene como precio de venta al contado de S/. 1,800.00. Víctor conviene en pagar S/. 300.00 de cuota inicial y el saldo a 30 días, aceptando un recargo del 8% sobre el precio al contado (suele ser llamado precio de lista). ¿Qué tasa de interés simple anual (TSA) implícita está pagando por el crédito?

Rpta. 115.2%

P.V. = S/. 1,800.00

C.I. = S/. 300.00

Tiempo = 30 **días**

Recargo = 8%

$i = \text{TSA} \text{ ??\%}$

Tareas

Desarrolle los problemas presentados a continuación



Tareas

1. Calcular el interés simple ordinario y el exacto de un préstamo de US\$ 500.00 en 90 días, si se encuentra expuesto a una tasa de interés simple anual de 8.5%

Rpta. 10.63 y 10.48

2. Calcular el interés simple ordinario y el exacto de un préstamo de US\$ 600.00 en 118 días, si se encuentra expuesto a una tasa de interés simple anual de 16%

Rpta. 31.47 y 31.04

Tareas

3. Calcular el valor al vencimiento de una deuda por US\$ 2,500 en un plazo de 18 meses pactada al 12% de tasa de interés simple ordinario anual.

Rpta. 2,950

4. Calcular el valor al vencimiento de una deuda por US\$ 1,200 en un plazo de 120 días pactada al 8.5% de tasa de interés simple exacto anual.

Rpta. 1,233.53

Tareas

5. Un agiotista hizo un préstamo por US\$ 100.00 pagaderos con US\$ 120.00 dentro de un mes. ¿Cuál es la tasa de interés simple ordinario anual que cobra por la operación?

Rpta. 240%

6. ¿Cuánto tardará S/. 1,000.00 en a) ganar un interés de S/. 100.00 a una tasa de interés simple de 15%, y b) en aumentar cuando menos a S/. 1,200.00 si está expuesto a una tasa de interés simple de 13.5%?

Rptas. a) 8 meses, y b) 534 días

Tareas

7. ¿Cuánto tiempo se tardará en hacer que un capital de US\$ 5,000.00 acumule un valor futuro de por lo menos US\$ 6,000.00, si se conoce que se encuentra expuesto a una tasa de interés simple anual de 10%?

Rpta. 2 años o 720 días

8. ¿Cuánto tiempo se tardará en hacer que un capital de US\$ 12,350.00 acumule un valor futuro de por lo menos el doble de lo invertido, si se conoce que se encuentra expuesto a una tasa de interés simple anual de 11.25%?

Rpta. 8.889 años o 3,200 días.

Tareas

9. Un detallista recibe una factura por US\$ 8,000.00 por un embarque de muebles, con los términos 3/10,n/40, estando por lo tanto las facturas expuestas a un descuento de 3% si se paga en un plazo menor o igual a 10 días, en caso contrario se deberá pagar en un lapso no mayor de 40 días el monto total facturado.

a) ¿Cuál es la tasa más alta de interés simple con la que puede pedir prestado y aprovechar el descuento por pronto pago?

b) Si el detallista puede acceder aun préstamo pagando una tasa de interés simple de 21%. ¿Cuál es la ganancia que obtiene si acepta el préstamo y paga la factura por adelantado el 10mo día?

Rptas. a) 37.11340206% b) US\$ 104.20

Tareas

10. Una refrigeradora tiene como precio de venta al contado US\$ 576.00. Un comprador conviene en pagar US\$ 70.00 de cuota inicial al contado y el resto a 30 días, aceptando un recargo del 12% sobre el precio de contado (este nuevo precio suele ser llamado precio de lista). ¿Qué tasa de interés simple anual (TSA) está pagando?

Rpta. 163.9209486%

Repaso

Desarrolle los siguientes problemas del capítulo Tasa Simple del libro www.e-financebook.com:

1, 3, 4, 7, 8,
11, 13, 28, 30, 37,
39, 42, 43, 49, 52,
55, 57, 58, 60, 61.

