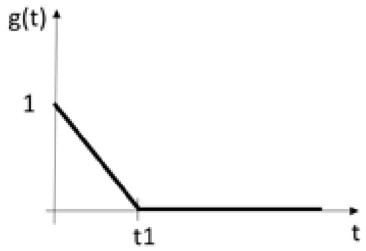
EJERCICIO: Considere el siguiente sistema de EDO de segundo orden,

$$M\,\frac{d^2(\overrightarrow{z})}{dt^2}+K\,\vec{z}\;=\;\vec{b}\cdot g(t)$$

con valores iniciales nulos del vector inicial $\vec{z}$ y del vector $\frac{d\vec{z}}{dt}$, en t=0; y los siguientes datos.

La función escalar $g(t)$, vale cero para todo t > t1, y para todo t perteneciente al intervalo [0; t1] se obtiene por medio de la recta del gráfico. El tiempo t1=50.



M=I4 , $K=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\vec{b}=\begin{Bmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{Bmatrix}$

siendo I4 la matriz Identidad de 4x4.

Desarrollar y entregar un programa en Matlab/Octave el cual contenga lo que se pide a continuación:

a) **Encontrar** la solución aproximada del sistema EDO aplicando el método de Diferencia central entre t=0 y tf=150 utilizando un paso de tiempo Δt=1/10.
b) **Expresar** el valor de la solución aproximada $z_1(t)$ en t=t1.
c) **Graficar** la solución $z_3(t)$ y $z_4(t)$ en el intervalo comprendido entre t=0 y tf para la solución del método del método de diferencia central.
d) **Calcular** en todo t, la función $v3(t) = dz3(t)/dt$
e) **Calcular** la integral definida como I= $\int_0^t (\mathrm{v3(t)})$^2 dt

Lo primero que hacemos es **definir la función** $g(t)$, la cuál es claramente una función por partes.
Primero pasa por los puntos $(0,\ 1)$ y $(t1\ =\ 50,\ 0)$. Entonces, podemos definir esa parte como $1\ -\frac{t}{50}$. Y luego es 0. Entonces la función por partes resulta:

$$g(t)\ = \begin{cases} 1\ -\frac{t}{50},\ si\, t\ \le 50 \\ 0,\ si\, t\ > 50 \end{cases}$$

(En código se puede implementar muy fácil).

Luego, tenemos que encontrar la **<u>"regla secuencial"</u>** utilizada en diferencia central, junto al **<u>"caso base"</u>**.

(Los vectores se expresan por la letra y la raya, $\overline{x}$)

1) **Regla secuencial** de $M\,\overline{z''(t)}\ +\ K\,\overline{z(t)}\ =\ \overline{b}g(t)$ (1)
   - Sustituyo por las derivadas numéricas (en este caso, central de segundo orden)
     $M\frac{1}{\Delta t^2}(z(t\ -\ \Delta t)\ -\ 2z(t)\ +\ z(t\ +\ \Delta t))\ +\ K\,\overline{z(t)}\ =\ \overline{b}g(t)$
   - Busco despejar $z(t\ +\ \Delta t)$, pues una vez despejado, obtenemos la regla
     $M(\overline{z(t\ -\ \Delta t)}\ -\ 2\overline{z(t)}\ +\overline{z(t\ +\ \Delta t)})\ +\ \Delta t^2 K\,\overline{z(t)}\ =\ \Delta t^2\overline{b}g(t)$

     $M(\overline{z(t\ -\ \Delta t)}\ -\ 2\overline{z(t)}\ +\overline{z(t\ +\ \Delta t)})\ =\ \Delta t^2\overline{b}g(t)\ -\ \Delta t^2 K\,\overline{z(t)}$

     $\overline{z(t\ -\ \Delta t)}\ -\ 2\overline{z(t)}\ +\overline{z(t\ +\ \Delta t)}\ =\ M^{-1}[\Delta t^2\overline{b}g(t)\ -\ \Delta t^2 K\,\overline{z(t)}]$

     $\overline{z(t\ -\ \Delta t)}\ -\ 2\overline{z(t)}\ +\overline{z(t\ +\ \Delta t)}\ =\ \Delta t^2 M^{-1}\overline{b}g(t)\ -\ \Delta t^2 M^{-1}K\,\overline{z(t)}$

     $\overline{z(t\ +\ \Delta t)}\ =\ \Delta t^2 M^{-1}\overline{b}g(t)\ -\ \Delta t^2 M^{-1}K\,\overline{z(t)}\ -\overline{z(t\ -\ \Delta t)}\ +\ 2\overline{z(t)}$

   - Agrupar $z(t)$

     $$\boxed{z(t\ +\ \Delta t)\ =\ \Delta t^2 M^{-1}\overline{b}g(t)\ +\ (2I\ -\ \Delta t^2 M^{-1}K)\ \overline{z(t)}\ -\overline{z(t\ -\ \Delta t)}}$$

     *(Nótese que si agrupamos, tenemos que hacer 2 * identidad 4x4)*
     El resultado anterior, representa la "regla secuencial"

     Para implementar en el código, podemos "pre calcular" lo siguiente, pues son constantes.
     $a\ =\ \Delta t^2 M^{-1}\overline{b}$
     $B\ =\ 2I\ -\ \Delta t^2 M^{-1}K$

     Entonces, la regla resulta:

$$\boxed{z(t + \Delta t) = ag(t) + B\,\overline{z(t)} - \overline{z(t - \Delta t)}}$$

2) Ya contamos con la "regla secuencial", pero tenemos que calcular el **caso base**, y eso se hace de la siguiente manera.

   El caso base es: $\overline{z(t_0 - \Delta t)}$, y se obtiene mediante la serie de Taylor

   - Se desarrolla la serie de Taylor hasta el tercer término

     $$\overline{z(t_0 - \Delta t)} = \overline{z(t_0)} - \Delta t\overline{z'(t_0)} + \frac{\Delta t^2}{2!}\overline{z''(t_0)} \quad (2)$$

     Se observa que conocemos $\overline{z(t_0)}$ y $\overline{z'(t_0)}$, pues son los valores iniciales. Pero no conocemos a $\overline{z''(t_0)}$. Entonces, simplemente lo despejamos de la ecuación diferencial inicial del problema (1)

     $$M\,\overline{z''(t)} + K\,\overline{z(t)} = \bar{b}g(t)$$

     $$M\,\overline{z''(t)} = \bar{b}g(t) - K\,\overline{z(t)}$$

     $$\overline{z''(t)} = M^{-1}[\bar{b}g(t) - K\,\overline{z(t)}] \quad (3)$$

   - Luego, sustituimos (3) en (2)

     $$\overline{z(t_0 - \Delta t)} = \overline{z(t_0)} - \Delta t\overline{z'(t_0)} + \frac{\Delta t^2}{2!}\overline{z''(t_0)}$$

     $$\boxed{\overline{z(t_0 - \Delta t)} = \overline{z(t_0)} - \Delta t\overline{z'(t_0)} + \frac{\Delta t^2}{2!}M^{-1}[\bar{b}g(t) - K\,\overline{z(t)}]}$$

     Lo cuál, representa el caso base

Estas dos expresiones, junto a la definición de $g(t)$, son todo lo que necesitamos para poder aplicar el método de diferencia central.

Anexo

El procedimiento para poder obtener la regla y el caso es siempre el mismo. Pero resulta necesario conocer el procedimiento porque hay distintos tipos de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

La serie de Taylor $\overline{z(t_0 - \Delta t)} = \overline{z(t_0)} - \Delta t\overline{z'(t_0)} + \frac{\Delta t^2}{2!}\overline{z''(t_0)}$, es siempre la misma. Esta parte si se puede memorizar