

Examen Terminal UE Algorithmes

L1 MPC1

28 mai 2025 - Durée: 2h

Lorsque l'on vous demande d'écrire de décrire ou de donner un algorithme cela signifiera toujours en donner un pseudo-code, justifier de son exactitude et de sa complexité (en utilisant des \mathcal{O})

On rappelle qu'aucun document, ni équipement électrique ou électronique n'est autorisé.

Cependant l'usage d'un coupe-bordures sans fil est toléré.

Les exercices de cet examen :

- sont au nombre de 3 ;
- ont tous le même but afficher à l'écran chaque élément de \mathcal{T}_n une fois.
- sont indépendants (à part le problème à résoudre qui est le même) ;
- sont de difficulté *a priori* croissante ;
- leur début est (*a priori*) plus facile que leur fin.

L'examen est **long** et ce qui semble simple pour l'examineur ne l'est pas forcément pour l'étudiant et réciproquement. Il pourra être utile de changer d'exercice plutôt que de rester bloqué sur une question, quitte à y revenir plus tard.

RENDEZ DES COPIES SÉPARÉES POUR CHAQUE EXERCICE, CECI VOUS PERMETTRA DE D'Y REVENIR AU COURS DE L'EXAMEN SANS PERDRE LE CORRECTEUR.

Notations :

- On note \mathcal{T}_n l'ensemble de toutes les **permutations** du tableau de taille n contenant les entiers allant de 0 à $n - 1$. Par exemple $\mathcal{T}_3 = \{[0, 1, 2], [0, 2, 1], [1, 0, 2], [1, 2, 0], [2, 0, 1], [2, 1, 0]\}$;
- Pour un tableau T de taille n , on notera $T[:k]$ le tableau formé **des k premiers éléments de T** (allant des indices 0 à $k - 1$). Si $T = [1, 3, 2, 0, 4]$, alors $T[:3] = [1, 3, 2]$;
- Pour un tableau T de taille n , on notera $T[k:]$ le tableau formé **des $n - k$ derniers éléments de T** (allant des indices k à $n - 1$). Si $T = [1, 3, 2, 0, 4]$, alors $T[3:] = [0, 4]$;
- Pour deux tableaux T et T' , on notera $T + T'$ le tableau formé de **la concaténation** de T et T' . On a $[0, 4] + [1, 3, 2] = [0, 4, 1, 3, 2]$;
- Pour un tableau T de taille n **une permutation circulaire de k éléments de T** est le tableau $T_k = T[k:] + T[:k]$. Le tableau $[3, 4, 0, 1, 2]$ est la permutation circulaire de 2 éléments du tableau $[0, 1, 2, 3, 4]$.
- Pour deux tableaux d'entiers T et T' , $T < T'$ selon **l'ordre lexicographique** si $T \neq T'$ et $T[i] < T'[i]$ pour i le plus petit indice tel que $T[i] \neq T'[i]$;

EXERCICE 1 – ITÉRATIF

On va utiliser l'ordre lexicographique entre tableaux d'entiers pour générer tous les éléments de \mathcal{T}_n .

1.1 Ordre

Question 1.1.1 Si $T = [0, 3, 4, 2, 1]$ et $T' = [0, 3, 2, 1, 4]$. Justifiez pourquoi $T' < T$.

Question 1.1.2 Quels sont le plus petit et le plus grand élément de \mathcal{T}_n ?

Question 1.1.3 Écrivez un algorithme de complexité optimale (vous le justifierez) qui prend en entrée deux éléments $T1$ et $T2$ de \mathcal{T}_n et rend **Vrai** si $T1$ est strictement plus petit que $T2$ et **Faux** sinon. Il sera de signature : `plus_petit(T1: [entier], T2: [entier]) → booléen`

1.2 Indice i_T^*

On note $i_T^* \geq 0$ pour T de \mathcal{T}_n un indice $i_T^* \geq 0$ tel que :

- $T[i_T^* :]$ est strictement décroissante,
- soit $i_T^* = 0$ soit $T[i_T^* - 1] < T[i_T^*]$.

Question 1.2.1 Donnez i_T^* et $i_{T'}^*$ pour $T = [0, 3, 4, 2, 1]$ et $T' = [0, 3, 2, 1, 4]$.

Question 1.2.2 Démontrez que pour tout élément T de \mathcal{T}_n i_T^* existe et est unique.

Question 1.2.3 Écrivez un algorithme de complexité optimale (vous le justifierez) qui prend en entrée un élément T de \mathcal{T}_n et rend i_T^* . Il sera de signature : `i_star(T: [entier]) → entier`

Question 1.2.4 Démontrez que si $T[i_T^*] = U[i_U^*]$ pour deux éléments T et U de \mathcal{T}_n , alors $T \geq U$.

1.3 Successeur

Question 1.3.1 Utilisez i_T^* pour déterminer le successeur dans \mathcal{T}_n d'un élément $T \in \mathcal{T}_n$ (le plus petit tableau de \mathcal{T}_n strictement plus grand que T).

Question 1.3.2 Écrivez un algorithme de signature `successeur(T: [entier]) → [entier]` qui prend en entrée un élément T de \mathcal{T}_n et rend son successeur pour l'ordre lexicographique dans \mathcal{T}_n . Sa complexité devra être optimale (vous le justifierez).

Question 1.3.3 En déduire un algorithme itératif dont vous donnerez la complexité permettant d'afficher à l'écran tous les éléments de \mathcal{T}_n .

Question 1.3.4 Quelle serait la complexité de l'algorithme précédent si à la place d'afficher tous les éléments il rendait une liste contenant tous les éléments de \mathcal{T}_n ?

EXERCICE 2 – RÉCURSIF

On va modifier un algorithme permettant de mélanger un tableau pour générer tous les éléments de \mathcal{T}_n . Soit l'algorithme suivant, que l'on doit à Fisher et Yates (1938) :

algorithme MÉLANGE(T) :

Pour chaque i de $[0, n-2]$:

 | $j \leftarrow$ un entier aléatoire de $[i, n-1]$
 | $T[i], T[j] \leftarrow T[j], T[i]$

2.1 Aléatoire

Question 2.1.1 Donnez la complexité de l'algorithme `mélange(T: [entier])`.

Question 2.1.2 Démontrez que si $T = [0, \dots, n-1]$, `mélange(T)` va modifier T en une permutation T' qui peut être n'importe quel élément de \mathcal{T}_n .

Question 2.1.3 Transformez l'algorithme `mélange(T)` en un algorithme récursif de signature : `mélange_rec(T: [entier], i: entier)`, de telle sorte que `mélange(T) = mélange_rec(T, 0)` (la variable interne i de la boucle `pour` `chaque` devient un paramètre de la fonction).

Question 2.1.4 (question optionnelle) Montrez que la probabilité que T soit modifié en T' par `mélange(T)` est la même pour tout élément T' de \mathcal{T}_n .

2.2 Déterministe

Question 2.2.1 En déduire un algorithme récursif et **sans tirage aléatoire** permettant d'afficher à l'écran tous les éléments de \mathcal{T}_n . Quelle est sa complexité ?

Question 2.2.2 Explicitez les sorties à l'écran de votre algorithme Lorsqu'il affiche tous les éléments \mathcal{T}_3 .

EXERCICE 3 — OPTIMAL

Nous allons dans cette partie examiner un algorithme optimal que l'on doit à B. R. Heap (1963).

algorithme `HEAP(T, k)` :

si $k = 1$:

 | affiche T à l'écran

sinon :

 | `HEAP(T, k - 1)`

Pour chaque i de $[0, k-2]$:

si k est pair :

 | $T[i], T[k-1] \leftarrow T[k-1], T[i]$

sinon :

 | $T[0], T[k-1] \leftarrow T[k-1], T[0]$

`HEAP(T, k - 1)`

3.1 Vérification

Question 3.1.1 Explicitez les sorties à l'écran de l'exécution de `HEAP([0, 1, 2], 3)`.

Question 3.1.2 Explicitez les sorties à l'écran de l'exécution de `HEAP([0, 1, 2, 3, 4], 3)`.

3.2 Propriétés

Soit T un tableau. On va étudier ses modifications près exécution de l'algorithme. Pour cela, on note T' le tableau T après l'exécution de `HEAP(T, k)`.

Question 3.2.1 Démontrez que $T[k:] = T'[k:]$

Question 3.2.2 Démontrez que :

— si k est impair alors $T'[: k] = T[: k]$

— si k est pair alors $T'[: k]$ est la permutation circulaire de 1 élément du tableau $T[: k]$

Question 3.2.3 Démontrez que lors de l'appel de `HEAP(T, k)`, avec $k > 1$, chaque élément de $T[: k]$ sera placé exactement une fois en position $T[k-1]$ lors des différents appels `HEAP(T, k - 1)`

Question 3.2.4 En déduire que l'algorithme `HEAP` permet d'afficher à l'écran tous les éléments de \mathcal{T}_n .

3.3 Optimalité

Question 3.3.1 Démontrez que lors de l'exécution de `HEAP(T, k)`, il y a eu exactement $k!$ échanges. En déduire la complexité de l'affichage à l'écran de tous les éléments de \mathcal{T}_n .

Question 3.3.2 Proposez une version itérative de l'algorithme `HEAP`.