François Le Grand
legrand@pse.ens.fr
Séances des 6–13 Octobre 2006
Cours de Macroéconomie 4 (Prof. Daniel Cohen)
http://www.pse.ens.fr/junior/legrand/cours.html

TD 3

Equivalence ricardienne et démographie

References

Buiter, Willem H. (1988) “Death, birth, productivity growth and debt neutrality.” *The Economic Journal* 98(391), pp. 279–293

Il y a équivalence ricardienne dans une économie si la manière dont l'Etat finance ses dépenses n'a pas d'effet réel. Il est équivalent que l'État se finance par impôt ou par dette. L'argument est le suivant. Si l'État se finance par émission de dette, les agents anticipent parfaitement l'augmentation de taxes futures et ce faisant diminuent leur consommation de la même façon. Les hypothèses sous–

jacentes à la validité de l'équivalence ricardienne sont les suivantes :

(i) Horizon de vie infini : sinon ce sont d'autres agents qui rembourseront la dette…

(ii) Taxes *lump–sum* : sinon les taxes créent des distorsions sur le comportement des agents et cela implique que le timing des taxes comptent.

(iii) Pas d'environnment stochastique : sinon l'anticipation des agents diffère de la réalisation.

Ainsi, le modèle avec agent représentatif à horizon de vie infini et le modèle à générations imbriquées avec agents vivant deux périodes ont des implications très différentes : l'équivalence ricardienne tient dans le premier cadre mais le ”timing” des impôts n'est pas indifférent dans le second.
Une manière de retrouver l'équivalence dans un modèle à générations est de considérer altruisme, leg et comportement dynastique. Les agents qui ont contracté la dette doivent se sentir ‘responsables’ de son remboursement.

Dans cemodèle, les individus ne sont pas altruistes et ont une probabilité de cdécès exogène, indépendante de leur âge.

A Démographie

1. Calculer n le taux de croissance de la population.

$$\begin{aligned} N_{t+1} = (1+n)N_t &= (1-p)N_t + bN_{t+1} \\ \Rightarrow 1+n &= 1-p+b(1+n) \\ \Rightarrow 1+n &= \frac{1-p}{1-b} \end{aligned}$$

2. Donner la probabilité pour un agent né à la période s meure avant le début de la période $t > s$.

La probabilité pour un agent né en période s d'être en vie à la période $s+1$ est $(1-p)$ et par récurrence, sa probabilité d'être en vie à la période $t > s$ est est $(1-p)^{t-s}$. On suppose que la loi des grands nombres s'applique de sorte que $(1-p)^{t-s}$ est aussi la part de la cohorte de la période s encore en vie au début de la période t.

B Dotations, système viager et évolution de la richesse financière

On note $a_{s,t}$ la richesse financière à la période t d'un agent né à la période s. Un agent commence avec une richesse financière $a_{s,s} = 0$. A chaque période, il reçoit un salaire w_t et paie un montant d'impôts τ_t. A la période t, un agent dispose d'un montant $a_{s,t} + w_t - \tau_t$ qu'il peut soit consommer, soit placer.
Le placement de la période t est doublement rémunéré à la période $t+1$:

- au taux d'intérêt réel r, constant au cours du temps,
- via une prime proportionnelle à son épargne.

On suppose en effet qu'il existe un système viager parfaitement concurrentiel (i.e. profit nul) dont le principe est le suivant : à chaque période un agent reçoit une prime proportionnelle à son épargne; en échange, il rétrocède l'intégralité de sa richesse financière au jour de sa mort.

2. Ecrire la loi d'évolution de la richesse financière d'un individu né à la période s pendant la durée de sa vie, à taux assurantiel Π donné.

$$\begin{aligned} a_{s,t+1} &= (1+r)(a_{s,t} + w_t - \tau_t - c_t) + \Pi(a_{s,t} + w_t - \tau_t - c_t) \\ &= (1+r+\Pi)(a_{s,t} + w_t - \tau_t - c_t) \end{aligned}$$

2. 3. Ecrire l'ensemble des dépenses et des recettes pour le système viager et déterminer le taux Π vérifiant la condition de profit nul.

On suppose que le système viager est concurrentiel (hypothèse libre entrée).
– dépenses en période t :

$$\sum_{s<t} (1-p)^{t-s} \Pi(a_{s,t-1} + w_{t-1} - \tau_{t-1} - c_{t-1}) bN_s$$

– *recettes en période t :*

$$\sum_{s<t} p(1-p)^{t-1-s}(1+r)(a_{s,t-1}+w_{t-1}-\tau_{t-1}-c_{t-1})bN_s$$

Condition de profit nul implique :

$$(1-p)\Pi = p(1+r)$$

$$\Rightarrow \Pi = (1+r)\frac{p}{1-p}$$

3. Rémunération totale de l'épargne

$$\begin{aligned} 1+r_h &= 1+r+\Pi = 1+r+(1+r)\frac{p}{1-p} \\ &= \frac{1+r}{1-p} \end{aligned}$$

III – Choix optimal de consommation

Cette partie introduit à la théorie du revenu permanent dans le cas où la durée de vie est incertaine.

1. Programme :

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=s}^{\infty} [(1-p)\beta]^{t-s} \log(c_{s,t}) \\ s.c. \quad & a_{s,t+1} = (1+r_h)(a_{s,t}+w_t-\tau_t-c_t) \\ & \lim_{t\to\infty} \quad \frac{a_{s,t}}{(1+r_h)^t} = 0 \\ & a_{s,s} = 0 \end{aligned}$$

On normalise les multiplicateurs de Lagrange de sorte que

$$£ = \sum_{t=s}^{\infty} [(1-p)\beta]^{t-s} \{\log(c_{s,t}) + \lambda_{s,t}[(1+r_h)(a_{s,t}+w_t-\tau_t-c_{s,t})-a_{s,t+1}]\}$$

2. Conditions du premier ordre par rapport à $c_{s,t}$ et à $a_{s,t+1}$:

$$u'(c_{s,t}) = \lambda_{s,t}.(1+r_h)$$

$$\lambda_{s,t+1}(1+r_h)\beta(1-p) = \lambda_{s,t}$$

D'où

$$\frac{c_{s,t+1}}{c_{s,t}} = \frac{u'(c_{s,t})}{u'(c_{s,t+1})} = \frac{\lambda_{s,t}}{\lambda_{s,t+1}} = (1+r_h)\beta(1-p) = \beta(1+r)$$

3. Contrainte budgétaire intertemporelle

$$a_{s,t+1} = (1+r_h)(a_{s,t}+w_t-\tau_t-c_{s,t})$$

$$\underset{s.c.\ Ponzi}{\Rightarrow} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_{s,t+i}}{(1+r_h)^i} = a_{s,t} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(w_{t+i} - \tau_{t+i})}{(1+r_h)^i} = a_{s,t} + h_t$$

4. Fonction de consommation

L'équation d'Euler implique :

$$c_{s,t+i} = [\beta(1+r)]^i c_{s,t}$$

(NB : dans le cas général, lorsqu'on suppose que la condition du premier ordre est vérifiée, cela veut dire qu'on fait implicitement l'hypothèse que les marchés financiers sont parfaits et qu'il n'y a pas de contraintes de liquidité).

Donc la contrainte budgétaire s'écrit :

$$c_{s,t} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\beta(1+r)}{1+r_h} \right)^i = a_{s,t} + h_t$$

La consommation de la période t d'un agent né à la période s est donc :

$$c_{s,t} = \Omega(a_{s,t} + h_t)$$

avec

$$\Omega = 1 - \beta(1-p)$$

Dans le cas standard d'un agent avec horizon infini sans mortalité, on a une propension marginale à consommer la richesse totale (i.e. humaine + financière) égale à $1-\beta$. Cette fonction de consommation n'a rien à voir avec la fonction de consommation "keynésienne" selon laquelle les agents consomment à proportion de leur revenu disponible courant. Ici consommation et revenu courant sont possiblement complétement déconnectés.

5. Consommation agrégée

Pour calculer la consommation agrégée de la date t, on doit agréger sur les différentes cohortes passées, en prenant en compte le fait qu'elles ont diminué de taille depuis leur apparition.

Il est immédiat que la taille en t de la cohorte née à la période s est $(1-p)^{t-s} b N_s$. Donc :

$$\begin{aligned} C_t &= \sum_{s \le t} c_{s,t}(1-p)^{t-s} b N_s \\ &= \Omega \sum_{s \le t} (a_{s,t} + h_t)(1-p)^{t-s} b N_s \\ &= \Omega \sum_{s \le t} a_{s,t}(1-p)^{t-s} b N_s + \Omega \sum_{s \le t} h_t (1-p)^{t-s} b N_s \end{aligned}$$

IV – Finances publiques

1. Evolution de la valeur de la dette

$$\frac{D_{t+1}}{1+r} = D_t + G_t - T_t$$

2. Equilibre des finances publiques à long terme

La loi d'évolution de la dette entre t et T implique :

$$D_T = (1+r)^T D_t + \sum_{i=0}^{T-t} (1+r)^{T-i}(G_{t+i} - T_{t+i})$$

$$\frac{D_T}{(1+r)^T} = D_t + \sum_{i=0}^{T-t} \frac{G_{t+i} - T_{t+i}}{(1+r)^i}$$

$$\begin{aligned} \lim_{T\to\infty} \frac{D_T}{(1+r)^T} &= 0 \quad \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{T_{t+i}}{(1+r)^i} = D_t + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{G_{t+i}}{(1+r)^i} \\ &\Rightarrow \quad D_t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(T_{t+i} - G_{t+i})}{(1+r)^i} \end{aligned}$$

V – Equilibre et condition pour la neutralité du chemin fiscal

1. La contre-partie de la richesse financière agrégée sur tous les agents privés, c'est nécessairement la dette de l'Etat.

$$A_t = D_t$$

$$\begin{aligned} C_t &= \Omega(A_t + H_t) \\ &= \Omega(D_t + H_t) \end{aligned}$$

2. Prise en compte de la contrainte budgétaire intertemporelle de l'Etat dans la consommation agrégée

On a :

$$D_t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(T_{t+i} - G_{t+i})}{(1+r)^i}$$

Donc :

$$C_t = \Omega\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(T_{t+i} - G_{t+i})}{(1+r)^i} + H_t\right)$$

3. On fait apparaître dans la richesse humaine les impôts futurs :

$$
\begin{aligned}
H_t &= h_t N_t \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w_{t+i}}{(1+r_h)^i} N_t - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\tau_{t+i}}{(1+r_h)^i} N_t \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w_{t+i}}{(1+r_h)^i} N_t - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\tau_{t+i} N_{t+i}}{(1+r_h)^i} \frac{N_t}{N_{t+i}} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w_{t+i}}{(1+r_h)^i} N_t - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{T_{t+i}}{[(1+r_h)(1+n)]^i}
\end{aligned}
$$

Dans la consommation agrégée, les impôts futurs agrégés sont escomptés au taux :

$$(1+r_h)(1+n) = \frac{1+r}{1-p} \frac{1-p}{1-b} = \frac{1+r}{1-b}$$

Nota bene : pour $b > 0$, ce taux d'escompte est inférieur à r.

La consommation agrégée peut donc s'écrire :

$$C_t = \Omega \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(T_{t+i} - G_{t+i})}{(1+r)^i} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w_{t+i} N_t}{(1+r_h)^i} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{T_{t+i}}{[(1+r_h)(1+n)]^i} \right\}$$

soit :

$$C_t = \Omega \left\{ -\sum_{i=0}^{\infty} \frac{G_{t+i}}{(1+r)^i} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w_{t+i} N_t}{(1+r_h)^i} + \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(1+r)^i} - \frac{1}{(\frac{1+r}{1-b})^i} \right] T_{t+i} \right\}$$

Si on compare deux sentiers de taxation $\{T^1_{t+i}\}_{i \geq t}$ et $\{T^2_{t+i}\}_{i \geq t}$ qui permettent de financer un même sentier de dépenses $\{G_{t+i}\}_{i \geq t}$, les sentiers de consommation correspondants sont identiques si et seulement si $b = 0$.

3. Ici, ce qui compte, ce sont les naissances futures, qui élargissent la base fiscale. La probabilité de mort laisse intacte la contrainte budgétaire intertemporelle des agents : car si je ne meurs pas d'ici demain, la mort ayant frappé d'autres que moi, le fardeau fiscal par tête est plus élevé. En revanche, quand l'horizon des agents est fini de manière certaine, l'argument reste valable.

Bouclage du modèle :

Offre de travail inélastique et technologie transformant une unité de travail en une unité de bien, de sorte que $w_t = 1 \ \forall t$. Le marché des biens est équilibré lorsque $C_t + G_t = N_t$.

Un équilibre, c'est un taux r, et des quantités $\{c_{s,t}\}$, $\{a_{s,t}\}$, $\{G_t\}$, $\{T_t\}$, et $\{D_t\}$ qui vérifient :

– optimisation individuelle :

$$c_{s,t} = \Omega(a_{s,t} + h_t)$$

– équilibre au niveau agrégé sur le marché des biens et sur les titres émis par l'Etat

$$C_t + G_t = N_t$$

$$A_t = D_t$$

– absence de dérive des finances publiques

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{T_{t+i}}{(1+r)^i} = D_t + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{G_{t+i}}{(1+r)^i}$$

Mise en perspective de la littérature :

– Robert Barro, "Are Government Bonds Net Wealth?", JPE 1974
cas où $p = b = n = 0$.
Il y a équivalence ricardienne.

– Olivier Blanchard, "Debt, Deficits and Finite Horizons", JPE 1985
cas où $p = b > 0$ et $n = 0$.
Non-neutralité de la dette.
Erreur d'interprétation : croire que la non-neutralité vient de $p > 0$.

– Philippe Weil, Harvard PhD Thesis, 1985
cas où $p = 0$, $b = n > 0$.
Non-neutralité de la dette.

Tous ces papiers supposent que la consommation est correctement prédite par la théorie du revenu permanent. Néanmoins, **la présence de contraintes de liquidité** est une bonne raison de penser que le mode de financement des déficits n'est pas neutre, indépendamment des considérations démographiques.

Si les contraintes de liquidité mordent pour certains agents (i.e. leur niveau de consommation optimal – celui prédit par la théorie du revenu permanent – est plus élevé que ce que le niveau de liquidité dont ils disposent), ils utilisent l'augmentation de leur revenu disponible (suite au choix fait par l'Etat d'émettre de la dette plutôt que de prélever des impôts) pour consommer plus et non pas pour épargner en vue des impôts futurs.