Franco J Vallejos Vigier LCC V-2952/1

a) Sea la funcion $g(x) = \frac{x + \cos(x)}{2}$, tenemos que demostrar que existe un pto fijo en $[0,1]$ y que para todo valor inicial x_0, $g(x)$ converge a ese punto fijo

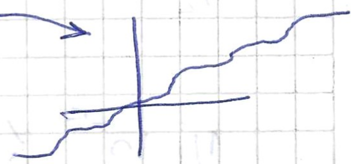
(1) Primero antes que nada x está acotada en $0 \leq x \leq 1$; por lo tanto como g es una función monotona estrictamente creciente podemos decir que

$$g(0) < g(x) < g(1) \quad \forall x \in [0,1]$$

Valorizando

$$1/2 < g(x) < 0{,}7701\ldots$$

$$0 < 1/2 < g(x) < 0{,}7701 < 1 \quad \forall x \in [0,1]$$



Por Teorema 1. Con $0 < x < 1 \longrightarrow 0 < g(x) < 1$

Existe pto fijo en $[0,1]$ ✓

(2) $g'(x) = \frac{1 - \sin(x)}{2}$

$$|g'(x)| = \left| \frac{1 - \sin(x)}{2} \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{\sin x}{2} \right|$$

Sabemos que $\sin x$ en $\underline{[0,1]}$; $0 \leq \sin x \leq \sin 1$

$\sin x$ creciente en $[0,1]$

Entonces $|g'(x)| = \left| 1/2 - \frac{\sin x}{2} \right|$

$$\left| 1/2 - \frac{\sin 0}{2} \right| < \left| 1/2 - \frac{\sin x}{2} \right| < \left| 1/2 - \frac{\sin 1}{2} \right|$$

$$1/2 < \underbrace{\left| 1/2 - \frac{\sin x}{2} \right| < 0{,}08 < 1}$$

Teorema 2: existe una unica sol en $[0,1]$ y converge $\forall x_0 \in [0,1]$

b) Por T2 III

Graficando $g'(x)$

$\lambda = g'(0)$

$\lambda = 1/2$

$$|\alpha - x_n| < \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_0 - x_1|$$

$$\frac{1}{2} 10^{-5} < \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_0 - x_1|$$

Tomando como

$x_0 = 0 \Rightarrow g(0) = 1/2 = x_1$

$$1/2\ 10^{-5} < \frac{(1/2)^n}{1/2} |x_0 - x_1|$$

$$1/2\ 10^{-5} < \frac{(1/2)^n}{1/2}\ 1/2$$

$$1/2\ 10^{-5} < (1/2)^{n-1} \cdot 1/2$$

$$1/2\ 10^{-5} < (1/2)^n$$

$$1/2\ 10^{-5} < (1/2)^n$$

$$10^{-5} < \frac{1}{2^n} \cdot 2$$

$$2^{n-1} < \frac{1}{10^{-5}}$$

$$2^{n-1} < 100.000$$

$$\log_2 2^{n-1} < \log_2 100.000$$

$$n-1 < 16,6096$$

$$n < 17,6096$$ $\longrightarrow$ necesitas a lo sumo 18 iteracione