

Renderizado de fractales con MPI

Franco Yudica y Martín Farrés

Trabajo Integrador Final: Programación Paralela y Distribuida

Abstract: Este trabajo presenta el desarrollo de una implementación paralela de renderizado de fractales bidimensionales, mostrando sus diferencias con la versión secuencial. Además se detalla sobre los experimentos realizados para determinar el rendimiento de la aplicación, en conjunto con conclusiones sobre tales resultados.

Keywords: Fractals, Mandelbrot Set, Julia Set, Programación paralela, MPI, Números Complejos, Sistemas Dinámicos, Gráficos de Computadora, Evaluación de Resultados.

1 Introducción

El renderizado eficiente de imágenes fractales representa un reto significativo en el ámbito de la computación gráfica, debido a la complejidad matemática involucrada y la alta demanda computacional que implica su visualización detallada. Los fractales, como el conjunto de Mandelbrot o los conjuntos de Julia, se caracterizan por su estructura auto-similar e infinita complejidad, lo que requiere un gran número de cálculos por píxel para generar imágenes precisas y atractivas.

Este informe presenta el desarrollo y análisis de un sistema de renderizado de fractales, implementado utilizando técnicas de paralelización y optimización computacional. El objetivo principal es reducir el tiempo de renderizado, aprovechando al máximo los recursos de hardware disponibles.

En primer lugar, se describe el proceso secuencial de renderizado de fractales, abordando las ecuaciones iterativas involucradas y los criterios de escape utilizados para determinar la convergencia o divergencia de cada punto. Luego, se introduce la versión paralela del sistema, explicando las estrategias utilizadas para distribuir el trabajo entre múltiples hilos o nodos, y las optimizaciones aplicadas para mejorar la eficiencia.

A continuación, se presentan los experimentos realizados para evaluar el rendimiento del sistema, analizando métricas como el speedup, la eficiencia y la escalabilidad en diferentes configuraciones. Se incluyen también comparaciones visuales y tiempos de renderizado, acompañados de una discusión sobre los resultados.

Finalmente, se exponen las conclusiones obtenidas a partir del análisis, resaltando las ventajas y limitaciones del enfoque propuesto. Se sugieren además posibles líneas de mejora, incluyendo la exploración de técnicas de paralelización mediante el uso de hilos.

2 Marco teórico

En esta sección se desarrolla el marco teórico fundamental de los fractales, realizando una breve introducción a la dinámica compleja [7], conjuntos de Julia y Fatou [9], fractales de Julia y

Mandelbrot [2], y las técnicas de coloreo de fractales utilizadas en este proyecto.

2.1 Dinámica compleja

La dinámica compleja, también conocida como dinámica holomorfa [7], es una rama de la matemática que estudia el comportamiento de los sistemas dinámicos [8] obtenidos mediante la iteración de funciones analíticas en el plano complejo. A diferencia de los sistemas dinámicos en el plano real, la estructura adicional que proporciona la analiticidad en los números complejos introduce una rica variedad de comportamientos geométricos y topológicos que han sido ampliamente estudiados desde principios del siglo XX.

Una función compleja $f : C \rightarrow C$ se itera generando una secuencia de funciones

$$f^n(z) = f(f^{n-1}(z))$$

donde $n \in \mathbb{N}$. El objeto de estudio principal es el conjunto de órbita de un punto z , definido como la secuencia de sus imágenes sucesivas bajo iteraciones de f . Esta órbita puede exhibir distintos comportamientos: puede tender al infinito, converger a un punto fijo o seguir una trayectoria caótica.

Un ejemplo clásico y fundamental es la función cuadrática:

$$f(z) = z^2$$

Aunque simple, esta función exhibe una variedad de comportamientos interesantes dependiendo del punto de partida z_0

Por ejemplo:

$$\text{Si } |z_0| < 1, \text{ entonces } f^n(z_0) \rightarrow 0$$

$$\text{Si } |z_0| > 1, \text{ entonces } f^n(z_0) \rightarrow \infty$$

$$\text{Si } |z_0| = 1, \text{ entonces } f^n(z_0) \rightarrow 1$$

2.2 Conjuntos de Julia y Fatou

El estudio de estas órbitas lleva a la clasificación del plano complejo en dos regiones fundamentales:

- El conjunto de Fatou, donde las órbitas tienen un comportamiento estable bajo pequeñas perturbaciones iniciales.
- El conjunto de Julia, que contiene puntos con un comportamiento altamente sensible a las condiciones iniciales, caracterizado por su complejidad fractal.

Estos conjuntos son complementarios y su frontera compartida representa el límite entre estabilidad y caos. En el caso de $f(z) = z^2$, el conjunto de Julia es el círculo unitario $|z| = 1$, mientras que el conjunto de Fatou está formado por el interior y el exterior de tal círculo.

2.3 Fractal Julia

Los conjuntos de Julia se generan utilizando números complejos. Estos poseen dos componentes, real e imaginaria, y pueden representarse como puntos en un plano bidimensional, lo que permite renderizar el fractal sobre una imagen 2D. Para cada píxel de la imagen, su coordenada (x, y) en el plano se utiliza como entrada en una función recursiva.

El fractal de Julia es un ejemplo clásico de fractal de tiempo de escape, lo que significa que el interés está en determinar si, tras aplicar repetidamente una función compleja, el valor resultante tiende al infinito o no.

La función recursiva que define el conjunto de Julia es:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

donde:

- z_n es el valor complejo en la iteración n ,
- z_0 es la posición del píxel en el plano complejo, escrita como $z_0 = p_x + p_y i$
- c es una constante compleja, $c = c_x + c_y i$, que permanece fija durante toda la generación del fractal.

Está demostrado que si $|z_n| > 2$, entonces la sucesión diverge (tiende a infinito). En este contexto, el valor 2 se denomina bailout, y es el umbral utilizado para determinar la divergencia. [5].

2.4 Fractal Mandelbrot

El fractal de Mandelbrot es muy similar al de Julia, ya que también se trata de un fractal de tiempo de escape. La principal diferencia radica en la función recursiva y en los valores iniciales utilizados.

La función que define al conjunto de Mandelbrot es:

$$z_{n+1} = z_n^2 + p$$

donde:

- p es la posición del píxel en el plano complejo, de la forma $p = p_x + p_y i$,
- z_n inicia en 0, es decir, $z_0 = 0$, y se itera añadiendo el valor constante p en cada paso.

Al igual que en el caso del fractal de Julia, el criterio de escape se basa en si $|z_n| > 2$, utilizando el mismo valor de bailout. [2], [5].

2.5 Coloreo de fractales

Existen distintos métodos para colorear fractales, siendo el más básico el blanco y negro. En este esquema, los píxeles cuya posición, al ser utilizada como punto de partida en la iteración del fractal, tienden al infinito, se colorean de blanco. Por el contrario, aquellos que no divergen se colorean de negro.

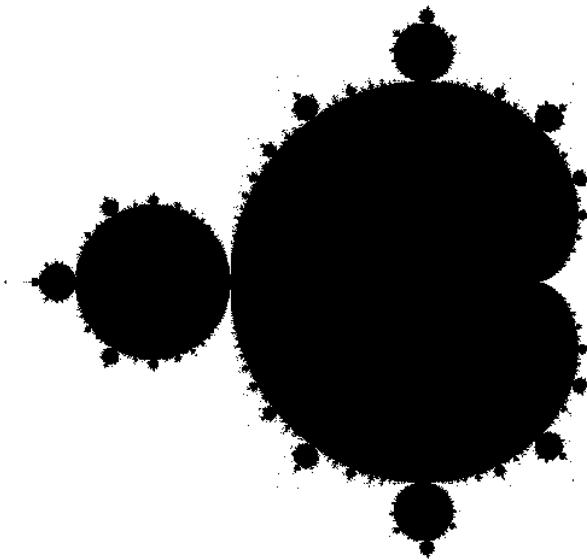


Figura 1: *Representación en blanco y negro del conjunto de Mandelbrot.

Sin embargo, este método binario puede resultar limitado para visualizar la complejidad del sistema dinámico. Por ello, se utilizan técnicas más avanzadas como el coloreo por tiempo de escape (escape time coloring), donde se asignan colores según la cantidad de iteraciones que tarda un punto en escapar de un cierto radio. Esto permite generar imágenes con ricos gradientes de color que reflejan la velocidad de divergencia y destacan la estructura del borde del conjunto. [5].

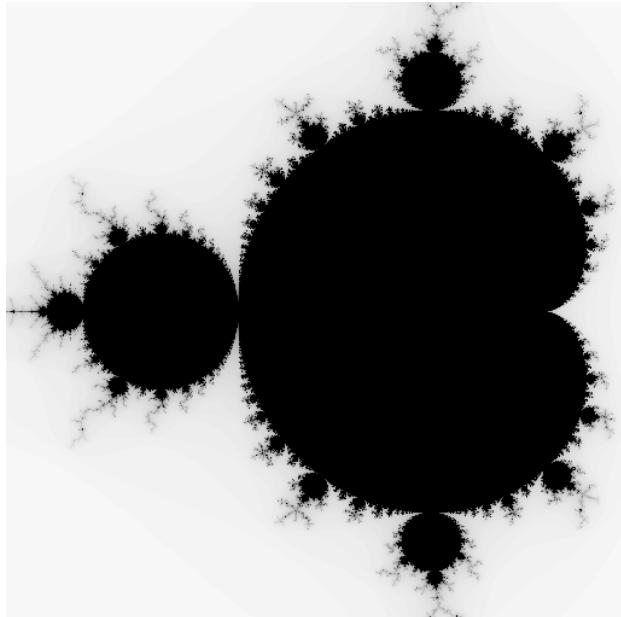


Figura 2: Representación en escala de grises del conjunto de Mandelbrot.

Pero también es posible mapear el número de iteraciones a una paleta de colores. Nótese que los puntos pertenecientes al conjunto de Mandelbrot toman un color uniforme, ya que alcanzan el número máximo de iteraciones sin divergir.

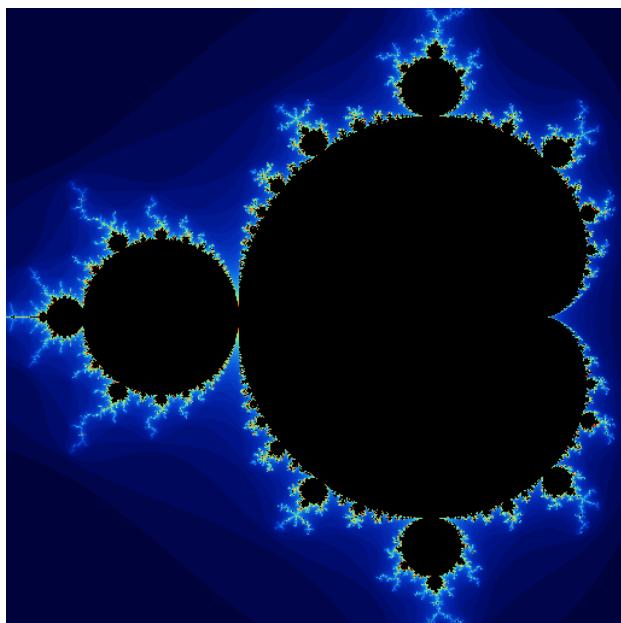


Figura 3: Mapeo de iteraciones a paleta de colores del conjunto de Mandelbrot.

En la figura 3 se pueden observar resultados mucho más interesantes. Al mirar con detalle, se aprecian transiciones abruptas entre los colores, un efecto comúnmente denominado *banding* en computación gráfica. Esto se debe a que el mapeo del color se realiza únicamente en función de la cantidad de iteraciones, que es un valor discreto.

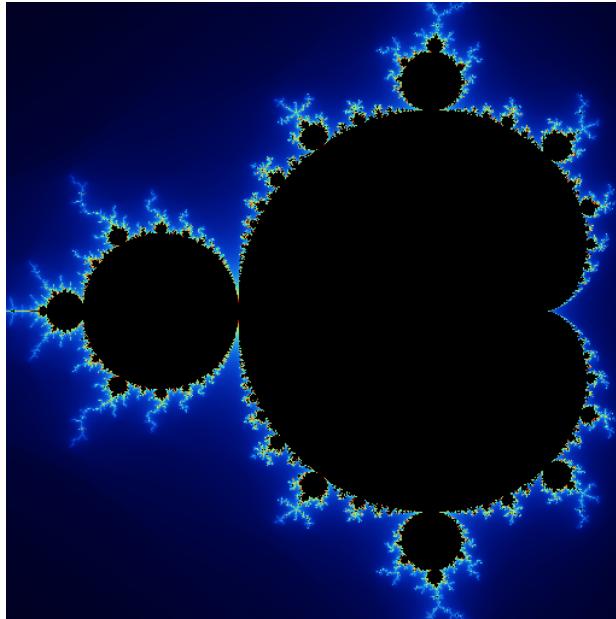


Figura 4: Mapeo de iteraciones a colores con transición suave.

Para renderizar la figura 4, se ha utilizado el número de iteraciones, en conjunto con $|z_n|$, lo cuál permite realizar un mapeo continuo a la paleta de colores, eliminando el efecto de *banding*. El desarrollo matemático se encuentra en la referencia [5].

3 Desarrollo

El algoritmo para el desarrollo de dichas imágenes se resume en, la obtención del color correspondiente según la fórmula de fractal aplicada a cada pixel de la imagen. Para la cuál se desarrolló una función de renderizado **render_block**;

```
def render_block(x_inicial, y_inicial, ancho, alto):  
  
    for j in range(alto):  
  
        for i in range(ancho):  
  
            pixel_x = x_inicial + i
```

```

pixel_y = y_inicial + j

# Calcular coordenadas normalizadas [-1.0, 1.0]
nx, ny = calcular_ndc(pixel_x, pixel_y)

# Convertir (nx, ny) a coordenadas del mundo (wx, wy) usando la cámara
wx, wy = camera.to_world(nx, ny)

# Evaluar el fractal, obteniendo las iteraciones normalizadas [0.0, 1.0]
t = fractal(wx, wy)
r, g, b = color(t)

# Guardar el color en el buffer
guardar_buffer(r, g, b, pixel_x, pixel_y)

```

La función se encarga del procesamiento de la imagen fractal. Para cada píxel, el algoritmo toma varias muestras con un pequeño desplazamiento aleatorio (antialiasing) para disminuir el ruido obtenido en la imagen final. Luego cada muestra se transforma en coordenadas del mundo con una cámara virtual. Las mismas son evaluadas por **funcion_fractal** para obtener un valor que, luego es transformados a valores rgb utilizando la función, **funcion_color**. Finalmente, dichos valores se promedian obteniendo así el color para cada pixel de la imagen.

Para el desarrollo del problema se hicieron dos versiones, secuencial y paralelo, para observar las diferencias de ambas en términos de tiempo y costo computacional.

3.1 Secuencial

El código secuencial implementa un enfoque lineal para resolver el problema de renderizado. El algoritmo recibe varios parámetros de configuración, tales como el ancho y alto de la imagen, la posición y el nivel de zoom de la cámara, el tipo de fractal a calcular, entre otros. A partir de esta información, se invoca directamente la función de renderizado, y una vez finalizado el proceso, se guarda la imagen resultante.

El procesamiento es completamente secuencial: cada píxel de la imagen es calculado uno por uno, sin ningún tipo de paralelismo o concurrencia. Esto lo convierte en una implementación sencilla pero poco eficiente para imágenes de alta resolución o fractales complejos.

3.2 Paralelo

Dado que el renderizado de fractales es una tarea altamente demandante en términos computacionales, se exploró una versión paralela del algoritmo con el objetivo de reducir significativamente el tiempo de ejecución.

3.3 Identificación del paralelismo

El renderizado de fractales es un problema naturalmente paralelizable. Cada píxel de la imagen puede calcularse de forma independiente, ya que no requiere información de los píxeles vecinos ni de ningún otro elemento de la imagen. Esta independencia permite dividir la carga de trabajo entre múltiples procesos o hilos de ejecución sin necesidad de sincronización compleja, lo que lo convierte en un caso ideal para aplicar técnicas de paralelismo.

3.4 Secciones secuenciales y paralelizables

El algoritmo presenta tanto secciones secuenciales como paralelizables.

Las secciones secuenciales incluyen la etapa de inicialización, en la cual se configura el entorno de ejecución, se inicializa la biblioteca MPI y se definen las tareas o bloques de la imagen que serán distribuidos a los procesos workers. La etapa de finalización también es secuencial, ya que implica recopilar los bloques renderizados, ensamblar la imagen final y guardarla en disco. Estas etapas requieren acceso centralizado a ciertos recursos y coordinación general, lo que limita su paralelización.

Por otro lado, la sección paralelizable corresponde al renderizado de los bloques de imagen. Dado que cada bloque puede ser procesado de forma independiente, esta etapa se distribuye entre los distintos procesos para acelerar significativamente el tiempo total de ejecución.

3.5 Estrategia de descomposición

El renderizado de fractales representa un caso típico para aplicar una estrategia de descomposición de dominio. Esta técnica consiste en subdividir el dominio del problema, en este caso, la imagen a renderizar, en múltiples subregiones independientes. Concretamente, la imagen se divide en bloques rectangulares, cada uno definido por una tupla de la forma (x, y, ancho, alto), que indica la posición y dimensiones del bloque dentro de la imagen global.

3.6 Modelo de algoritmo paralelo

Se adopta un modelo master-worker. En este esquema, el nodo master se encarga de dividir la imagen en bloques y distribuir el trabajo entre los distintos procesos workers. Además, coordina las solicitudes de tareas, asigna bloques disponibles de forma dinámica y recibe los resultados procesados por cada worker.

Una vez que los bloques son completados, el master se encarga de ensamblar los resultados parciales en un búfer central, que luego se utiliza para generar la imagen final.

3.6.1 Asignación de tareas y balanceo de carga

Esta aproximación inicial ya demuestra mejoras en el tiempo total de cómputo, aunque revela un desbalanceo de carga cuando algunos bloques requieren más cómputo que otros, siendo esta una característica común en el renderizado de fractales, dejando procesos inactivos mientras otros siguen trabajando.

Por ejemplo, si las ocho tareas tienen duraciones (en ms) [10, 10, 10, 10, 20, 30, 40, 50] y se reparten estáticamente en dos nodos:

- **Nodo1** recibe las cuatro primeras tareas: $10 + 10 + 10 + 10 = 40$ ms de trabajo y permanece inactivo los 100 ms restantes.
- **Nodo2** recibe las cuatro últimas: $20 + 30 + 40 + 50 = 140$ ms, completando todo el render en 140 ms.

Para resolver este desbalanceo se implementó un balanceo de carga dinámico basado en asignación bajo demanda. En lugar de asignar bloques estáticamente, el master mantiene una cola de tareas y cada worker solicita un nuevo bloque tan pronto como finaliza el anterior. De este modo, el tiempo de inactividad de los procesos se reduce significativamente y se optimiza el uso de los recursos de cómputo. Con la misma serie de duraciones y balanceo dinámico:

- **Nodo1** procesa: $10 + 10 + 10 + 10 + 50 = 90$ ms.
- **Nodo2** procesa: $20 + 30 + 40 = 90$ ms,

logrando que ambos nodos terminen en 90 ms y minimizando los períodos ociosos.

3.6.2 Sincronismo - Asincronismo

El sistema implementado utiliza un modelo de comunicación sincrónico. Los mensajes intercambiados entre el nodo master y los workers se gestionan mediante llamadas bloqueantes, donde tanto el emisor como el receptor deben estar sincronizados para que la operación de envío o recepción se complete.

Este enfoque simplifica la lógica de coordinación y garantiza un flujo de ejecución controlado, aunque puede introducir ciertos períodos de espera innecesarios si alguno de los procesos se encuentra inactivo temporalmente.

En este contexto, los beneficios de un modelo asincrónico serían mínimos, ya que el tiempo de comunicación es muy bajo en comparación con el tiempo de cómputo, siendo este último dominado por el proceso de renderizado.

3.7 Pseudocódigo de master

```
def master(num_procs, settings):
    # Crear buffer de imagen
    imagen = crear_buffer_imagen(settings)

    # Dividir imagen en bloques de trabajo
    worker_tasks = dividir_en_tareas(imagen)

    sent = 0
    done = 0

    while done < len(worker_tasks):
```

```

mensaje, origen = mpi_esperar_mensaje()

if mensaje.tag == "REQUEST":
    if sent < len(worker_tasks):
        tarea = worker_tasks[sent]
        mpi_enviar(tarea, destino=origen, tag="TASK")
        sent += 1
    else:
        mpi_enviar(None, destino=origen, tag="TERMINATE")

elif mensaje.tag == "RESULT":
    bloque = recibir_mensaje(fuente=origen)
    copiar_bloque_en_buffer(imagen, bloque)
    done += 1

# Enviar TERMINATE a todos los workers
for rank in range(1, num_procs):
    mpi_broadcast(tag="TERMINATE")

# Guardar imagen final
guardar_imagen(imagen)

```

La función master comienza reservando un búfer para la imagen completa y dividiendo el área de renderizado en bloques de tamaño fijo, que se almacenan en una lista de tareas. A continuación, mantiene dos contadores: uno para las tareas enviadas y otro para las tareas completadas. En un bucle principal, espera mensajes de los masteres; cuando recibe una petición de trabajo, comprueba si aún quedan bloques sin asignar y, en caso afirmativo, envía el siguiente bloque, o bien envía una señal de terminación si ya no hay más. Cuando recibe el resultado de un bloque, copia los píxeles de ese fragmento en la posición correspondiente del búfer global y actualiza el contador de tareas completadas. Este proceso se repite hasta que todas las tareas han sido procesadas, momento en el cuál el master envía una señal de terminación a cada worker, detiene el temporizador y muestra el tiempo total de cómputo. Finalmente, invoca al manejador de salida para guardar el búfer como imagen.

3.8 Pseudocódigo de worker

```

def worker(rank, config_imagen, config_fractal, camara):
    while True:

        # Worker listo, solicita tarea
        enviar_mensaje(destino=master, tag="REQUEST")
        mensaje = recibir_mensaje(master)

        if mensaje.tag == "TASK":

```

```

# Recibe el bloque a renderizar
x, y, ancho, alto = recibir_tarea(fuente=master)
buffer = crear_buffer(ancho * alto * 3)

# Renderiza
render_block(
    buffer,
    config_imagen,
    config_fractal,
    camara,
    x,
    y,
    ancho,
    alto)

# Envía el bloque renderizado
mpi_enviar(
    buffer,
    destino=master,
    tag="RESULT")

elif mensaje.tag == "TERMINATE":
    recibir_señal_terminacion()
    break

```

La función worker empieza enviando al master una petición de tarea y se bloquea hasta recibir una respuesta. Cuando llega una tarea, el worker crea un búfer para la sección asignada, invoca render_block para llenarlo con los píxeles fractales correspondientes y luego devuelve tanto la descripción de la tarea como su contenido al proceso master. Este ciclo de petición–procesamiento–envío se repite hasta que el master indica la terminación, momento en el cuál el worker sale del bucle y finaliza su ejecución.

3.9 Parámetros de Funcionamiento

En esta sección se describen en detalle los comandos de ejecución de la aplicación DistributedFractals, tanto en modo secuencial como distribuido, los parámetros de entrada disponibles y las condiciones necesarias del entorno para su correcto funcionamiento.

3.9.1 Requisitos y Condiciones del Entorno

Para garantizar la reproducibilidad de los experimentos y el correcto funcionamiento de la plataforma de renderizado distribuido, el entorno de ejecución debe satisfacer los siguientes requisitos hardware, software y de configuración:

- **Sistema Operativo:**

- Linux (distribuciones basadas Debian GNU/Linux)
- **Herramientas de Construcción:**
 - **CMAKE** version ≥ 3.14
 - **Compilador C++** con soporte para estandar C++17 (p. ej., `g++ 7.5+`, `clang++ 8+`)
- **Implementación MPI**
 - **MPICH** ≥ 3.2 o **OpenMPI** ≥ 4.0
 - Variables de entorno configuradas (`MPI_HOME`, `PATH`, `LD_LIBRARY_PATH`)
 - Acceso a los binarios `mpirun` y/o `mpiexec`
- **Bibliotecas de tiempo de ejecución**
 - Librerías estándar de C++17 (`libstdc++`, `libm`)
 - Librerías MPI (`openmpi-bin`, `openmpi-bin`, `openmpi-common`)

3.9.2 Instrucción de Construcción

Previo a la ejecución, es necesario construir el ejecutable. Para ello, primero instalar las dependencias necesarias:

```
sudo apt install openmpi-bin openmpi-bin openmpi-common
```

Luego, dentro de la carpeta `DistributedFractals` ejecutar:

```
mkdir build
cd build
cmake ..
make
```

3.9.3 Parámetros de Entrada

La aplicación admite los siguientes parámetros de entrada:

Parámetro	Descripción	Valor por defecto
<code>--width</code>	Ancho de la imagen (píxeles)	800
<code>--height</code>	Alto de la imagen (píxeles)	600
<code>--zoom</code>	Nivel de zoom	1.0
<code>--camera_x</code>	Posición X del centro de la cámara	0.0
<code>--camera_y</code>	Posición Y del centro de la cámara	0.0
<code>--iterations</code>	Máximo número de iteraciones	100
<code>--type</code>	Identificador de tipo de fractal (0 = Mandelbrot, 1 = Julia, ...)	0
<code>--color_mode</code>	Modo de coloreado	0
<code>--block_size</code>	(MPI) Tamaño de bloque en píxeles	64
<code>--samples</code>	(MPI) Número de muestras MSAA	1
<code>--output_disk</code>	Ruta de salida para guardar la imagen en disco	<code>output.png</code>
<code>--Julia-cx</code>	Componente real de la constante C (solo Julia)	0.285

Parámetro	Descripción	Valor por defecto
--Julia-cy	Componente imaginaria de la constante C (solo Julia)	0.01

Tabla 1: Parámetros de entrada de los programas.

3.9.4 Ejecución Secuencial

La versión secuencial de la aplicación permite generar imágenes fractales utilizando un único proceso de cómputo. El ejecutable asociado se denomina `sequential`.

```
./sequential [OPCIONES]
```

3.9.5 Ejecución Distribuida (MPI)

La versión paralela aprovecha MPI para repartir bloques de cálculo entre varios procesos. El ejecutable se denomina `fractal_mpi`.

```
mpirun -np <N> ./fractal_mpi [OPCIONES]
```

donde `<N>` es el número de procesos MPI.

Ejemplo de Uso

```
# Con 8 procesos MPI y parámetros personalizados
mpirun -np 8 ./fractal_mpi \
  --width 1080 \
  --height 720 \
  --zoom 1.5 \
  --camera_x -0.7 \
  --camera_y 0.0 \
  --iterations 256 \
  --type 0 \
  --block_size 64 \
  --samples 4 \
  -output_disk mandelbrot_distribuido.png
```

4 Diseños de Experimentos

Primero, se plantea un estudio comparativo entre la versión secuencial y la paralela bajo distintas cantidades de nodos, con el fin de evaluar la eficiencia y el speedup.

Luego, se analiza en profundidad el comportamiento de la versión paralela frente a diferentes configuraciones de parámetros.

Es importante aclarar que cada una de las mediciones se basa en el tiempo de ejecución medio, el cual se obtuvo a partir del promedio de al menos 10 ejecuciones, con el objetivo de asegurar resultados representativos y confiables.

4.1 Parámetros utilizados

Los siguientes parámetros se mantienen constantes a lo largo de todos los experimentos.

Parámetro	Valor
<code>samples</code>	4
<code>cx</code>	-0.7454286
<code>cy</code>	0.1130089
<code>zoom</code>	327000
<code>color_mode</code>	5
<code>type</code>	<i>Mandelbrot</i>
<code>output_disabled</code>	-

Tabla 2: Parámetros constantes en los experimentos.

Nótese que se utiliza el parámetro `output_disabled` ya que el fin de los experimentos radica en el cómputo del buffer con los colores de los píxeles. El proceso de creación de imágenes PNG y su escritura en el disco puede tomar una considerable cantidad de tiempo, especialmente en ejecuciones rápidas.

4.2 Versión secuencial contra paralela

Con el objetivo de realizar una comparación exhaustiva entre la versión secuencial y la versión paralela de la aplicación, se han considerado dos tipos de atributos, la resolución de la imagen y el tamaño de los bloques.

Los siguientes experimentos se ejecutan utilizando diferentes cantidades de procesos MPI: [2, 4, 8, 16, 32], con el fin de evaluar la **eficiencia** y el **speedup** de la versión paralela, en comparación con la versión secuencial.

4.2.1 Resolución de imagen

Un factor determinante es la resolución de la imagen, especificada por los parámetros `width` y `height`. Para simplificar, se utilizaron imágenes cuadradas con $width = height$. Se realizaron ejecuciones para los siguientes tamaños:

Caso	Resolución
0	32×32
1	64×64
2	128×128

Caso	Resolución
3	512×512
4	1080×1080
5	1920×1920

Tabla 3: Resoluciones utilizadas en los experimentos.

Además de los parámetros establecidos anteriormente, se ha fijado:

Parámetro	Valor
<code>block_size</code>	32
<code>iterations</code>	20000

Tabla 4: Parámetros extra constantes.

4.2.2 Tamaño de bloque

Permite analizar el impacto del tamaño de bloque en el balanceo de carga entre nodos, con el objetivo de encontrar un valor óptimo.

Parámetro	Valor
<code>width</code>	1080
<code>height</code>	1080
<code>iterations</code>	20000

Tabla 5: Parámetros extra constantes.

Se ha fijado la resolución ya que en este caso nos interesa estudiar el impacto del tamaño de bloque.

Los tamaños de bloque evaluados son:

$$[2 \times 2, 4 \times 4, 8 \times 8, 16 \times 16, 32 \times 32, 64 \times 64, 128 \times 128]$$

4.3 Experimentación de balanceo de carga mediante herramientas de *Profiling*

Este experimento tiene como objetivo realizar un análisis cuantitativo del tiempo de ejecución de los distintos componentes del programa paralelo, con especial foco en el balanceo de carga entre procesos. Para ello, se emplean herramientas especializadas de profiling, como *Score-P* [10] para la recolección de datos y *Vampir* [11] para su visualización y análisis detallado.

Es importante aclarar que este experimento se basa en una única ejecución por cada una de las configuraciones evaluadas, con el propósito de analizar casos aislados y particulares, permitiendo una interpretación más detallada del comportamiento del programa bajo cada escenario.

Se analiza el comportamiento del programa variando el tamaño de bloque utilizado:

$$[2 \times 2, 16 \times 16, 128 \times 128]$$

Se presta especial atención a los métodos que involucran comunicaciones, como las llamadas a MPI, y al procedimiento `render_block`, descrito anteriormente en la sección de pseudocódigo paralelo.

Para cada función ejecutada se registran y estudian las siguientes métricas clave: - Tiempo promedio. - Cantidad de invocaciones.

Parámetro	Valor
<code>width</code>	1080
<code>height</code>	1080
<code>np</code> (Cantidad de nodos)	8

Tabla 6: Parámetros extra constantes.

Cabe destacar que se ha optado por utilizar 8 nodos con el objetivo de facilitar la interpretación de los datos y simplificar el proceso de recolección. Además, el propósito de este experimento no es evaluar métricas clásicas como el speedup o la eficiencia paralela, sino analizar cómo distintas configuraciones del tamaño de bloque afectan el balanceo de carga entre procesos.

4.4 Cantidad de iteraciones

Una parte fundamental del renderizado de fractales consiste en determinar el número adecuado de iteraciones a utilizar. El objetivo es minimizar este valor para reducir los tiempos de cómputo, sin comprometer la calidad de la imagen generada. Por esta razón, en este experimento se renderizarán imágenes utilizando distintas cantidades máximas de iteraciones.

Los valores evaluados para el número máximo de iteraciones son:

$$[200, 500, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 10000, 15000, 20000, 40000]$$

Este análisis resulta especialmente relevante para entender cómo impacta la cantidad de iteraciones tanto en el tiempo de ejecución como en la calidad visual de los fractales. Además, permite observar cómo varía el tiempo de procesamiento al aumentar el número máximo de iteraciones, y evaluar si dicha relación sigue un comportamiento lineal, logarítmico o exponencial.

Cabe destacar que este experimento se realiza exclusivamente sobre la versión paralela del algoritmo, dejando de lado la versión secuencial. Esto se debe a que los experimentos anteriores

ya han proporcionado información suficiente para su comparación, y este estudio particular no aporta datos adicionales relevantes para dicha versión.

Parámetro	Valor
width	1080
height	1080
block_size	32
np (Cantidad de nodos)	32

Tabla 7: Parámetros extra constantes.

4.5 Consideraciones sobre experimentos

Con el fin de garantizar la validez de los resultados, se han tomado en cuenta los siguientes criterios:

- Todas las ejecuciones se realizan sobre la misma configuración de hardware, un cluster de nodos Debian con CPU de cuatro núcleos físicos, los cuales forman un total de 32 nodos computacionales.
- Misma versión de **OpenMPI (4.1.4)**.
- Las compilaciones se efectúan con optimización `-O3`.
- Aquellos parámetros que no se hayan especificado, toman su valor por defecto.
- La función de temporización utilizada, `perf_counter()` de la librería `time` en python, se invoca de manera uniforme en todas las pruebas.

Con este riguroso control de variables, los resultados obtenidos reflejan de forma confiable el impacto de los factores estudiados sobre el tiempo de renderizado, el speedup y la eficiencia de la versión paralela, permitiendo extraer conclusiones sólidas sobre sus límites de escalabilidad y sus puntos de inflexión en el rendimiento.

5 Resultados Obtenidos

En esta sección se presentarán los resultados obtenidos al realizar los experimentos planteados en la sección de diseño de experimentos. Es por este motivo que seguirá la misma estructura planteada anteriormente. Se presentarán tablas de datos y gráficos, los cuales serán analizados en detalle en la sección de análisis de resultados.

5.1 Versión secuencial contra paralela

A continuación se muestra el rendimiento de ambas versiones en función del tamaño de la imagen y la cantidad de nodos utilizados.

5.1.1 Tamaño de imagen

Se estudió el efecto de modificar la resolución de imagen en el tiempo de ejecución.

5.1.1.1 Tabla de datos de ejecución secuencial

A modo de comparación, se incluye el tiempo de ejecución para la versión secuencial con cada resolución.

Resolución	Tiempo promedio (s)	Desviación estándar (s)
32x32	0.07977260379984731	0.00043435765082315455
64x64	0.31759674040004027	0.002131164715677036
128x128	1.2609421436000048	0.0013148213508798747
512x512	20.132811490099993	0.009180779629399193
1080x1080	89.59314089329982	0.024588972955427328
1920x1920	283.25439927300033	0.04803506827399954

Tabla 8: Tiempo promedio y desviación estándar en segundos para cada configuración de resolución sobre versión secuencial.

5.1.1.2 Tabla de datos de ejecución paralela

Se presenta el tiempo promedio y la desviación estándar para distintas resoluciones y cantidades de nodos.

Cantidad de nodos	Resolución	Tiempo promedio (s)	Desviación estándar (s)
2	32x32	0.7347766071998194	0.024293793933656622
4	32x32	0.7194581487994582	0.019995011884794463
8	32x32	0.7597506460006116	0.019692794415084734
16	32x32	0.755642992799767	0.014237480350074726
32	32x32	0.7530325819996506	0.014154650552929655
2	64x64	0.9698013217999687	0.04280733081779699
4	64x64	0.7844574396993267	0.02057444796819635
8	64x64	0.8701380547001463	0.20425526530434057
16	64x64	0.813580839000133	0.02785545076843234
32	64x64	0.8377403283004241	0.030037874078768456
2	128x128	1.8987524622003549	0.02253840710023415
4	128x128	1.0858486641998752	0.027295021328173408
8	128x128	1.0203170211996622	0.026902499139743397
16	128x128	1.0145710798999061	0.022382251243951167
32	128x128	1.0069084299993847	0.019242904410697554
2	512x512	20.83092403529954	0.022270186767527914
4	512x512	7.38089184599994	0.025637281621891578
8	512x512	3.6114315322007315	0.024159854440402008

Cantidad de nodos	Resolución	Tiempo promedio (s)	Desviación estándar (s)
16	512x512	2.126211233899812	0.03389213149233942
32	512x512	1.6320069547000458	0.03812131381339011
2	1080x1080	90.4301608312002	0.044303374630204846
4	1080x1080	30.63535752170028	0.022529494539971554
8	1080x1080	13.590946517599514	0.014405034421835603
16	1080x1080	6.808138592400428	0.0172290493620024
32	1080x1080	4.109694875600326	0.05180247169371324
2	1920x1920	284.35179361740086	0.028804059407490677
4	1920x1920	95.44321080139962	0.03332558576788434
8	1920x1920	41.52969608500025	0.017873206091913493
16	1920x1920	20.056586532099754	0.025654280626253977
32	1920x1920	11.296893179300605	0.25224913775009544

Tabla 9: Tiempo promedio y desviación estándar en segundos para cada configuración de resolución sobre versión paralela.

5.1.1.3 Tabla de datos de speedup y eficiencia

A partir de los tiempos anteriores, se calculó el Speedup y la Eficiencia de la versión paralela respecto a la secuencial.

Cantidad de nodos	Resolución	Speedup	Eficiencia
2	32x32	0.10856715227211022	0.05428357613605511
4	32x32	0.11087872718234111	0.027719681795585278
8	32x32	0.10499840206754242	0.013124800258442803
16	32x32	0.10556917030922001	0.006598073144326251
32	32x32	0.10593512911222787	0.003310472784757121
2	64x64	0.3274863967091476	0.1637431983545738
4	64x64	0.404861658934322	0.1012154147335805
8	64x64	0.3649958057626679	0.045624475720333485
16	64x64	0.3903690022866779	0.02439806264291737
32	64x64	0.3791111991043436	0.011847224972010737
2	128x128	0.6640898003833378	0.3320449001916689
4	128x128	1.1612503520729105	0.2903125880182276
8	128x128	1.2358336844341005	0.15447921055426256
16	128x128	1.2428327286092216	0.07767704553807635
32	128x128	1.252290780404704	0.039134086887647
2	512x512	0.9664867221436484	0.4832433610718242
4	512x512	2.727693605348103	0.6819234013370258
8	512x512	5.57474544667097	0.6968431808338712
16	512x512	9.46886704815927	0.5918041905099544

Cantidad de nodos	Resolución	Speedup	Eficiencia
32	512x512	12.336228979980234	0.3855071556243823
2	1080x1080	0.9907440180332888	0.4953720090166444
4	1080x1080	2.924501234556748	0.731125308639187
8	1080x1080	6.592119303632144	0.824014912954018
16	1080x1080	13.159711671161924	0.8224819794476202
32	1080x1080	21.80043618936855	0.6812636309177672
2	1920x1920	0.9961407159404907	0.49807035797024535
4	1920x1920	2.9677794459618765	0.7419448614904691
8	1920x1920	6.820526658640936	0.852565832330117
16	1920x1920	14.122762057225598	0.8826726285765999
32	1920x1920	25.073654745360415	0.783551710792513

Tabla 10: Speedup y eficiencia para cada configuración de resolución y cantidad de nodos de versión paralela.

5.1.1.4 Gráficos de rendimiento

A continuación, se presentan gráficos realizados con los datos obtenidos previamente.

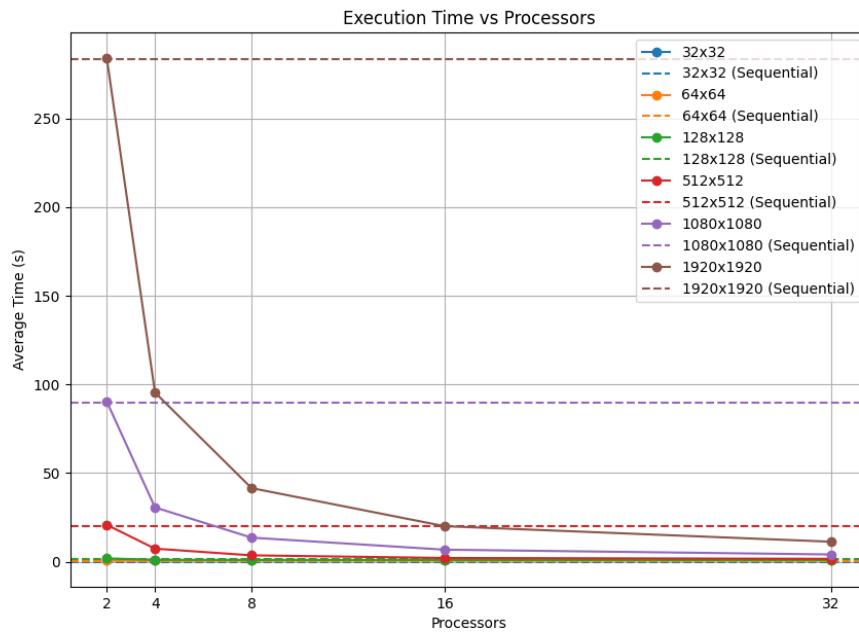


Figura 5: Tiempo medio paralelo y secuencial para cada configuración de cantidad de nodos y

resolución de imagen

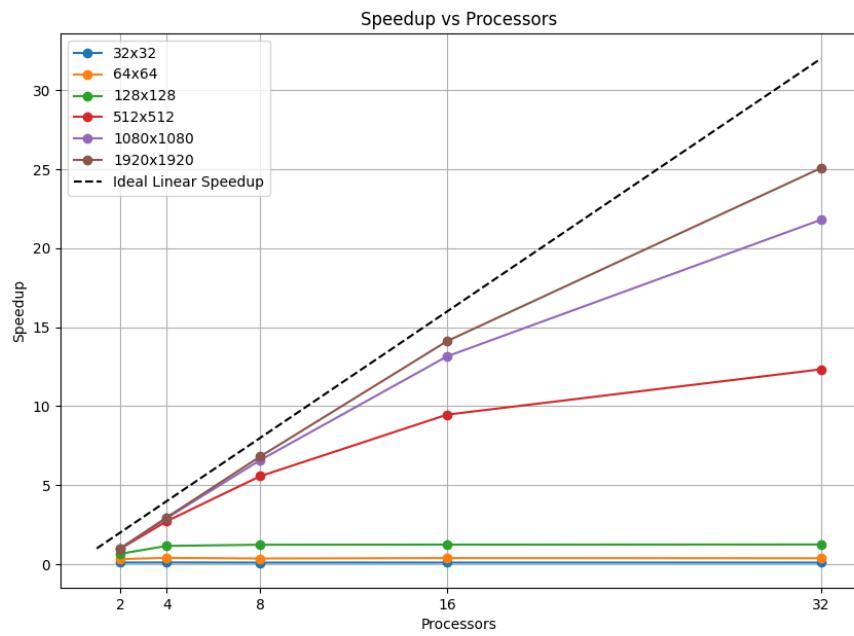


Figura 6: Speedup para cada configuración de cantidad de nodos y resolución de imagen

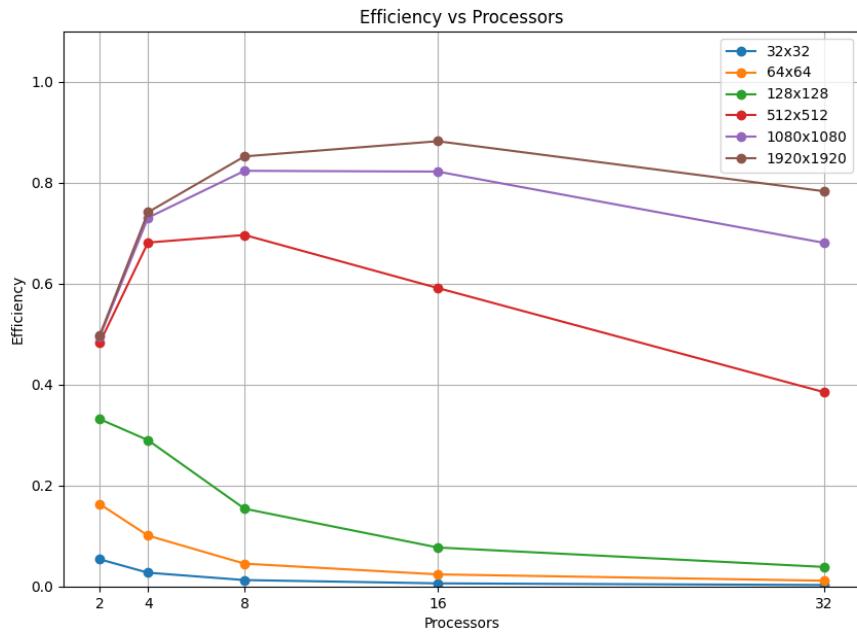


Figura 7: Eficiencia para cada configuración de cantidad de nodos y resolución de imagen

5.1.2 Tamaño de bloque

Se estudió el efecto de modificar el tamaño de bloque en el tiempo de ejecución.

5.1.2.1 Tabla de datos de ejecución secuencial

A continuación se presentan los datos obtenidos a partir de las ejecuciones de la versión secuencial. Nótese que se presenta una sola fila, ya que tanto la cantidad de nodos como el tamaño de los bloques, son parámetros pertinentes a la versión paralela.

Tiempo promedio (s)	Desviación estándar (s)
89.60659603270032	0.020723353358982382

Tabla 11: Tiempo promedio y desviación estándar en segundos de la versión secuencial.

5.1.2.2 Tabla de datos de ejecución paralela

Cantidad de nodos	Tamaño de bloque	Tiempo promedio (s)	Desviación estándar (s)
2	2x2	91.43973352199973	0.05611679641446187
4	2x2	31.363201925400062	0.035844511996024966
8	2x2	17.032129470899235	0.16132378141367337
16	2x2	9.80977562420012	0.135481889137545
32	2x2	7.282809931899829	0.41415118461081607
2	4x4	90.62620872690096	0.030289694627595516
4	4x4	30.74810164060109	0.028864040552125478
8	4x4	14.44186259309863	0.021789357986847967
16	4x4	7.489232776599965	0.02892393616505963
32	4x4	4.734652727498178	0.1061245533777847
2	8x8	90.39643993430218	0.04501368269027079
4	8x8	30.60676306569949	0.021960356024083506
8	8x8	13.767168696501177	0.016930315679874557
16	8x8	6.886950576501112	0.023923186072850967
32	8x8	4.030236448300275	0.028466196545113925
2	16x16	90.33003026119987	0.0241139508851428
4	16x16	30.56708972500055	0.02466749615701291
8	16x16	13.5533268640007	0.019474163858620858
16	16x16	6.769189039500634	0.011171972498731777
32	16x16	3.9328893263009377	0.029974776402533564
2	32x32	90.32909833449958	0.0367866529867054
4	32x32	30.55001384190109	0.025399354470591846
8	32x32	13.534426990599604	0.023568102796302857
16	32x32	6.729872261199489	0.02568826934816551
32	32x32	4.0352310534013665	0.06224605207022667
2	64x64	90.31254809760067	0.018955403618388288
4	64x64	30.53957045689749	0.014845691365458883
8	64x64	13.52947120099925	0.023050388169619195
16	64x64	6.8264736725002875	0.04820564927923986
32	64x64	4.748673433499789	0.2314093086447298
2	128x128	90.3150229341998	0.027878257268597707
4	128x128	30.56140734679939	0.02336154178751105
8	128x128	14.937172039599682	0.019059549888477616
16	128x128	8.014758754597278	0.07856331140741309
32	128x128	6.913615914300317	0.6075389399688722

Tabla 12: Tiempo promedio y desviación estándar en segundos de la versión secuencial para cada configuración de cantidad de nodos y tamaño de bloque.

5.1.2.3 Gráficos de rendimiento

A continuación, se presentan gráficos realizados con los datos obtenidos previamente.

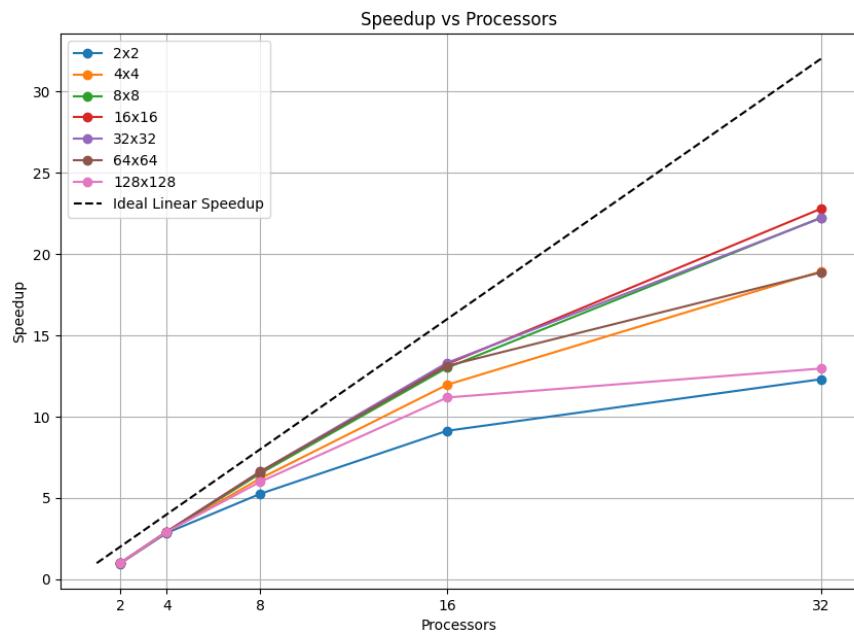


Figura 8: Speedup para cada configuración de cantidad de nodos y tamaño de bloque

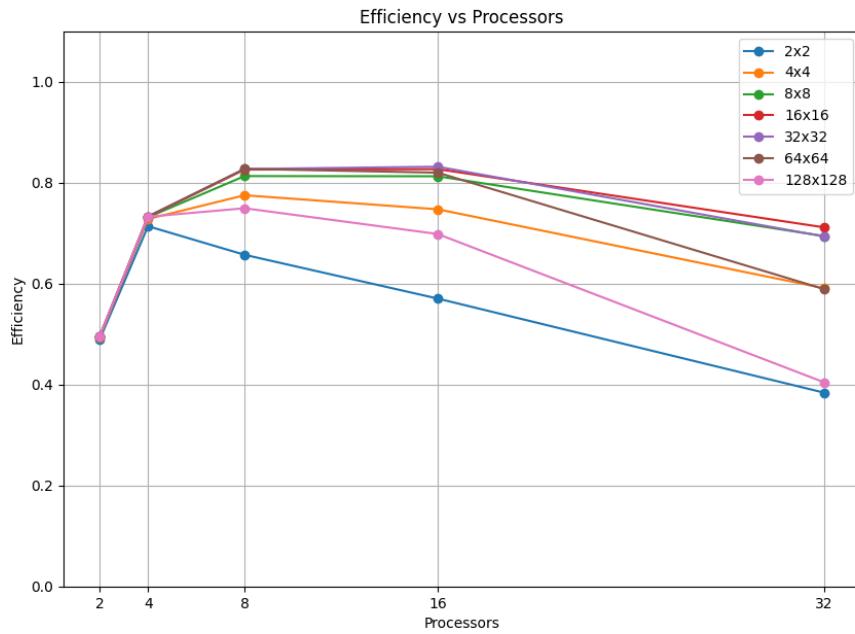


Figura 9: Eficiencia para cada configuración de cantidad de nodos y tamaño de bloque

5.1.2.4 Tabla de datos de speedup y eficiencia

A partir de los tiempos anteriores, se calculó el Speedup y la Eficiencia de la versión paralela respecto a la secuencial.

Cantidad de nodos	Tamaño de bloque	Speedup	Eficiencia
2	2x2	0.9799525062170226	0.4899762531085113
4	2x2	2.8570614775186836	0.7142653693796709
8	2x2	5.261033048498158	0.6576291310622697
16	2x2	9.134418509190597	0.5709011568244123
32	2x2	12.3038493206049	0.38449529126890314
2	4x4	0.9887492513642141	0.49437462568210705
4	4x4	2.9142155532093077	0.7285538883023269
8	4x4	6.2046426113707005	0.7755803264213376
16	4x4	11.964723050493939	0.7477951906558712
32	4x4	18.925695545161776	0.5914279857863055
2	8x8	0.9912624446031736	0.4956312223015868
4	8x8	2.927673071482721	0.7319182678706803
8	8x8	6.50871635323777	0.8135895441547213
16	8x8	13.01106999931813	0.8131918749573831

Cantidad de nodos	Tamaño de bloque	Speedup	Eficiencia
32	8x8	22.23358286347971	0.694799464483741
2	16x16	0.991991210161143	0.4959956050805715
4	16x16	2.9314729285271763	0.7328682321317941
8	16x16	6.611409651065558	0.8264262063831948
16	16x16	13.237419653936957	0.8273387283710598
32	16x16	22.783909893792874	0.7119971841810273
2	32x32	0.9920014445497536	0.4960007222748768
4	32x32	2.933111470797429	0.7332778676993572
8	32x32	6.620642018678514	0.8275802523348142
16	32x32	13.314754360096789	0.8321721475060493
32	32x32	22.206063258055412	0.6939394768142316
2	64x64	0.9921832338941714	0.4960916169470857
4	64x64	2.9341144846541973	0.7335286211635493
8	64x64	6.6230671325929	0.8278833915741125
16	64x64	13.126337305550717	0.8203960815969198
32	64x64	18.869816441906796	0.5896817638095874
2	128x128	0.9921560458217941	0.49607802291089703
4	128x128	2.9320179864715743	0.7330044966178936
8	128x128	5.998899644132491	0.7498624555165614
16	128x128	11.180198777823705	0.6987624236139816
32	128x128	12.960887203374362	0.4050277251054488

Tabla 13: Speedup y eficiencia para cada configuración de tamaño de bloque y cantidad de nodos de versión paralela.

5.2 Balanceo de carga mediante herramientas de *Profiling*

Se presentan los datos recopilados a través de *Score-P*. Se involucran los promedios de todos los nodos, tanto en tiempo (segundos) como en cantidad de invocaciones por función.

5.2.1 Tamaño de bloque 2×2

Rutina	Total (Segundos)	Promedio	Varianza	Desviación estándar
MPI_Init	1.96143	0.24518	1.48667e-05	0.00386
MPI_Comm_rank	2.2664e-05	0.00000	5.71630e-15	0.00000
MPI_Comm_size	8.53949e-06	0.00000	1.19236e-14	0.00000
MPI_Bcast	0.0347405	0.00434	3.05655e-06	0.00175
MPI_Finalize	0.420225	0.05253	4.49685e-04	0.02121
MPI_Send	0.451702	0.05646	5.23487e-04	0.02288
MPI_Probe	6.28315	0.78539	1.01581e-01	0.31872

Rutina	Total (Segundos)	Promedio	Varianza	Desviación estándar
MPI_Recv	0.451702	0.05646	5.23487e-04	0.02288
render_block	146.615	18.32690	5.48377e+01	7.40525

Tabla 15: Estadísticas de cada rutina basadas en el tiempo

Rutina	Total (Invocaciones)	Promedio	Varianza	Desviación estándar
MPI_Init	8.0	1.00000	0.00000e+00	0.00000
MPI_Comm_rank	8.0	1.00000	0.00000e+00	0.00000
MPI_Comm_size	8.0	1.00000	0.00000e+00	0.00000
MPI_Bcast	72.0	9.00000	0.00000e+00	0.00000
MPI_Finalize	8.0	1.00000	0.00000e+00	0.00000
MPI_Send	874807.0	109351.00000	1.95300e+09	44192.75959
MPI_Probe	291607.0	36450.90000	2.17007e+08	14731.15746
MPI_Recv	874807.0	109351.00000	1.95300e+09	44192.75959
render_block	291600.0	36450.00000	2.16996e+08	14730.78409

Tabla 16: Estadísticas de cada rutina basadas en la cantidad de invocaciones

5.2.2 Tamaño de bloque 16×16

Rutina	Total (Segundos)	Promedio	Varianza	Desviación estándar
MPI_Init	1.956	0.24450	1.62173e-05	0.00403
MPI_Comm_rank	1.91757e-05	0.00000	2.21643e-15	0.00000
MPI_Comm_size	6.39489e-06	0.00000	3.24449e-15	0.00000
MPI_Bcast	0.0216631	0.00271	1.18622e-06	0.00109
MPI_Finalize	0.268119	0.03351	1.83219e-04	0.01354
MPI_Send	0.0475489	0.00594	5.91193e-06	0.00243
MPI_Probe	0.188083	0.02351	9.46839e-05	0.00973
MPI_Recv	0.0475489	0.00594	5.91193e-06	0.00243
render_block	137.457	17.18210	4.81999e+01	6.94261

Tabla 17: Estadísticas de cada rutina basadas en el tiempo

Rutina	Total (Invocaciones)	Promedio	Varianza	Desviación estándar
MPI_Init	8.0	1.00000	0.00000e+00	0.00000
MPI_Comm_rank	8.0	1.00000	0.00000e+00	0.00000
MPI_Comm_size	8.0	1.00000	0.00000e+00	0.00000
MPI_Bcast	72.0	9.00000	0.00000e+00	0.00000
MPI_Finalize	8.0	1.00000	0.00000e+00	0.00000
MPI_Send	13879.0	1734.88000	5.11631e+05	715.28386
MPI_Probe	4631.0	578.87500	5.69581e+04	238.65896
MPI_Recv	13879.0	1734.88000	5.11631e+05	715.28386
render_block	4624.0	578.00000	5.67929e+04	238.31261

Tabla 18: Estadísticas de cada rutina basadas en la cantidad de invocaciones

5.2.3 Tamaño de bloque 128×128

Rutina	Total (Segundos)	Promedio	Varianza	Desviación estándar
MPI_Init	2.01492	0.25187	1.35331e-05	0.00368
MPI_Comm_rank	1.93651e-05	0.00000	1.07870e-15	0.00000
MPI_Comm_size	5.02335e-06	0.00000	5.77806e-15	0.00000
MPI_Bcast	0.0354399	0.00443	3.17999e-06	0.00178
MPI_Finalize	15.1912	1.89890	2.01620e+00	1.41993
MPI_Send	0.00402743	0.00050	1.37961e-07	0.00037
MPI_Probe	0.127127	0.01589	7.55630e-05	0.00869
MPI_Recv	0.00402743	0.00050	1.37961e-07	0.00037
render_block	135.033	16.87910	4.79528e+01	6.92480

Tabla 19: Estadísticas de cada rutina basadas en el tiempo

Rutina	Total (Invocaciones)	Promedio	Varianza	Desviación estándar
MPI_Init	8.0	1.00000	0.00000e+00	0.00000
MPI_Comm_rank	8.0	1.00000	0.00000e+00	0.00000
MPI_Comm_size	8.0	1.00000	0.00000e+00	0.00000
MPI_Bcast	72.0	9.00000	0.00000e+00	0.00000
MPI_Finalize	8.0	1.00000	0.00000e+00	0.00000
MPI_Send	250.0	31.25000	3.18500e+02	17.84657
MPI_Probe	88.0	11.00000	3.74286e+01	6.11789
MPI_Recv	250.0	31.25000	3.18500e+02	17.84657
render_block	81.0	10.12500	3.44107e+01	5.86606

Tabla 20: Estadísticas de cada rutina basadas en la cantidad de invocaciones

5.3 Cantidad de iteraciones

Se estudió el efecto de modificar el número de iteraciones en el tiempo de ejecución.

5.3.1 Tabla de datos

Iteraciones	Tiempo promedio (s)	Desviación estándar (s)
200	0.8658388962008757	0.031467115018176055
500	0.9789770936957212	0.020520204910293226
1000	1.068946530300309	0.020387310065660757
2000	1.2362676242002635	0.021568939323107487
3000	1.4084850567989633	0.021316243515446965
4000	1.5473312993985018	0.020788707928570592
5000	1.6892066827014787	0.042628523113125386
10000	2.454260219701973	0.034755324130547174
15000	3.2485190514998976	0.037265794864773556
20000	4.026260491098219	0.058440292592556196
40000	7.153266767101013	0.08296469529306266

Tabla 14: Tiempo promedio y desviación estándar en segundos de la versión paralela para distintas iteraciones máximas.

5.3.2 Gráfico de rendimiento

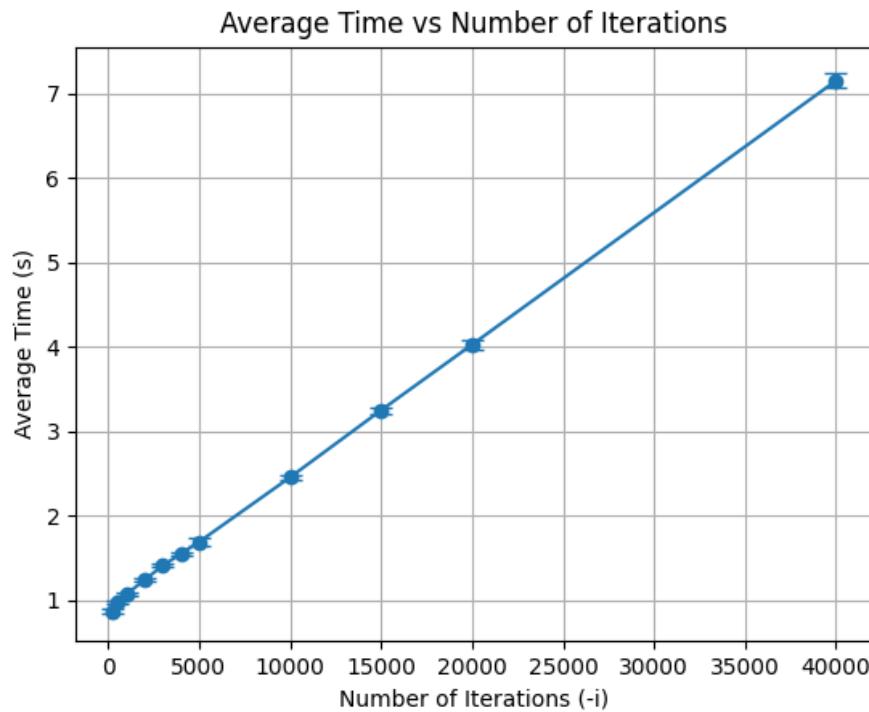


Figura 10: Tiempo de ejecución medio por cantidad de iteraciones

6 Análisis de los Resultados

En esta sección, se realiza un análisis de los resultados obtenidos en la sección anterior.

6.1 Análisis de versión secuencial contra paralela

6.1.1 Tamaño de imagen

La *figura 5*, ilustra claramente que existe una mejora significativa al usar el algoritmo paralelo.

Se puede observar que las versiones paralelas y secuenciales toman aproximadamente el mismo tiempo cuando la cantidad de nodos es de 2. Esto no debería sorprender considerando el modelo de algoritmo paralelo que se ha seleccionado, siendo este el master-worker. Al haber dos nodos, uno toma el rol de master y el otro de worker, pero en realidad solo un nodo se encarga del renderizado, siendo este el worker. Nos encontramos con un escenario donde un nodo trabaja (worker) mientras el otro espera los resultados y envía nuevas tareas a demanda

(master), lo cuál provoca un comportamiento similar al de la versión secuencial, más los tiempos de comunicaciones entre nodos.

Luego, a medida que aumenta la cantidad de nodos, el tiempo paralelo decrece logarítmicamente, lo cuál se ve con mayor claridad en grandes resoluciones, especialmente 1920×1920 . Es decir que se pueden obtener los mismos resultados en menor tiempo, tal como era esperado.

En cuanto a la *figura 6*, se observa que existe una relación entre el speedup obtenido y la resolución de la imagen. Si la imagen a renderizar cuenta con muy pocos píxeles, tal como la resolución 128×128 , entonces podemos decir que no resulta conveniente la utilización del algoritmo paralelo. Esto se debe a la sección secuencial inicial presente en la versión paralela, la cuál corresponde a la inicialización de mpi, a través de `MPI_Init`, toma aproximadamente 250ms. Al aumentar la resolución, aumenta la cantidad de píxeles a renderizar, haciendo que aumente la porción paralelizable, y es por este motivo que el speedup aumenta al renderizar imágenes con más píxeles, se aprovecha el paralelismo.

Al considerar la *figura 7*, se observa que a mayor cantidad de píxeles, es decir, en imágenes de mayor resolución, la eficiencia con dos nodos es de 0.5. El hecho que provoca tal resultado, es que solo un nodo trabaja, como se ha detallado al inicio de esta sección.

En este contexto, si asumimos que el tiempo secuencial es igual al tiempo de cómputo:

$$T_{Secuencial} = T_{Paralelo}$$

Entonces el speeup:

$$Speedup(2) = T_{Secuencial}/T_{Paralelo} = 1$$

Luego, calculando la eficiencia

$$Eficiencia(2) = Speedup(2)/N_{nodos} = 1/2$$

Lo cuál demuestra matemáticamente que el valor de eficiencia obtenido con 2 nodos es correcto.

Además, si consideramos las gráficas correspondientes a las distintas resoluciones mostradas en la *figura 7*, podemos afirmar que el punto máximo de eficiencia depende tanto de la resolución de la imagen como de la cantidad de nodos utilizados.

Para las versiones de 32×32 , 64×64 y 128×128 , la eficiencia máxima se alcanza con $N_{Nodos} = 2$. Esto no debería sorprender, ya que, al observar nuevamente la *figura 6*, se puede ver que estas resoluciones mantienen un speedup constante a partir de $N_{Nodos} = 2$.

Por otro lado, al analizar la resolución de 512×512 , la eficiencia máxima se obtiene con $N_{Nodos} = 8$, alcanzando un valor de eficiencia de:

$$Eficiencia(8) = 0.697$$

De manera similar, para una resolución de 1080×1080 , la eficiencia máxima también se da con $N_{Nodos} = 8$, con un valor de:

$$Eficiencia(8) = 0.824$$

Finalmente, para una resolución de 1920×1920 , el punto máximo de eficiencia se alcanza con $N_{\text{Nodos}} = 16$, alcanzando:

$$\text{Eficiencia}(16) = 0.883$$

Si relacionamos los gráficos de speedup y eficiencia, se puede observar que la relación de orden entre las distintas resoluciones de imagen y su rendimiento se mantiene. Esto se debe a que la eficiencia se calcula a partir del speedup y la cantidad de nodos, siendo este un factor constante.

Es claro que la versión paralela no alcanzará el speedup superlineal, pero si tiende a alcanzar un speedup lineal. Hay una fuerte relación entre la porción paralelizable, la cuál aumenta al renderizar mayor cantidad de píxeles.

Sin embargo, existe un umbral a partir del cuál no resulta conveniente emplear la versión paralela, ya que los tiempos secuenciales comienzan a representar una proporción significativa en relación con la parte paralelizable del problema.

A pesar de ello, al aumentar el tamaño de la imagen, la utilización de la versión paralela se vuelve cada vez más justificada y eficiente.

6.1.2 Tamaño de bloque

Como ilustra la *figura 8*, existe una clara relación entre el speedup y el tamaño de los bloques. Lo mismo sucede en la *figura 9*, en cuanto a la eficiencia.

Se observa que el peor speedup se obtiene para bloques de 2×2 , seguido por bloques de 128×128 . Estos casos serán analizados con detalle en la siguiente sección.

En función del gráfico de speedup, se puede decir que el rendimiento del programa depende de la granularidad de las tareas. Tareas más chicas implican una mayor cantidad de comunicaciones, mientras que tareas grandes hacen que algunos nodos se queden ociosos, ya que el cómputo requerido para cada tarea no es equitativo.

Se pudo observar que el tamaño que logra el balance es el de 16×16 .

Los tamaños de 8×8 , 16×16 y 32×32 . 8×8 y 32×32 presentaron un resultado prácticamente idéntico, con un speedup medio de 22.234 y 22.206 respectivamente. Pero indiscutiblemente, los mejores resultados, tanto en términos de speedup como eficiencia se obtuvieron con un tamaño de bloque de 16×16 .

Otro aspecto importante a analizar, presente tanto en la *figura 8* como en la *figura 9*, es el aumento en la dispersión de las gráficas a medida que se incrementa la cantidad de nodos.

Este comportamiento es coherente, ya que al aumentar el número de nodos, la ejecución del programa se aleja progresivamente de su versión secuencial. Esto penaliza especialmente a aquellas configuraciones que no logran equilibrar adecuadamente la cantidad de comunicaciones con el tamaño de las tareas asignadas a cada nodo. Además, cuando se utilizan bloques de tamaño reducido, como 2×2 , un mayor número de nodos implica un incremento en la cantidad de comunicaciones con el nodo maestro, lo que a su vez eleva los tiempos de respuesta.

Por lo tanto, se puede concluir que para los parámetros seleccionados y la cantidad de nodos, el tamaño de bloque óptimo es el de 16×16 , al obtener el mayor speedup y eficiencia.

6.2 Análisis de balanceo de carga mediante herramientas de *Profiling*

Es de interés analizar las tablas de datos obtenidas a través del *profiling* mediante *Score-P* [10] para los casos más extremos, siendo estos 2×2 y 128×128 , pero también el caso óptimo 16×16 , con el fin justificar cuantitativamente su rendimiento.

- Bloque de tamaño 2×2 : El bajo rendimiento se debe a el modelo de algoritmo paralelo seleccionado, y la alta granularidad de las tareas. Un bloque de este tamaño contiene tan solo 4 píxeles. En la *tabla 16*, se puede observar que se realizaron 291600 llamadas a la función `render_block`, lo cuál nos dice que se creó esa cantidad de tareas. Este valor resulta coherente, ya que se ha renderizado una imagen de resolución 1080×1080 , lo cuál resulta 1166400 píxeles, y por cada tarea se renderizan $2 \times 2 = 4$ píxeles, y esto implica la creación de $1166400/4 = 291600$ tareas. Además, se han realizado 874807 llamadas a `MPI_Send` y `MPI_Recv`, las cuales en conjunto con `MPI_Probe` tomaron un tiempo total de 7.187 segundos. Por lo tanto, el bajo rendimiento se debe a que hay demasiada granularidad, la cuál implica muchas comunicaciones, y probablemente un master saturado.
- Bloque de tamaño 128×128 : Nos encontramos con el caso opuesto al anterior, la granularidad es muy baja, las tareas son muy grandes. Que las tareas sean grandes implica un bajo aprovechamiento de la asignación dinámica de tareas, lo cuál hace que algunos nodos se queden ociosos, ya que distintas tareas tardan más en computarse. Este problema se ha planteado en la sección de Asignación de tareas y balanceo de carga. Realizando un análisis similar al anterior, al considerar la *tabla 20*, se puede observar que se han creado 81 tareas y se realizaron tan solo 250 llamadas a `MPI_Send` y `MPI_Recv`, las cuales con conjunto con `MPI_Probe` tomaron un tiempo total de 135ms, un tiempo significativamente menor al de la configuración 2×2 . Claramente 81 tareas son muy pocas, y no se aprovecha del todo la asignación dinámica, lo cuál hace que presente un rendimiento similar a un algoritmo de asignación estática.
- Bloque de tamaño 16×16 : Las *tablas 17* y *18* correspondientes exhiben los mejores resultados, se crearon 4624 tareas, se realizaron 13879 llamadas a `MPI_Send` y `MPI_Recv`, las cuales en conjunto con `MPI_Probe` formaron un tiempo total de comunicaciones de 283ms. Esto representa un balance entre las configuraciones analizadas previamente.

Otra métrica interesante es la desviación estándar de la función `render_block` la cuál es mayor tanto en tiempo como en cantidad de iteraciones a menor tamaño de bloque. Si se renderizan pocos píxeles adyacentes (2×2), se puede dar el caso donde estos toman mucho tiempo, al llegar al número de iteraciones máximas, o muy poco tiempo, al no pertenecer al conjunto del fractal. En cambio, al considerar tamaños de bloque grandes (128×128), es más probable que se encuentren píxeles que toman mucho tiempo pero también algunos que toman muy poco, haciendo que se logre una especie de promedio entre estos, y en definitiva reduciendo la desviación estándar.

Esto es coherente con las suposiciones realizadas inicialmente al diseñar el modelo de asignación dinámica de tareas bajo demanda. Y es este el motivo por el cuál, contar con una desviación

estándar relativamente alta, como en el caso de 16×16 resulta beneficioso.

Entonces, comportamiento observado evidencia que la escalabilidad del sistema depende fuertemente del equilibrio entre la granularidad de las tareas y la sobrecarga de comunicación. A medida que se incrementa la cantidad de nodos, este equilibrio se vuelve más crítico, ya que se amplifican tanto los beneficios como las deficiencias del esquema de distribución adoptado.

Un buen balance de carga no solo mejora el speedup, sino que también permite una asignación dinámica más eficiente, reduciendo tiempos ociosos y evitando cuellos de botella.

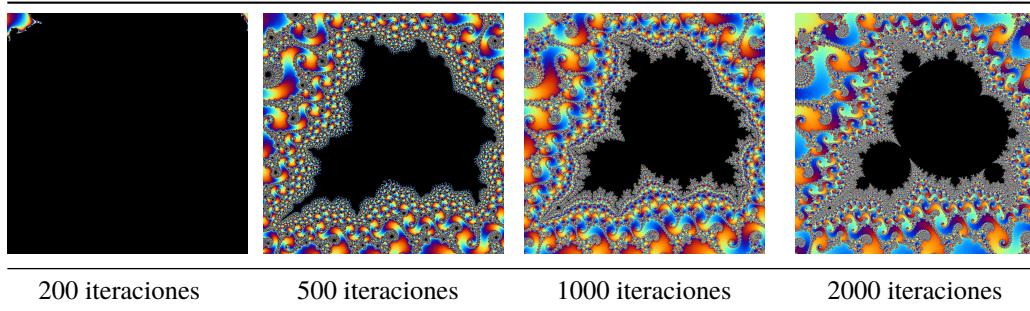
En definitiva, una escalabilidad efectiva no se logra únicamente con más nodos, sino mediante una correcta configuración del sistema que permita distribuir el trabajo de forma uniforme y con un costo de coordinación razonable. Esto reafirma la importancia de ajustar adecuadamente el tamaño de los bloques en función del modelo de ejecución y la arquitectura utilizada.

6.3 Cantidad de iteraciones

A pesar de que el algoritmo de tiempo de escape utilizado por el fractal de Mandelbrot pueda terminar con una menor cantidad de iteraciones que la cantidad de iteraciones máximas, establecida por el parámetro, se puede observar un comportamiento lineal en los tiempos de ejecución, ilustrados en la *figura 10*.

Este comportamiento lineal se debe a que en la imagen que se ha renderizado, existe una gran proporción de píxeles que llegan al límite de iteraciones máximo establecido por el parámetro. Estos píxeles son los que toman el color negro en las siguientes imágenes comparativas.

El renderizado se realizó utilizando distintas cantidades de iteraciones máximas, con el objetivo de evaluar su impacto en la calidad de imagen y el tiempo de ejecución:



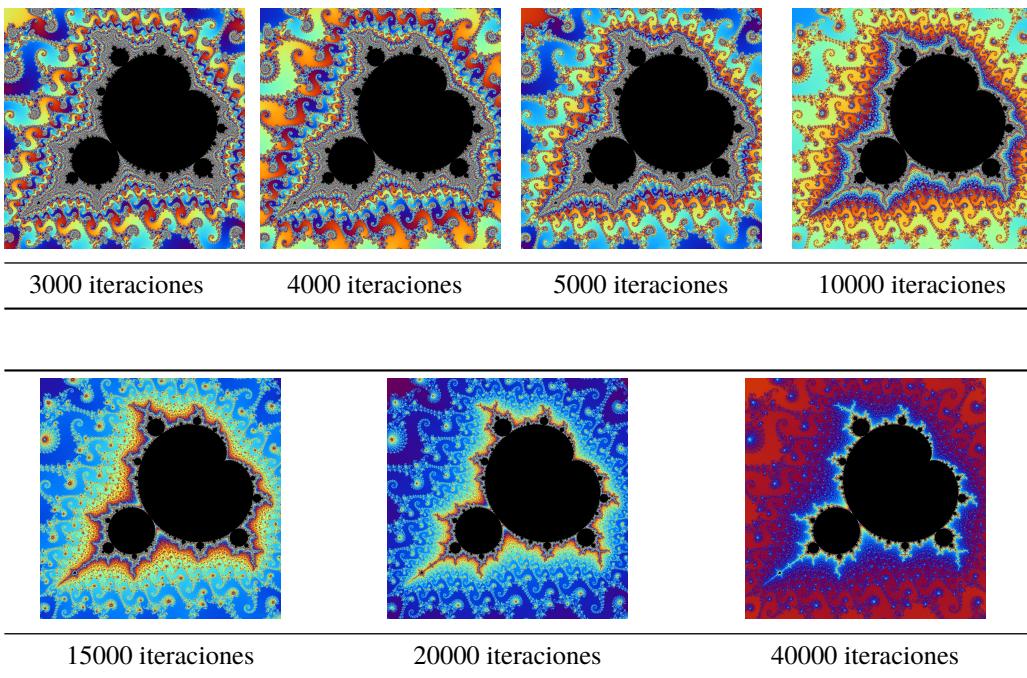


Figura 11: Imágenes renderizadas con distintas cantidades de iteraciones.

Existe una diferencia notable en los resultados. Estos resultados varían tanto en las formas como en los colores y el ruido en la imagen. Cabe aclarar que con ruido se refiere a frecuencia de variación de color de píxeles adyacentes.

En cuanto a los colores, la diferencia radica en que el color se asigna al mapear la cantidad de iteraciones a las que llegó el pixel a una paleta de colores. Al aumentar o disminuir la cantidad de iteraciones máximas, el mapeo del número de iteraciones a un valor normalizado también cambia. Por ejemplo, supongamos que la función del fractal de Mandelbrot determina que un pixel $P = (P_X, P_Y)$ no pertenece al conjunto con 300 iteraciones.

- $IteracionesMax = 1000$, entonces $t = 300/1000 = 0.3$
- $IteracionesMax = 40000$, entonces $t = 300/40000 = 0.00075$

Siendo t el valor utilizado para muestrear la paleta de colores y asignarle el color al pixel P .

Ahora, si analizamos las formas, especialmente las imágenes obtenidas con 200, 500 y cualquier otra con muchas iteraciones, tal como la de 20000, se puede observar que las secciones coloreadas en negro difieren y son mayores a menor cantidad de iteraciones. Esto se debe a que 200, y 500 iteraciones son muy pocas para el zoom utilizado, haciendo que el algoritmo considere a ciertos puntos como pertenecientes al conjunto de Mandelbrot, cuando en realidad no pertenecen.

Esto nos dice que existe una relación directa entre el zoom utilizado y la cantidad de iteraciones máximas. Haciendo que se requieran más iteraciones a mayor zoom.

El ruido es otro factor muy notable en las imágenes con una baja cantidad de iteraciones. Los píxeles cercanos al borde del conjunto de Mandelbrot son muy sensibles a pequeñas variaciones en la cantidad máxima de iteraciones. Con un valor bajo de iteraciones, muchos de estos píxeles se consideran escapados prematuramente, incluso si en realidad pertenecen al conjunto o están muy cerca de él. Esto provoca una coloración inconsistente entre píxeles vecinos, lo que genera una apariencia ruidosa. Aumentar la cantidad de iteraciones reduce esta incertidumbre y suaviza la imagen.

A pesar de que la imagen más precisa de todas es la de 40000 iteraciones, se considera que para estas configuraciones de cámara, las imágenes de 15000 y 20000 iteraciones son las ideales, al balancear los tiempos de ejecución, 3.249 segundos y 4.026 segundos respectivamente, y la calidad de imagen obtenida.

En definitiva, se observa una diferencia significativa en las imágenes generadas al variar la cantidad máxima de iteraciones en la visualización del conjunto de Mandelbrot. Estas diferencias se manifiestan en los colores, las formas y el nivel de ruido presente. La cantidad de iteraciones influye directamente en la precisión del mapeo de colores, en la fidelidad de las formas observadas, especialmente en niveles altos de zoom, y en la suavidad de los bordes. Iteraciones bajas producen imágenes más ruidosas y con regiones negras más extensas, producto de clasificaciones erróneas.

7 Conclusiones

En este trabajo se analizó el comportamiento computacional del conjunto de Mandelbrot mediante la implementación de versiones secuencial y paralela del algoritmo de generación de imágenes. El estudio se enfocó en evaluar el rendimiento bajo distintas configuraciones, incluyendo el tamaño de la imagen, el tamaño del bloque y la cantidad de iteraciones máximas por píxel.

Los resultados experimentales muestran que la versión paralela ofrece mejoras significativas en el tiempo de ejecución frente a la versión secuencial, especialmente a medida que aumentan el tamaño de la imagen y la complejidad del problema. Se observó que la eficiencia paralela mejora con la resolución, alcanzando su punto óptimo con una mayor cantidad de nodos en configuraciones de alta demanda computacional.

El estudio sobre el tamaño de los bloques evidenció la importancia crítica de este parámetro, dado su impacto directo en los tiempos de ejecución y su estrecha relación con el modelo master-worker adoptado en la parallelización, en conjunto con el modelo de asignación dinámica de tareas bajo demanda.

Asimismo, el análisis del número de iteraciones permitió evidenciar su doble impacto: por un lado, en la calidad visual de las imágenes generadas y, por otro, en el rendimiento general del sistema. Esto sugiere la necesidad de elegir cuidadosamente un valor que logre un equilibrio adecuado entre fidelidad visual y eficiencia computacional.

Finalmente, se identificó una posible limitación en el diseño actual del algoritmo paralelo: la figura del master como punto central de coordinación puede convertirse en un cuello de botella bajo ciertas configuraciones. Como línea de trabajo futura, se propone el desarrollo de una versión

multihilo del master, capaz de atender a múltiples workers de manera concurrente, con el objetivo de reducir la espera ociosa y mejorar la escalabilidad del sistema.

8 Referencias

- [1] <https://solarianprogrammer.com/2013/02/28/Mandelbrot-set-cpp-11/>
- [2] https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set
- [3] <https://youtu.be/FFftmWSzgmk?si=KPTdCiAoU7zeQ5VQ>
- [4] <https://youtu.be/LqbZpur38nw?si=QAimXxeVIlmIqf3I>
- [5] <https://cglearn.eu/pub/advanced-computer-graphics/fractal-rendering>
- [6] <https://www.mpi-forum.org/docs/mpi-4.1/mpi41-report.pdf>
- [7] https://en.wikipedia.org/wiki/Complex_dynamics
- [8] https://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_din%C3%A1mico
- [9] https://en.wikipedia.org/wiki/Julia_set
- [10] <https://www.vi-hps.org/projects/score-p/>
- [11] <https://vampir.eu/>

9 Anexo - Código fuente

El código fuente de este trabajo, incluyendo las versiones secuencial y paralela se encuentra disponible en el siguiente repositorio de GitHub:
<https://github.com/FrancoYudica/DistributedFractals>