Nicolas Coeurdacier
nicolas.coeurdacier@pse.ens.fr
Cours de Macroéconomie 3 (Prof. D. Cohen)

TD 10 - Eléments de correction.

Croissance endogène: "R&D Based Models of Economic Growth".
D'après C.I. Jones, 1995, *The Journal of Political Economy*, Vol 103 (4), 759-784.

Secteur des biens finaux

Le secteur des biens finaux produit le bien de consommation Y à partir du travail L_Y et un continuum de biens intermédiaires x. Le nombre de biens intermédiaires A est considéré comme donné par les firmes. Le secteur est parfaitement concurrentiel.

$$Y = L_Y^{\alpha} \int_0^A x_i^{1-\alpha} di$$

où L_Y désigne le nombre de travailleurs dans le secteur des biens finaux.
On note w le salaire des travailleurs et p_i le prix du bien intermédiaire x_i.
Le prix des biens finaux est prix comme numéraire.

1) Déterminer le salaire w en fonction de Y et L_Y.

$$w = \alpha \frac{Y}{L_Y}$$

2) Calculer la fonction de demande du bien intermédiaire x_i en fonction de p_i et L_Y.

$$\begin{aligned} p_i &= (1-\alpha) L_Y^{\alpha} x_i^{-\alpha} \\ x_i &= (1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} L_Y p_i^{-\frac{1}{\alpha}} \end{aligned}$$

Secteur des biens intermédiaires

Le secteur des biens intermédiaires est constitué d'un continuum des firmes sur $[0, A]$: chacune de ses firmes est en monopole sur son segment grâce bénéfice de son innovation. La production d'une unité de bien intermédiaire est assuré en transformant une unité de capital. Le coût du capital est r (et identique pour toutes les firmes).

3) Quelle est l'élasticité de la demande d'un bien intermédiaire par le secteur des biens finaux? En déduire le prix des biens intermédiaires.

$$\text{élasticité de la demande} = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow p_i = \frac{r}{1-\alpha} = p \quad \forall i$$

4) Quelle est la quantité de biens intermédiaires produites par chaque firme? Quel est le profit π réalisé?

$$\begin{aligned} x_i &= x = (1-\alpha)^{\frac{2}{\alpha}} L_Y r^{-\frac{1}{\alpha}} \\ \pi_i &= \pi = \alpha p x \end{aligned}$$

5) On note K la quantité de capital prêtée aux firmes de biens intermédiaires. Déduire des questions précédentes la répartition de la valeur ajoutée Y entre salaires, profits agrégés des firmes de biens intermédiaires et rémunération du capital. Commenter.

$$\begin{aligned} K &= Ax \\ rK &= Arx = A(1-\alpha)px = (1-\alpha)^2 Y \\ A\pi &= \alpha(1-\alpha)Y \\ wL_Y &= \alpha Y \end{aligned}$$

Secteur R&D

L'invention de nouveaux biens intermédiaires (innovations) obéit à la loi suivante:

$$\dot{A} = \delta L_A^{\lambda} A^{\phi}$$

où L_A désigne le nombre de travailleurs dans le secteur R&D ("chercheurs"). (λ, ϕ) sont des paramètres compris dans $[0, 1]$

Le secteur R&D vend une innovation ("patente") au prix p_A. Les travailleurs choisissent librement de travailler dans le secteur R&D (le marché du travail n'est pas segmenté entre chercheurs et travailleurs dans le secteur des biens finaux). Il y a libre entrée dans le secteur R&D.

6) Commenter la loi d'évolution des innovations. En quoi est-elle différente de celle du modèle de Romer [1990]? Cette hypothèse vous paraît-elle justifiée?

7) Calculer le salaire w des chercheurs.
Condition de zéro profit.

$$w = p_A \delta L_A^{\lambda-1} A^{\phi}$$

8) Ecrire le rendement instantané d'une patente en fonction de p_A et π et égaliser ce rendement au coût du capital (Equation d'Arbitrage)

$$r = \frac{\pi}{p_A} + \frac{\dot{p}_A}{p_A}$$

Choix de consommation

Les préférences d'un agent représentatif sont définies de la manières suivante:

$$\max_c \int_0^\infty \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} e^{-\rho t} dt$$

On note K la richesse agrégée de l'économie.

La contrainte emploi-ressource impose l'évolution suivante pour la richesse agrégée K:

$$\dot{K} = rK + wL_Y + A\pi - C$$

9) Réécrire cette loi d'évolution en variable par tête $k = \frac{K}{L}$, $c = \frac{C}{L}$ et $a = \frac{A}{L}$ où $L = L_A + L_Y$

$$\dot{k} = (r-n)k + w\frac{L_Y}{L} + a\pi - c$$

10) Ecrire l'Hamiltonien associé à cette maximisation et en déduire l'équation d'Euler associée.

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r - \rho - n)$$

Sentier de croissance équilibré

On note $y = \frac{Y}{L}$

On suppose que le ratio $s = \frac{L_A}{L}$ est constant à long-terme et que c et y croissent à un taux constant $g > 0$ ("balanced growth path").

11) Calculer r en fonction de g sur le sentier de croissance équilibré. Montrer que $g = g_A$, taux de croissance de A.

$$g = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r - \rho - n) \Rightarrow r = \theta g + \rho + n$$

$$\begin{aligned}
Y &= AL_Y^{\alpha} x^{1-\alpha} \\
\frac{\dot{Y}}{Y} &= g_A + \alpha n + (1-\alpha)\frac{\dot{x}}{x} \\
&= g_A + \alpha n + (1-\alpha)\left[n - \frac{1}{\alpha}\frac{\dot{r}}{r}\right] \\
&= g_A + n \\
\frac{\dot{y}}{y} &= g_A
\end{aligned}$$

12) En utilisant la loi d'évolution de A, calculer g_A. Pourquoi parle t-on de croissance "semi-endogène"? Quelle est la principale différence avec le modèle de Romer [1990]?

On log-différencie la loi d'évolution de A

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{A}}{A} &= \delta L_A^{\lambda} A^{\phi-1} \Rightarrow 0 = \lambda \frac{\dot{L}_A}{L_A} + (\phi - 1)\, g_A \\
g_A &= g = \frac{\lambda n}{1-\phi}
\end{aligned}$$

La croissance est auto-entretenue mais ne dépend pas de variables affectées par la politique économique $\Rightarrow$ croissance "semi-endogène". Dans le modèle de Romer, il y a un "effet-taille": plus il y a de chercheurs, plus le taux de croissance est élevé; empiriquement, un tel effet taille est très contestable (cf. fig. 1).

d'après Jones [1995].

13) Calculer $\frac{\dot{p}_A}{p_A}$. Commenter.

$$\begin{aligned}
\frac{wL_A}{wL_Y} &= \frac{p_A \dot{A}}{wL_Y} = \frac{p_A \dot{A}}{\alpha Y} = p_A \frac{\delta L_A^{\lambda} A^{\phi}}{\alpha Y} = \frac{L_A}{L_Y} \\
\Rightarrow & \quad \frac{\dot{p}_A}{p_A} = -\lambda n - \phi g + g + n = n
\end{aligned}$$

Le prix des patentes s'apprécie au cours du temps car il devient de plus en plus difficile d'innover du fait des rendements décroissants de l'innovation.

14) Calculer $s = \frac{L_A}{L}$. Commenter.

$$r = \frac{\pi}{p_A} + \frac{\dot{p}_A}{p_A} \Rightarrow p_A = \frac{\pi}{r - \frac{\dot{p}_A}{p_A}}$$

$$
\begin{aligned}
wL_A &= p_A\dot{A} = \frac{A\pi}{r - \frac{\dot{p}_A}{p_A}} g_A = \frac{\alpha(1-\alpha)Y}{r - \frac{\dot{p}_A}{p_A}} g = \frac{(1-\alpha)wL_Y}{r - \frac{\dot{p}_A}{p_A}} g \\
\frac{s}{1-s} &= \frac{L_A}{L_Y} = \frac{(1-\alpha)}{r - \frac{\dot{p}_A}{p_A}} g = \frac{1-\alpha}{\theta g + \rho} g = \frac{1-\alpha}{\theta + \frac{\rho}{g}} \\
s &= \frac{1}{1 + \frac{1}{1-\alpha}\left(\theta + \frac{\rho}{g}\right)}
\end{aligned}
$$