Examen Terminal UE Algorithmes

L1 MPCI

28 mai 2025 - Durée: 2h

Lorsque l'on vous demande d'écrire de décrire ou de donner un algorithme cela signifiera toujours en donner un pseudo-code, justifier de son exactitude et de sa complexité (en utilisant des $\mathcal{O}$)

On rappelle qu'aucun document, ni équipement électrique ou électronique n'est autorisé.
Cependant *l'usage d'un coupe-bordures sans fil est toléré.*

Les exercices de cet examen :
- sont au nombre de 3 ;
- ont tous le même but afficher à l'écran chaque élément de $\mathcal{T}_n$ une fois.
- sont indépendants (à part le problème à résoudre qui est le même) ;
- sont de difficulté *a priori* croissante ;
- leur début est (*a priori*) plus facile que leur fin.

L'examen est **long** et ce qui semble simple pour l'examinateur ne l'est pas forcément pour l'étudiant et réciproquement. Il pourra être utile de changer d'exercice plutôt que de rester bloqué sur une question, quitte à y revenir plus tard.

Rendez des copies séparées pour chaque exercice, ceci vous permettra de d'y revenir au cours de l'examen sans perdre le correcteur.

Notations :
- On note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble de toutes **les permutations** du tableau de taille n contenant les entiers allant de 0 à $n-1$. Par exemple $\mathcal{T}_3 = \{[0,1,2],[0,2,1],[1,0,2],[1,2,0],[2,0,1],[2,1,0]\}$;
- Pour un tableau T de taille n, on notera $T[\,:k]$ le tableau formé **des k premiers éléments de** T (allant des indices 0 à $k-1$). Si $T = [1,3,2,0,4]$, alors $T[\,:3] = [1,3,2]$;
- Pour un tableau T n, on notera $T[k:\,]$ le tableau formé **des $n-k$ derniers éléments de** T (allant des indices k à $n-1$). Si $T = [1,3,2,0,4]$, alors $T[\,3:\,] = [0,4]$;
- Pour deux tableaux T et T', on notera $T + T'$ le tableau formé de **la concaténation** de T et T'. On a $[0,4] + [1,3,2] = [0,4,1,3,2]$;
- Pour un tableau T de taille n **une permutation circulaire de k éléments de** T est le tableau $T_k = T[k:\,] + T[\,:k]$. Le tableau $[3,4,0,1,2]$ est la permutation circulaire de 2 éléments du tableau $[0,1,2,3,4]$.
- Pour deux tableaux d'entiers T et T', $T < T'$ selon **l'ordre lexicographique** si $T \neq T'$ et $T[i] < T'[i]$ pour i le plus petit indice tel que $T[i] \neq T'[i]$;

Exercice 1 – Itératif

On va utiliser l'ordre lexicographique entre tableaux d'entiers pour générer tous les éléments de $\mathcal{T}_n$.

1.1 Ordre

Question 1.1.1 Si $T = [0, 3, 4, 2, 1]$ et $T' = [0, 3, 2, 1, 4]$. Justifiez pourquoi $T' < T$.

Question 1.1.2 Quels sont le plus petit et le plus grand élément de $\mathcal{T}_n$?

Question 1.1.3 Écrivez un algorithme de complexité optimale (vous le justifierez) qui prend en entrée deux éléments $T1$ et $T2$ de $\mathcal{T}_n$ et rend `Vrai` si $T1$ est strictement plus petit que $T2$ et `Faux` sinon. Il sera de signature : `plus_petit(T1: [entier], T2: [entier]) → booléen`

1.2 Indice $i^\star_T$

On note $i^\star_T \geq 0$ pour T de $\mathcal{T}_n$ un indice $i^\star_T \geq 0$ tel que :
- $T[i^\star_T :]$ est strictement décroissante,
- soit $i^\star_T = 0$ soit $T[i^\star_T - 1] < T[i^\star_T]$.

Question 1.2.1 Donnez $i^\star_T$ et $i^\star_{T'}$ pour $T = [0, 3, 4, 2, 1]$ et $T' = [0, 3, 2, 1, 4]$.

Question 1.2.2 Démontrez que pour tout élément T de $\mathcal{T}_n$ $i^\star_T$ existe et est unique.

Question 1.2.3 Écrivez un algorithme de complexité optimale (vous le justifierez) qui prend en entrée un élément T de $\mathcal{T}_n$ et rend $i^\star_T$. Il sera de signature : `i_star(T: [entier]) → entier`

Question 1.2.4 Démontrez que si $T[: i^\star_T] = U[: i^\star_T]$ pour deux éléments T et U de $\mathcal{T}_n$, alors $T \geq U$.

Question 1.2.5 Soit $T \in \mathcal{T}_n$ et $i^\star_T$ son indice associé. Montrez que pour tout U de $\mathcal{T}_n$ tel que $T[: i^\star_T] = U[: i^\star_T]$ (les $i^\star_T$ premiers éléments sont identiques pour T et U) on a $T \geq U$.

1.3 Successeur

Question 1.3.1 Utilisez $i^\star_T$ pour déterminer le successeur dans $\mathcal{T}_n$ d'un élément $T \in \mathcal{T}_n$ (le plus petit tableau de $\mathcal{T}_n$ strictement plus grand que T).

Question 1.3.2 Écrivez un algorithme de signature `suivant(T: [entier]) → [entier]` qui prend en entrée un élément T de $\mathcal{T}_n$ et rend son successeur pour l'ordre lexicographique dans $\mathcal{T}_n$. Sa complexité devra être optimale (vous le justifierez).

Question 1.3.3 En déduire un algorithme itératif dont vous donnerez la complexité permettant d'afficher à l'écran tous les éléments de $\mathcal{T}_n$.

Question 1.3.4 Quelle serait la complexité de l'algorithme précédent si à la place d'afficher tous les éléments il rendait une liste contenant tous les éléments de $\mathcal{T}_n$?

Exercice 2 – Récursif

On va modifier un algorithme permettant de mélanger un tableau pour générer tous les éléments de $\mathcal{T}_n$. Soit l'algorithme suivant, que l'on doit à Fisher et Yates (1938) :

algorithme MÉLANGE(T) **:**
  Pour chaque i de [0, n-2] **:**
    $j \leftarrow$ un entier aléatoire de [i, n-1]
    $T[i]$, $T[j]$ $\leftarrow T[j]$, $T[i]$

2.1 Aléatoire

Question 2.1.1 Donnez la complexité de l'algorithme `mélange(T:[entier])`.

Question 2.1.2 Démontrez que si $T = [0, n-1]$, `mélange(T)` va modifier T en une permutation T' qui peut être n'importe quel élément de $\mathcal{T}_n$.

Question 2.1.3 Transformez l'algorithme `mélange(T)` en un algorithme récursif de signature : `mélange_rec(T: [entier], i: entier)`, de telle sorte que `mélange(T) = mélange_rec(T, 0)` (la variable interne i de la boucle `pour chaque` devient un paramètre de la fonction).

Question 2.1.4 (question optionnelle) Montrez que la probabilité que T soit modifié en T' par `mélange(T)` est la même pour tout élément T' de $\mathcal{T}_n$

2.2 Déterministe

Question 2.2.1 En déduire un algorithme récursif et **sans tirage aléatoire** permettant d'afficher à l'écran tous les éléments de $\mathcal{T}_n$. Quelle est sa complexité ?

Question 2.2.2 Explicitez les sorties à l'écran de votre algorithme Lorsqu'il affiche tous les éléments $\mathcal{T}_3$.

Exercice 3 – Optimal

Nous allons dans cette partie examiner un algorithme optimal que l'on doit à B. R. Heap (1963).

algorithme HEAP(T, k) **:**
  si $k = 1$ **:**
    affiche T à l'écran
  sinon :
    HEAP(T, $k-1$)
  Pour chaque i de [0, k-2] **:**
    si k est pair **:**
      $T[i]$, $T[k-1]$ ←$T[k-1]$, $T[i]$
    sinon :
      $T[0]$, $T[k-1]$ ←$T[k-1]$, $T[0]$
    HEAP(T, $k-1$)

3.1 Vérification

Question 3.1.1 Explicitez les sorties à l'écran de l'exécution de HEAP$([0, 1, 2], 3)$.

Question 3.1.2 Explicitez les sorties à l'écran de l'exécution de HEAP$([0, 1, 2, 3, 4], 3)$.

3.2 Propriétés

Soit T un tableau. On va étudier ses modifications près exécution de l'algorithme. Pour cela, on note T' le tableau T après l'exécution de HEAP(T, k).

Question 3.2.1 Démontrez que $T[k:] = T'[k:]$

Question 3.2.2 Démontrez que :
- si k est impair alors $T'[:k] = T[:k]$
- si k est pair alors $T'[:k]$ est la permutation circulaire de 1 élément du tableau $T[:k]$

Question 3.2.3 Démontrez que lors de l'appel de HEAP(T, k), avec $k > 1$, chaque élément de $T[:k]$ sera placé exactement une fois en position $T[k-1]$ lors des différents appels HEAP$(T, k-1)$

Question 3.2.4 En déduire que l'algorithme HEAP permet d'afficher à l'écran tous les éléments de $\mathcal{T}_n$.

3.3 Optimalité

Question 3.3.1 Démontrez que lors de l'exécution de HEAP(T, k), il y a eu exactement $k!$ échanges. En déduire la complexité de l'affichage à l'écran de tous les éléments de $\mathcal{T}_n$.

Question 3.3.2 Proposez une version itérative de l'algorithme HEAP.