

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE

ANALYSE DES CARACTÉRISTIQUES D'AMORTISSEMENT  
D'UN CÂBLE TORONNÉ EN RÉGIME VIBRATOIRE

FRANÇOIS CHARETTE

Mémoire  
présenté  
pour l'obtention  
du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

ÉCOLE DES GRADUÉS  
UNIVERSITÉ LAVAL

Avril 1992

## REMERCIEMENTS

Ce mémoire a été rendu possible grâce à la participation de plusieurs personnes que je tiens à remercier vivement

le Dr Sylvain Goudreau, directeur de mémoire, pour ses innombrables conseils et sa disponibilité

le Dr Louis Cloutier, co-directeur, pour la coordination du projet

le Dr Claude Hardy, chercheur à l'IREQ, pour le projet et l'intérêt continual qu'il y a porté

ma famille, plus particulièrement ma conjointe Louise et ma fille Catherine pour leurs encouragements

le FCAR et l'Hydro-Québec pour leur soutien financier.

## RÉSUMÉ

Ce mémoire présente trois modèles mathématiques pour déterminer la dissipation d'énergie dans un câble hélicoïdal soumis à deux déformées différentes. La géométrie du câble est simplifiée en une géométrie du type  $1 \times n$ . Celle-ci est donc constituée d'une âme entourée d'une couche de  $n$  fils. Le contact âme-fil est considéré dans les différents modèles. Les déformées étudiées sont:

- i) une déformée ayant un rayon de courbure constant
- ii) une déformée sinusoïdale.

Le modèle avec complaisance, qui est un des trois modèles mathématiques, inclut le comportement mécanique (complaisance) près de l'interface de contact âme-fil.

Les modèles mathématiques permettent de connaître le déplacement et la déformation (contrainte) du fil ainsi que la force de friction à l'interface âme-fil. De plus, l'énergie dissipée par cycle sous forme adimensionnelle est donnée en fonction du rayon de courbure adimensionnel et de l'amplitude adimensionnelle .

Les différents résultats obtenus pour les trois modèles mathématiques, avec les deux types de déformée, sont présentés sous forme adimensionnelle.

François Charette  
François Charette

Sylvain Goudreau  
Sylvain Goudreau

TABLE DES MATIERE

TABLE DES MATIERES .....	i
LISTE DES FIGURES .....	iv
LISTE DES TABLEAUX .....	ix
NOMENCLATURE .....	x
INTRODUCTION .....	1
1. EQUATIONS GENERALES	
1.1 Géométrie du toron 1 x n .....	4
1.2 Équations à la surface de l'âme .....	6
1.2.1 Déformée ayant un rayon de courbure constant ..	7
1.2.2 Déformée sinusoïdale .....	8
2. MODELES SANS COMPLAISANCE	
2.1 Hypothèses .....	11
2.2 Modèle de Hardy .....	12
2.2.1 Analyse de glissement nul des fils sur l'âme ..	12
2.2.2 Déformée ayant un rayon de courbure constant ..	14
2.2.2.1 Début du macro-glissement .....	16
2.2.2.2 Région de macro-glissement .....	17
2.2.3 Déformée sinusoïdale .....	19
2.2.3.1 Début du macro-glissement .....	20
2.2.3.2 Région de macro-glissement .....	21
2.3 Modèle avec continuité de déformation .....	23
2.3.1 Déformée ayant un rayon de courbure constant ..	24
2.3.2 Déformée sinusoïdale .....	26

<b>3. MODELE AVEC COMPLAISANCE</b>	
3.1 Introduction .....	29
3.1.1 Contact linéique .....	30
3.2 Hypothèses .....	35
3.3 Introduction de la complaisance dans les équations ..	37
3.3.1 Equation de compatibilité géométrique de déplacement fil-âme .....	37
3.3.2 Equation différentielle .....	42
3.4 Multi-linéarisation de la courbe $f_f \delta$ .....	44
3.5 Solution de l'équation différentielle .....	47
3.5.1 Déformée ayant un rayon de courbure constant ..	47
3.5.2 Déformée sinusoïdale .....	48
3.6 Région de macro-glissement .....	50
3.6.1 Déformée ayant un rayon de courbure constant ..	50
3.6.2 Déformée sinusoïdale .....	50
3.7 Conditions limites .....	51
3.7.1 Déformée ayant un rayon de courbure constant ..	51
3.7.2 Déformée sinusoïdale .....	56
<b>4. DISSIPATION D'ENERGIE</b>	
4.1 Mécanisme de dissipation d'énergie .....	58
4.1.1 Schématisation de la dissipation d'énergie des modèles sans complaisance .....	58
4.1.2 Schématisation de la dissipation d'énergie du modèle avec complaisance .....	61
4.1.3 Mécanisme de dissipation d'énergie dans un toron .....	66
4.2 Dissipation d'énergie des modèles sans complaisance..	68
4.3 Dissipation d'énergie du modèle avec complaisance ..	70
<b>5. EQUATIONS ADIMENSIONNELLES</b>	
5.1 Constantes utilisées pour rendre les équations adimensionnelles .....	77
5.2 Paramètres adimensionnels .....	79

<b>6. RESULTATS</b>	
6.1 Courbes de déplacement, déformation et rapport de friction $R_u$ .....	82
6.1.1 Déformée ayant un rayon de courbure constant .....	83
6.1.1.1 Modèle de Hardy .....	84
6.1.1.2 Modèle avec continuité de déformation.....	87
6.1.1.3 Modèle avec complaisance .....	91
6.1.1.4 Discussion des résultats .....	95
6.1.2 Déformée sinusoïdale .....	101
6.2 Rapport relatif de différence maximale de déplacement $R_{DEP}$ .....	111
6.2.1 Déformée ayant un rayon de courbure constant ..	111
6.2.2 Déformée sinusoïdale .....	113
6.3 Dissipation d'énergie .....	115
6.3.1 Déformée ayant un rayon de courbure constant ..	115
6.3.2 Déformée sinusoïdale .....	121
 CONCLUSION .....	129
BIBLIOGRAPHIE .....	132
ANNEXE A .....	134
A.1 Déformée ayant un rayon de courbure constant .....	134
A.1.1 Modèle de Hardy .....	135
A.1.2 Modèle avec continuité de déformation .....	136
A.1.3 Modèle avec complaisance .....	138
A.2 Déformée sinusoïdale .....	140
A.2.1 Modèle de Hardy .....	141
A.2.2 Modèle avec continuité de déformation .....	142
A.2.3 Modèle avec complaisance .....	143
A.3 Équations adimensionnelles de dissipation d'énergie.	146
ANNEXE B .....	149
ANNEXE C.....	157

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Schéma d'un toron $1 \times n$ .....	4
Figure 1.2	Géométrie d'une ligne de contact .....	5
Figure 1.3	Déformée ayant un rayon de courbure constant ..	7
Figure 1.4	Déformée sinusoïdale .....	9
Figure 2.1	Différentes régions d'une courbe de déplacement du fil en fonction de la position axiale X .....	11
Figure 2.2	Diagramme des forces agissant sur un élément de fil .....	13
Figure 2.3	Ame soumise à une déformée ayant un rayon de courbure constant .....	15
Figure 2.4	Ame soumise à une déformée sinusoïdale .....	19
Figure 3.1	Surface de contact elliptique ayant une région centrale qui adhère et une région périphérique qui glisse .....	32
Figure 3.2	Section de l'âme pour une déformée ayant un rayon de courbure constant .....	38
Figure 3.3	Déplacement du fil et de la surface de l'âme par rapport à l'extrados .....	39

Figure 3.4	Déplacement du fil et de la surface de l'âme par rapport à l'intrados .....	40
Figure 3.5	Diagramme des forces sur un élément de fil avec complaisance .....	43
Figure 3.6	Courbe adimensionnelle de $f_f \delta$ et d'un modèle à trois portions linéaires .....	45
Figure 3.7	Courbe d'un modèle à trois portions linéaires avec les différents paramètres .....	46
Figure 3.8	Courbe typique du déplacement du fil où il existe vingt régions de micro-glissement et une de macro-glissement .....	53
Figure 4.1	Mécanisme de dissipation d'énergie du modèle de Hardy .....	59
Figure 4.2	Mécanisme de dissipation d'énergie du modèle avec complaisance .....	62
Figure 4.3	Distribution de la force de friction dans un demi-pas pour le modèle de Hardy avec la déformée ayant un rayon de courbure constant .....	67
Figure 4.4	Courbe typique d'hystérésis typique de la dissipation d'énergie due au micro-glissement.	71
Figure 4.5	Courbe typique d'hystérésis de la dissipation d'énergie due au micro et macro-glissement ...	74
Figure 6.1(a)	Déplacement du fil avec glissement et sans glissement pour le modèle de Hardy: $\gamma = 0.8$ .	84

Figure 6.1(b) Déformation du fil avec glissement et sans glissement pour le modèle de Hardy: = 0.8 .	85
Figure 6.1(c) Rapport de friction $R_\mu$ avec glissement et sans glissement pour le modèle de Hardy: = 0.8 .	86
Figure 6.2(a) Déplacement du fil avec glissement et sans glissement pour le modèle avec continuité de déformation: =0.8 .....	88
Figure 6.2(b) Déformation du fil avec glissement et sans glissement pour le modèle avec continuité de déformation: =0.8 .....	89
Figure 6.2(c) Rapport de friction $R_\mu$ avec glissement et sans glissement pour le modèle avec continuité de déformation: =0.8 .....	90
Figure 6.3(a) Déplacement du fil avec glissement et sans glissement pour le modèle avec complaisance: =0.8 .....	92
Figure 6.3(b) Déformation du fil avec glissement et sans glissement pour le modèle avec complaisance: =0.8 .....	93
Figure 6.3(c) Rapport de friction $R_\mu$ avec glissement et sans glissement pour le modèle avec complaisance: =0.8 .....	94
Figure 6.4 Courbe reliant le facteur de complaisance $\gamma_1$ au rayon de courbure adimensionnel nécessaire pour que le macro-glissement débute .....	96

Figure 6.5	Courbe typique du rapport de friction $R_u$ avec glissement et sans glissement pour le modèle avec continuité de déformation .....	98
Figure 6.6	Schéma montrant l'hélice de contact d'un fil sur la surface de l'âme .....	102
Figure 6.7	Déplacement du fil sans glissement le long de la longueur d'onde .....	104
Figure 6.8(a)	Déplacement du fil avec glissement et sans glissement pour le modèle avec complaisance.	106
Figure 6.8(b)	Déformation du fil avec glissement et sans glissement pour le modèle avec complaisance.	107
Figure 6.8(c)	Rapport de friction $R_u$ avec glissement et sans glissement pour le modèle avec complaisance.	108
Figure 6.9	Courbe reliant le facteur de complaisance $\gamma_1$ à l'amplitude adimensionnelle $\bar{A}$ nécessaire pour que le macro-glissement débute: $\bar{\lambda} = 28$ .....	110
Figure 6.10	Rapport relatif $R_{DEP}$ de différence maximale de déplacement en fonction du rayon de courbure adimensionnel .....	112
Figure 6.11	Rapport relatif $R_{DEP}$ de différence maximale de déplacement en fonction de l'amplitude adimensionnelle pour $\bar{\lambda} = 28$ .....	114
Figure 6.12(a)	Dissipation d'énergie par cycle d'un fil pour un demi-pas en fonction du rayon de courbure adimensionnel .....	119

Figure 6.12(b) Agrandissement au niveau des points d'inflexion de la figure 6.12(a) .....	120
Figure 6.13(a) Dissipation d'énergie par cycle d'un fil le long de la longueur d'onde en fonction de l'amplitude adimensionnelle .....	127
Figure 6.13(b) Agrandissement au niveau des points d'inflexion de la figure 6.13(a) .....	128
Figure B.1 Surface de contact circulaire ayant une région centrale qui adhère et un anneau où il y a du glissement .....	150
Figure B.2 Courbe reliant le déplacement $\delta$ à la force tangentielle $F_f$ .....	152

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 6.1(a) Valeurs adimensionnelles de dissipation d'énergie pour $\bar{\rho} = 1.0$ .....	117
Tableau 6.1(b) Valeurs adimensionnelles de dissipation d'énergie pour $\bar{\rho} = 0.8$ .....	118
Tableau 6.1(c) Valeurs adimensionnelles de dissipation d'énergie pour $\bar{\rho} = 0.6$ .....	118
Tableau 6.2(a) Valeurs adimensionnelles de dissipation d'énergie pour $\bar{\rho} = 1.0$ .....	124
Tableau 6.2(b) Valeurs adimensionnelles de dissipation d'énergie pour $\bar{\rho} = 1.3$ .....	124
Tableau 6.2(c) Valeurs adimensionnelles de dissipation d'énergie pour $\bar{\rho} = 2.0$ .....	125

NOMENCLATURE

- a → Section transversale d'un fil.
- A → Amplitude de la déformée sinusoïdale.
- $A_c$  → Amplitude du début du macro-glissement (modèle sans complaisance).
- $\bar{A}$  → Amplitude adimensionnelle de la déformée sinusoïdale.
- b → Rayon de la surface de contact circulaire.
- $b_1$  → Demi-axe de la surface de contact elliptique.
- $b_2$  → Demi-axe de la surface de contact elliptique.
- c → Rayon intérieur de l'anneau de glissement pour une force tangentielle  $F_f$  croissante (annexe B).
- $c'$  → Rayon intérieur de l'anneau de glissement pour une force tangentielle  $F_f$  décroissante (annexe B).
- $C_n$  → Complaisance normale.
- $C_t$  → Complaisance tangentielle.

- $C_{ti}$   $\rightarrow$  Complaisance tangentielle initiale.
- $D_i$   $\rightarrow$  Déplacement de la surface de l'âme le long de S pour le fil "i".
- $D_i^\rho$   $\rightarrow$  Déplacement de la surface de l'âme le long de S avec la déformée ayant un rayon de courbure constant pour le fil "i".
- $D_i^\lambda$   $\rightarrow$  Déplacement de la surface de l'âme le long de S avec la déformée sinusoïdale pour le fil "i".
- $E$   $\rightarrow$  Module d'Young.
- $f$   $\rightarrow$  Variable reliant  $\varepsilon$  à  $\varepsilon$  (éq. 1.16).
- $f_f$   $\rightarrow$  Force tangentielle à la surface de contact par unité de longueur.
- $F_f$   $\rightarrow$  Force tangentielle à la surface de contact.
- $F_f^*$   $\rightarrow$  Force tangentielle maximale appliquée à la surface de contact (annexe B).
- $G$   $\rightarrow$  Module de cisaillement.
- $h_i$   $\rightarrow$  Élévation de la ligne de contact entre le fil "i" et la surface de l'âme au-dessus du plan neutre.
- $J$   $\rightarrow$  Intégrales elliptiques complètes du second type d'argument  $k=(1 - b_2/b_1)^{1/2}$
- $J_1$   $\rightarrow$  Intégrales elliptiques complètes du second type d'argument  $k_1=(1 - b_1/b_2)^{1/2}$

- K** → Intégrales elliptiques complètes du premier type  
d'argument  $k=(1 - b_2/b_1)^{1/2}$
- K<sub>1</sub>** → Intégrales elliptiques complètes du premier type  
d'argument  $k_1=(1 - b_1/b_2)^{1/2}$
- P → Pas d'un fil.
- p → Distribution de pression donnée par la théorie de Hertz  
(Annexe B seulement).
- q → Force normale distribuée à la surface de contact.
- Q → Force normale à la surface de contact.
- R<sub>a</sub> → Rayon de l'âme.
- R<sub>F</sub> → Rayon d'un fil.
- R<sub>μ</sub> → Rapport de friction.
- R<sub>DEP</sub> → Rapport relatif de différence maximale de déplacement.
- S → Axe qui représente la ligne de contact déroulé.
- T<sub>i</sub> → Tension initiale dans les fils.
- u<sub>i</sub> → Déplacement du fil "i".
- u<sub>i</sub><sup>λ</sup> → Déplacement du fil "i" dans les régions de glissement nul pour les modèles sans complaisance avec la déformée sinusoïdale.
- u<sub>i</sub><sup>ρ</sup> → Déplacement du fil "i" dans les régions de glissement nul pour les modèles sans complaisance avec la déformée ayant un rayon de courbure constant.

- $u_i^{HC}$  -> Déplacement du fil "i" dans la région de macro-glisserment du modèle de Hardy ou du modèle avec continuité de déformation.
- $u_i^{\zeta}$  -> Déplacement du fil "i" dans la région de macro-glisserment du modèle avec complaisance.
- $u_i^{H\lambda}$  -> Déplacement du fil "i" dans la région de macro-glisserment du modèle à Hardy avec la déformée sinusoïdale.
- $u_i^{H\rho}$  -> Déplacement du fil "i" dans la région de macro-glisserment du modèle à Hardy avec la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $u_i^{C\lambda}$  -> Déplacement du fil "i" dans la région de macro-glisserment du modèle avec continuité de déformation avec la déformée sinusoïdale.
- $u_i^{C\rho}$  -> Déplacement du fil "i" dans la région de macro-glisserment du modèle avec continuité de déformation avec la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $u_i^{\zeta\rho}$  -> Déplacement du fil "i" dans la région de macro-glisserment du modèle avec complaisance avec la déformée sinusoïdale.
- $u_{ij}$  -> Déplacement du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" de la courbe force tangentielle  $f_f$  versus le déplacement  $\delta$  (voir figure 3.7).

- $u_{ij}^{\lambda}$  -> Déplacement du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" avec la déformée sinusoïdale.
- $u_{ij}^{\rho}$  -> Déplacement du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" avec la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $u_{ij}^{D\lambda}$  -> Déplacement du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" qui se situe du côté droit de la région centrale pour la déformée sinusoïdale.
- $u_{ij}^{D\rho}$  -> Déplacement du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" qui se situe du côté droit de la région centrale pour la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $u_{ij}^{G\lambda}$  -> Déplacement du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" qui se situe du côté gauche de la région centrale pour la déformée sinusoïdale.
- $u_{ij}^{G\rho}$  -> Déplacement du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" qui se situe du côté gauche de la région centrale pour la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $u_{ij}^{M\lambda}$  -> Déplacement du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" qui se situe au centre du demi-pas considéré lorsqu'il n'y a pas de macro-glissement pour la déformée sinusoïdale.
- $u_{ij}^{M\rho}$  -> Déplacement du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" qui se situe au centre du demi-pas considéré lorsqu'il n'y a pas de macro-glissement pour la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $W$  -> Energie dissipée due au micro-glissement.

- $\Delta\omega$  -> Energie dissipée par unité de longueur due au micro-glissement.
- $\Delta\omega_{ij}$  -> Energie dissipée par unité de longueur due au micro-glissement du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j".
- $\Delta\omega_i^\zeta$  -> Energie dissipée par unité de longueur due au macro-glissement du fil "i" pour le modèle avec complaisance.
- $\Delta W_{ij}$  -> Energie dissipée due au micro-glissement du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" bornée par  $X_{Rk}$  et  $X_{R(k+1)}$ .
- $\Delta W_i^{HC}$  -> Energie dissipée due au macro-glissement du fil "i" pour le modèle de Hardy ou le modèle avec continuité de déformation.
- $\Delta \bar{W}_{ijtot}^\rho$  -> Valeur adimensionnelle de la dissipation d'énergie due au micro-glissement du fil "i" dans toutes les régions de micro-glissement du demi-pas considéré.
- $\Delta \bar{W}_{ijmac}^\rho$  -> Valeur adimensionnelle de la dissipation d'énergie due au micro-glissement du fil "i" dans la région de macro-glissement du demi-pas considéré.
- $\Delta \bar{W}_i^\rho$  -> Valeur adimensionnelle de la dissipation d'énergie due au macro-glissement du fil "i" dans le demi-pas considéré.

- $\Delta\bar{W}_{i\text{total}}^{\rho} \rightarrow$  Valeur adimensionnelle de la dissipation d'énergie totale du fil "i" dans le demi-pas considéré.
- $\Delta\bar{W}_{i\text{tot}}^{\lambda} \rightarrow$  Valeur adimensionnelle de la dissipation d'énergie due au micro-glissement du fil "i" dans toutes les régions de micro-glissement de tous les demi-pas de la longueur d'onde.
- $\Delta\bar{W}_{i\text{jmac}}^{\lambda} \rightarrow$  Valeur adimensionnelle de la dissipation d'énergie due au micro-glissement du fil "i" dans la région de macro-glissement de tous les demi-pas de la longueur d'onde.
- $\Delta\bar{W}_i^{\lambda} \rightarrow$  Valeur adimensionnelle de la dissipation d'énergie due au macro-glissement du fil "i" de tous les demi-pas de la longueur d'onde.
- $\Delta\bar{W}_{i\text{total}}^{\lambda} \rightarrow$  Valeur adimensionnelle de la dissipation d'énergie totale du fil "i" pour une longueur d'onde.
- $X_{B1} \rightarrow$  Borne de gauche de la région centrale.
- $X_{B2} \rightarrow$  Borne de droite de la région centrale.
- $X_{Rk} \rightarrow$  Borne "k" d'une région de micro-glissement.
- $X_{INF} \rightarrow$  Position la plus rapprochée de l'origine des axes du demi-pas considéré. Elle se situe à l'extrados ou l'intrados.
- $X_{SUP} \rightarrow$  Position la plus éloignée de l'origine des axes du demi-pas considéré. Elle se situe à l'extrados ou l'intrados.
- $X_{COMP_j} \rightarrow$  Premier paramètre de la portion linéaire "j" de la courbe force tangentielle  $f_f$  versus micro-déplacement  $\delta$  (voir figure 3.7).

$\text{YCOMP}_j \rightarrow$  Deuxième paramètre de la portion linéaire "j" de la courbe force tangentielle  $f_f$  versus micro-déplacement  $\delta$  (voir figure 3.7).

$X, Y, Z \rightarrow$  Système global d'axes.

$X_z, Y_z, Z_z \rightarrow$  Traction à la surface de contact utilisé à l'annexe B.

$\alpha \rightarrow$  Angle d'hélice des fils.

$\beta_{ij}^\lambda \rightarrow$  1<sup>ière</sup> constante de la solution complémentaire du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" pour la déformée sinusoïdale.

$\beta_{ij}^\rho \rightarrow$  1<sup>ière</sup> constante de la solution complémentaire du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" pour la déformée ayant un rayon de courbure constant.

$\beta_{ij}^{D\lambda} \rightarrow$  1<sup>ière</sup> constante de la solution complémentaire du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" qui se situe du côté droit de la région centrale pour la déformée sinusoïdale.

$\beta_{ij}^{D\rho} \rightarrow$  1<sup>ière</sup> constante de la solution complémentaire du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" qui se situe du côté droit de la région centrale pour la déformée ayant un rayon de courbure constant.

$\beta_{ij}^{G\lambda} \rightarrow$  1<sup>ière</sup> constante de la solution complémentaire du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" qui se situe du côté gauche de la région centrale pour la déformée sinusoïdale.

- $\beta_{ij}^{G\rho}$  -> 1<sup>ière</sup> constante de la solution complémentaire du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" qui se situe du côté gauche de la région centrale pour la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $\beta_{ij}^{M\lambda}$  -> 1<sup>ière</sup> constante de la solution complémentaire du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" qui se situe au centre du demi-pas considéré lorsqu'il n'y a pas de macro-glissement pour la déformée sinusoïdale.
- $\beta_{ij}^{M\rho}$  -> 1<sup>ière</sup> constante de la solution complémentaire du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" qui se situe au centre du demi-pas considéré lorsqu'il n'y a pas de macro-glissement pour la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $\delta$  -> Déplacement tangentiel le long de la ligne de contact.
- $\delta_{max}$  -> Déplacement tangentiel maximal le long de la ligne de contact que la complaisance permet.
- $\delta_n$  -> Déflexion diamétrale.
- $\delta_d$  -> Déplacement tangentiel le long de la ligne de contact pour une force tangentielle  $F_f$  décroissante (annexe B).
- $\Delta$  -> Deux fois le déplacement tangentiel le long de la ligne de contact ( $2\delta$ ).
- $\xi_i^{H\lambda}$  -> 1<sup>ière</sup> constante d'intégration pour le fil "i" de la région de macro-glissement du modèle de Hardy avec la déformée sinusoïdale.

- $\xi_i^{H\rho}$  -> 1<sup>ière</sup> constante d'intégration pour le fil "i" de la région de macro-glissement du modèle de Hardy avec la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $\xi_i^{C\lambda}$  -> 1<sup>ière</sup> constante d'intégration pour le fil "i" de la région de macro-glissement du modèle avec continuité de déformation avec la déformée sinusoïdale.
- $\xi_i^{\zeta\rho}$  -> 1<sup>ière</sup> constante d'intégration pour le fil "i" de la région de macro-glissement du modèle avec continuité de déformation avec la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $\xi_i^{\zeta\lambda}$  -> 1<sup>ière</sup> constante d'intégration pour le fil "i" de la région de macro-glissement du modèle avec complaisance avec la déformée sinusoïdale.
- $\xi_i^{\zeta\rho}$  -> 1<sup>ière</sup> constante d'intégration pour le fil "i" de la région de macro-glissement du modèle avec complaisance avec la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $\psi_i^{H\lambda}$  -> 2<sup>ième</sup> constante d'intégration pour le fil "i" de la région de macro-glissement du modèle de Hardy avec la déformée sinusoïdale.
- $\psi_i^{H\rho}$  -> 2<sup>ième</sup> constante d'intégration pour le fil "i" de la région de macro-glissement du modèle de Hardy avec la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $\psi_i^{C\lambda}$  -> 2<sup>ième</sup> constante d'intégration pour le fil "i" de la région de macro-glissement du modèle avec continuité de déformation avec la déformée sinusoïdale.

- $\psi_i^{cp}$  -> 2<sup>ième</sup> constante d'intégration pour le fil "i" de la région de macro-glissement du modèle avec continuité de déformation avec la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $\psi_i^{\lambda}$  -> 2<sup>ième</sup> constante d'intégration pour le fil "i" de la région de macro-glissement du modèle avec complaisance avec la déformée sinusoïdale.
- $\psi_i^{\zeta\rho}$  -> 2<sup>ième</sup> constante d'intégration pour le fil "i" de la région de macro-glissement du modèle avec complaisance avec la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $\varepsilon_s$  -> Déformation axiale du fil.
- $\varepsilon_x^a$  -> Déformation de la surface de l'âme le long de X.
- $\varepsilon_i^a$  -> Déformation de la surface de l'âme le long de S.
- $\varepsilon_i^{a\lambda}$  -> Déformation de la surface de l'âme le long de S pour la déformée sinusoïdale.
- $\varepsilon_i^{ap}$  -> Déformation de la surface de l'âme le long de S pour la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $\varepsilon_i^\lambda$  -> Déformation du fil "i" dans les régions de glissement nul pour les modèles sans complaisance avec la déformée sinusoïdale.
- $\varepsilon_i^p$  -> Déformation du fil "i" dans les régions de glissement nul pour les modèles sans complaisance avec la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $\varepsilon_i^{H\lambda}$  -> Déformation du fil "i" dans la région de macro-glissement du modèle de Hardy avec la déformée sinusoïdale.

- $\varepsilon_i^{H\rho}$  -> Déformation du fil "i" dans la région de macro-glisser du modèle de Hardy avec la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $\varepsilon_i^{C\lambda}$  -> Déformation du fil "i" dans la région de macro-glisser du modèle avec continuité de déformation avec la déformée sinusoïdale.
- $\varepsilon_i^{C\rho}$  -> Déformation du fil "i" dans la région de macro-glisser du modèle avec continuité de déformation avec la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $\varepsilon_i^{\zeta\lambda}$  -> Déformation du fil "i" dans la région de macro-glisser du modèle avec complaisance avec la déformée sinusoïdale.
- $\varepsilon_i^{\zeta\rho}$  -> Déformation du fil "i" dans la région de macro-glisser du modèle avec complaisance avec la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $\varepsilon_{ij}$  -> Déformation du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" de la courbe force tangentielle  $f_f$  versus micro-déplacement  $\delta$  (voir figure 3.7).
- $\varepsilon_{ij}^\lambda$  -> Déformation du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" avec la déformée sinusoïdale.
- $\varepsilon_{ij}^\rho$  -> Déformation du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" avec la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $\varepsilon_{ij}^{D\lambda}$  -> Déformation du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" qui se situe du côté droit de la région centrale pour la déformée sinusoïdale.

- $\varepsilon_{ij}^{D\rho}$  -> Déformation du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" qui se situe du côté droit de la région centrale pour la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $\varepsilon_{ij}^{G\lambda}$  -> Déformation du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" qui se situe du côté gauche de la région centrale pour la déformée sinusoïdale.
- $\varepsilon_{ij}^{M\rho}$  -> Déformation du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" qui se situe du côté gauche de la région centrale pour la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $\varepsilon_{ij}^{M\lambda}$  -> Déformation du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" qui se situe au centre du demi-pas considéré lorsqu'il n'y a pas de macro-glissement pour la déformée sinusoïdale.
- $\gamma_1$  -> Paramètre adimensionnel qui caractérise la complaisance.
- $\gamma_D$  -> Constante utilisée pour rendre les équations de déplacement adimensionnelles.
- $\gamma_E$  -> Constante utilisée pour modifier les équations de déformation pour que leurs constantes à déterminer soient sous la même forme que celles des équations adimensionnelles de déplacement.

- $\gamma_F$  -> Constante utilisée pour rendre les équations de la deuxièmes dérivées de déplacement adimensionnelles, ces dernières servent à déterminer la force de friction.
- $\gamma_w$  -> Constante utilisée pour rendre les équations de dissipation d'énergie adimensionnelles.
- $\lambda$  -> Longueur d'onde de la déformée sinusoïdale.
- $\bar{\lambda}$  -> Longueur d'onde adimensionnelle de la déformée sinusoïdale.
- $\eta_{ij}^\lambda$  -> 2<sup>ième</sup> constante de la solution complémentaire du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" pour la déformée sinusoïdale.
- $\eta_{ij}^\rho$  -> 2<sup>ième</sup> constante de la solution complémentaire du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" pour la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $\eta_{ij}^{D\lambda}$  -> 2<sup>ième</sup> constante de la solution complémentaire du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" qui se situe du côté droit de la région centrale pour la déformée sinusoïdale.
- $\eta_{ij}^{D\rho}$  -> 2<sup>ième</sup> constante de la solution complémentaire du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" qui se situe du côté droit de la région centrale pour la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $\eta_{ij}^{G\lambda}$  -> 2<sup>ième</sup> constante de la solution complémentaire du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" qui se situe du côté gauche de la région centrale pour la déformée sinusoïdale.

- $\eta_{ij}^{G\rho}$  -> 2<sup>ième</sup> constante de la solution complémentaire du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" qui se situe du côté gauche de la région centrale pour la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $\eta_{ij}^{M\lambda}$  -> 2<sup>ième</sup> constante de la solution complémentaire du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" qui se situe au centre du demi-pas considéré lorsqu'il n'y a pas de macro-glissement pour la déformée sinusoïdale.
- $\eta_{ij}^{M\rho}$  -> 2<sup>ième</sup> constante de la solution complémentaire du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" qui se situe au centre du demi-pas considéré lorsqu'il n'y a pas de macro-glissement pour la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $\Phi$  -> Facteur de forme qui tient compte de la géométrie de la surface de contact.
- $\rho$  -> Rayon de courbure.
- $\rho_c$  -> Rayon de courbure où le macro-glissement débute pour les modèles sans complaisance.
- $\bar{\rho}$  -> Rayon de courbure adimensionnel.
- $\theta_i$  -> Position angulaire du fil "i" à l'origine des axes.
- $\theta'_i$  -> Position angulaire du fil "i" le long de l'axe X.
- $\mu_c$  -> Coefficient de friction de Coulomb.
- $\mu$  -> Rapport entre la force tangentielle  $f_f$  et la force normale  $q$ .

- $\mu_i^\lambda$  -> Rapport entre la force tangentielle  $f_f$  et la force normale  $q$  pour le fil "i" avec la déformée sinusoïdale.
- $\mu_i^\rho$  -> Rapport entre la force tangentielle  $f_f$  et la force normale pour le fil "i" avec la déformée ayant un rayon de courbure constant.
- $\nu$  -> Coefficient de Poisson de l'âme.
- $\zeta_{cj}$  -> Complaisance linéarisée de la portion linéaire "j" de la courbe  $f_f \delta$  (voir figure 3.7).

## INTRODUCTION

Les câbles hélicoïdaux couvrent un vaste champ d'applications. Ces câbles peuvent soutenir des charges axiales considérables tout en ayant une faible rigidité en flexion et en torsion. Ils sont donc utilisés abondamment comme conducteurs aériens pour le transport d'électricité et pour les structures haubanées: ponts suspendus, tours de télécommunications, grues, etc.

Un câble qui est soumis aux forces aérodynamiques (vortex de Von Karman) d'un vent léger et constant peut exhiber des amplitudes de vibration potentiellement dangereuses. Pour une vitesse de vent constante, le régime permanent de vibration est atteint lorsque l'énergie fournie par le vent au câble est égale à l'énergie dissipée par friction à l'intérieur du câble. L'énergie dissipée à l'intérieur du câble détermine donc l'amplitude de vibration en régime permanent. Cette dissipation d'énergie est due au glissement entre les différentes couches de fils et de l'âme.

L'étude présentée dans ce mémoire détermine la dissipation d'énergie dans un câble hélicoïdal dont la géométrie simplifiée est du type  $1 \times n$  pour deux types de déformée à l'aide de trois modèles mathématiques.

La géométrie  $1 \times n$  est constituée d'une âme entourée d'une seule couche de  $n$  fils. Cela implique que la dimension des fils est beaucoup plus petite que celle de l'âme, donc les fils peuvent être considérés comme étant en état uniforme de contraintes axiales.

Les types de déformée considérés sont:

- i) déformée ayant un rayon de courbure constant,
- ii) déformée sinusoïdale.

Ce mémoire est basé sur l'approche innovatrice développée par le Dr. Hardy [4]. Le premier modèle mathématique présenté et utilisé dans ce mémoire est donc celui de Hardy.

Le deuxième modèle mathématique, qui se nomme modèle avec continuité de déformation, est essentiellement le même que Hardy, à l'exception des conditions limites imposées qui diffèrent.

Le troisième modèle se nomme modèle avec complaisance. L'objectif principal de ce mémoire est le développement de ce modèle. Celui-ci tient compte du comportement mécanique dans la région près de l'interface de contact âme-fil, comportement qui n'est pas considéré dans les autres modèles cités précédemment.

Les équations des différents modèles pour les deux types de déformée ont toutes été rendues sous forme adimensionnelle. Ce type d'équations facilite considérablement l'analyse et la présentation des résultats.

Le présent mémoire peut donc se diviser en quatre grandes sections:

- ⇒ présentation des trois modèles pour les deux types de déformée
- ⇒ développement des équations pour la dissipation d'énergie
- ⇒ développement adimensionnel des différentes équations
- ⇒ présentation des résultats.

Les équations du comportement mécanique (complaisance) près d'une surface de contact elliptique entre deux solides, poussés l'un contre l'autre, ont été développées séparément par Mindlin [10] et Cattaneo [2].

Mindlin [11] a également développé l'équation de dissipation d'énergie due au micro-glissement sur une surface de contact circulaire entre deux sphères poussées l'une contre l'autre.

Deresiewicz [3] a trouvé l'expression d'un facteur de forme, qui permet d'utiliser les équations pour une surface de contact circulaire et de les appliquer à une surface de contact elliptique.

Hobbs et Raoof [5] ont trouvé l'expression du facteur de forme de Deresiewicz pour le cas d'un contact linéique. Le contact linéique est le cas limite où l'ellipse de contact a un axe principal infiniment long par rapport à la dimension de l'axe transversal. Cette expression du facteur de forme pour le contact linéique a été obtenue en utilisant le rapport entre la complaisance tangentielle initiale et la complaisance normale pour une ligne de contact, rapport qui a été déterminé par Mindlin [10].

Les différents modèles mathématiques présentés dans ce mémoire permettent de déterminer:

- ⇒ le déplacement des fils par rapport à la surface de l'âme
- ⇒ les efforts présents dans les fils
- ⇒ la force de friction agissant sur les fils
- ⇒ l'énergie dissipée par le glissement des fils sur la surface de l'âme.

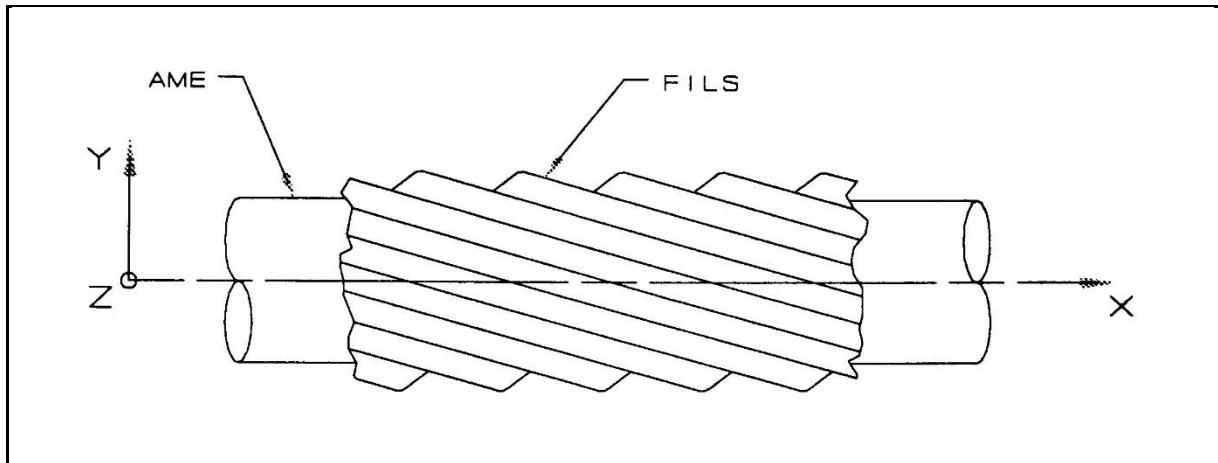
## CHAPITRE 1

ÉQUATIONS GÉNÉRALES

Ce chapitre présente, à la section 1.1, les équations décrivant la géométrie d'un toron  $1 \times n$ . Les équations de la déformation et du déplacement de la surface de l'âme pour les deux types de déformées considérées sont présentées à la section 1.2.

1.1 Géométrie d'un toron  $1 \times n$ 

Le type de toron étudié a une configuration  **$1 \times n$** . Le toron est donc constitué d'une âme, de section circulaire (rayon  $R_a$ ),



**Figure 1.1** Schéma d'un toron  $1 \times n$

entourée d'une couche de "n" fils (figure 1.1). Seul le contact fil-âme est considéré, le contact fil-fil étant négligé. Les fils ont un rayon " $R_F$ ", l'angle d'hélice est " $\alpha$ " et la position angulaire du fil "i" à l'origine du système d'axes est " $\theta_i$ " (figure 1.2).

En se référant à la figure 1.2, le pas, si le fil est considéré de petite dimension transversale par rapport à l'âme, s'exprime par:

$$p = \frac{2\pi R_a}{\tan \alpha} \quad (1.1)$$

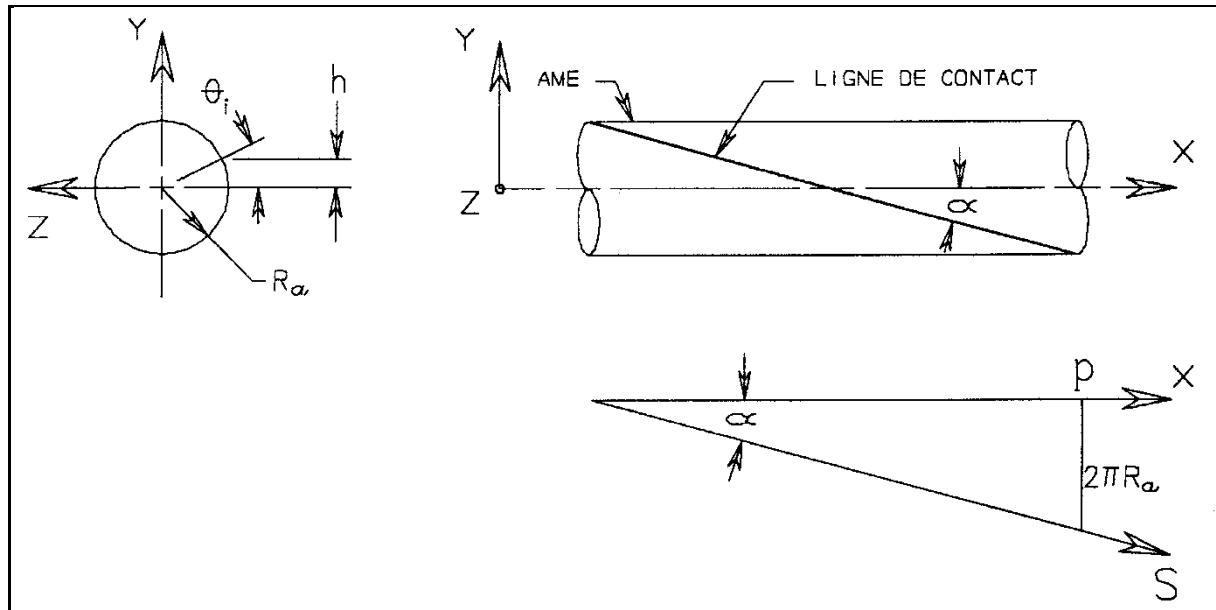
et l'élévation "h" au-dessus du plan neutre, est évaluée selon:

$$h_i(X) = R_a \sin\left(\frac{2\pi X}{p} + \theta_i\right) \quad (1.2)$$

où  $R_a$  Ψ rayon de l'âme

$p$  Ψ pas d'un fil

$\theta_i$  Ψ position angulaire du fil "i" à l'origine des axes.



**Figure 1.2** Géométrie d'une ligne de contact

De plus, la force normale distribuée "q" que le fil applique sur l'âme due à la tension initiale " $T_i$ " est déterminée selon Hruska [7] par:

$$q = \frac{T_i \sin^2 \alpha}{R_a} \quad (1.3)$$

### 1.2 Équations à la surface de l'âme

Lorsqu'un toron est fléchi, la déformation axiale subie par un élément infinitésimal à la surface de l'âme, s'exprime par:

$$\varepsilon_x^a = -h \frac{d^2 Y}{dX^2} \quad (1.4)$$

où    **h**            =>élévation de l'élément au-dessus du plan neutre  
**d<sup>2</sup>Y/dx<sup>2</sup>**    =>deuxième dérivée de l'équation de la déformée du toron en fonction de X  
note:                l'exposant "a" indique qu'il s'agit de la surface de l'âme.

En prenant en considération le coefficient de Poisson, la déformation de la surface de l'âme le long d'une des lignes de contact avec un fil est calculée de la façon suivante:

$$\varepsilon_s^a = f \varepsilon_x^a \quad (1.5)$$

où

$$f = (1 - \nu \tan^2 \alpha) \cos^2 \alpha \quad (1.6)$$

où    **v**    => coefficient de Poisson de l'âme.

Il faut noter que le déplacement et la déformation dans la présente étude sont toujours le long de l'axe S mais exprimés en fonction de X. Donc, afin de simplifier l'écriture de l'équation 1.5 et de celles qui en découlent, l'indice S est supprimé et remplacé par l'indice "i" qui représente le fil "i" dont la

position angulaire à l'origine des axes est donnée par  $\theta_i$ .

Le déplacement de la surface de l'âme, pour la position angulaire  $\theta_i$ , est donné par:

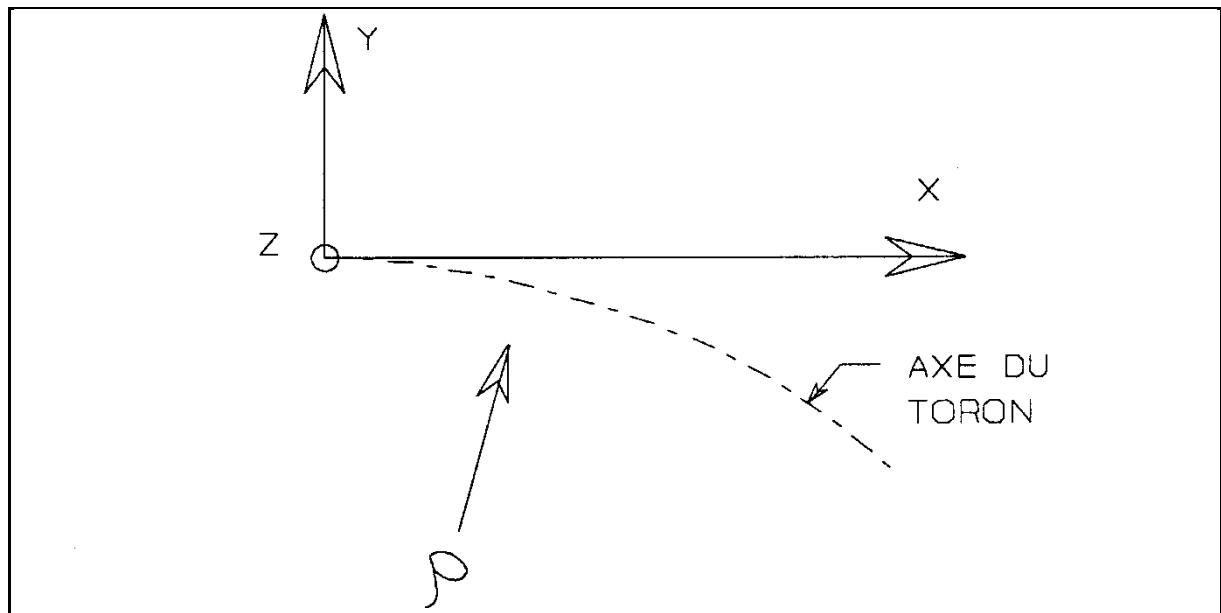
$$D_i(X) = \sec \alpha \int_0^X \varepsilon_i^a(X) dX \quad (1.7)$$

### 1.2.1 Déformée ayant un rayon de courbure constant

L'équation qui représente ce type de déformée est (figure 1.3),

$$Y = \frac{-X^2}{2\rho} \quad (1.8)$$

où  $\rho$  => rayon de courbure.



**Figure 1.3** Déformée ayant un rayon de courbure constant

En effectuant les dérivées appropriées de l'équation 1.8, en remplaçant dans l'équation 1.4 puis l'équation 1.5 et en utilisant l'équation 1.2, alors l'équation de déformation de la surface de l'âme pour la position angulaire  $\theta_i$  le long de S est:

$$\varepsilon_i^{ap}(X) = \frac{R_a f}{\rho} \sin\left(\frac{2\pi X}{p} + \theta_i\right) \quad (1.9)$$

L'exposant "ap" dans l'équation 1.9 indique qu'il s'agit de la surface de l'âme avec la déformée ayant un rayon de courbure constant.

Le déplacement de la surface de l'âme pour cette déformée est obtenu en remplaçant l'équation 1.9 dans l'équation 1.7:

$$D_i^\rho(X) = \frac{R_a f p}{2\pi \rho \cos \alpha} \left[ \cos \theta_i \cdot \cos\left(\frac{2\pi X}{p} + \theta_i\right) \right] \quad (1.10)$$

### 1.2.2 Déformée sinusoïdale

L'équation qui représente ce type de déformée est (figure 1.4),

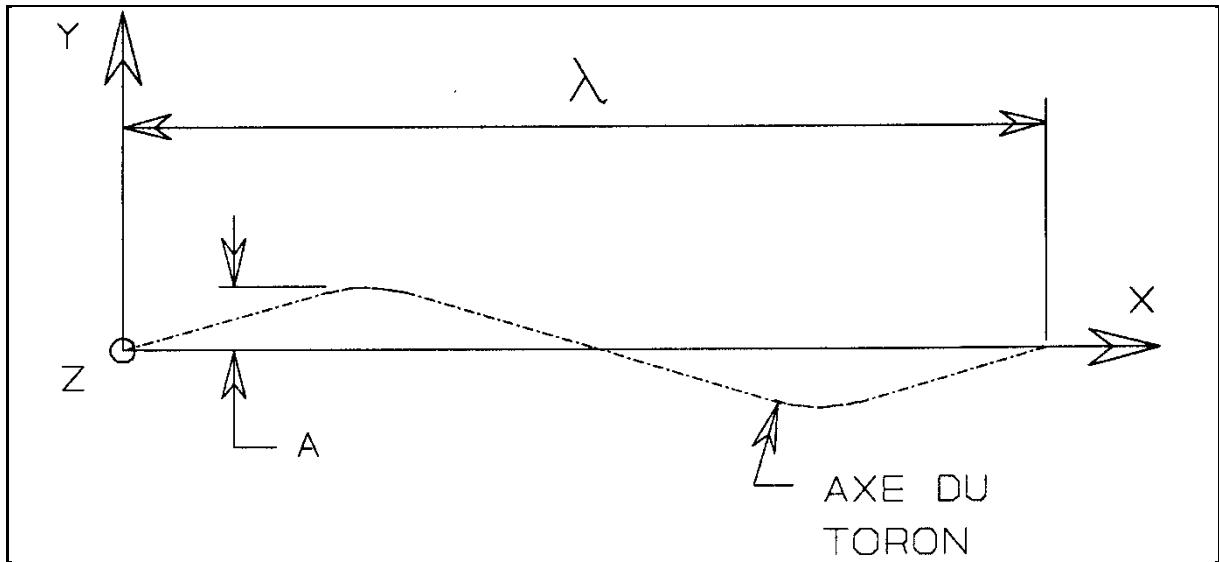
$$Y = A \sin\left(\frac{2\pi X}{\lambda}\right) \quad (1.11)$$

où    **A**   => amplitude  
 **$\lambda$**    => longueur d'onde.

En effectuant les dérivées appropriées de l'équation 1.11, en remplaçant dans l'équation 1.4 puis l'équation 1.5 et en utilisant l'équation 1.2, alors l'équation de déformation de la surface de l'âme pour la position angulaire  $\theta_i$  le long de S est:

$$\varepsilon_i^{a\lambda}(X) = A R_a f \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi X}{p} + \theta_i\right) \sin\left(\frac{2\pi X}{\lambda}\right) \quad (1.12)$$

L'exposant "aλ" dans l'équation 1.12 indique qu'il s'agit de la surface de l'âme avec la déformée sinusoïdale.



**Figure 1.4** Déformée sinusoïdale

Le déplacement de la surface de l'âme de cette déformée est obtenu en remplaçant l'équation 1.12 dans l'équation 1.7:

$$D_i^\lambda(X) = \frac{A R_a f}{4\pi \cos \alpha} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \left\{ \frac{\lambda p}{\lambda - p} \left[ \sin \left( 2\pi X \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda} \right) + \theta_i \right) - \sin \theta_i \right] - \frac{\lambda p}{\lambda + p} \left[ \sin \left( 2\pi X \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{\lambda} \right) + \theta_i \right) - \sin \theta_i \right] \right\} \quad (1.13)$$

Ces équations de déplacement et déformation de la surface de l'âme sont utilisées dans les différents modèles mathématiques développés dans les chapitres 2 et 3.

## CHAPITRE 2

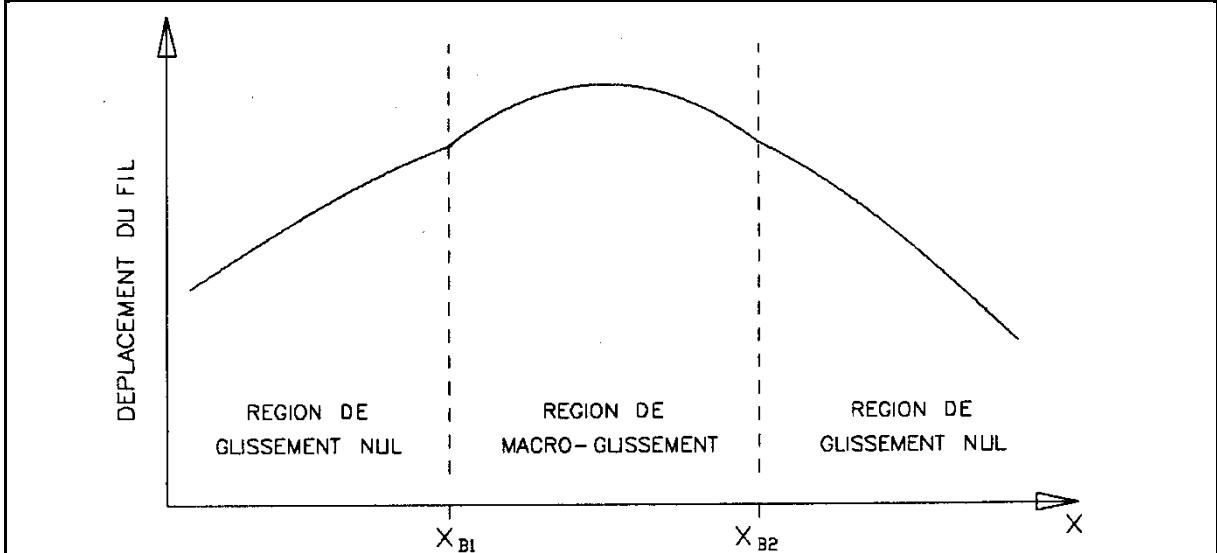
MODÈLES SANS COMPLAISANCE

Ce chapitre présente deux modèles mathématiques qui ne tiennent pas compte de la complaisance existant à l'interface de contact âme-fil. Le terme "complaisance" est utilisé dans ce mémoire pour se référer au comportement mécanique près de l'interface de contact entre deux solides élastiques.

Le premier modèle présenté est celui de Hardy [4], le deuxième est celui qui impose la continuité de déformation du fil.

Ces deux modèles sont essentiellement identiques. La différence provient des conditions limites imposées aux bornes  $X_{B1}$  et  $X_{B2}$  de la région de macro-glissement. Le modèle de Hardy impose la continuité de déplacement aux bornes de la région de macro-glissement, tandis que le modèle avec continuité de déformation impose la continuité de déplacement et de déformation aux bornes de la région de macro-glissement.

La courbe de déplacement du fil en fonction de la position axiale est séparée en plusieurs régions (figure 2.1). Il y a une région de macro-glissement qui est bornée par  $X_{B1}$  et  $X_{B2}$  et des régions de glissement nul. Le macro-glissement du fil est défini comme étant le glissement relatif du fil par rapport à la surface de l'âme. Le glissement nul du fil est défini comme étant l'adhérence complète de ce dernier à la surface de l'âme.



**Figure 2.1** Différentes régions d'une courbe de déplacement du fil en fonction de la position axiale  $X$ .

## 2.1 Hypothèses

Les hypothèses pour les modèles sans complaisance sont:

- i)** La déformée du toron est dans le plan XY (figures 2.3 et 2.4).
- ii)** Lorsque la déformée est imposée, la tension initiale dans le toron doit être suffisamment grande pour assurer que tous les fils restent en tension partout le long de celui-ci. Ceci assure qu'il n'y aura aucun décollement des fils de la surface de l'âme.
- iii)** L'âme transmet les déplacements aux fils à l'aide des forces de friction qui agissent le long des lignes de contact.
- iv)** La force de friction entre deux fils adjacents est considérée comme négligeable.

**v)** Tout glissement des fils sur l'âme n'est permis que le long des lignes de contact et non transversalement.

**vi)** Il s'agit de modèles uniaxiaux à état uniforme de contraintes (tension uniforme), donc les efforts en flexion des fils sont négligés.

**vii)** Lorsqu'un toron est en traction, un moment de torsion est généré si toute rotation longitudinale du toron est empêchée. Lorsque le toron est fléchi, le moment de torsion est nul.

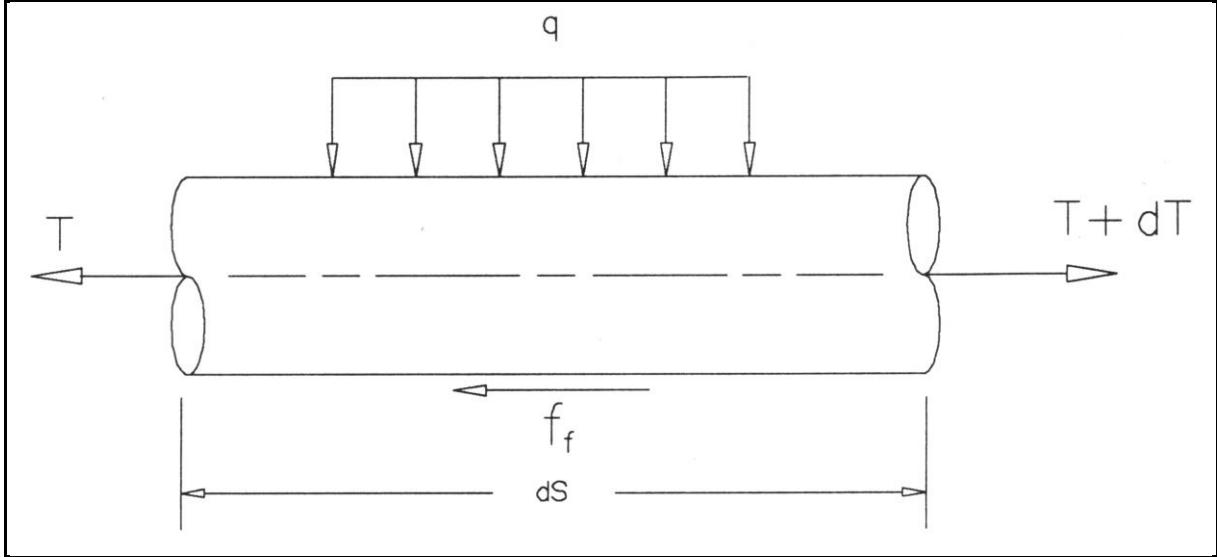
Les fils situés au-dessus du plan neutre du toron créent un moment de torsion qui est contré par les fils situés sous le plan neutre de telle sorte qu'aucune rotation longitudinale du toron ne se produit.

**viii)** La complaisance à l'interface de contact âme-fil est négligée.

## 2.2 Modèle de Hardy

### 2.2.1 Analyse de glissement nul des fils sur l'âme

La figure 2.2 schématisise un élément de fil de longueur "dS" qui est poussé sur l'âme par une force normale distribuée "q". Cette force normale permet à l'âme d'appliquer une force tangentielle "f<sub>f</sub>" sur le fil en utilisant la friction présente le long de la ligne de contact. La force f<sub>f</sub> peut être définie comme étant égale à " $\mu(S)q$ " où  $\mu$  est le rapport entre la force tangentielle et la force normale. Ce rapport représente donc la valeur du coefficient de friction de Coulomb nécessaire pour qu'il n'y ait pas de glissement.



**Figure 2.2** Diagramme des forces agissant sur un élément de fil.

Lorsqu'il y a une déformation imposée au toron, la variation de tension dans un fil peut être exprimée selon "T" de la façon suivante:

$$\frac{dT}{dS} = \mu(S)q \quad (2.1)$$

La tension "T(S)" induit une déformation axiale du fil qui est calculée en utilisant:

$$\varepsilon_S = \frac{T(S)}{E a} \quad (2.2)$$

où **E** => module de Young du fil  
**a** => section transversale du fil.

Tant que le fil ne glisse pas sur l'âme, la déformation du fil doit être égale à la déformation de la surface de l'âme le long des lignes de contact ( $\varepsilon_S = \varepsilon$ ). Ce qui implique que l'on peut obtenir en intégrant l'équation 2.1 et en utilisant les équations 1.4, 1.5, et 2.2, la relation suivante:

$$- f h_i(X) \frac{d^2 Y}{dX^2} = \frac{q \sec \alpha}{E a} \int_0^x \mu(X) dX \quad (2.3)$$

En dérivant de chaque côté de l'équation et en arrangeant les termes, cette dernière équation devient:

$$\mu(X) = \frac{-f E a \cos \alpha}{q} \left[ \frac{dh_i}{dX} \frac{d^2 Y}{dX^2} + h_i \frac{d^3 Y}{dX^3} \right] \quad (2.4)$$

où  $\mu$  => rapport entre la force tangentielle et la force normale.

Ceci est la formule de base qui sert à déterminer l'équation du rapport entre la force tangentielle et la force normale en fonction de la déformée imposée.

Cette expression gouverne la distribution du rapport " $\mu(X)$ " entre la force tangentielle et la force normale, le long des lignes de contact, qui est nécessaire pour que l'âme transmette les déplacements aux fils.

#### 2.2.2 Déformée ayant un rayon de courbure constant

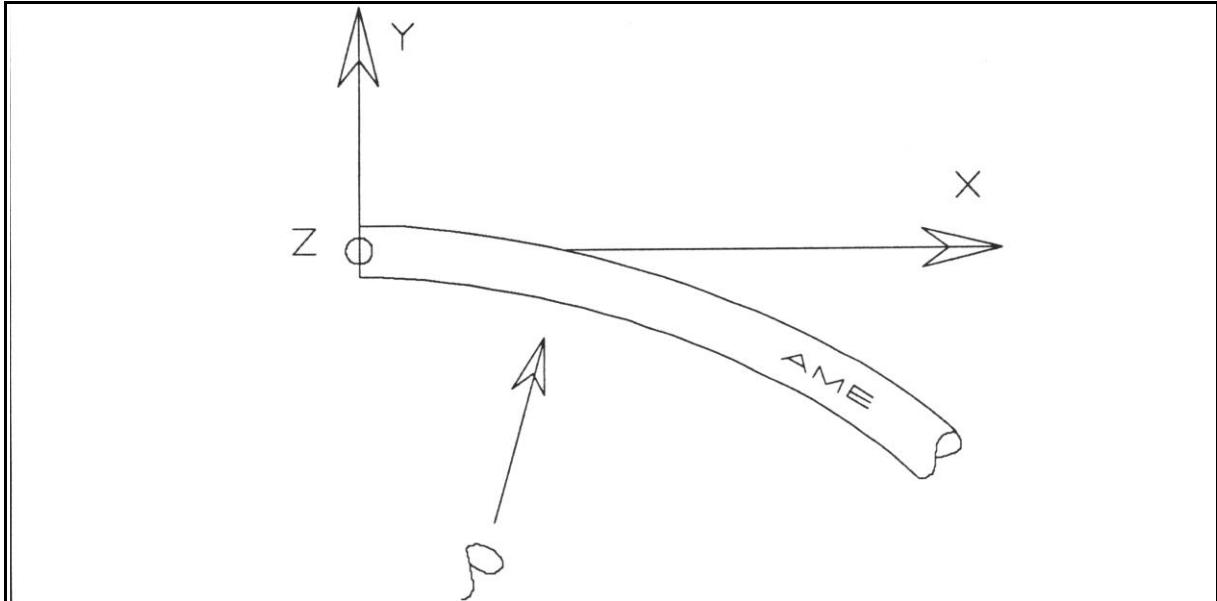
La figure 2.3 montre l'âme du toron soumise à une déformée ayant un rayon de courbure constant.

Le présent modèle ne tient pas compte de la complaisance, donc le déplacement du fil dans les régions de glissement nul est égal au déplacement de la surface de l'âme qui est donné par l'équation 1.10, d'où:

$$u_i^\rho(X) = \frac{R_a f p}{2\pi \rho \cos \alpha} \left[ \cos \theta_i - \cos \left( \frac{2\pi X}{p} + \theta_i \right) \right] \quad (2.5)$$

La déformation du fil dans les régions de glissement nul est égale à la déformation de la surface de l'âme qui est donnée par l'équation 1.9, d'où:

$$\varepsilon_i^\rho(X) = \frac{R_a f}{\rho} \sin\left(\frac{2\pi X}{p} + \theta_i\right) \quad (2.6)$$



**Figure 2.3** Ame soumise à une déformée ayant un rayon de courbure constant

L'équation 1.8 donne la courbe de cette déformée. En effectuant les dérivées appropriées ainsi que celle de l'équation 1.2 et en remplaçant dans l'équation 2.4, l'équation du rapport entre la force tangentielle et la force normale devient:

$$\mu_i^\rho(X) = \frac{2\pi R_a f E a \cos \alpha}{q p \rho} \left[ \cos\left(\frac{2\pi X}{p} + \theta_i\right) \right] \quad (2.7)$$

L'exposant " $\rho$ " des équations 2.5, 2.6 et 2.7 indique qu'il s'agit de la déformée ayant un rayon de courbure constant et l'indice "i" qu'il s'agit du fil "i".

### 2.2.2.1 Début du macro-glissement

Le macro-glissement du fil débute lorsque le rayon de courbure de la déformée devient suffisamment petit pour que le rapport entre la force tangentielle et la force normale atteigne la valeur du coefficient de friction de Coulomb " $\mu_c$ ".

Lorsque le terme entre crochets de l'équation 2.7 égale 1 et que l'on pose " $\mu(X)$ " égale " $\mu_c$ ", on obtient l'équation suivante:

$$\mu_i^\rho(X) = \mu_c = \frac{2\pi R_a f E a \cos\alpha}{q p \rho_c} \quad (2.8)$$

En arrangeant les termes, on déduit un rayon de courbure critique qui entraîne l'apparition de macro-glissement:

$$\rho_c = \frac{2\pi R_a f E a \cos\alpha}{q p \mu_c} \quad (2.9)$$

où  $\rho_c \Rightarrow$  rayon de courbure critique.

En introduisant les équations 1.1 et 1.3 dans l'équation 2.9 on obtient:

$$\rho_c = \frac{R_a f E a}{T_i \sin \alpha \mu_c} \quad (2.10)$$

Cette relation démontre que le rayon de courbure critique (modèle sans complaisance) est directement proportionnel au rayon de l'âme et à la rigidité "Ea" des fils et est inversement proportionnel à la tension initiale des fils et au coefficient de friction de Coulomb entre les fils et l'âme.

### 2.2.2.2 Région de macro-glissement

Pour les régions où il y a du macro-glissement entre le fil et la surface de l'âme, la déformation du fil est gouvernée par la valeur du coefficient de friction de Coulomb.

Le diagramme des forces agissant sur un élément de fil dans cette région est donné à la figure 2.2, où la force tangentielle " $f_f$ " est égale à sa valeur maximale qui est " $\mu_c q$ ",  $\mu_c$  étant le coefficient de friction de Coulomb. L'équilibre des forces dans une région de macro-glissement est:

$$\frac{dT}{dS} = E a \frac{d\varepsilon_i^{H\rho}}{dS} = \pm \mu_c q \quad (2.11)$$

où le signe devant " $\mu_c$ " est fonction du côté du plan XY qui est considéré. La convention de signe qui est utilisée en fonction du côté du plan XY est présentée à la section 3.3.1.

La déformation du fil s'obtient en intégrant 2.11, où les termes " $\mu_c$ " et "q" sont constants, ce qui donne:

$$\varepsilon_i^{H\rho} = \frac{\pm \mu_c q \sec \alpha}{E a} (X - X_{BI}) + \xi_i^{H\rho} \quad (2.12)$$

pour  $X_{BI} \leq X \leq X_{B2}$

où  $\xi_i^{H\rho}$  => constante d'intégration du fil "i" qui sera déterminée à l'aide des conditions limites

Le déplacement du fil dans la région de macro-glissement est obtenu en intégrant 2.12, ce qui donne:

$$u_i^{H\rho}(X) = \frac{\pm \mu_c q \sec^2 \alpha}{2 E a} (X - X_{BI})^2 + \xi_i^{H\rho} \sec \alpha (X - X_{BI}) + \psi_i^{H\rho} \quad (2.13)$$

pour  $X_{BI} \leq X \leq X_{B2}$

où  $\psi_i^{H\rho}$  => constante d'intégration supplémentaire du fil "i" qui sera déterminée à l'aide des conditions limites

L'équation 2.13 possède deux constantes à déterminer,  $\xi_i^{H\rho}$  et  $\psi_i^{H\rho}$ . Ce modèle pose que les bornes  $X_{B1}$  et  $X_{B2}$  sont déterminées à l'aide de l'équation 2.7 lorsque  $\mu_i^\rho(X_{B1}) = \mu_c$  et  $\mu_i^\rho(X_{B2}) = \mu_c$ . Cela implique que les bornes obtenues à l'aide de l'équation 2.7, ne sont pas affectées par la présence de la région de macro-glissement.

Afin de déterminer les deux constantes, il faut poser deux conditions limites. Ces conditions limites proviennent de la compatibilité géométrique de déplacement, c'est-à-dire que le déplacement du fil à chacune des bornes de la région de macro-glissement doit être continu, ce qui donne:

$$u_i^\rho(X_{B1}) = u_i^{H\rho}(X_{B1}) \quad (2.14)$$

et

$$u_i^\rho(X_{B2}) = u_i^{H\rho}(X_{B2}) \quad (2.15)$$

En substituant l'équation 2.13 dans l'équation 2.14, la constante " $\psi_i^{H\rho}$ " est donnée par:

$$\psi_i^{H\rho} = u_i^\rho(X_{B1}) \quad (2.16)$$

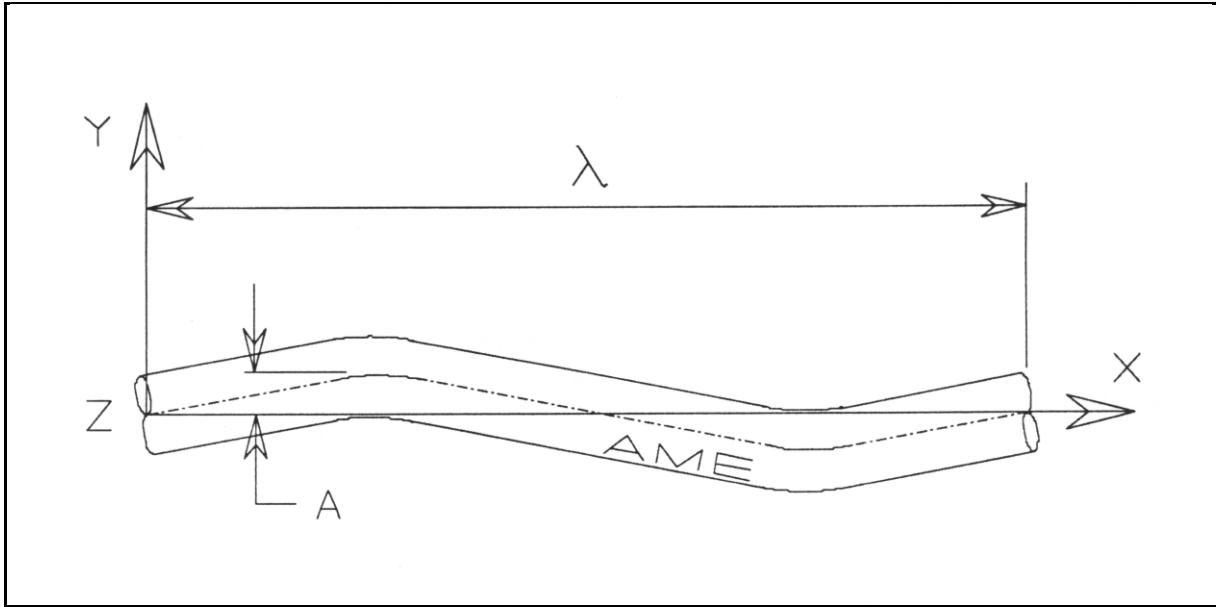
En substituant les équations 2.13 et 2.16 dans l'équation 2.15, la constante " $\xi_i^{H\rho}$ " est donnée par:

$$\xi_i^{H\rho} = \frac{u_i^\rho(X_{B2}) - u_i^\rho(X_{B1})}{\sec \alpha (X_{B2} - X_{B1})} \mp \frac{q \mu_c \sec \alpha}{2 E a} (X_{B2} - X_{B1}) \quad (2.17)$$

Il faut noter que les conditions limites 2.14 et 2.15 assurent la compatibilité géométrique de déplacement entre les régions de glissement nul et celle du macro-glissement aux bornes de la région de macro-glissement. Par contre, la déformation du fil est discontinue à ces bornes.

### 2.2.3 Déformée sinusoïdale

La figure 2.4 montre l'âme du toron soumise à une déformée sinusoïdale.



**Figure 2.4** Ame soumise à une déformée sinusoïdale

Le méthodologie du développement des équations pour cette déformée est identique à celle de la déformée ayant un rayon de courbure constant (section 2.2.2). Évidemment, ici ce sont les équations de la surface de l'âme pour la déformée sinusoïdale qui sont utilisées.

Le déplacement du fil dans les régions de glissement nul est égal au déplacement de la surface de l'âme qui est donné par l'équation 1.13, d'où:

$$u_i^\lambda(X) = \frac{A R_a f}{4\pi \cos \alpha} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \left\{ \frac{\lambda p}{\lambda - p} \left[ \sin \left( 2\pi X \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda} \right) + \theta_i \right) - \sin \theta_i \right] - \frac{\lambda p}{\lambda + p} \left[ \sin \left( 2\pi X \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{\lambda} \right) + \theta_i \right) - \sin \theta_i \right] \right\} \quad (2.18)$$

La déformation du fil dans les régions de glissement nul est égale à la déformation de la surface de l'âme qui est donnée par l'équation 1.12, d'où:

$$\varepsilon_i^\lambda(X) = A R_a f \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \sin\left( \frac{2\pi X}{p} + \theta_i \right) \sin\left( \frac{2\pi X}{\lambda} \right) \quad (2.19)$$

L'équation 1.11 donne la courbe de cette déformée. En effectuant les dérivées appropriées ainsi que celle de l'équation 1.2 et en remplaçant dans l'équation 2.4, l'équation du rapport entre la force tangentielle et la force normale devient:

$$\begin{aligned} \mu_i^\lambda(X) &= \frac{R_a A f E a \cos \alpha}{q} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^3 \left\{ \frac{\lambda}{p} \cos\left( \frac{2\pi X}{p} + \theta_i \right) \sin\left( \frac{2\pi X}{\lambda} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sin\left( \frac{2\pi X}{p} + \theta_i \right) \cos\left( \frac{2\pi X}{\lambda} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

L'exposant " $\lambda$ " des équations 2.18, 2.19 et 2.20 indique qu'il s'agit de la déformée sinusoïdale et l'indice "i" qu'il s'agit du fil "i".

#### 2.2.3.1 Début du macro-glissement

Le glissement des fils débute lorsque l'amplitude de la déformée devient suffisamment grande pour que le rapport entre la force tangentielle et la force normale atteigne la valeur du coefficient de friction de Coulomb  $\mu_c$ .

Lorsque le premier terme entre les accolades de l'équation 2.20 égale  $\lambda/p$ , tandis que le deuxième terme égale zéro et que l'on pose " $\mu_i^\lambda(X)$ " égale " $\mu_c$ ", on obtient l'équation suivante:

$$\mu_i^\lambda(X) = \mu_c = \frac{R_a A f E a \cos \alpha}{q} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^3 \left( \frac{\lambda}{p} \right) \quad (2.21)$$

En arrangeant les termes, on déduit une amplitude critique qui entraîne l'apparition de macro-glissement:

$$A_c = \frac{\mu_c \sec \alpha q}{R_a f E a} \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^3 \frac{p}{\lambda} \quad (2.22)$$

où **A<sub>c</sub>** => amplitude critique.

En introduisant les équations 1.1 et 1.3 dans l'équation 2.22, on obtient:

$$A_c = \frac{T_i \sin \alpha \mu_c}{R_a f E a} \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 \quad (2.23)$$

Cette relation démontre que l'amplitude critique (modèle sans complaisance) est directement proportionnelle à la tension initiale des fils, au coefficient de friction de Coulomb entre le fil et la surface de l'âme, à la longueur d'onde " $\lambda$ " au carré et est inversement proportionnelle au rayon de l'âme et à la rigidité "Ea" des fils.

### 2.2.3.2 Région de macro-glissement

Quelle que soit la déformée étudiée, la déformation du fil dans la région de macro-glissement est gouvernée par la valeur du coefficient de friction de Coulomb " $\mu_c$ ".

Les équations 2.11 à 2.13 de la région de macro-glissement présentées à la section 2.2.2 sont donc valables pour la déformée sinusoïdale, à l'exception de l'exposant " $H\rho$ " qui est remplacé par " $H\lambda$ " pour indiquer qu'il s'agit du modèle de Hardy

avec la déformée sinusoïdale.

L'équation du déplacement du fil de la région de macro-glisser pour cette déformée s'écrit donc:

$$u_i^{H\lambda}(X) = \frac{\pm \mu_c q \sec^2 \alpha}{2 E a} (X - X_{B1})^2 + \xi_i^{H\lambda} \sec \alpha (X - X_{B1}) + \psi_i^{H\lambda} \quad (2.24)$$

pour  $X_{B1} \leq X \leq X_{B2}$

L'équation 2.24 possède deux constantes à déterminer " $\xi_i^{H\lambda}$ " et " $\psi_i^{H\lambda}$ ". Ce modèle pose que les bornes  $X_{B1}$  et  $X_{B2}$  sont déterminées à l'aide de l'équation du rapport entre la force tangentielle et la force normale (équation 2.20), lorsque  $\mu_i^\lambda(X_{B1}) = \mu_c$  et  $\mu_i^\lambda(X_{B2}) = \mu_c$ . Cela implique que les bornes obtenues avec l'équation 2.20, ne sont pas affectées par la présence de la région de macro-glisser.

La compatibilité géométrique de déplacement à chacune des bornes de la région de macro-glisser est imposée afin de déterminer les deux constantes de l'équation 2.24, ce qui donne comme conditions limites:

$$u_i^\lambda(X_{B1}) = u_i^{H\lambda}(X_{B1}) \quad (2.25)$$

et

$$u_i^\lambda(X_{B2}) = u_i^{H\lambda}(X_{B2}) \quad (2.26)$$

En substituant l'équation 2.24 dans l'équation 2.25, la constante " $\psi_i^{H\lambda}$ " est donnée par:

$$\psi_i^{H\lambda} = u_i^\lambda(X_{B1}) \quad (2.27)$$

En substituant les équations 2.24 et 2.27 dans l'équation 2.26, la constante " $\xi_i^{H\lambda}$ " est donnée par:

$$\xi_i^{H\lambda} = \frac{u_i^\lambda(X_{B2}) - u_i^\lambda(X_{Bl})}{\sec \alpha(X_{B2} - X_{Bl})} \mp \frac{q \mu_c \sec \alpha}{2 E a} (X_{B2} - X_{Bl}) \quad (2.28)$$

### 2.3 Modèle avec continuité de déformation

La différence entre ce modèle et celui de Hardy présenté à la section 2.2, est dans la façon dont les bornes et les constantes de la région de macro-glissement sont déterminées.

Dans le modèle avec continuité de déformation, il est posé que la présence d'une région de macro-glissement affecte les bornes de la région de macro-glissement données par les équations 2.7 et 2.20; cela se traduit en imposant qu'il ne peut pas exister de réactions concentrées aux bornes de la région de macro-glissement.

Ainsi, en posant la continuité des déformations aux bornes de la région de macro-glissement, la région de macro-glissement est plus étendue que celle déduite par le modèle de Hardy.

L'équation du déplacement du fil de la région de macro-glissement du modèle avec continuité de déformation possède donc quatre inconnues.

Les équations des régions de glissement nul du modèle de Hardy (section 2.2, éq. 2.5 à 2.7 et 2.18 à 2.20) demeurent valables pour ce modèle. Seules les bornes et les constantes de la région de macro-glissement sont différentes.

### 2.3.1 Déformée ayant un rayon de courbure constant (Région de macro-glissement)

La déformation du fil dans la région de macro-glissement est toujours gouvernée par la valeur du coefficient de friction de Coulomb " $\mu_c$ ".

Les équations 2.11 à 2.13 de la région de macro-glissement présentées à la section 2.2.2.2 sont donc valables pour ce modèle avec cette déformée. Cependant, l'exposant " $H\rho$ " doit être remplacé par " $C\rho$ " pour indiquer qu'il s'agit du modèle avec continuité de déformation pour la déformée ayant un rayon de courbure constant.

L'équation du déplacement du fil pour la région de macro-glissement de ce modèle avec cette déformée est:

$$u_i^{C\rho}(X) = \frac{\pm \mu_c q \sec^2 \alpha}{2 E a} (X - X_{B1})^2 + \xi_i^{C\rho} \sec \alpha (X - X_{B1}) + \psi_i^{C\rho} \quad (2.29)$$

pour  $X_{B1} \leq X \leq X_{B2}$

Quatre inconnues doivent être déterminées, soient  $\xi_i^{C\rho}$ ,  $\Psi_i^{C\rho}$  et les bornes de la région de macro-glissement,  $X_{B1}$ ,  $X_{B2}$ .

L'équation de la déformation du fil dans cette région est obtenue en dérivant l'équation 2.29:

$$\varepsilon_i^{C\rho} = \frac{\pm \mu_c q \sec \alpha}{E a} (X - X_{B1}) + \xi_i^{C\rho} \quad (2.30)$$

pour  $X_{B1} \leq X \leq X_{B2}$

Pour déterminer les quatre inconnues, il faut poser quatre conditions limites. Ces conditions limites sont obtenues en imposant la compatibilité géométrique de déplacement et la continuité de déformation du fil à chacune des bornes de la région

de macro-glissement, ce qui donne:

$$u_i^\rho(X_{Bl}) = u_i^{C\rho}(X_{Bl}) \quad (2.31)$$

$$\varepsilon_i^\rho(X_{Bl}) = \varepsilon_i^{C\rho}(X_{Bl}) \quad (2.32)$$

$$u_i^\rho(X_{B2}) = u_i^{C\rho}(X_{B2}) \quad (2.33)$$

$$\varepsilon_i^\rho(X_{B2}) = \varepsilon_i^{C\rho}(X_{B2}) \quad (2.34)$$

En remplaçant les équations correspondantes dans les conditions limites, le système d'équations non-linéaires suivant est obtenu:

De l'équation 2.31:

$$\frac{R_a f p}{2\pi \rho \cos \alpha} \left[ \cos \theta_i - \cos \left( \frac{2\pi X_{Bl}}{p} + \theta_i \right) \right] - \psi_i^{C\rho} = 0 \quad (2.35)$$

De l'équation 2.32:

$$\frac{R_a f}{\rho} \sin \left( \frac{2\pi X_{Bl}}{p} + \theta_i \right) - \xi_i^{C\rho} = 0 \quad (2.36)$$

De l'équation 2.33:

$$\begin{aligned} \frac{R_a f p}{2\pi \rho \cos \alpha} \left[ \cos \theta_i - \cos \left( \frac{2\pi X_{B2}}{p} + \theta_i \right) \right] - \frac{\pm \mu_c q \sec^2 \alpha}{2 E a} (X_{B2} - X_{Bl})^2 \\ - \xi_i^{C\rho} \sec \alpha (X_{B2} - X_{Bl}) - \psi_i^{C\rho} = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

De l'équation 2.34:

$$\frac{R_a f}{\rho} \sin \left( \frac{2\pi X_{B2}}{p} + \theta_i \right) - \frac{\pm \mu_c q \sec \alpha}{E a} (X_{B2} - X_{Bl}) - \xi_i^{C\rho} = 0 \quad (2.38)$$

Ce système d'équations est solutionné numériquement par la méthode de Newton dont l'algorithme est présenté à l'annexe C.

### 2.3.2 Déformée sinusoïdale (Région de macro-glissement)

Les équations 2.11 à 2.13 de la région de macro-glissement développées à la section 2.2.2.2 sont valables pour ce modèle avec la déformée sinusoïdale.

L'équation du déplacement du fil de cette région est donc obtenue en remplaçant l'exposant "H<sub>ρ</sub>" de l'équation 2.13 par "C<λ'" pour indiquer qu'il s'agit du modèle avec continuité de déformation pour la déformée sinusoïdale:

$$u_i^{C\lambda}(X) = \frac{\pm \mu_c q \sec^2 \alpha}{2 E a} (X - X_{B1})^2 + \xi_i^{C\lambda} \sec \alpha (X - X_{B1}) + \psi_i^{C\lambda} \quad (2.39)$$

pour  $X_{B1} \leq X \leq X_{B2}$

Quatre inconnues doivent être déterminées, soient  $\xi_i^{C\lambda}$ ,  $\Psi_i^{C\lambda}$  et les bornes de la région de macro-glissement  $X_{B1}$ ,  $X_{B2}$ . L'équation de la déformation du fil dans cette région est obtenue en dérivant 2.39:

$$\varepsilon_i^{C\lambda} = \frac{\pm \mu_c q \sec \alpha}{E a} (X - X_{B1}) + \xi_i^{C\lambda} \quad (2.40)$$

pour  $X_{B1} \leq X \leq X_{B2}$

Pour déterminer les quatre inconnues, il faut poser quatre conditions limites. Ces conditions limites sont obtenues en imposant la compatibilité géométrique de déplacement et la continuité de déformation du fil à chacune des bornes de la région de macro-glissement, ce qui donne:

$$u_i^{\lambda}(X_{Bl}) = u_i^{C\lambda}(X_{Bl}) \quad (2.41)$$

$$\varepsilon_i^{\lambda}(X_{Bl}) = \varepsilon_i^{C\lambda}(X_{Bl}) \quad (2.42)$$

$$u_i^{\lambda}(X_{B2}) = u_i^{C\lambda}(X_{B2}) \quad (2.43)$$

$$\varepsilon_i^{\lambda}(X_{B2}) = \varepsilon_i^{C\lambda}(X_{B2}) \quad (2.44)$$

En remplaçant les équations correspondantes dans les conditions limites, le système d'équations non-linéaires suivant est obtenu:

De l'équation 2.41:

$$\begin{aligned} \frac{A R_a f}{4\pi \cos \alpha} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 & \left\{ \frac{\lambda p}{\lambda - p} \left[ \sin \left( 2\pi X_{Bl} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda} \right) + \theta_i \right) - \sin \theta_i \right] \right. \\ & \left. - \frac{\lambda p}{\lambda + p} \left[ \sin \left( 2\pi X_{Bl} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{\lambda} \right) + \theta_i \right) - \sin \theta_i \right] \right\} - \psi_i^{C\lambda} = 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

De l'équation 2.42:

$$A R_a f \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \sin \left( \frac{2\pi X_{Bl}}{p} + \theta_i \right) \sin \left( \frac{2\pi X_{Bl}}{\lambda} \right) - \xi_i^{C\lambda} = 0 \quad (2.46)$$

De l'équation 2.43:

$$\begin{aligned} \frac{A R_a f}{4\pi \cos \alpha} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 & \left\{ \frac{\lambda p}{\lambda - p} \left[ \sin \left( 2\pi X_{B2} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda} \right) + \theta_i \right) - \sin \theta_i \right] \right. \\ & \left. - \frac{\lambda p}{\lambda + p} \left[ \sin \left( 2\pi X_{B2} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{\lambda} \right) + \theta_i \right) - \sin \theta_i \right] \right\} \\ & - \frac{\pm \mu_c q \sec^2 \alpha}{2 E a} (X_{B2} - X_{Bl})^2 - \xi_i^{C\lambda} \sec \alpha (X_{B2} - X_{Bl}) - \psi_i^{C\lambda} = 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

De l'équation 2.44:

$$\begin{aligned}
 & A R_a f \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \sin \left( \frac{2\pi X_{B2}}{p} + \theta_i \right) \sin \left( \frac{2\pi X_{B2}}{\lambda} \right) \\
 & - \frac{\pm \mu_c q \sec \alpha}{E a} (X_{B2} - X_{BI}) - \xi_i^{C_\lambda} = 0
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Ce système d'équations est solutionné numériquement à l'aide de la méthode de Newton dont l'algorithme est présenté à l'annexe C.

Les résultats obtenus avec ces deux modèles sans complaisance, pour les deux types de déformée considérés, sont présentés au chapitre 6.

## CHAPITRE 3

MODÈLE AVEC COMPLAISANCE3.1 Introduction

Lorsque deux solides élastiques de profils différents sont mis en contact sans chargement, ils se touchent en un "point" de contact ou le long d'une "ligne" de contact, selon l'orientation de la séparation des profils.

Si une force pousse ces solides l'un contre l'autre, le point de contact (ou la ligne de contact) se transforme en une surface de contact (soit une ellipse ou une aire rectangulaire). La surface de contact est de petites dimensions comparativement aux dimensions des solides en présence de telle sorte que le profil des corps loin de la surface de contact n'influence pas le comportement mécanique au niveau de la surface de contact.

Si un chargement tangentiel (à la surface de contact) monotonique croissant est appliqué aux deux solides, un glissement partiel (micro-glissement) à l'interface de contact se produit; la proportion de la surface de contact qu'occupe le micro-glissement s'accroît avec un accroissement de la force tangentielle jusqu'à ce que le micro-glissement soit présent sur toute la surface de contact. Il se produit alors un glissement macroscopique (macro-glissement).

### 3.1.1 Contact linéique

Cette section présente le développement des équations qui décrivent le comportement mécanique près de l'interface de contact entre deux cylindres parallèles.

Roark [14] donne la demi-largeur de la surface de contact entre deux cylindres parallèles, obtenue par la théorie de Hertz; celle-ci est:

$$b_l = \sqrt{\frac{8q(1-\nu^2)R_F R_a}{\pi E(R_F + R_a)}} \quad (3.1)$$

La déflection diamétrale, qui est la réduction de la distance entre les centres des cylindres est:

$$\delta_n = \frac{2q(1-\nu^2)}{E\pi} \left( \frac{2}{3} + \ln \frac{2R_F}{b_l} + \ln \frac{2R_a}{b_l} \right) \quad (3.2)$$

En substituant l'équation 3.1 dans l'équation 3.2, on obtient:

$$\delta_n = \frac{4q(1-\nu^2)}{E\pi} \left[ \frac{1}{3} + \ln \sqrt{\frac{\pi E(R_F + R_a)}{2q(1-\nu^2)}} \right] \quad (3.3)$$

La complaisance dans la direction diamétrale (complaisance normale  $\mathbf{C}_n$ ) est obtenue de l'équation 3.3, ce qui donne:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{(R_F + R_a)} \frac{d\delta_n}{d\left(\frac{q}{R_F + R_a}\right)} \\ &= \frac{4(1-\nu^2)}{E\pi} \left[ 0.059125 + \ln \sqrt{\frac{E(R_F + R_a)}{q(1-\nu^2)}} \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

La complaisance tangentielle pour le contact linéique s'obtient à l'aide de la complaisance tangentielle initiale du cas général où la surface de contact entre les deux corps élastiques à une forme elliptique.

La complaisance tangentielle pour une surface de contact elliptique entre deux corps est obtenue en considérant que;

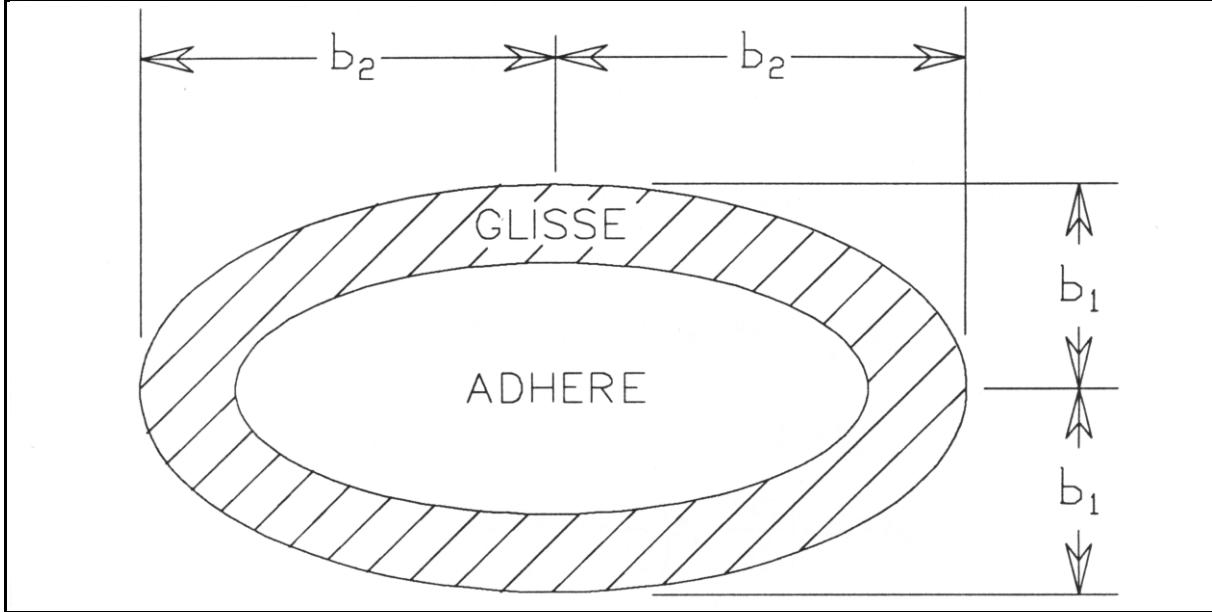
i) les deux corps sont poussés l'un contre l'autre par une force normale " $Q$ " à la surface de contact,

ii) puis une force tangentielle " $F_f$ " à la surface de contact est appliquée.

Cattaneo [2] a considéré le cas d'une force tangentielle appliquée dans l'une des directions principales de l'ellipse de contact. Pour une force tangentielle " $F_f$ " qui croît de façon monotone, superposée à la force normale " $Q$ ", il a trouvé du micro-glisement entre les deux solides dans la direction de la force tangentielle.

Lorsque  $F_f < \mu_c Q$ , où " $\mu_c$ " est le coefficient de friction de Coulomb, l'ellipse de contact est divisée en deux, une région elliptique concentrique avec l'ellipse de contact où il n'y a aucun glissement et une région périphérique où il y a du glissement (figure 3.1). Le terme micro-glisement est donc utilisé pour indiquer qu'une partie de la surface de contact glisse tandis que le reste de cette surface de contact adhère.

La distribution de la traction tangentielle dans la région de glissement est posée comme étant égale à la pression normale donnée par la théorie de Hertz multipliée par le coefficient de friction de Coulomb.



**Figure 3.1** Surface de contact elliptique ayant une région centrale qui adhère et une région périphérique qui glisse

Deresiewicz [3] a évalué le déplacement relatif, tangentiel à la surface de contact, entre un point situé dans le solide qui est loin de la surface de contact et un point sur la surface de contact où il n'y a pas de glissement, pour le problème de Cattaneo (surface de contact elliptique) comme étant:

$$\delta = \frac{3(2-\nu)\mu_c Q}{16 G b_2} \left[ I - \left( I - \frac{F_f}{\mu_c Q} \right)^{2/3} \right] \Phi \quad (3.5)$$

où  **$\delta$**  ⇒ déplacement relatif du corps élastique par rapport à un point de la surface de contact qui adhère.

**G** ⇒ module de cisaillement.

**Q** ⇒ force normale à la surface de contact.

**F<sub>f</sub>** ⇒ force tangentielle à la surface de contact.

**b<sub>2</sub>** ⇒ longueur de l'axe principal de l'ellipse parallèle à la direction de la force tangentielle.

**$\mu_c$**  ⇒ coefficient de friction de Coulomb.

- $\nu$   $\Rightarrow$  coefficient de Poisson.
- $\Phi$   $\Rightarrow$  facteur qui tient compte de la géométrie de la surface de contact.

Deresiewicz a de plus trouvé l'expression du facteur  $\Phi$  comme étant:

$$\begin{aligned}\Phi &= \left[ \frac{4 b_2}{\pi b_1 (2 - \nu)} \right] \left[ \left( 1 - \frac{\nu}{k^2} \right) K + \frac{\nu J}{k^2} \right]; \quad b_2 < b_1 \\ \Phi &= 1; \quad b_2 = b_1 \\ \Phi &= \left[ \frac{4}{\pi (2 - \nu)} \right] \left[ \left( 1 - \nu + \frac{\nu}{k_1^2} \right) K_1 - \frac{\nu J_1}{k_1^2} \right]; \quad b_2 > b_1\end{aligned}\tag{3.6}$$

où **K** et **J** sont respectivement des intégrales elliptiques complètes du premier et du second type d'argument  $k = (1 - b_2/b_1)^2$ ; **K<sub>1</sub>** et **J<sub>1</sub>** sont des intégrales similaires d'argument  $k_1 = (1 - b_1/b_2)^2$ .

De cette équation, il est possible de voir que  $\Phi$  dépend des paramètres de la théorie de Hertz. Ces paramètres sont: les dimensions longitudinale et transversale de l'ellipse de contact ( $b_1$  et  $b_2$ ), qui sont fonction de la force normale  $Q$  imposée à la surface de contact.

En posant  $\Delta = 2\delta$ , la complaisance tangentielle est donnée par:

$$C_t = \frac{d\Delta}{d \left( \frac{F_f}{b_2} \right)} = \frac{(2 - \nu) \Phi}{4G} \left( 1 - \frac{F_f}{\mu_c Q} \right)^{\frac{1}{3}}\tag{3.7}$$

La complaisance tangentielle initiale est obtenue en posant  $F_f = 0$  dans cette dernière équation, ce qui donne:

$$C_{ti} = \frac{2 - \nu}{4G} \Phi\tag{3.8}$$

Mindlin [10] a développé les rapports qui existent entre la complaisance tangentielle initiale et la complaisance normale pour des solides ayant les mêmes propriétés élastiques. Pour le cas d'une ligne de contact entre deux cylindres parallèles ( $b_2=4$ ) soumis à une force tangentielle appliquée le long de la ligne de contact, le rapport entre la complaisance tangentielle initiale et la complaisance normale prend une forme particulièrement simple;

$$\frac{C_{ti}}{C_n} = \frac{I}{I-\nu} \quad (3.9)$$

En remplaçant l'équation 3.8 dans 3.9, on obtient;

$$\Phi = \frac{C_n(4G)}{(1-\nu)(2-\nu)} \quad (3.10)$$

ce qui donne l'équation du facteur  $\Phi$  pour le cas de la ligne de contact entre deux cylindres parallèles.

L'équation 3.5, qui relie le déplacement à la force tangentielle, s'écrit pour le contact linéique entre deux cylindres parallèles:

$$\delta = \frac{3(2-\nu)\mu_c q}{16G} \left[ I - \left( I - \frac{f_f}{\mu_c q} \right)^{2/3} \right] \Phi \quad (3.11)$$

où  $\mathbf{q}$   $\Rightarrow$  force normale à la surface de contact par unité de longueur

$\mathbf{f}_f$   $\Rightarrow$  force tangentielle à la surface de contact par unité de longueur

$\Phi$   $\Rightarrow$  facteur de forme donné par l'équation 3.10.

### 3.2 Hypothèses

Les hypothèses utilisées pour ce modèle sont les mêmes que celles utilisées pour les modèles sans complaisance, à l'exception de la dernière qui est remplacée par deux nouvelles. Les hypothèses sont:

- i)** La déformée du toron est dans le plan XY.
- ii)** Lorsque la déformée est imposée, la tension initiale dans le toron doit être suffisamment grande pour assurer que tous les fils restent en tension partout le long de celui-ci. Ceci assure qu'il n'y aura aucun décollement des fils de la surface de l'âme.
- iii)** L'âme transmet les déplacements aux fils à l'aide des forces de friction qui agissent le long des lignes de contact.
- iv)** La force de friction entre deux fils adjacents est considérée comme négligeable.
- v)** Tout glissement des fils sur l'âme n'est permis que le long des lignes de contact et non transversalement.
- vi)** Il s'agit d'un modèle uniaxial à état uniforme de contraintes (tension uniforme), donc les efforts en flexion des fils sont négligés.
- vii)** Lorsqu'un toron est en traction, un moment de torsion est généré si toute rotation longitudinale du toron est empêchée. Lorsque le toron est fléchi, le moment de torsion est nul.

Les fils situés au-dessus du plan neutre du toron créent un moment de torsion qui est contré par les fils situés sous le

plan neutre de telle sorte qu'aucune rotation longitudinale du toron ne se produit.

**viii)** L'âme et les fils sont faits du même matériau.

**ix)** L'angle d'hélice n'a pas d'effet sur le comportement mécanique près de la surface de contact linéique âme-fil (cet angle est faible et le rayon du fil est beaucoup plus petit que celui de l'âme) .

### 3.3 Introduction de la complaisance dans les équations

#### 3.3.1 Équation de compatibilité géométrique de déplacement fil-âme

Afin d'introduire la complaisance des surfaces dans le modèle, il faut définir une équation de compatibilité géométrique de déplacement entre le fil et la surface de l'âme.

L'équation 3.11 donne le déplacement relatif d'un solide par rapport à un point sur la surface de contact qui n'a pas glissé. Dans le cas présent il y a deux solides, l'âme et le fil, donc la différence entre le déplacement d'un point situé à l'axe du fil et d'un point situé juste en dessous de la surface de l'âme est  $2\delta$  (figure 3.5).

Pour ce modèle, l'équation du déplacement de la surface de l'âme présentée dans le chapitre 1, ne représente plus le déplacement de la surface de l'âme exactement, mais celui d'un point qui se situe juste en dessous de la surface de l'âme.

L'équation de compatibilité géométrique de déplacement peut s'écrire:

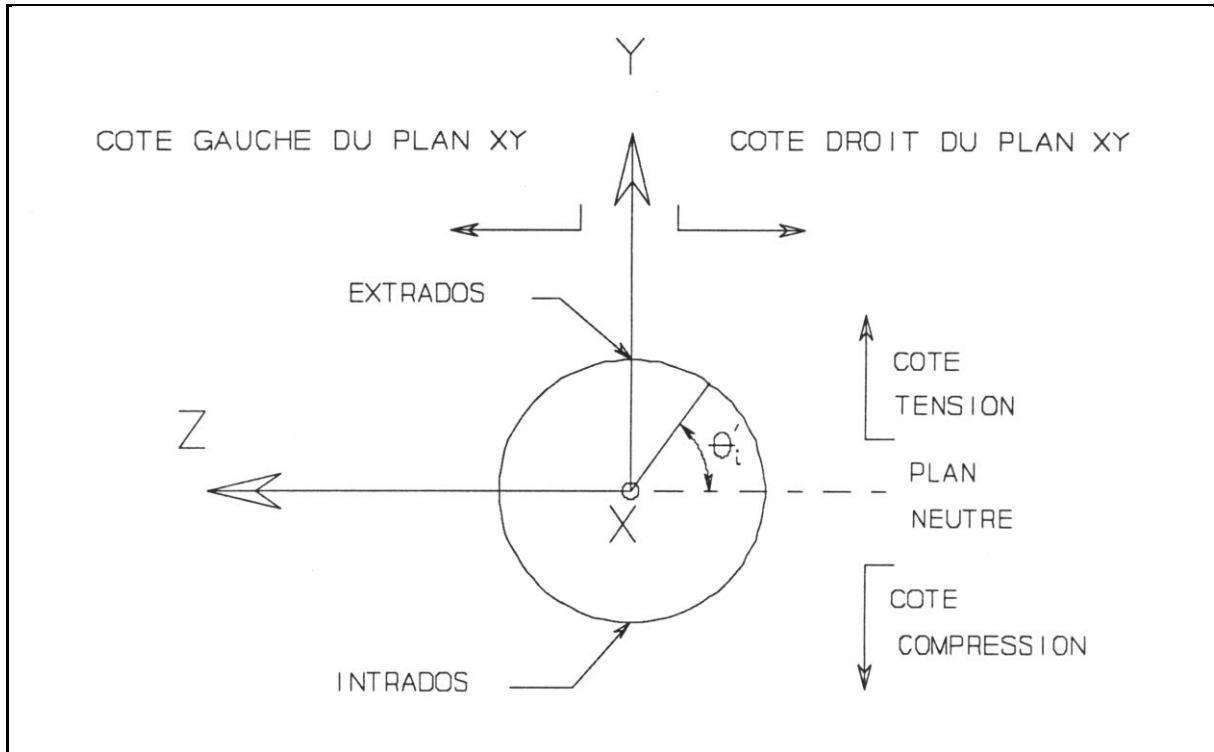
$$u_i = D_i \pm 2\delta \quad (3.12)$$

où  $\mathbf{u}_i \Rightarrow$  déplacement du fil "i"

$\mathbf{D}_i \Rightarrow$  déplacement de l'âme près de la surface de contact du fil "i".

Le signe de " $\delta$ " dans cette équation n'est pas auto-déterminé, il doit donc être imposé.

Pour déterminer le signe à imposer à " $\delta$ ", il faut regarder une section de l'âme. Pour le cas de la déformée ayant un rayon de courbure constant (figure 1.3), la section de l'âme considérée est montrée à la figure 3.2:



**Figure 3.2** Section de l'âme pour une déformée ayant un rayon de courbure constant

La position angulaire du fil "i" le long de l'axe X est donnée par:

$$\theta'_i = \left( \frac{2\pi X}{p} + \theta_i \right) \quad (3.13)$$

L'extrados est défini comme étant l'arc extérieur formé par la surface de l'âme dans le plan XY, tandis que l'intrados est l'arc intérieur formé par la surface de l'âme dans le plan XY. La figure 3.2 montre une section de l'âme dans le plan YZ, donc

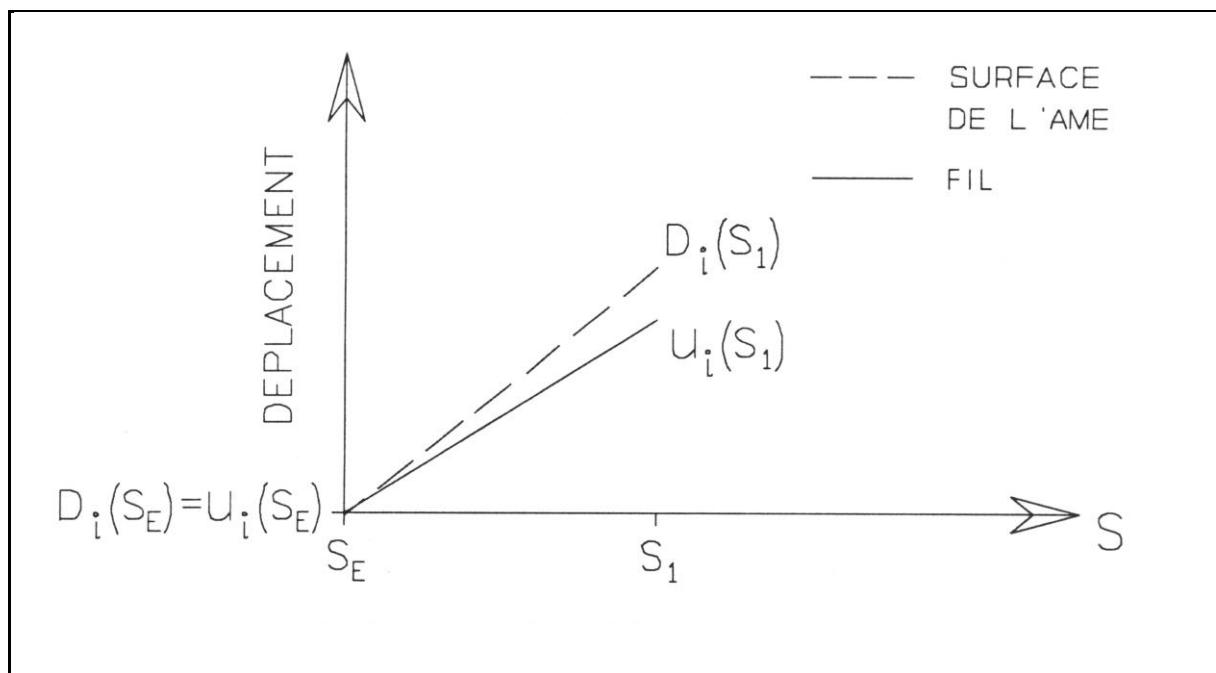
l'extrados dans cette figure est le point supérieur de la section de l'âme, tandis que l'intrados est le point inférieur de la section de l'âme.

Dans le cas de la déformée ayant un rayon de courbure constant, le déplacement du fil et de la surface de l'âme sont égaux à l'extrados et l'intrados, il est donc possible de déterminer le signe de " $\delta$ " pour chaque quart de cercle de la section d'âme;

**A) Côté gauche du plan XY ( $90^\circ \leq \theta'_i \leq 270^\circ$ ) :**

i) Côté tension ( $90^\circ \leq \theta'_i \leq 180^\circ$ ) :

L'extrados se situe à la position  $S_E$  ( $\theta'_i = 90^\circ$ ); à cette position le déplacement du fil est égal à celui de l'âme. Si une position  $S_1$  qui se situe légèrement plus loin de  $S_E$  est considérée, soit  $\theta'_i$  égal à  $150^\circ$  par exemple, alors on peut représenter schématiquement les déplacements par la figure 3.3:



**Figure 3.3**

Déplacement du fil et de la surface de l'âme par rapport à l'extrados

On déduit l'inégalité suivante:

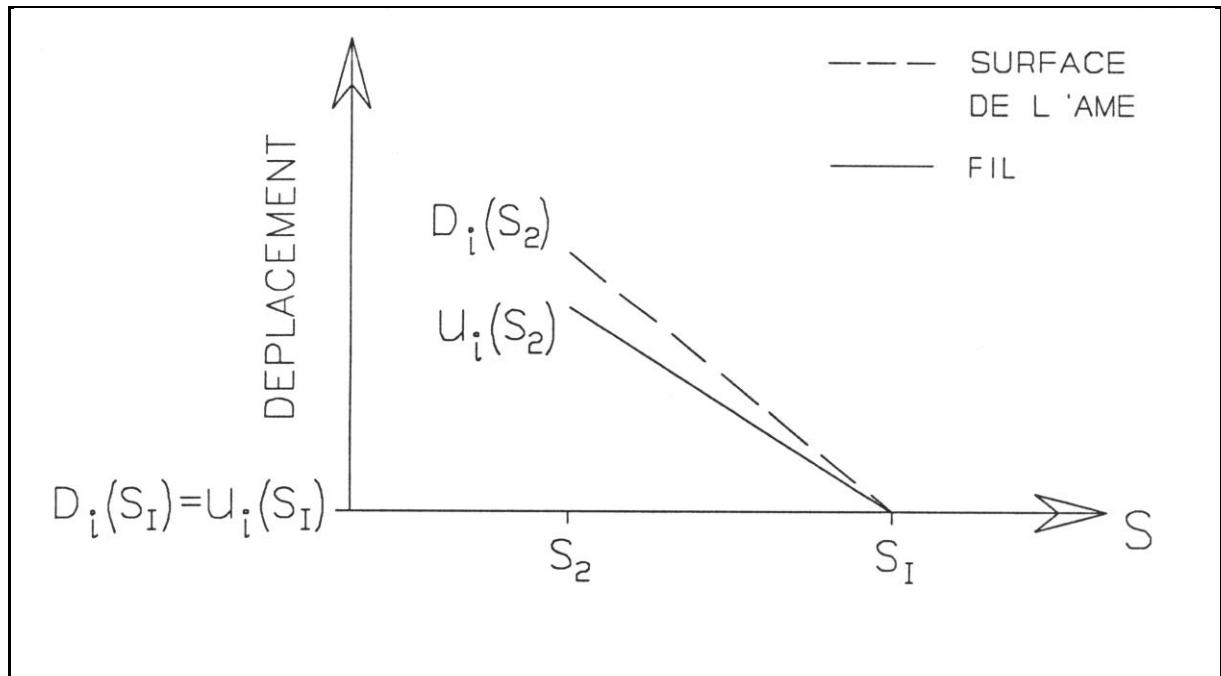
$$D_i(S_I) - D_i(S_E) > u_i(S_I) - u_i(S_E) \quad (3.14)$$

où  $D_i(S_E) = u_i(S_E)$ . L'équation de compatibilité géométrique de déplacement est:

$$u_i(S_I) = D_i(S_I) - 2\delta \quad (3.15)$$

ii) Côté compression ( $180^\circ \leq \theta'_i \leq 270^\circ$ ):

L'intrados se situe à la position  $S_I$  ( $\theta'_i = 270^\circ$ ); à cette position, le déplacement du fil est égal à celui de l'âme. Si une position  $S_2$  est considérée, qui précède légèrement la position  $S_I$ , soit  $\theta'_i$  égal à  $240^\circ$  par exemple, alors on peut représenter schématiquement les déplacements par la figure 3.4 (voir avec l'équation 1.10):



**Figure 3.4** Déplacement du fil et de la surface de l'âme par rapport à l'intrados

On déduit l'inégalité suivante:

$$D_i(S_2) - D_i(S_1) > u_i(S_2) - u_i(S_1) \quad (3.16)$$

où  $D_i(S_1) = u_i(S_1)$ . L'équation de compatibilité géométrique de déplacement devient:

$$u_i(S_2) = D_i(S_2) - 2\delta \quad (3.17)$$

Le signe de " $\delta$ " dans cette dernière équation est le même que celui obtenu du côté tension, équation 3.15. Donc, le signe de " $\delta$ " est négatif du côté gauche du plan XY.

### B) Côté droit du plan XY ( $270^\circ \leq \theta'_i \leq 90^\circ$ ):

En utilisant la même méthodologie que pour le côté gauche du plan XY, l'équation de compatibilité géométrique de déplacement obtenue pour le côté droit du plan XY est:

$$u_i(S) = D_i(S) + 2\delta \quad (3.18)$$

où le signe de " $\delta$ " est positif.

#### **Convention de signe:**

Le signe de " $\delta$ " dépend donc du côté du plan XY qui est considéré. Pour l'équation de compatibilité géométrique de déplacement 3.12 la convention de signe pour " $\delta$ " est:

$\Rightarrow$  positif du côté droit du plan XY ( $270^\circ \leq \theta'_i \leq 90^\circ$ )

$\Rightarrow$  négatif du côté gauche du plan XY ( $90^\circ \leq \theta'_i \leq 270^\circ$ )

Cette convention de signe est également valable pour le signe du coefficient de friction de Coulomb dans les équations de déplacement et de déformation de la région de macro-glissement, pour les trois modèles mathématiques.

Pour le cas de la déformée sinusoïdale de la figure 1.4, la même convention de signe est utilisée dans la première moitié de longueur d'onde, car la courbure est de même signe que la courbure de la figure 1.3. La deuxième moitié de longueur d'onde a une courbure de signe opposé, ce qui impose une inversion de signe par rapport à la convention présentée ci-haut. Donc, pour la deuxième moitié de la longueur d'onde de la déformée sinusoïdale, la convention de signe est:

$\Rightarrow$  négatif du côté droit du plan XY ( $270^\circ \leq \theta'_i \leq 90^\circ$ )

$\Rightarrow$  positif du côté gauche du plan XY ( $90^\circ \leq \theta'_i \leq 270^\circ$ )

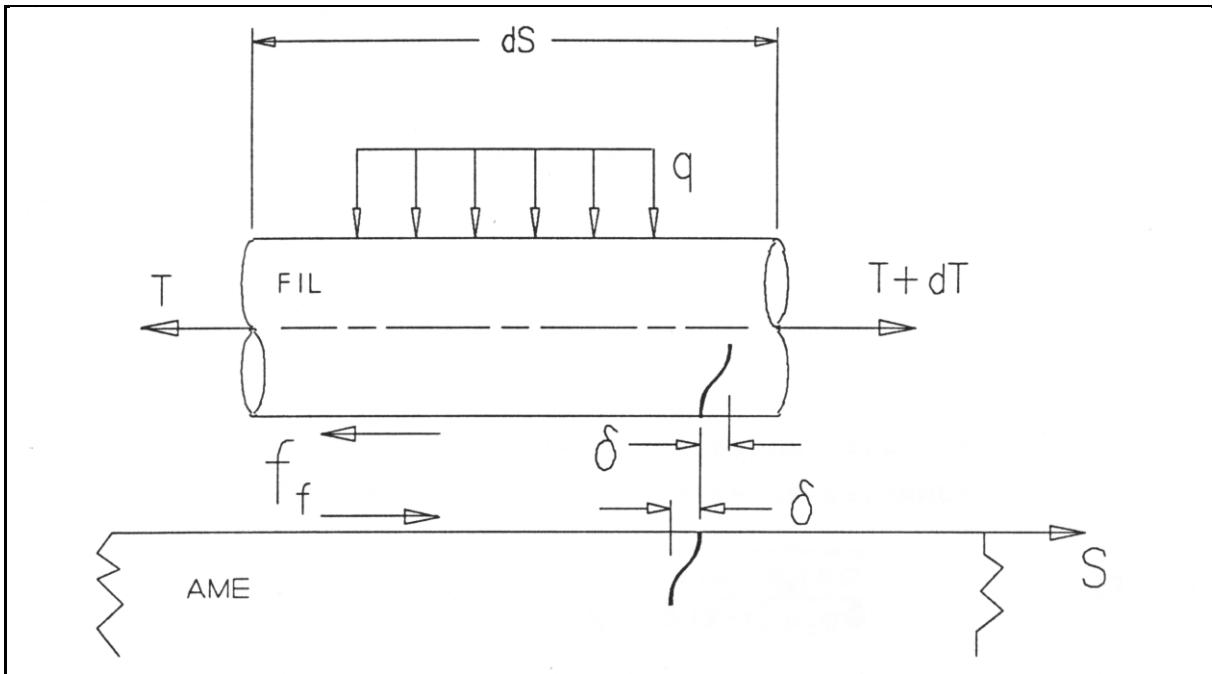
### 3.3.2 Équation différentielle

L'introduction de la complaisance se fait à l'aide de l'équation différentielle qui est obtenue de la façon suivante.

L'équilibre des forces selon l'axe S de la figure 3.5, est:

$$dT = f_f dS \quad (3.19)$$

où  $f_f$   $\Rightarrow$  force tangentielle à la surface de contact.



**Figure 3.5** Diagramme des forces sur un élément de fil avec complaisance

De plus, en sachant que:

$$T = E a \varepsilon_i \quad (3.20)$$

où

$$\varepsilon_i = \frac{du_i}{dS} \quad (3.21)$$

on a

$$\frac{dT}{dS} = E a \frac{d^2 u_i}{dS^2} \quad (3.22)$$

où  $\mathbf{u}_i \Rightarrow$  déplacement du fil "i".

En remplaçant l'équation 3.19 dans l'équation 3.22:

$$E a \frac{d^2 u_i}{dS^2} = f_f \quad (3.23)$$

Pour compléter cette équation différentielle, il faut introduire la relation qui existe entre le déplacement relatif du corps élastique par rapport à un point sur la surface de contact qui n'a pas glissé et la force tangentielle appliquée sur cette dernière. Cette relation est donnée par l'équation 3.11.

Il faut également utiliser l'équation de compatibilité géométrique de déplacement 3.12.

Donc, en remplaçant les équations 3.11 et 3.12 dans l'équation 3.23, l'équation différentielle suivante est obtenue:

$$\frac{Ea}{\mu_c q} \frac{d^2 u_i}{ds^2} = 1 - \sqrt[3]{1 - \frac{\mp(u_i - D_i)8G}{3(2-\nu)\mu_c q \Phi}} \quad (3.24)$$

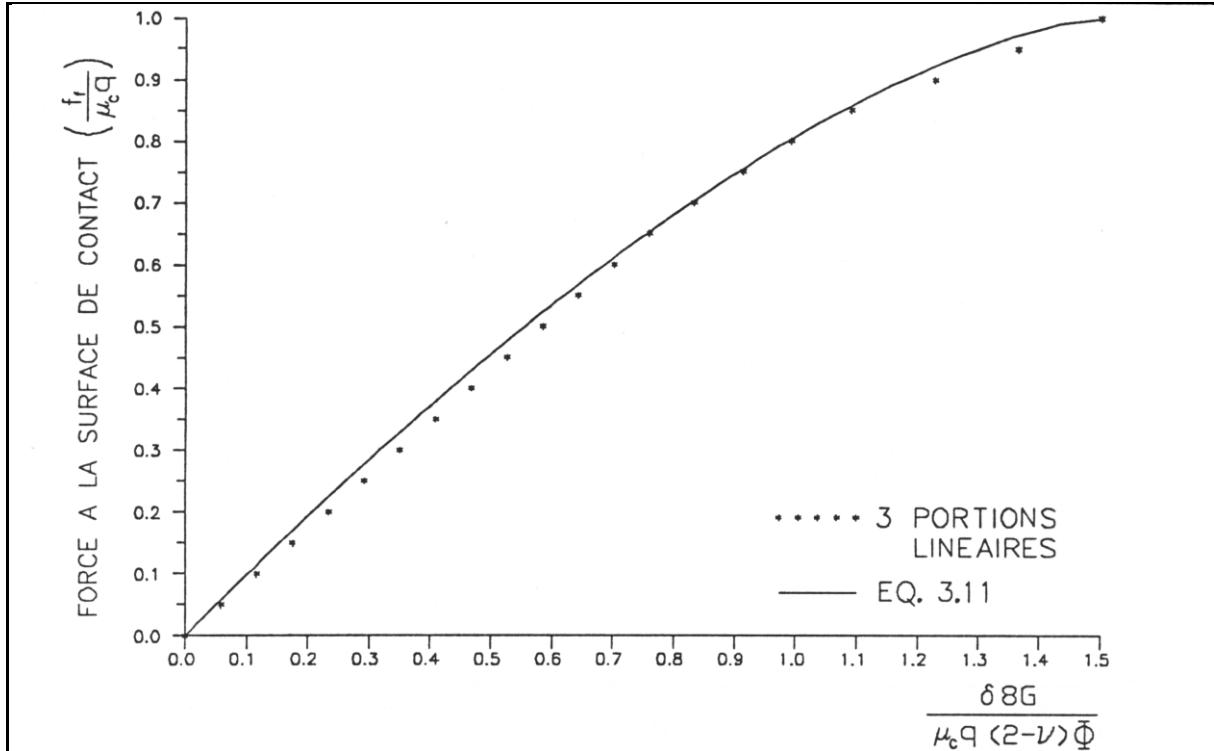
Il s'agit d'une équation différentielle du 2<sup>ième</sup> ordre, non-linéaire, non-homogène à coefficients constants.

La solution de cette équation n'est pas facile en raison de la présence de "ui" à l'intérieur de la racine. Ce problème mathématique peut être contourné en faisant une multi-linéarisation de la courbe reliant la force tangentielle ( $f_f$ ) au déplacement ( $\delta$ ).

### 3.4 Multilinéarisation de la courbe $f_f$ $\delta$

Afin de faciliter la résolution de l'équation différentielle 3.24 et de bien simuler la courbe  $f_f$   $\delta$ , cette dernière est modélisée par une série de portions linéaires; ces portions linéaires seraient similaires à une série de ressorts concentriques de longueurs différentes.

La figure 3.6 présente la courbe adimensionnelle de  $f_f$   $\delta$  et le modèle à trois portions linéaires.



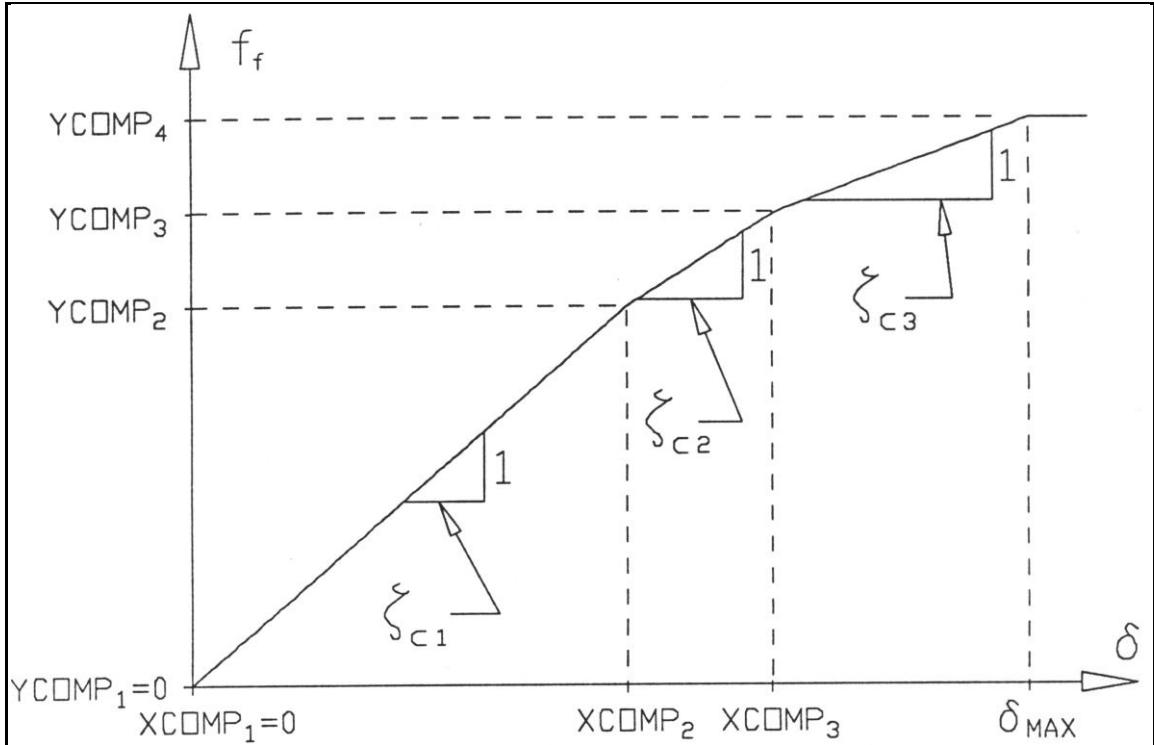
**Figure 3.6** Courbe adimensionnelle de  $f_f \delta$  et d'un modèle à trois portions linéaires

La relation entre le déplacement et la force de friction pour le cas multi-linéaire (figure 3.7) est:

$$f_f = \frac{\delta - XCOMP_j}{\zeta_{cj}} + YCOMP_j \quad (3.25)$$

où  $\Rightarrow j=1, 2, \dots, N$  et indique qu'il s'agit des constantes de la portion linéaire "j"  
 $\Rightarrow \zeta_{cj}$  est la complaisance linéarisée de la portion linéaire "j" (inverse de la pente de la portion linéaire).

La figure 3.7 présente le cas à trois portions linéaires afin de montrer ses diverses constantes.



**Figure 3.7** Courbe d'un modèle à trois portions linéaires avec les différents paramètres.

Afin de pouvoir introduire l'équation 3.25 dans l'équation différentielle 3.23, l'équation 3.25 doit être modifiée pour que les signes de  $\delta$ ,  $XCOMP_j$  et  $YCOMP_j$  soient compatibles avec la convention de signe donnée à la section 3.3.1.

$$f_f = \frac{\pm \delta \mp XCOMP_j}{\zeta_{cj}} \pm YCOMP_j \quad (3.26)$$

où  $\Rightarrow YCOMP_j$  a le même signe que  $\delta$   
 $\Rightarrow XCOMP_j$  a le signe inverse de  $\delta$ .

Dix portions linéaires sont utilisées dans la programmation pour modéliser la courbe  $f_f$   $\delta$ . Utiliser un nombre supérieur de portions linéaires augmente inutilement la dimension du système d'équations, puisque la différence entre les bornes de la région

de macro-glissement obtenues avec un nombre supérieur de portions linéaires et celles obtenues avec les dix portions linéaires est négligeable.

Par exemple, un modèle à onze portions linéaires a été essayé, la différence obtenue entre les bornes de la région de macro-glissement de ce modèle et celles du modèle à dix portions linéaires est de l'ordre de 0.09%.

### 3.5 Solution de l'équation différentielle

En remplaçant l'équation 3.26 dans 3.23, l'équation différentielle prend la forme:

$$\frac{d^2 u_{ij}}{ds^2} - u_{ij} \left[ \frac{1}{2 E a \zeta_{cj}} \right] = -D_i \left[ \frac{1}{2 E a \zeta_{cj}} \right] + \frac{\mp XCOMP_j}{E a \zeta_{cj}} + \frac{\pm YCOMP_j}{E a} \quad (3.27)$$

où  $u_{ij} \Rightarrow$  déplacement du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j".

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre non-homogène à coefficients constants.

#### 3.5.1 Déformée ayant un rayon de courbure constant

L'équation du déplacement du fil pour cette déformée s'obtient en remplaçant l'équation du déplacement de la surface de l'âme 1.10 dans l'équation 3.27 et en solutionnant l'équation différentielle obtenue. Puis, avec un changement de variable pour mettre en fonction de X, la solution de l'équation différentielle est:

$$u_{ij}^{\rho}(X) = \frac{R_a f p}{2\pi \rho \cos \alpha} \left[ \cos \theta_i - \frac{p^2 \sec^2 \alpha \cos \left( \frac{2\pi X}{p} + \theta_i \right)}{[8\pi^2 E a \zeta_{cj} + p^2 \sec^2 \alpha]} \right] \quad (3.28)$$

$$+ \beta_{ij}^{\rho} e^{X \sqrt{\frac{\sec^2 \alpha}{2E a \zeta_{cj}}}} + \eta_{ij}^{\rho} e^{-X \sqrt{\frac{\sec^2 \alpha}{2E a \zeta_{cj}}}} - (\mp) 2 X COMP_j - (\pm) 2 \zeta_{cj} Y COMP_j$$

où  $\beta_{ij}^{\rho}$  ⇒ première constante de la solution complémentaire du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j"  
 $\eta_{ij}^{\rho}$  ⇒ deuxième constante de la solution complémentaire du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j".

Ces constantes sont déterminées à l'aide des conditions limites.

L'équation de la déformation du fil est obtenue en dérivant la dernière équation:

$$\varepsilon_{ij}^{\rho}(X) = \frac{R_a f}{\rho} \left[ \frac{p^2 \sec^2 \alpha \sin \left( \frac{2\pi X}{p} + \theta_i \right)}{[8\pi^2 E a \zeta_{cj} + p^2 \sec^2 \alpha]} \right] \quad (3.29)$$

$$+ \beta_{ij}^{\rho} \sqrt{\frac{I}{2E a \zeta_{cj}}} e^{X \sqrt{\frac{\sec^2 \alpha}{2E a \zeta_{cj}}}} - \eta_{ij}^{\rho} \sqrt{\frac{I}{2E a \zeta_{cj}}} e^{-X \sqrt{\frac{\sec^2 \alpha}{2E a \zeta_{cj}}}}$$

### 3.5.2 Déformée sinusoïdale

L'équation du déplacement du fil pour cette déformée s'obtient en remplaçant l'équation du déplacement de la surface de l'âme 1.13 dans l'équation 3.27 et en solutionnant l'équation différentielle obtenue. Puis avec un changement de variable pour mettre en fonction de X, la solution de l'équation différentielle est:

$$\begin{aligned}
u_{ij}^{\lambda}(X) = & \beta_{ij}^{\lambda} e^{X\sqrt{\frac{\sec^2\alpha}{2Ea\zeta_{cj}}}} + \eta_{ij}^{\lambda} e^{-X\sqrt{\frac{\sec^2\alpha}{2Ea\zeta_{cj}}}} \\
& - (\mp) 2 XCOMP_j - (\pm) 2 \zeta_{cj} YCOMP_j \\
& + \frac{AR_a f \lambda p}{4\pi \cos \alpha} \left[ \frac{I}{\lambda - p} \left\{ \frac{\sin \left( 2\pi X \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda} \right) + \theta_i \right)}{\left[ \left( \frac{2\pi}{\sec \alpha} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda} \right) \right)^2 2Ea\zeta_{cj} + I \right]} - \sin \theta_i \right\} \right. \\
& \left. - \frac{I}{\lambda + p} \left\{ \frac{\sin \left( 2\pi X \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{\lambda} \right) + \theta_i \right)}{\left[ \left( \frac{2\pi}{\sec \alpha} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{\lambda} \right) \right)^2 2Ea\zeta_{cj} + I \right]} - \sin \theta_i \right\} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \right] \quad (3.30)
\end{aligned}$$

où " $\beta_{ij}^{\lambda}$ " et " $\eta_{ij}^{\lambda}$ " sont les constantes de la solution complémentaire du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j". Ces constantes sont déterminées à l'aide des conditions limites.

L'équation de la déformation du fil est obtenue en dérivant la dernière équation:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij}^{\lambda}(X) = & \beta_{ij}^{\lambda} \sqrt{\frac{1}{2Ea\zeta_{cj}}} e^{X\sqrt{\frac{\sec^2\alpha}{2Ea\zeta_{cj}}}} - \eta_{ij}^{\lambda} \sqrt{\frac{1}{2Ea\zeta_{cj}}} e^{-X\sqrt{\frac{\sec^2\alpha}{2Ea\zeta_{cj}}}} \\
& + \frac{AR_a f}{2} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \left[ \frac{\cos \left( 2\pi X \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda} \right) + \theta_i \right)}{\left[ \left( \frac{2\pi}{\sec \alpha} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda} \right) \right)^2 2Ea\zeta_{cj} + I \right]} \right. \\
& \left. - \frac{\cos \left( 2\pi X \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{\lambda} \right) + \theta_i \right)}{\left[ \left( \frac{2\pi}{\sec \alpha} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{\lambda} \right) \right)^2 2Ea\zeta_{cj} + I \right]} \right] \quad (3.31)
\end{aligned}$$

### 3.6 Région de macro-glissement

Les équations de déplacement et de déformation du fil pour la région de macro-glissement sont obtenues de la même façon qu'à la section 2.2.2.2.

#### 3.6.1 Déformée ayant un rayon de courbure constant

L'équation du déplacement du fil de la région de macro-glissement est donnée par:

$$u_i^{\zeta\rho}(X) = \frac{\pm \mu_c q \sec^2 \alpha}{2 E a} (X - X_{Bl})^2 + \xi_i^{\zeta\rho} \sec \alpha (X - X_{Bl}) + \psi_i^{\zeta\rho} \quad (3.32)$$

pour  $X_{Bl} \leq X \leq X_{B2}$

où l'exposant " $\zeta\rho$ " indique qu'il s'agit du modèle avec complaisance pour la déformée ayant un rayon de courbure constant.

L'équation de la déformation du fil de cette région est:

$$\varepsilon_i^{\zeta\rho} = \frac{\pm \mu_c q \sec \alpha}{E a} (X - X_{Bl}) + \xi_i^{\zeta\rho} \quad (3.33)$$

pour  $X_{Bl} \leq X \leq X_{B2}$

#### 3.6.2 Déformée sinusoïdale

L'équation du déplacement du fil de la région de macro-glissement est donnée par:

$$u_i^{\zeta\lambda}(X) = \frac{\pm \mu_c q \sec^2 \alpha}{2 E a} (X - X_{Bl})^2 + \xi_i^{\zeta\lambda} \sec \alpha (X - X_{Bl}) + \psi_i^{\zeta\lambda} \quad (3.34)$$

pour  $X_{Bl} \leq X \leq X_{B2}$

où l'exposant " $\zeta\lambda$ " indique qu'il s'agit du modèle avec complaisance pour la déformée sinusoïdale.

L'équation de la déformation du fil de cette région est:

$$\varepsilon_i^{\zeta\lambda} = \frac{\pm \mu_c q \sec \alpha}{E a} (X - X_{B1}) + \xi_i^{\zeta\lambda} \quad (3.35)$$

pour  $X_{B1} \leq X \leq X_{B2}$

### 3.7 Conditions limites

La courbe  $f_f \delta$  (courbe en trait plein de la figure 3.6) représente le comportement d'un milieu continu à l'interface de deux solides en contact. L'introduction de ce type de comportement à l'interface de la surface de l'âme et des fils amène à poser que le déplacement et la déformation des fils sont continus (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de réactions concentrées à l'interface âme-fil).

#### 3.7.1 Déformée ayant un rayon de courbure constant

Ce type de déformée impose une symétrie par rapport au plan XY et au plan neutre, ce qui permet d'analyser un seul demi-pas de fil qui va de l'extrados à l'intrados ou vice versa.

Le déplacement maximal de la surface de l'âme et du fil se situe au centre du demi-pas (vis-à-vis le plan neutre). Le nombre d'équations de déplacement de fil nécessaire dans un demi-pas dépend de la valeur maximale du déplacement de la surface de l'âme au centre du demi-pas.

Par exemple, si le déplacement maximal de la surface de l'âme est faible (rayon de courbure très grand) de telle sorte qu'il est suffisant d'utiliser les deux premières portions linéaires de la courbe  $f_f \delta$  du modèle à dix ressorts, alors le déplacement du fil le long du demi-pas est divisé en trois régions de micro-glisement.

Il y a une région qui est centrée et une région de chaque côté. La région du centre utilise les constantes de la deuxième portion linéaire tandis que les régions de chaque côté utilisent les constantes de la première portion linéaire.

L'équation du déplacement du fil dans chacune des régions est donnée par 3.28 pour cette déformée. Cependant, il faut faire la distinction entre chacune des trois équations du fil en modifiant légèrement les symboles utilisés dans 3.28.

i) L'exposant "M" (pour milieu) est utilisé pour l'équation du fil qui donne le déplacement dans la région du centre.

ii) L'exposant "G" est utilisé pour l'équation du fil qui donne le déplacement dans la région qui est du côté gauche de la région centrale.

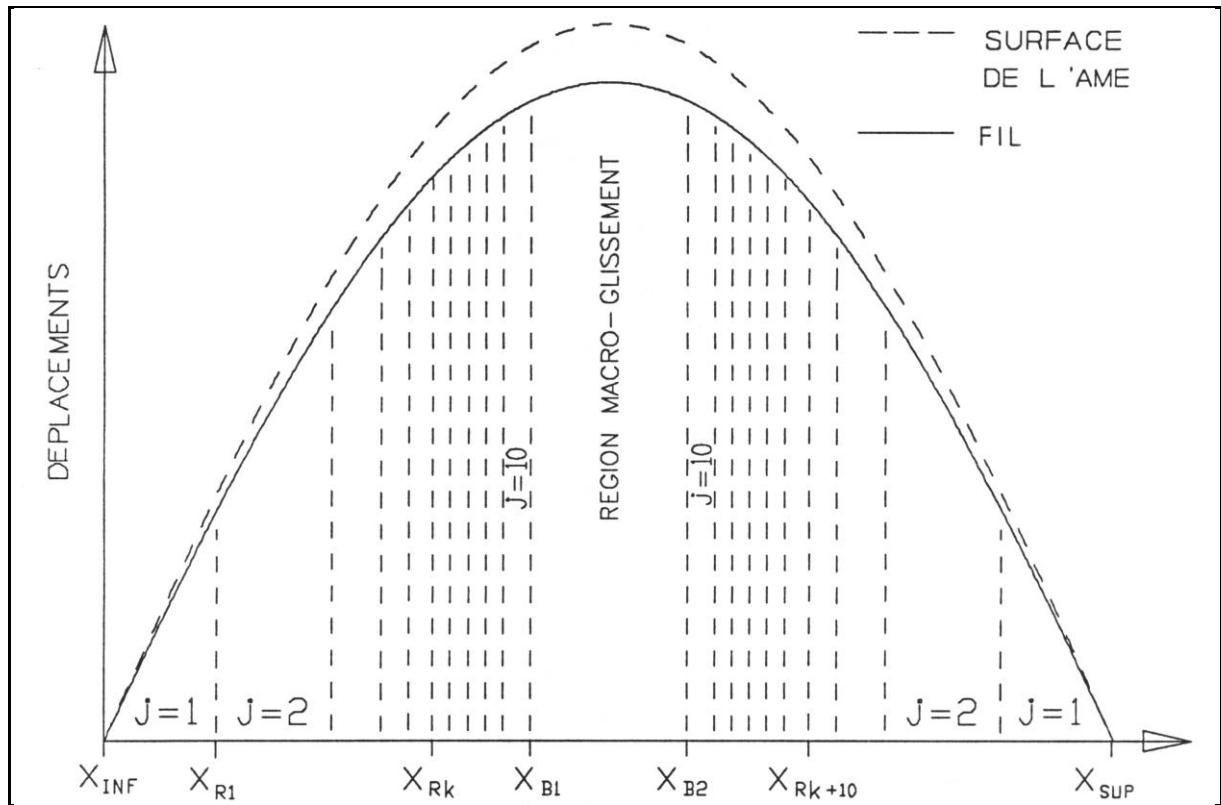
iii) L'exposant "D" est utilisé pour l'équation du fil qui donne le déplacement dans la région située du côté droit de la région du centre.

Le déplacement du fil de la région du centre s'écrit, pour cet exemple, " $u_{i2}^{M\rho}$ " et les constantes de la solution complémentaire sont " $\beta_{i2}^{M\rho}$ " et " $\eta_{i2}^{M\rho}$ ", l'indice "2" de ces symboles indique qu'il s'agit des constantes de la 2<sup>ème</sup> portion linéaire.

Les équivalents de la région du côté gauche sont " $u_{il}^{G\rho}$ ", " $\beta_{il}^{G\rho}$ " et " $\eta_{il}^{M\rho}$ ", pour le côté droit ils sont " $u_{il}^{D\rho}$ ", " $\beta_{il}^{D\rho}$ " et " $\eta_{il}^{D\rho}$ ".

L'indice "1" de ces symboles indique qu'il s'agit des constantes de la 1<sup>ière</sup> portion linéaire.

Lorsque le déplacement maximal de l'âme est suffisamment important (rayon de courbure petit) pour qu'il y ait du macro-glissement, alors il faut utiliser les dix portions linéaires de la courbe  $f_f \delta$ , ce qui représente dans le demi-pas, vingt régions de micro-glissement et une de macro-glissement (figure 3.8).



**Figure 3.8** Courbe typique du déplacement du fil où il existe vingt régions de micro-glissement et une de macro-glissement

Dans la figure 3.8 " $X_{INF}$ " est à l'extrados, " $X_{SUP}$ " est un demi-pas plus loin à l'intrados, " $X_{B1}$ " et " $X_{B2}$ " sont les bornes de la région centrale et " $X_{Rk}$ " est une borne entre deux régions de micro-glissement.

La région centrale de la figure 3.8 est une région de macro-glisser où le déplacement du fil est donné par 3.32. Les dix régions de micro-glisser du côté gauche de la région centrale utilisent l'équation 3.28 avec l'exposant "G" ( $u$ ,  $\beta$  et  $\eta$ ). Les dix régions du côté droit utilisent la même équation mais avec l'exposant "D" ( $u$ ,  $\beta$  et  $\eta$ ).

Les conditions limites imposées à chaque point de transition ( $X_{Rk}$ ) qui relie deux régions de micro-glisser sont:

$$u_{ij}^{G\rho}(X_{Rk}) = u_{i(j+1)}^{G\rho}(X_{Rk}) \quad (3.36)$$

$$\varepsilon_{ij}^{G\rho}(X_{Rk}) = \varepsilon_{i(j+1)}^{G\rho}(X_{Rk}) \quad (3.37)$$

$$D_i^\rho(X_{Rk}) - u_{ij}^{G\rho}(X_{Rk}) = -(\pm)2 XCOMP_{j+1} \quad (3.38)$$

où l'exposant "G" indique qu'il s'agit d'un point de transition situé du côté gauche de la région centrale.

Les mêmes trois conditions limites sont appliquées pour les points de transition situés du côté droit de la région centrale et aux bornes ( $X_{B1}$ ,  $X_{B2}$ ) de la région centrale.

Il faut noter que le signe de "XCOMP" est donné par la convention de signe de la section 3.3.1, lorsque celui-ci est utilisé dans les conditions limites.

Si le déplacement de la surface de l'âme est suffisamment faible pour que la région centrale soit une région de micro-glisser, alors les conditions limites aux bornes de cette région s'écrivent:

$$u_{ij}^{G\rho}(X_{Bl}) = u_{ij}^{M\rho}(X_{Bl}) \quad (3.39)$$

$$\varepsilon_{ij}^{G\rho}(X_{Bl}) = \varepsilon_{ij}^{M\rho}(X_{Bl}) \quad (3.40)$$

$$D_i^\rho(X_{Bl}) - u_{ij}^{G\rho}(X_{Bl}) = -(\pm)2 XCOMP_{j+1} \quad (3.41)$$

et

$$u_{ij}^{M\rho}(X_{B2}) = u_{ij}^{D\rho}(X_{B2}) \quad (3.42)$$

$$\varepsilon_{ij}^{M\rho}(X_{B2}) = \varepsilon_{ij}^{D\rho}(X_{B2}) \quad (3.43)$$

$$D_i^\rho(X_{B2}) - u_{ij}^{D\rho}(X_{B2}) = -(\pm)2 XCOMP_{j+1} \quad (3.44)$$

Par contre, si le déplacement de la surface de l'âme est suffisamment important pour que la région centrale soit une région de macro-glissement, alors les conditions limites aux bornes de cette région s'écrivent:

$$u_{i10}^{G\rho}(X_{Bl}) = u_i^{\zeta\rho}(X_{Bl}) \quad (3.45)$$

$$\varepsilon_{i10}^{G\rho}(X_{Bl}) = \varepsilon_i^{\zeta\rho}(X_{Bl}) \quad (3.46)$$

$$D_i^\rho(X_{Bl}) - u_{i10}^{G\rho}(X_{Bl}) = -(\pm)2 \delta_{\max} \quad (3.47)$$

et

$$u_{i10}^{D\rho}(X_{B2}) = u_i^{\zeta\rho}(X_{B2}) \quad (3.48)$$

$$\varepsilon_{i10}^{D\rho}(X_{B2}) = \varepsilon_i^{\zeta\rho}(X_{B2}) \quad (3.49)$$

$$D_i^\rho(X_{B2}) - u_{i10}^{D\rho}(X_{B2}) = -(\pm)2 \delta_{\max} \quad (3.50)$$

où l'indice "10" dans ces six dernières conditions limites indique qu'il s'agit des constantes de la dixième portion linéaire.

Finalement, les conditions limites à  $X_{\text{INF}}$  et  $X_{\text{SUP}}$  sont:

$$D_i^\rho(X_{\text{INF}}) = u_{i1}^{G\rho}(X_{\text{INF}}) \quad (3.51)$$

$$D_i^\rho(X_{\text{SUP}}) = u_{i1}^{D\rho}(X_{\text{SUP}}) \quad (3.52)$$

où l'indice "1" dans ces deux dernières conditions limites indique qu'il s'agit des constantes de la première portion linéaire.

La dimension du système d'équations à solutionner dépend du nombre de régions dans le demi-pas. Le système a au plus 62 inconnues donc 62 conditions limites, lorsqu'il y a vingt régions de micro-glissement et une de macro-glissement dans un demi-pas.

Par contre, si le déplacement de la surface de l'âme est beaucoup plus faible, de telle sorte qu'il n'y a qu'une région de micro-glissement dans tout le demi-pas, alors le système d'équation a sa dimension minimale, soit 2 inconnues donc 2 conditions limites seulement (conditions 3.51 et 3.52).

### 3.7.2 Déformée sinusoïdale

Pour ce type de déformée, il existe une légère différence entre le déplacement de la surface de l'âme et celui du fil à l'extrados et l'intrados. Cette différence s'explique par le fait que pour deux demi-pas adjacents la variation de la courbure sur chaque demi-pas n'est pas identique. Cette différence de déplacement est faible aux noeuds de la sinusoïde, qui se situent à  $N^*(\lambda/2)$  où  $N=0,1,2\dots$ , et est négligeable aux ventres de la sinusoïde, qui se situent à  $N^*(\lambda/4)$  où  $N=1,3,5\dots$  (voir figure 1.4).

Il est donc possible de négliger cette différence de déplacement et de poser comme hypothèse supplémentaire pour cette déformée que le déplacement du fil est égal au déplacement de la surface de l'âme à l'extrados et l'intrados (voir page 102).

Cette hypothèse permet de solutionner chaque demi-pas de la longueur d'onde séparément et d'imposer les mêmes conditions limites dans un demi-pas que celles de la déformée ayant un rayon de courbure constant.

Les conditions limites 3.36 à 3.52 sont donc valables, excepté que l'exposant " $\rho$ " de ces conditions limites doit être remplacé par " $\lambda$ " pour représenter cette déformée.

Les résultats obtenus avec ce modèle, pour les deux types de déformée, sont présentés au chapitre 6. Ces résultats sont également comparés à ceux obtenus avec les deux modèles sans complaisance.

## CHAPITRE 4

DISSIPATION D'ÉNERGIE

(Amortissement)

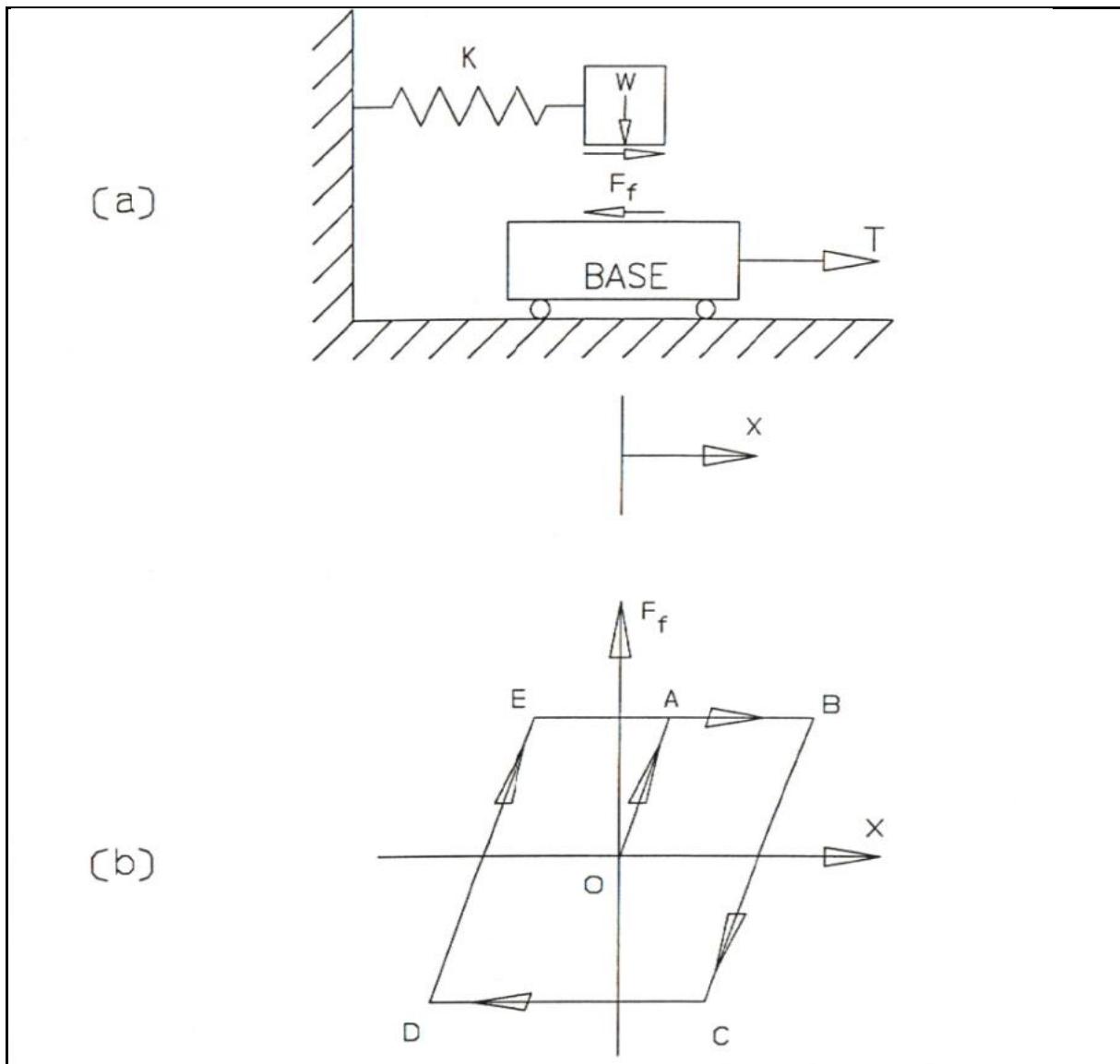
Ce chapitre présente, à la section 4.1, les mécanismes de dissipation d'énergie dans les différents modèles mathématiques. Par la suite, les équations pour déterminer la dissipation d'énergie dans un toron sont présentées.

4.1 Mécanisme de dissipation d'énergie4.1.1 Schématisation de la dissipation d'énergie des modèles sans complaisancei) **Modèle de Hardy**

La dissipation d'énergie due au macro-glissement du modèle de Hardy [4] peut être illustrée tel que ce dernier l'a fait avec le schéma théorique (a) de la figure 4.1.

Un bloc de poids  $W$  est retenu par un ressort ayant une constante  $K$ . Ce bloc  $W$  repose sur le bloc BASE qui lui impose un déplacement de va-et-vient très lent à l'aide de la force de friction présente à la surface de contact. Le déplacement du bloc BASE est représenté par  $X$ , la force  $T$  agissant sur celui-ci permet d'imposer le déplacement.

A partir du repos, le bloc BASE commence à se déplacer lentement vers la droite, alors la force de friction  $F_f$  entre les deux blocs croît et vient équilibrer la force du ressort  $Kx$ . Les deux blocs se déplacent donc ensemble. Ceci est représenté par le segment O-A sur le graphique (b) de la figure 4.1.



**Figure 4.1** Mécanisme de dissipation d'énergie du modèle de Hardy

A un certain moment, la force de friction entre les blocs atteint sa valeur maximale positive ( $+\mu_c W$ ). Le bloc W cesse alors de bouger tandis que le bloc BASE continue son mouvement vers la droite. Le bloc W glisse sur le bloc BASE et de l'énergie est dissipée par friction. Ceci est représenté par le segment A-B sur le graphique (b) de la figure 4.1.

Lorsque le bloc BASE arrive à la fin de sa course au point B et qu'il commence à se déplacer vers la gauche, la force de friction  $F_f$  commence à diminuer. Les deux blocs recommencent à se déplacer ensemble, vers la gauche. La force de friction  $F_f$  devient nulle puis croît dans la direction opposée, ce qui comprime le ressort K (segment B-C, figure 4.1).

A un certain moment la force de friction entre les blocs atteint sa valeur maximale négative ( $-\mu_c W$ ), alors le bloc W cesse de bouger tandis que le bloc BASE continue son mouvement vers la gauche (segment C-D, figure 4.1).

Lorsque le bloc BASE arrive à la fin de sa course du côté gauche au point D, tout est renversé. Donc la force de friction  $F_f$  passe de sa valeur maximale négative ( $-\mu_c W$ ) à sa valeur maximale positive ( $+\mu_c W$ ), (segment D-E, figure 4.1).

Au point E, le bloc W cesse de bouger tandis que le bloc BASE continue son mouvement vers la droite (courbe EB, figure 4.1).

Ce processus se répète, ce qui forme une courbe d'hystérésis et la surface à l'intérieur de cette courbe donne la dissipation d'énergie due au glissement entre les blocs (graphique (b), figure 4.1).

### **ii) Modèle avec continuité de déformation**

La schématisation du modèle avec continuité de déformation diffère légèrement de celle de Hardy présentée ci-haut. La différence est que le modèle de Hardy pose que le bloc W cesse de bouger lorsque la force de friction  $F_f$  atteint une valeur maximale. Ce qui implique que cette force de friction maximale reste constante par la suite.

Le modèle avec continuité de déformation pose plutôt que le bloc W va se déplacer légèrement dans la direction de la force du ressort KX, lorsque la force de friction  $F_f$  atteint une valeur maximale.

Ce déplacement du bloc W est dû à la variation de la force du ressort qui réagit à la différence qui existe entre le coefficient de friction dynamique et le coefficient de friction statique. Cette variation de la force du ressort "représente" la redistribution de la déformation du fil dans le modèle avec continuité de déformation.

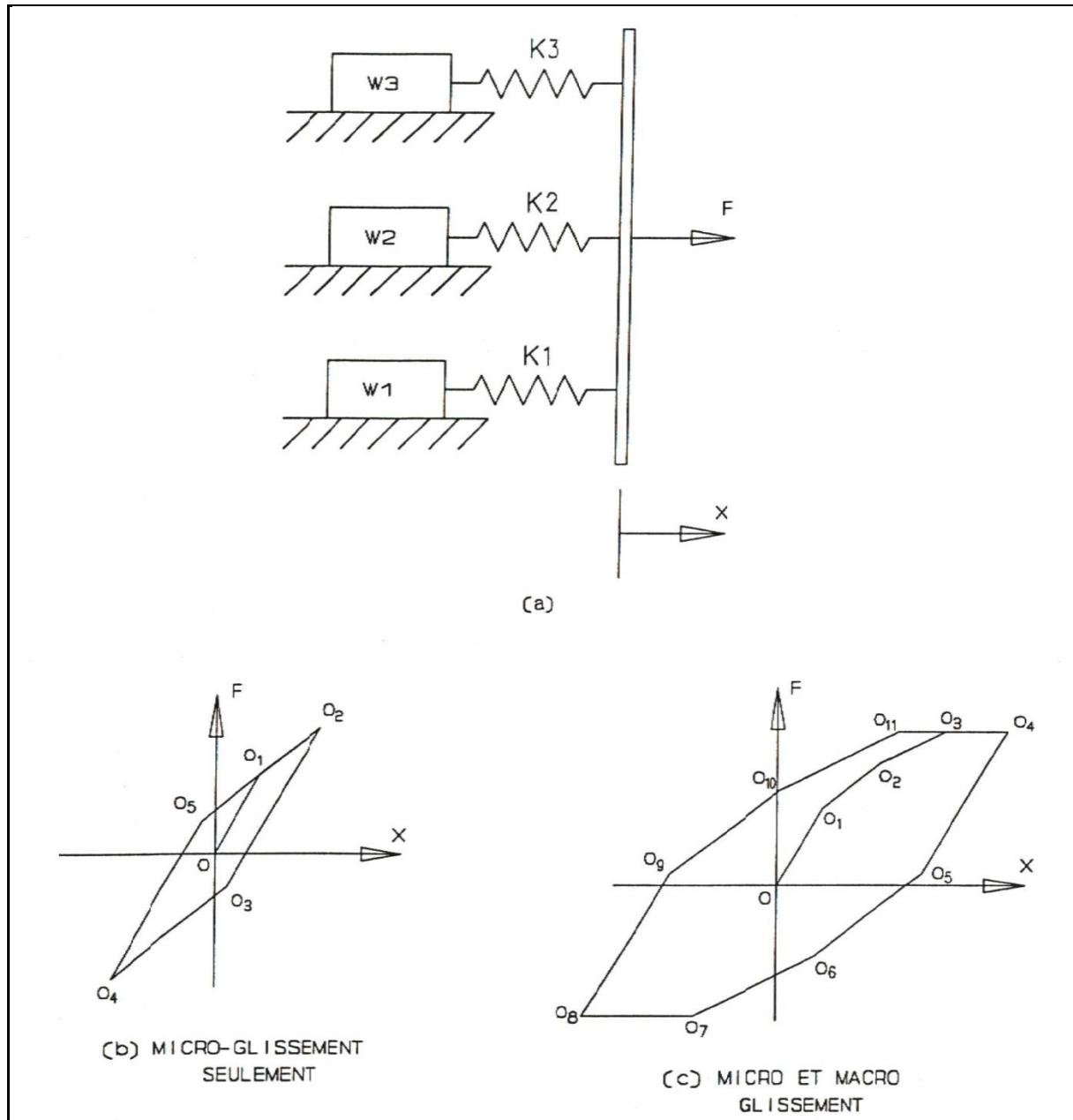
#### 4.1.2 Schématisation de la dissipation d'énergie du modèle avec complaisance

Pour ce modèle il y a de la dissipation d'énergie due au micro-glissement et au macro-glissement (si macro-glissement il y a). La schématisation théorique pour illustrer ces deux modes de dissipation d'énergie est présentée à la figure 4.2(a).

Les blocs W1, W2 et W3 reposent sur des surfaces ayant le même coefficient de friction  $\mu_c$  et sont reliés à la barre verticale par les ressorts K1, K2 et K3. La position de la barre verticale

est donnée par  $X$  et la force nécessaire pour déplacer cette dernière est fournie par "F".

Dans le schéma 4.2(a) le micro-glissement est représenté lorsqu'un ou deux blocs glissent, tandis que le macro-glissement est représenté lorsque les trois blocs glissent ensemble.



**Figure 4.2**

Mécanisme de dissipation d'énergie du modèle avec complaisance

**i) Micro-glissement seulement ( $F < \mu_c * (W_1 + W_2 + W_3)$ )**

A partir du repos, la barre verticale se déplace légèrement vers la droite, aucun bloc ne glisse, donc on se déplace sur le segment O-O<sub>1</sub> de la figure 4.2(b). La pente de ce segment O-O<sub>1</sub> est la somme des rigidités K<sub>1</sub> + K<sub>2</sub> + K<sub>3</sub>.

Au point O<sub>1</sub>, la force de friction entre le bloc W<sub>1</sub> et la surface atteint sa valeur maximale positive  $+\mu_c W_1$ , donc ce bloc commence à glisser et alors on se déplace sur le segment O<sub>1</sub>-O<sub>2</sub>. Le glissement du bloc W<sub>1</sub> dissipe de l'énergie qui représente de la dissipation d'énergie par micro-glissement puisque les blocs W<sub>2</sub> et W<sub>3</sub> ne bougent pas. La pente du segment O<sub>1</sub>-O<sub>2</sub> est la somme des ressorts K<sub>2</sub> + K<sub>3</sub>.

Une fois au point O<sub>2</sub> du graphique 4.2(b), la barre verticale atteint la fin de sa course, la force F sa valeur maximale positive. La barre verticale commence alors à se déplacer vers la gauche, aucun bloc ne glisse, donc on se déplace sur le segment O<sub>2</sub>-O<sub>3</sub> dont la pente est la somme K<sub>1</sub> + K<sub>2</sub> + K<sub>3</sub>.

Au point O<sub>3</sub>, la force de friction entre le bloc W<sub>1</sub> et la surface atteint sa valeur maximale négative  $-\mu_c W_1$ , donc ce bloc recommence à glisser et alors on se déplace sur la droite O<sub>3</sub>-O<sub>4</sub> dont la pente est la somme K<sub>2</sub> + K<sub>3</sub>.

Au point O<sub>4</sub>, la barre verticale atteint la fin de sa course dans la direction opposée, la force F sa valeur maximale négative. A ce point, la barre recommence à se déplacer vers la droite, donc tout est inversé. Sur le segment O<sub>4</sub>-O<sub>5</sub> aucun bloc ne glisse. Au point O<sub>5</sub> le bloc W<sub>1</sub> recommence à glisser, alors on se déplace sur le segment O<sub>5</sub>-O<sub>2</sub>.

Ce processus se répète, ce qui forme une courbe d'hystérésis (graphique (b), figure 4.2). La surface à l'intérieur de cette courbe donne la dissipation d'énergie produite par le glissement

du bloc W1, dissipation qui représente la dissipation d'énergie due au micro-glissement puisque les blocs W2 et W3 n'ont jamais bougé.

### **ii) Macro-glissement ( $F = \mu_c * (W_1 + W_2 + W_3)$ )**

Le macro-glissement, qui est représenté dans le schéma 4.2(a) par le glissement des trois blocs W1, W2 et W3, apparaît lorsque la force F est égale à la force de friction maximale admissible  $\mu_c * (W_1 + W_2 + W_3)$  entre les trois blocs et leurs surfaces.

Lorsque la barre verticale commence à se déplacer vers la droite à partir du repos, aucun bloc ne glisse et on se déplace sur le segment O-O<sub>1</sub> du graphique 4.2(c) dont la pente est donnée par K<sub>1</sub> + K<sub>2</sub> + K<sub>3</sub>.

Au point O<sub>1</sub>, le bloc W1 commence à glisser, ce qui dissipe de l'énergie qui représente de la dissipation d'énergie due au micro-glissement car les blocs W2 et W3 ne bougent pas. Puisque le bloc W1 glisse, alors on se déplace sur le segment O<sub>1</sub>-O<sub>2</sub> dont la pente est donnée par K<sub>2</sub> + K<sub>3</sub>.

Au point O<sub>2</sub>, le bloc W2 commence à glisser. Les blocs W1 et W2 glissent et dissipent de l'énergie qui représente de la dissipation d'énergie due au micro-glissement car le bloc W3 ne bouge pas. Puisque W1 et W2 glissent, on se déplace sur le segment O<sub>2</sub>-O<sub>3</sub> dont la pente est donnée par K<sub>3</sub>.

Au point O<sub>3</sub>, le bloc W3 commence à glisser. Puisque les trois blocs glissent, ils dissipent de l'énergie qui représente de la dissipation d'énergie due au macro-glissement. A ce point O<sub>3</sub>, la force F nécessaire pour continuer à déplacer la barre verticale vers la droite est constante et représentée par le segment O<sub>3</sub>-O<sub>4</sub>.

La barre verticale atteint la fin de sa course au point  $O_4$ , elle commence à se déplacer vers la gauche, donc aucun bloc ne glisse et on se déplace sur le segment  $O_4-O_5$ . La pente du segment  $O_4-O_5$  est donnée par  $K_1 + K_2 + K_3$ .

Au point  $O_5$ , le bloc  $W_1$  recommence à glisser, donc on se déplace sur le segment  $O_5-O_6$  dont la pente est donnée par  $K_2 + K_3$ . Au point  $O_6$ , le bloc  $W_2$  recommence à glisser également, donc on se déplace sur le segment  $O_6-O_7$  dont la pente est donnée par  $K_3$ . Au point  $O_7$ , le bloc  $W_3$  recommence à glisser; puisque les trois blocs ont recommencé à glisser, il y a dissipation d'énergie due au macro-glissement. Ce glissement est représenté par le segment  $O_7-O_8$ .

La barre verticale atteint la fin de sa course dans la direction opposée au point  $O_8$ ; elle recommence à se déplacer vers la droite, donc tout est inversé. Le bloc  $W_1$  recommence à glisser au point  $O_9$ , le bloc  $W_2$  au point  $O_{10}$  et le bloc  $W_3$  au point  $O_{11}$ . Le segment  $O_{11}-O_4$  représente du macro-glissement. Au point  $O_4$  la barre verticale a atteint la fin de sa course vers la droite.

Ce processus se répète, ce qui forme une courbe d'hystérésis (graphique (c), figure 4.2). La surface à l'intérieur de cette courbe donne la dissipation d'énergie due;

- ⇒ au glissement de  $W_1$  et  $W_2$  qui représente la dissipation d'énergie due au micro-glissement
- ⇒ au glissement simultané des trois blocs qui représente la dissipation d'énergie due au macro-glissement.

La courbe de dissipation d'énergie avec complaisance est une courbe lisse. Il faudrait donc utiliser un nombre infini de ressorts et de blocs dans le schéma 4.2(a) pour avoir une courbe lisse telle que celle obtenue avec la complaisance (voir figures 4.4 et 4.5).

#### 4.1.3 Mécanisme de dissipation d'énergie dans un toron

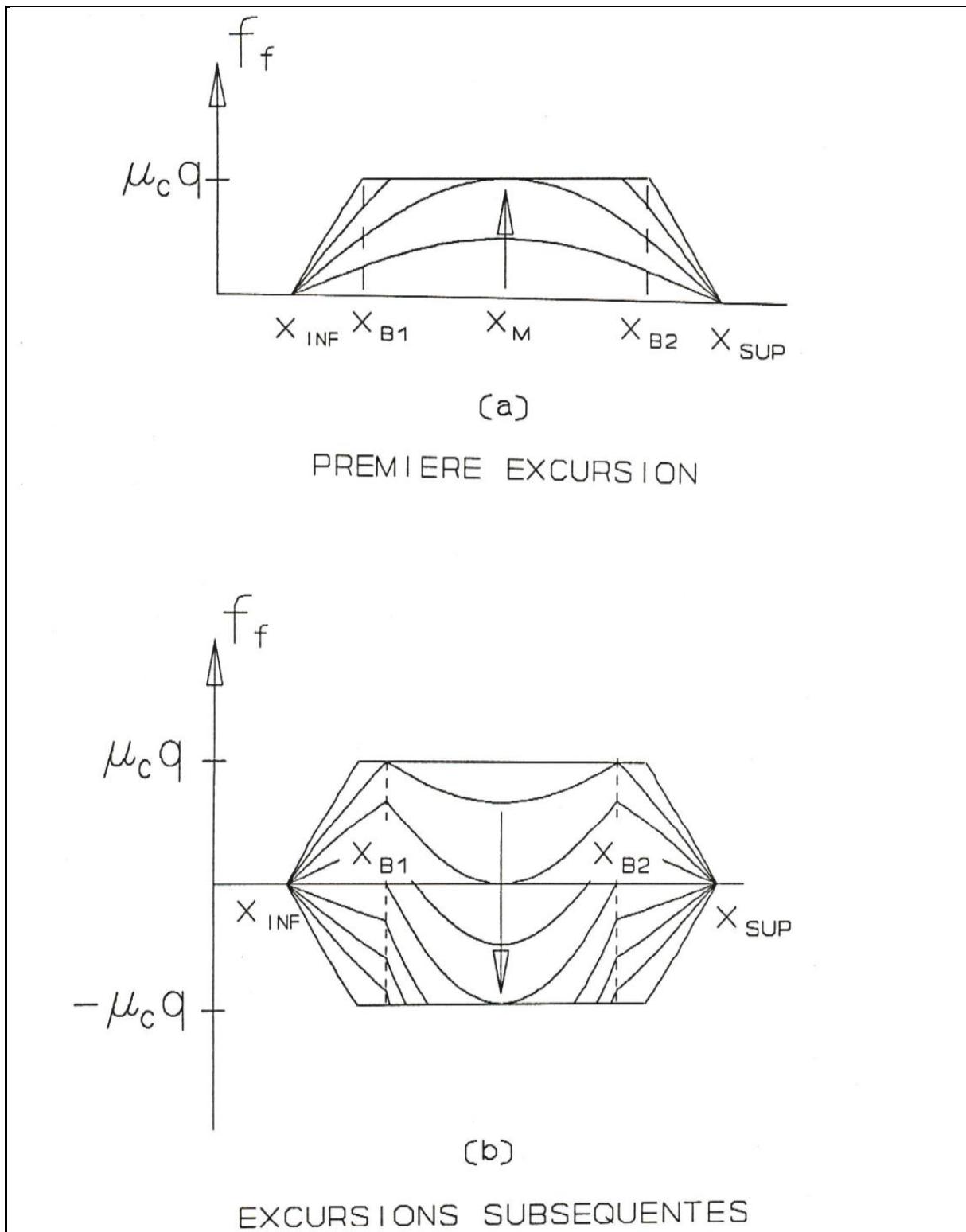
Les différents mécanismes décrits dans les sections 4.1.1 et 4.1.2 présentent les principes de base de la dissipation d'énergie dans un toron pour les différents modèles mathématiques. Il est suffisant d'analyser un seul demi-pas de fil du modèle de Hardy pour la déformée ayant un rayon de courbure constant pour regarder plus concrètement le mécanisme de dissipation d'énergie à l'intérieur d'un toron.

Le graphique (a) de la figure 4.3 montre la croissance de la force de friction, le long d'un fil à l'intérieur d'un demi-pas, au fur et à mesure que la courbure du toron passe d'une valeur nulle (toron rectiligne) à une valeur suffisamment grande pour qu'il y ait du macro-glissement qui se soit propagé entre  $X_{B1}$  et  $X_{B2}$ . La position  $X_{INF}$  se situe à l'extrados,  $X_{SUP}$  est un demi-pas plus loin à l'intrados. Le plan neutre est donc au centre à  $X_M$ .

Le graphique (a) de la figure 4.3 présente la première excursion. La force de friction agissant sur le fil dans le demi-pas est toujours dans la même direction, ce qui a pour effet de réduire la longueur du fil en-dessous du plan neutre et allonger ce dernier au-dessus du plan neutre.

Tant que la valeur maximale de la force de friction n'est pas atteinte, la distribution et l'intensité de la force de friction sur le fil assure le glissement nul de ce dernier sur la surface de l'âme tout le long du demi-pas.

Lorsque la courbure du toron devient suffisamment grande pour que la valeur maximale de la force de friction soit atteinte, vis-à-vis le plan neutre (à  $X_M$ ), alors la force de friction n'est plus suffisamment grande pour assurer le glissement nul autour de ce point, ce qui permet du macro-glissement entre le fil et la surface de l'âme. Ce macro-

**Figure 4.3**

Distribution de la force de friction dans un demi-pas pour le modèle de Hardy avec la flèche ayant un rayon de courbure constant

glissement se propage au fur et à mesure que la courbure du toron continue d'augmenter.

A la valeur maximale positive de la courbure, le macro-glissement s'est propagé entre les bornes  $X_{B1}$  et  $X_{B2}$ . Cette première excursion représente le premier quart de cycle.

Lorsque la courbure du toron commence à diminuer (graphique (b), figure 4.3), après avoir atteint sa valeur maximale positive, le fil colle à la surface de l'âme, ces derniers se déplacent donc ensemble "élastiquement" jusqu'à ce que la force de friction atteigne une fois de plus sa valeur limite vis-à-vis le plan neutre ( $X_M$ ).

Alors du macro-glissement apparaît et se propage tant que la courbure du toron continue à diminuer puis à augmenter vers sa valeur maximale négative. Le macro-glissement s'est propagé jusqu'aux mêmes bornes  $X_{B1}$  et  $X_{B2}$  de la première excursion lorsque la courbure du toron a atteint sa valeur maximale négative.

Cette seconde excursion qui représente un demi-cycle, est typique de tous les autres demi-cycles suivants. La distribution de la force de friction à la fin des demi-cycles correspond à la distribution de la force de friction de la fin de la première excursion.

#### 4.2 Dissipation d'énergie des modèles sans complaisance

La dissipation d'énergie due au macro-glissement pour un cycle complet est obtenue en intégrant la différence entre le déplacement de la surface de l'âme et celui du fil dans la région de macro-glissement, multiplié par quatre (pour représenter un cycle complet) fois la force de friction maximale:

$$\Delta W_i^{HC} = \sec \alpha \left[ \int_{X_{B1}}^{X_{B2}} (D_i(X) - u_i^{HC}(X)) 4(-+) \mu_c q dX \right] \quad (4.1)$$

où l'exposant HC indique qu'il s'agit du modèle de Hardy ou du modèle avec continuité de déformation (modèle sans complaisance).

Le signe de la différence de déplacement entre la surface de l'âme et le fil dépend du côté du plan XY qui est considéré; il en est de même pour le signe de  $\mu_c$ . Ces signes sont toujours identiques, ce qui permet de réécrire cette dernière équation;

$$\Delta W_i^{HC} = 4 \mu_c q \sec \alpha \left[ \int_{X_{B1}}^{X_{B2}} |D_i(X) - u_i^{HC}(X)| dX \right] \quad (4.2)$$

où la différence de déplacement est en valeur absolue.

Dans l'équation 4.2, l'équation du déplacement de la surface de l'âme "D<sub>i</sub>(X)" à utiliser dépend de la déformée qui est considérée. L'équation du déplacement du fil "u<sup>c</sup>(X)" à utiliser dépend de la déformée et du modèle considérés. Il y donc quatre combinaisons possibles d'équations à utiliser dans 4.2:

**i)** Modèle de Hardy avec la déformée ayant un rayon de courbure constant;

$$D_i(X) \Rightarrow \text{eq. 1.10 et } u^c(X) \Rightarrow \text{eq. 2.13.}$$

**ii)** Modèle avec continuité de déformation avec la déformée ayant un rayon de courbure constant;

$$D_i(X) \Rightarrow \text{eq. 1.10 et } u^c(X) \Rightarrow \text{eq. 2.29.}$$

**iii)** Modèle de Hardy avec la déformée sinusoïdale;

$$D_i(X) \Rightarrow \text{eq. 1.13 et } u^c(X) \Rightarrow \text{eq. 2.24.}$$

**iv)** Modèle avec continuité de déformation avec la déformée sinusoïdale;

$$D_i(X) \Rightarrow \text{eq. 1.13 et } u^c(X) \Rightarrow \text{eq. 2.39.}$$

L'intégration de l'équation 4.2 est effectué numériquement en utilisant la méthode de Romberg dont l'algorithme est présenté à l'annexe C.

#### 4.3 Dissipation d'énergie du modèle avec complaisance

##### i) **Énergie dissipée dans les régions de micro-glissemement**

L'équation de la dissipation d'énergie due au micro-glissemement dans un cycle complet, pour un solide, d'une surface de contact circulaire a été développée par Mindlin [11]:

$$W = \frac{9(2-v)\mu_c^2 Q^2}{10Gb} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{F_f}{\mu_c Q} \right)^{\frac{5}{3}} - \frac{5F_f}{6\mu_c Q} \left( 1 + \left( 1 - \frac{F_f}{\mu_c Q} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \right] \quad (4.3)$$

où **W** ⇒ énergie dissipée due au micro-glissemement.

**G** ⇒ module de cisaillement.

**Q** ⇒ force normale à la surface de contact.

**F<sub>f</sub>** ⇒ force tangentielle à la surface de contact.

**b** ⇒ rayon de la surface de contact.

**μ<sub>c</sub>** ⇒ coefficient de friction de Coulomb.

**v** ⇒ coefficient de Poisson.

Le développement de cette dernière équation est présenté à l'annexe B. Cette dernière peut être adaptée au cas de la ligne de contact entre deux cylindres parallèles à l'aide du facteur de forme  $\Phi$  développé par Deriesiewicz [3] et donné par l'équation 3.10.

En divisant l'équation 4.3 par "b" et en utilisant  $\Phi$  cette dernière devient pour le cas de la ligne de contact:

$$\Delta\omega = \frac{9(2-\nu)\mu_c^2 q^2}{10G} \Phi \left[ 1 - \left( 1 - \frac{f_f}{\mu_c q} \right)^{\frac{5}{3}} - \frac{5f_f}{6\mu_c q} \left/ \left( 1 + \left( 1 - \frac{f_f}{\mu_c q} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \right. \right] \quad (4.4)$$

où  $\Delta\omega$   $\Rightarrow$  énergie dissipée due au micro-glissement par unité de longueur pour un corps.

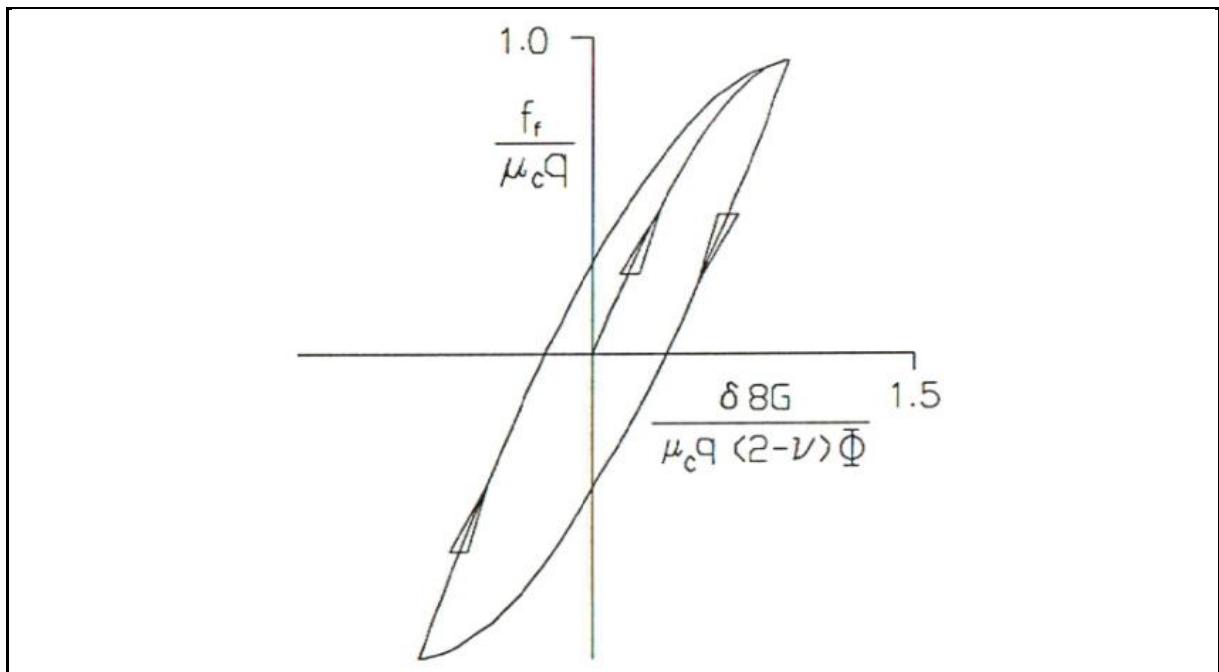
$G$   $\Rightarrow$  module de cisaillement.

$q$   $\Rightarrow$  force normale à la surface de contact par unité de longueur.

$f_f$   $\Rightarrow$  force tangentielle à la surface de contact par unité de longueur.

$\Phi$   $\Rightarrow$  facteur de forme donné par l'équation 3.10.

La forme de la courbe d'hystérésis de cette équation est présentée à la figure 4.4.



**Figure 4.4** Courbe typique d'hystérésis de la dissipation d'énergie due au micro-glissement

Dans les modèles mathématiques étudiés, le déplacement de la surface de l'âme est imposé et celui du fil déterminé. Il est donc intéressant de réécrire l'équation 4.4 en fonction des déplacements plutôt que des forces de friction  $f_f$  et  $\mu_c q$ .

Le déplacement relatif d'un corps par rapport à un point qui n'a pas glissé sur la surface de contact est donné par l'équation 3.11. Le déplacement maximal permis par la complaisance est obtenu lorsque  $f_f = \mu_c q$  dans l'équation 3.11 ce qui donne:

$$\delta_{\max} = \frac{3(2-v)\mu_c q}{16G} \Phi \quad (4.5)$$

donc,

$$\frac{\delta}{\delta_{\max}} = 1 - \left(1 - \frac{f_f}{\mu_c q}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (4.6)$$

$$1 - \frac{f_f}{\mu_c q} = \left(1 - \frac{\delta}{\delta_{\max}}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (4.7)$$

En substituant cette dernière dans l'équation 4.4:

$$\Delta\omega = \frac{9(2-v)\mu_c^2 q^2}{10G} \Phi \left[ 1 - \left(1 - \frac{\delta}{\delta_{\max}}\right)^{\frac{5}{2}} - \left\{ \frac{5}{3} - \frac{5\delta}{6\delta_{\max}} \right\} \left(1 - \left(1 - \frac{\delta}{\delta_{\max}}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \right] \quad (4.8)$$

où  $\delta$  est donné par:

$$\delta = \frac{|D_i - u_{ij}|}{2} \quad (4.9)$$

où  $D_i \Rightarrow$  Déplacement de la surface de l'âme pour le fil "i"  
 $u_{ij} \Rightarrow$  Déplacement du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j" (voir figure 3.7).

La différence de déplacement dans l'équation 4.9 est mise en valeur absolue afin de ne pas avoir à tenir compte du signe de " $\delta$ " qui est fonction du côté du plan XY qui est considéré.

Finalement, en remplaçant l'équation 4.9 dans l'équation 4.8, l'équation de la dissipation d'énergie par unité de longueur due au micro-glissement, pour un corps, devient:

$$\Delta\omega_{ij} = \frac{9(2-v)\mu_c^2 q^2}{10G} \Phi \left[ 1 - \left( 1 - \frac{|D_i - u_{ij}|}{2\delta_{\max}} \right)^{\frac{5}{2}} \right. \\ \left. - \left( \frac{5}{3} - \frac{5|D_i - u_{ij}|}{12\delta_{\max}} \right) \left( 1 - \left( 1 - \frac{|D_i - u_{ij}|}{2\delta_{\max}} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \right] \quad (4.10)$$

où l'indice  $ij$  est introduit pour indiquer qu'il s'agit de la dissipation d'énergie du fil "i" dans la région de la portion linéaire "j".

L'équation 4.10 détermine la dissipation d'énergie due à un seul corps, dans notre cas il y a deux corps, l'âme et le fil. La dissipation d'énergie totale, pour un cycle complet, d'une région de micro-glissement est donc obtenue en multipliant 4.10 par deux, puis en l'intégrant entre les bornes de cette région:

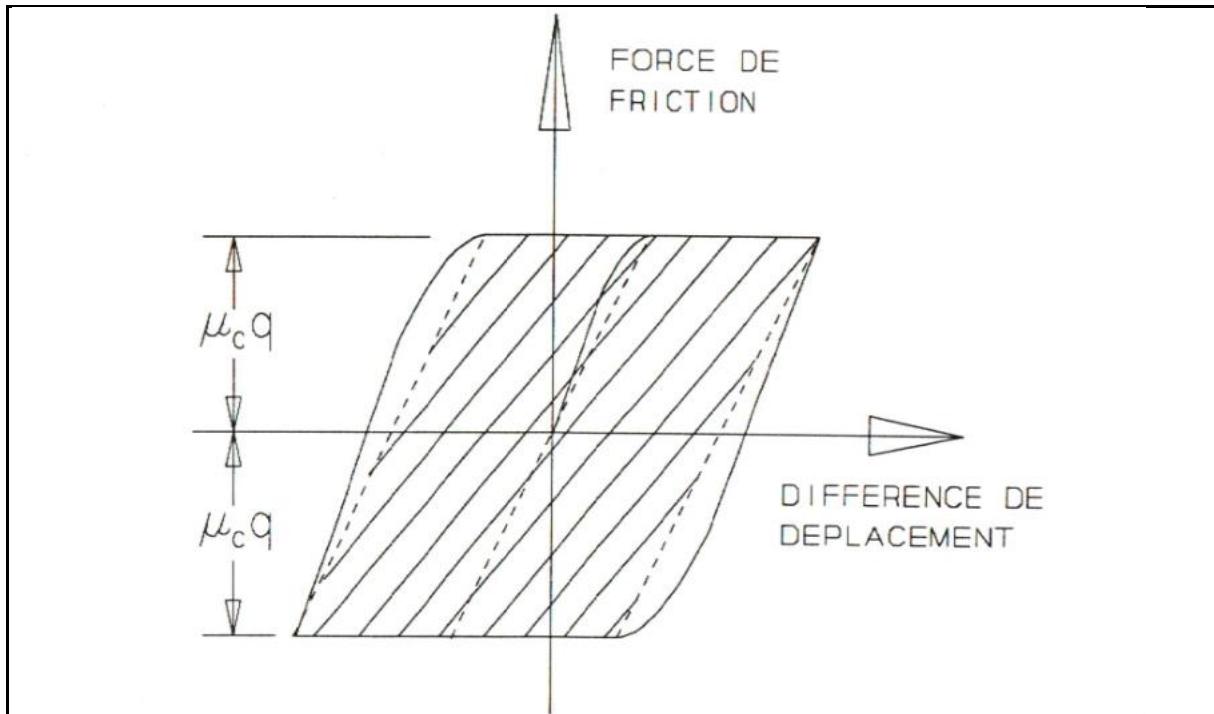
$$\Delta W_{ij} = \sec \alpha \int_{X_{Rk}}^{X_{R(k+1)}} 2\Delta\omega_{ij} dX \quad (4.11)$$

En substituant l'équation 4.10 dans cette dernière:

$$\Delta W_{ij} = \frac{9(2-v)\mu_c^2 q^2}{5G \cos \alpha} \Phi \int_{X_{Rk}}^{X_{R(k+1)}} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{|D_i - u_{ij}|}{2\delta_{\max}} \right)^{\frac{5}{2}} \right. \\ \left. - \left( \frac{5}{3} - \frac{5|D_i - u_{ij}|}{12\delta_{\max}} \right) \left( 1 - \left( 1 - \frac{|D_i - u_{ij}|}{2\delta_{\max}} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \right] dX \quad (4.12)$$

### ii) Énergie dissipée dans la région de macro-glissement

La courbe d'hystérésis dans la région de macro-glissement pour un cycle complet (2 corps) a la forme présentée à la figure 4.5.



**Figure 4.5** Courbe typique d'hystérésis de la dissipation d'énergie due au micro et macro-glissement

L'aire non-hachurée correspond à la dissipation d'énergie maximale due au micro-glissement. Cette valeur maximale est constante et obtenue lorsque  $\delta=\delta_{\max}$  dans l'équation 4.8:

$$2\Delta\omega_{\max} = \frac{3(2-v)\mu_c^2 q^2}{10G}\Phi \quad (4.13)$$

L'aire hachurée correspond à la dissipation d'énergie due au

macro-glissement, la valeur de cette aire est donnée par:

$$\Delta\omega_i^\zeta = 4 \left( D_i(X) - u_i^\zeta(X) + -2\delta_{\max} \right) (-+\mu_c q) \quad (4.14)$$

où l'exposant " $\zeta$ " indique qu'il s'agit de la région de macro-glissement pour le modèle avec complaisance.

Les signes de " $\delta_{\max}$ " et de " $\mu_c$ " dans l'équation 4.14 sont déterminés en fonction du côté du plan XY qui est considéré. Il faut noter que le signe de " $\delta_{\max}$ " est toujours contraire à celui de la différence de déplacement, donc également contraire au signe de " $\mu_c$ ".

Les équations 4.13 et 4.14 donnent la dissipation d'énergie par unité de longueur, pour obtenir la dissipation d'énergie totale d'un cycle complet dans la région de macro-glissement, il faut intégrer et additionner ces dernières entre les bornes de cette région, ce qui donne:

$$\begin{aligned} \Delta\bar{W}_i^\zeta &= 4 \sec\alpha (-+\mu_c q) \int_{X_{B1}}^{X_{B2}} (D_i(X) - u_i^\zeta(X) + -2\delta_{\max}) dX \\ &\quad + \sec\alpha \int_{X_{B1}}^{X_{B2}} 2\Delta\omega_{\max} dX \end{aligned} \quad (4.15)$$

où  $D_i(X) \Rightarrow$  déplacement de la surface de l'âme pour le fil "i"  
 $u_i^\zeta(X) \Rightarrow$  déplacement du fil "i" dans la région de macro-glissement  
 $\delta_{\max} \Rightarrow$  déplacement maximal lorsque le macro-glissement débute.

Les équations du déplacement de la surface de l'âme et du

fil à utiliser dans 4.15 sont fonction de la déformée considérée.  
Il y a donc deux combinaisons possibles d'équations;

**i)** Déformée ayant un rayon de courbure constant:

$$D_i(X) \Rightarrow \text{eq. 1.10} \text{ et } u_i^\xi(X) \Rightarrow \text{eq. 3.32}$$

**ii)** Déformée sinusoïdale:

$$D_i(X) \Rightarrow \text{eq. 1.13} \text{ et } u_i^\xi(X) \Rightarrow \text{eq. 3.34}$$

L'intégration des équations 4.12 et 4.15 est effectuée numériquement en utilisant la méthode de Romberg dont l'algorithme est présenté à l'annexe C.

Les courbes de dissipation d'énergie des trois modèles pour les deux types de déformée sont présentées au chapitre 6.

## CHAPITRE 5

ÉQUATIONS ADIMENSIONNELLES

Transformer les différentes équations des chapitres précédents de façon à ce qu'elles soient adimensionnelles, facilite considérablement l'analyse et la présentation des résultats finaux. Les constantes utilisées pour rendre les équations adimensionnelles sont présentées à la section 5.1. Ces constantes ont été choisies de façon à obtenir des équations adimensionnelles qui ont le minimum de paramètres adimensionnels. Les paramètres adimensionnels utilisés dans ces équations sont présentés à la section 5.2.

5.1 Constantes utilisées pour rendre les équations adimensionnelles

Les différentes constantes utilisées sont:

i) Déplacement

$$\gamma_D = \frac{2\mu_c T_i R_a}{E R_F^2} \quad (5.1)$$

Cette constante a la dimension d'une longueur. Le déplacement de la surface de l'âme, celui du fil et le déplacement " $\delta$ " sont des longueurs; donc, en divisant ces différentes équations par l'équation 5.1, elles deviendront adimensionnelles.

### ii) Déformation

La déformation est adimensionnelle par définition. Par contre, pour simplifier la résolution du système d'équations et pour s'assurer que les différentes inconnues de ce système sont sous la même forme, il faut utiliser une constante adimensionnelle pour modifier les équations de déformation:

$$\gamma_E = \frac{\mu_c T_i \sin \alpha}{E \pi R_F^2} \quad (5.2)$$

Cette constante est adimensionnelle. En divisant les différentes équations de déformation par l'équation 5.2, elles resteront adimensionnelles et leurs inconnues auront la même forme que celles des équations adimensionnelles de déplacement.

### iii) Deuxième dérivée de déplacement

La variation de tension dans le fil, due à la force de friction entre ce dernier et la surface de l'âme, est fonction de la deuxième dérivée de déplacement. Donc, il est possible d'utiliser cette deuxième dérivée de déplacement du fil pour représenter la force de friction à une constante près (eq. 3.23). La deuxième dérivée a comme dimension l'inverse d'une longueur, il faut donc utiliser la constante:

$$\gamma_F = \frac{\mu_c T_i \sin^2 \alpha}{2 \pi^2 E R_F^2 R_a} \quad (5.3)$$

Cette constante a comme dimension l'inverse d'une longueur. En divisant les équations de deuxième dérivée par l'équation 5.3, elles deviendront adimensionnelles et leurs inconnues auront la même forme que celles des équations adimensionnelles de déplacement.

## iv) Énergie

$$\gamma_w = \frac{2\mu_c^2 T_i R_a q p}{E R_F^2 \cos \alpha} \quad (5.4)$$

Cette constante a comme dimension le Joule; l'énergie dissipée est en Joule; donc en divisant les équations d'énergie dissipée par l'équation 5.4, elles deviendront adimensionnelles et leurs inconnues auront la même forme que celles des équations adimensionnelles de déplacement.

5.2 Paramètres adimensionnels

Les équations adimensionnelles sont en fonction de paramètres adimensionnels. Ces différents paramètres sont présentés ici:

i)  $\theta_i$  -> Position angulaire du fil "i" à l'origine des axes principaux (radians).

ii)  $\bar{X}$  -> Position adimensionnelle le long de l'axe X.

$$\bar{X} = \frac{X}{p} \quad (5.5)$$

où  $p$  est le pas du fil.

iii)  $\bar{\rho}$  -> Rayon de courbure adimensionnel imposé. Son expression est:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (5.6)$$

où  $\rho_c$  est donné par 2.10, d'où;

$$\bar{\rho} = \frac{\rho T_i \sin \alpha \mu_c}{\pi R_a (1 - v \tan^2 \alpha) \cos^2 \alpha E R_F^2} \quad (5.7)$$

iv)  $\bar{\lambda}$  -> Paramètre adimensionnel qui représente le nombre de pas dans une longueur d'onde:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{p} \quad (5.8)$$

v)  $\bar{A}$  -> Amplitude adimensionnelle de la sinusoïde imposée. Son expression est:

$$\bar{A} = \frac{A}{A_c} \quad (5.9)$$

où  $A_c$  est donné par 2.23, d'où;

$$\bar{A} = \frac{A \pi R_a (1 - v \tan^2 \alpha) \cos^2 \alpha E R_F^2}{T_i \sin \alpha \mu_c} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \quad (5.10)$$

vi)  $\gamma_1$  -> Paramètre adimensionnel qui représente la complaisance des matériaux. Son expression est:

$$\gamma_1 = 4 \left( \frac{R_F}{R_a} \right)^2 (1 + v) \sin^2 \alpha \left[ 0.059125 + \ln \sqrt{\frac{E R_a (R_F + R_a)}{T_i \sin^2 \alpha (1 - v^2)}} \right] \quad (5.11)$$

Seuls les paramètres  $\theta_i$  et  $\bar{X}$  se retrouvent dans toutes les équations adimensionnelles, l'utilisation des autres paramètres dépend du modèle et de la déformée considérée.

Le facteur de complaisance  $\gamma_1$  est fonction des caractéristiques géométriques du toron, de la tension initiale " $T_i$ " et des propriétés mécaniques du matériau de l'âme et du fil.

Afin d'avoir un ordre de grandeur de ce facteur de complaisance  $\gamma_1$ , on prend, comme exemple, un toron qui a les caractéristiques suivantes:

- Rayon du toron : 17,80 mm
- Rayon de l'âme (aluminium) : 13,53 mm
- Rayon d'un fil (aluminium) : 2,135 mm
  
- Aire totale du toron : 890,1 mm<sup>2</sup>
- Aire de l'âme : 575,1 mm<sup>2</sup>
- Aire d'un fil : 14,32 mm<sup>2</sup>
  
- Nombre de fils : 22
  
- Angle d'enroulement:
  - âme : 0°
  - couche de fils : 15°

Caractéristiques de l'aluminium;

- Module de Young : 70 GPa
- Coefficient de Poisson : 0,3
- Le coefficient de Coulomb entre les fils et l'âme est posé égal à : 0,8

La tension initiale dans le toron est 41375 Newton. La tension initiale dans un fil est obtenue selon les équations de Hruska [6]. La valeur obtenue avec ces équations est 643,5 N.

La valeur du facteur de complaisance pour ce toron est  $\gamma_1 = 0.05621$ .

Toutes les équations qui ont été transformées à l'aide des constantes de la section 5.1 sont données à l'annexe A. Ce sont les équations adimensionnelles de l'annexe A qui sont utilisées pour obtenir les résultats présentés au chapitre 6.

## CHAPITRE 6

RÉSULTATS

Ce chapitre présente les résultats obtenus à l'aide des équations adimensionnelles de l'annexe A.

### 6.1 Courbes de déplacement, déformation et rapport de friction

Les courbes tracées en trait plein sont des courbes relatives au glissement tandis que celles tracées en tirets sont relatives au glissement nul.

La force tangentielle " $f_f$ " développée à l'interface âme-fil représente une fraction de la force normale " $q$ " présente à l'interface âme-fil; cette fraction est identifiée par " $\mu_i$ ". Le coefficient de friction de Coulomb est identifié par " $\mu_c$ ".

On définit un "rapport de friction" par:

$$R_\mu = \frac{\mu_i}{\mu_c} \quad (6.1)$$

Le rapport de friction peut s'exprimer sous une forme plus explicite:

$$R_\mu = \frac{\mu_i}{\mu_c} = \left[ \frac{Ea}{\mu_c q} \right] \left[ \frac{d^2 u_i}{d S^2} \right] \quad (6.2)$$

En multipliant le terme entre les premiers crochets par " $\gamma_F$ " (éq. 5.3) et en divisant celui entre les deuxièmes crochets par ce même " $\gamma_F$ " l'équation du "rapport de friction" prend la forme:

$$R_u = \frac{\mu_i}{\mu_c} = \frac{1}{2\pi} \overline{\frac{d^2 u_i}{dS^2}} \quad (6.3)$$

Cette équation montre que le rapport de friction  $R_u$  s'obtient en divisant la deuxième dérivée adimensionnelle du déplacement du fil par  $2\pi$ .

Un rapport de friction  $R_u$  supérieur à 1 en valeur absolue représente du macro-glissement.

#### 6.1.1 Déformée ayant un rayon de courbure constant

Pour ce type de déformée, il est suffisant d'analyser un seul demi-pas de fil, car un demi-pas de fil est représentatif de tout les autres demi-pas.

Les courbes de déplacement et déformation sans glissement sont obtenues avec les équations A.1 et A.3. Celle du rapport de friction  $R_u$  est obtenue en divisant A.5 par  $2\pi$ .

Les paramètres utilisés pour obtenir les courbes présentées pour cette déformée sont:

⇒ position angulaire du fil "i":  $\theta_i = 90^\circ$

⇒ rayon de courbure adimensionnel:  $\bar{p} = 0.8$

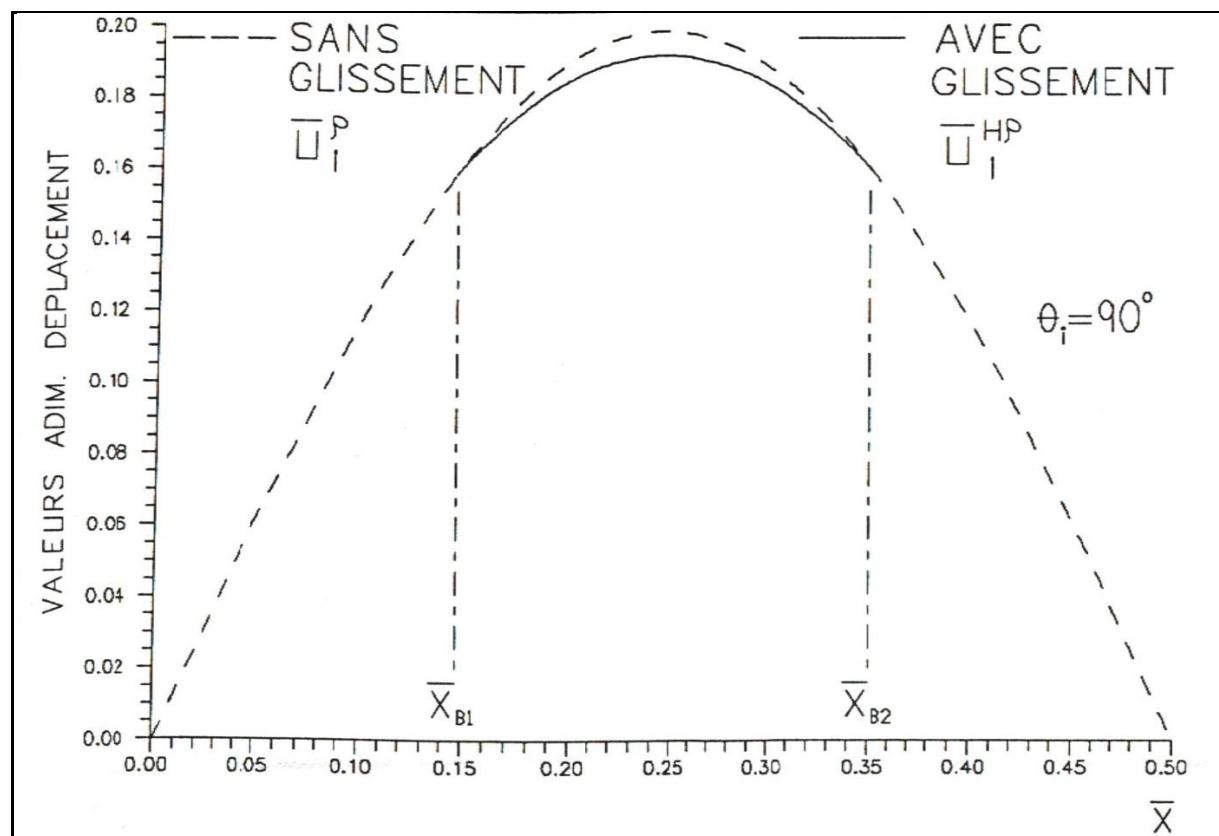
⇒ demi-pas  $\bar{X}_{INF}=0.0$  à  $\bar{X}_{SUP}=0.5$ .

#### 6.1.1.1 Modèle de Hardy

Les courbes de déplacement et déformation du fil avec glissement pour ce modèle sont obtenues avec les équations A.7 et A.10. Celle du rapport de friction  $R_\mu$  est donnée en divisant A.11 par  $2\pi$ .

La figure 6.1(a) présente les courbes de déplacement avec glissement et sans glissement pour le demi-pas étudié.

Dans la région de macro-glisement, qui est bornée par  $\bar{X}_{B1}$  et  $\bar{X}_{B2}$ , la force de friction entre le fil et l'âme n'est pas suffisamment grande pour assurer le glissement nul du fil.

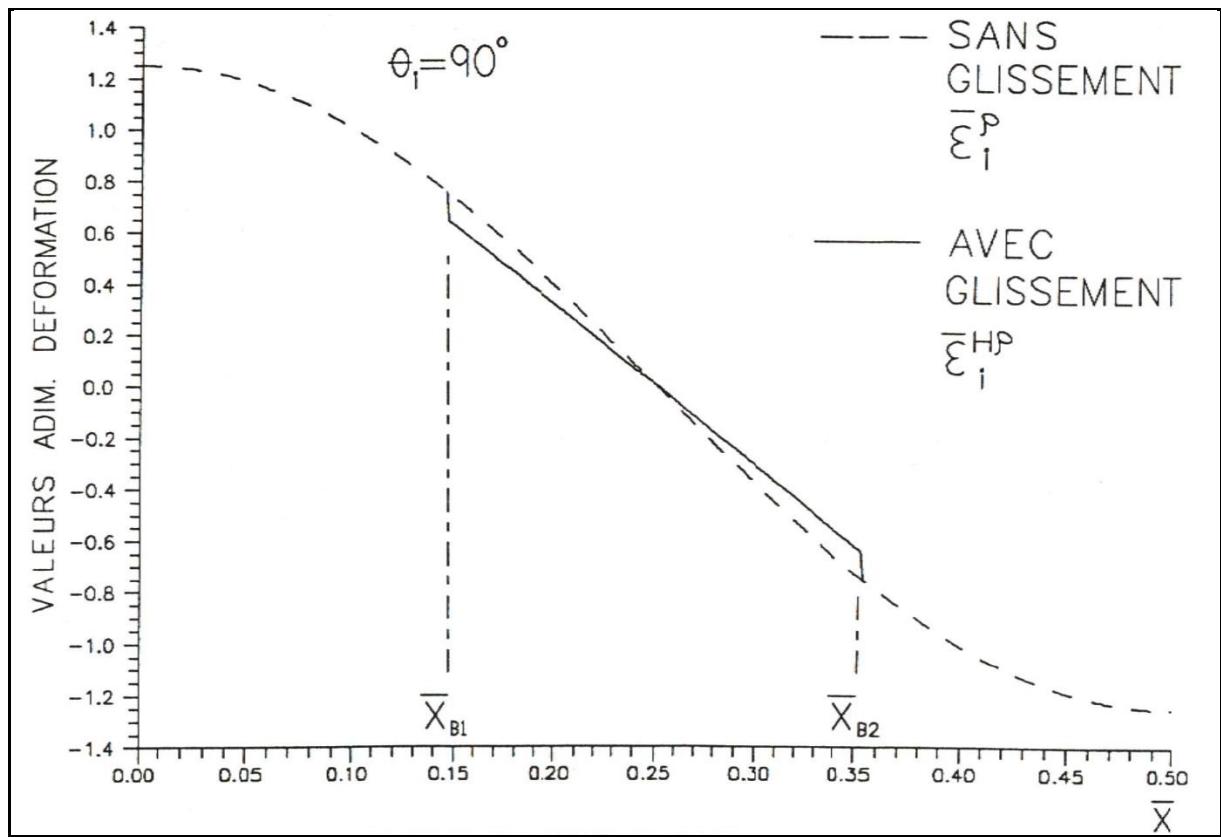


**Figure 6.1(a)** Déplacement du fil avec glissement et sans glissement pour le modèle de Hardy:  $\bar{\rho} = 0.8$

Donc, le déplacement du fil avec glissement est inférieur à celui sans glissement. Cette différence de déplacement se visualise bien dans la région centrale de la figure 6.1(a) (région de macro-glisserement).

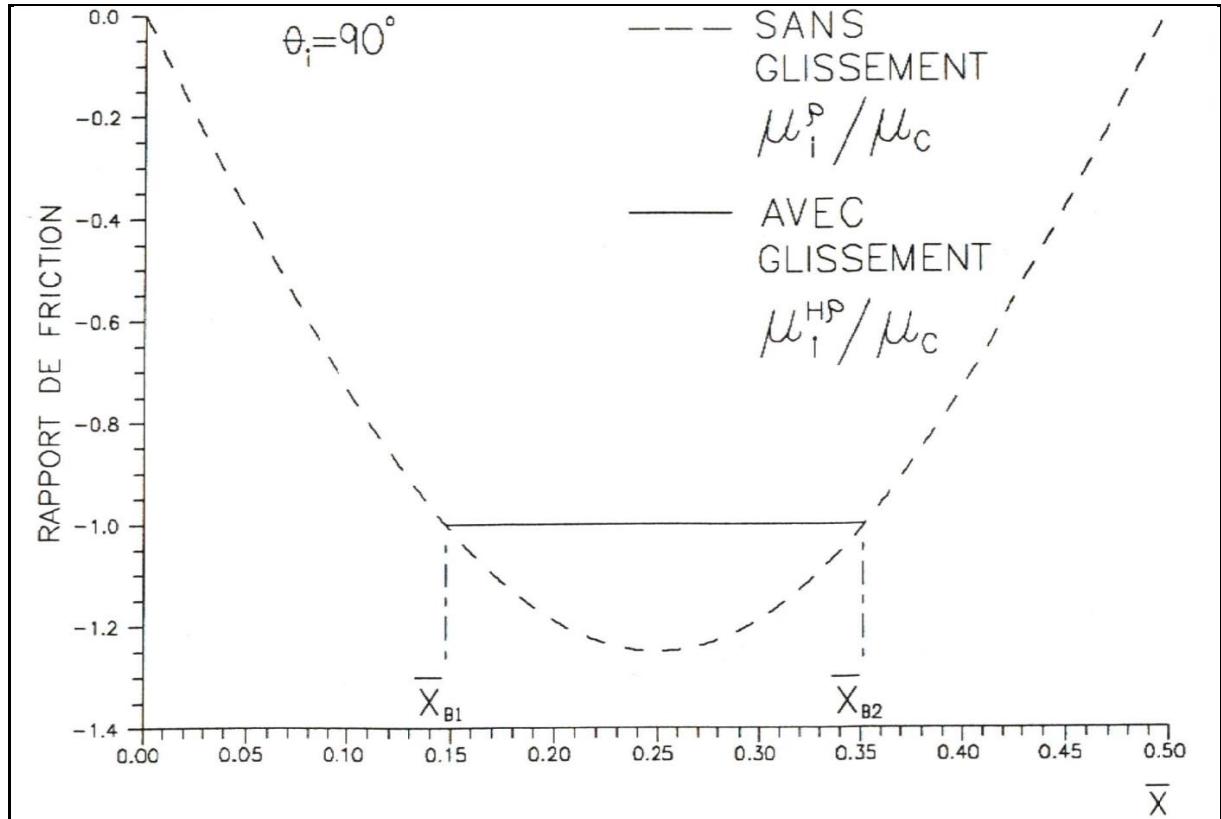
Les courbes de déformation avec glissement et sans glissement pour le demi-pas étudié sont présentées à la figure 6.1(b).

Dans la région de macro-glisserement, la déformation du fil est donnée par une droite dont la pente représente la force de friction maximale ( $\mu_c q$ ) entre le fil et la surface de l'âme.



**Figure 6.1(b)** Déformation du fil avec glissement et sans glissement pour le modèle de Hardy:  $\bar{\rho} = 0.8$

Dans ce modèle, la déformation du fil à chacune des bornes de la région de macro-glissement est discontinue. Cette discontinuité se voit clairement sur la figure 6.1(b) par la différence entre la déformation sans glissement et celle avec glissement aux bornes de la région de macro-glissement.



**Figure 6.1(c)** Rapport de friction  $R_\mu$  avec glissement et sans glissement pour le modèle de Hardy:  $\bar{\rho} = 0.8$

La figure 6.1(c) montre la distribution du rapport de friction qui représente la force de friction entre le fil et la surface de l'âme. Ce rapport est déterminé à partir de la deuxième dérivée du déplacement du fil (éq. 6.2), qui est de signe opposé à la force de friction appliquée à la surface du fil (voir figure 3.5 avec éq. 3.23). Dans la région de macro-glissement la force de friction est maximale et constante, ce qui est représenté par le plateau central de la courbe en trait plein de cette figure.

#### 6.1.1.2 Modèle avec continuité de déformation

Les courbes de déplacement et déformation du fil avec glissement de ce modèle sont données par A.12 et A.15. La courbe du rapport de friction  $R_\mu$  est obtenue en divisant A.16 par  $2\pi$ .

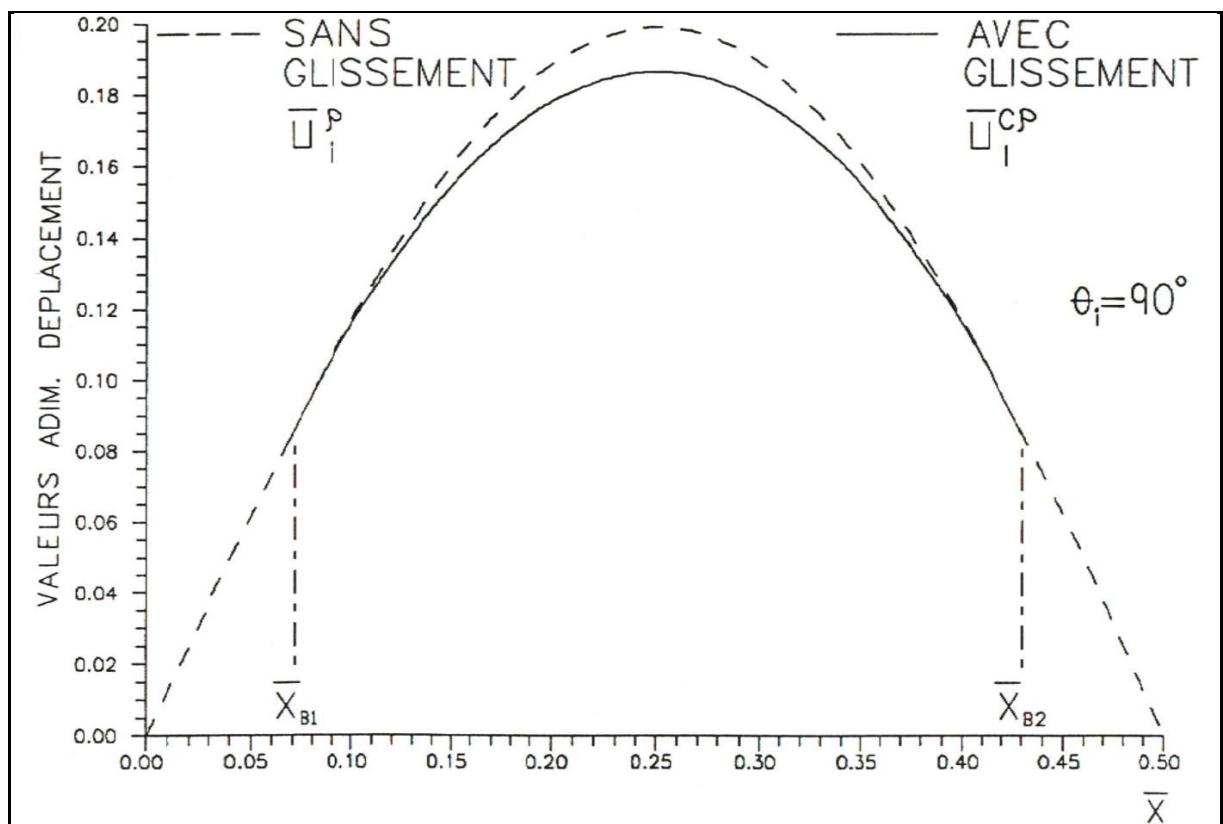
Les commentaires généraux des différentes courbes de ce modèle sont les mêmes que ceux du modèle de Hardy.

Les différences qu'il faut souligner entre les courbes du modèle avec continuité de déformation et celles du modèle de Hardy sont :

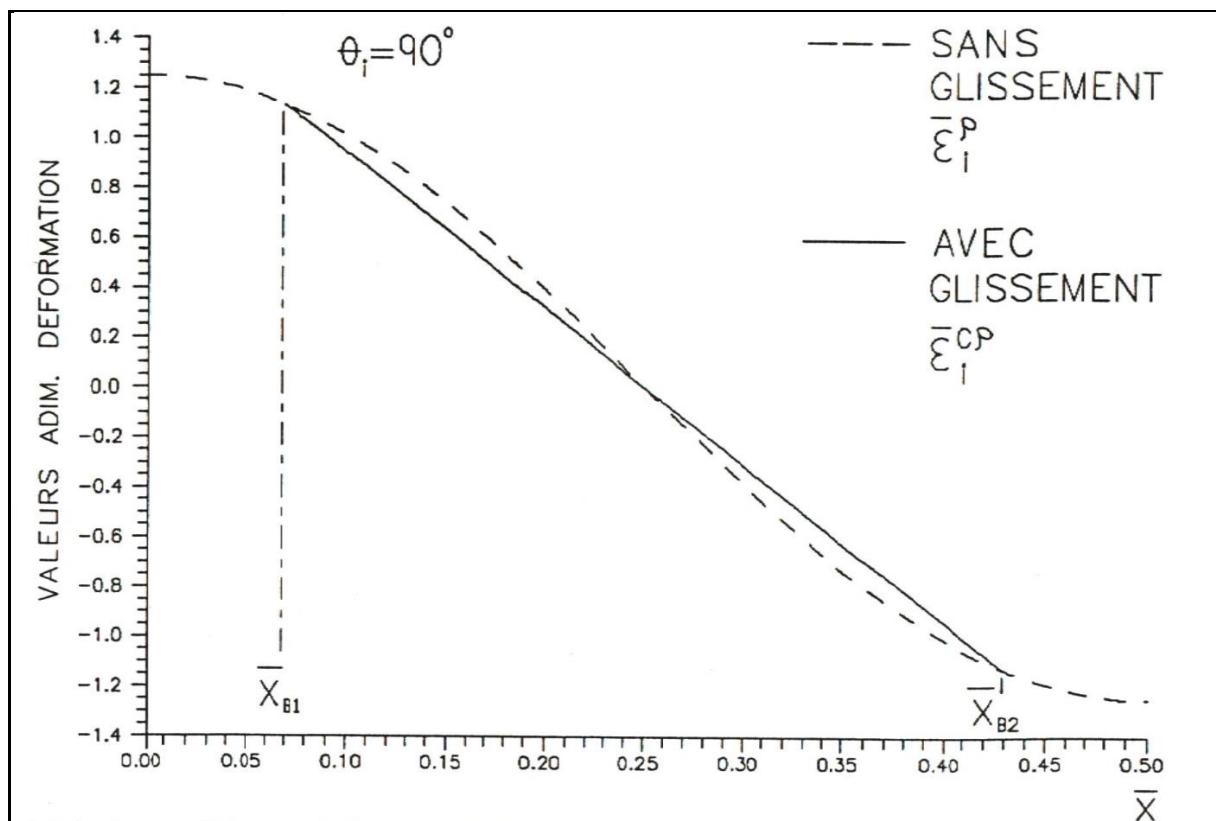
- i) La dimension de la région de macro-glissement qui est plus grande pour le modèle avec continuité de déformation.
- ii) Le modèle de Hardy a des discontinuités de déformation aux bornes de la région de macro-glissement. Le modèle avec continuité de déformation impose dans ces conditions limites la continuité de déformation (voir figure 6.1(b) et 6.2(b)).
- iii) La discontinuité du rapport de friction  $R_\mu$  (deuxième dérivée du déplacement du fil) dans le modèle avec continuité de déformation. Cette discontinuité n'existe pas dans le modèle de Hardy (voir figure 6.1(c) et 6.2(c)).

La section 6.1.1.4 présente une comparaison plus détaillée entre les différents résultats obtenus pour les deux modèles sans complaisance.

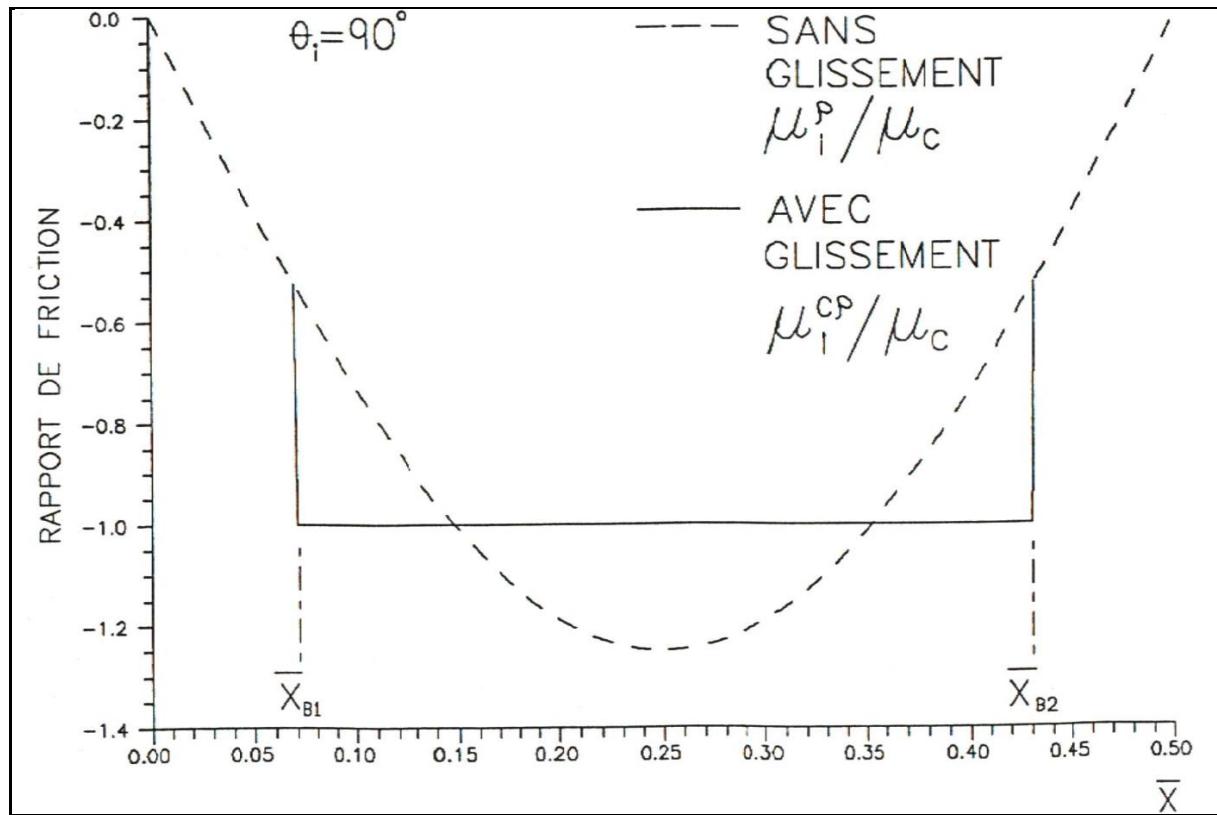
Les courbes de déplacement du fil, déformation et du rapport de friction  $R_\mu$  de ce modèle sont présentées aux figures 6.2(a), 6.2(b) et 6.2(c) respectivement.



**Figure 6.2(a)** Déplacement du fil avec glissement et sans glissement pour le modèle avec continuité de déformation:  $\bar{\rho} = 0.8$



**Figure 6.2 (b)** Déformation du fil avec glissement et sans glissement pour le modèle avec continuité de déformation:  $\bar{p}=0.8$



**Figure 6.2(c)** Rapport de friction  $R_\mu$  avec glissement et sans glissement pour le modèle avec continuité de déformation:  $\bar{\rho}=0.8$

### 6.1.1.3 Modèle avec complaisance

Les courbes de déplacement et déformation du fil avec glissement pour les régions de micro-glissement sont données par les équations A.17 et A.23 respectivement. La courbe du rapport de friction  $R_p$  est obtenue en divisant A.24 par  $2\pi$ .

Pour la région de macro-glissement de ce modèle les courbes correspondantes sont données par les équations A.25, A.28 et en divisant A.29 par  $2\pi$ .

Les points de transition sur les différentes courbes en trait plein représentent les positions où il y a un changement de portion linéaire de la courbe  $f_c \delta$  (voir figure 3.7). Une région de micro-glissement est bornée par deux points de transition adjacents.

Le rayon de courbure imposé ( $\bar{p} = 0.8$ ) est suffisamment petit pour qu'il existe dans le demi-pas de fil une région de macro-glissement. Lorsqu'il se produit du macro-glissement, le micro-glissement est modélisé par dix portions linéaires. Ce qui donne dix régions de micro-glissement de chaque côté de la région de macro-glissement.

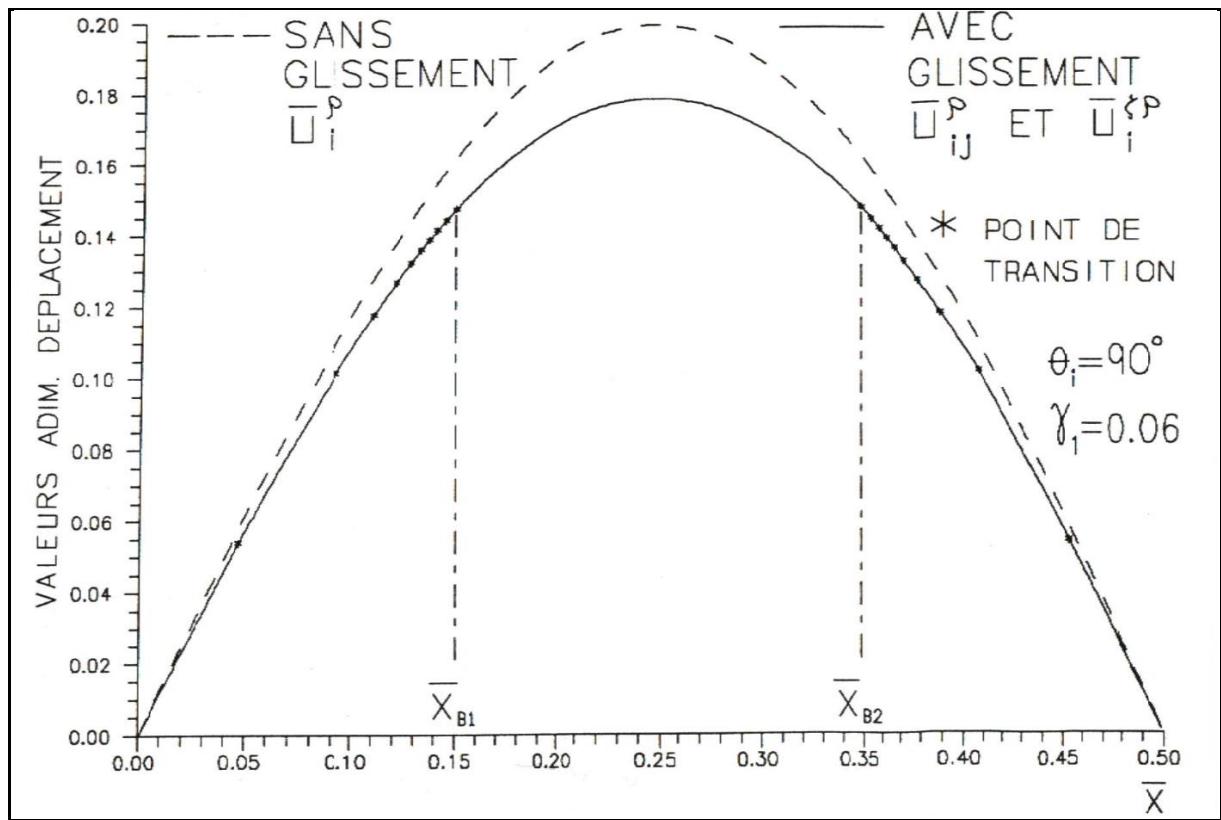
Il faut noter que les différentes équations de la surface de l'âme pour ce modèle ne représentent plus un point situé sur la surface de l'âme, mais un point qui se situe en dessous de celle-ci.

La figure 6.3(a) présente les courbes de déplacement avec glissement et sans glissement pour le demi-pas étudié.

Puisque ce modèle inclut la complaisance (micro-glissement), le déplacement avec glissement est nécessairement inférieur (en valeur absolue) à celui sans glissement sur tout le demi-pas.

Cette différence de déplacement dans les régions de micro-glisement est  $2\delta$  et se voit clairement sur la figure pour les positions  $0.0 \leq \bar{X} \leq \bar{X}_{B1}$  et  $\bar{X}_{B2} \leq \bar{X} \leq 0.5$ .

Aux bornes de la région de macro-glisement ( $\bar{X}_{B1}$  et  $\bar{X}_{B2}$ ) le déplacement dû à la complaisance a atteint sa valeur maximale admissible. Donc la différence de déplacement entre la courbe sans glissement et celle avec glissement à ces deux positions est  $2\delta_{MAX}$ . Dans la région de macro-glisement la différence entre les deux courbes est donc supérieure à  $2\delta_{MAX}$ .

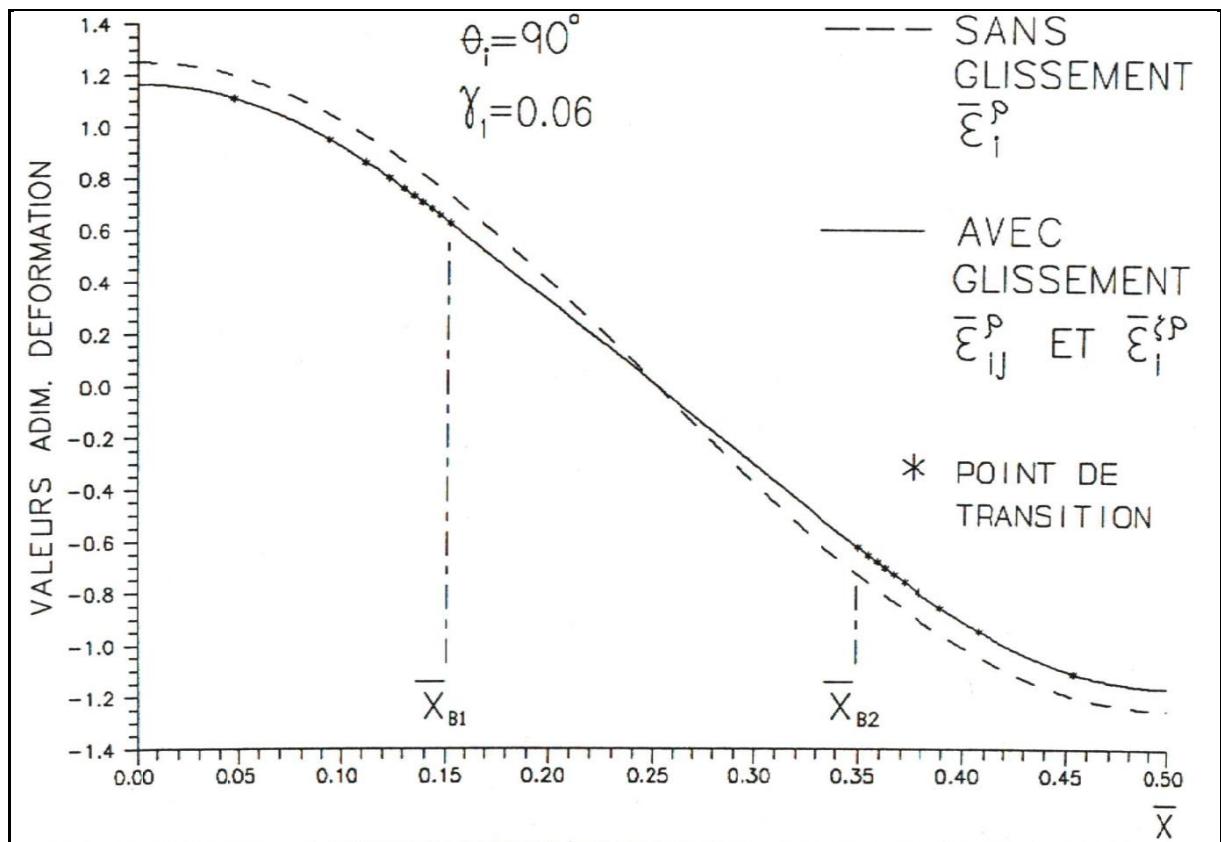


**Figure 6.3(a)** Déplacement du fil avec glissement et sans glissement pour le modèle avec complaisance:  $\bar{p}=0.8$

La figure 6.3(b) présente les courbes de déformation avec glissement et sans glissement pour le demi-pas étudié.

La complaisance permet un déplacement inférieur du fil par rapport à celui que ce dernier aurait pour le glissement nul. Il est donc évident que la déformation du fil avec glissement doit être inférieure (en valeur absolue) à celle sans glissement.

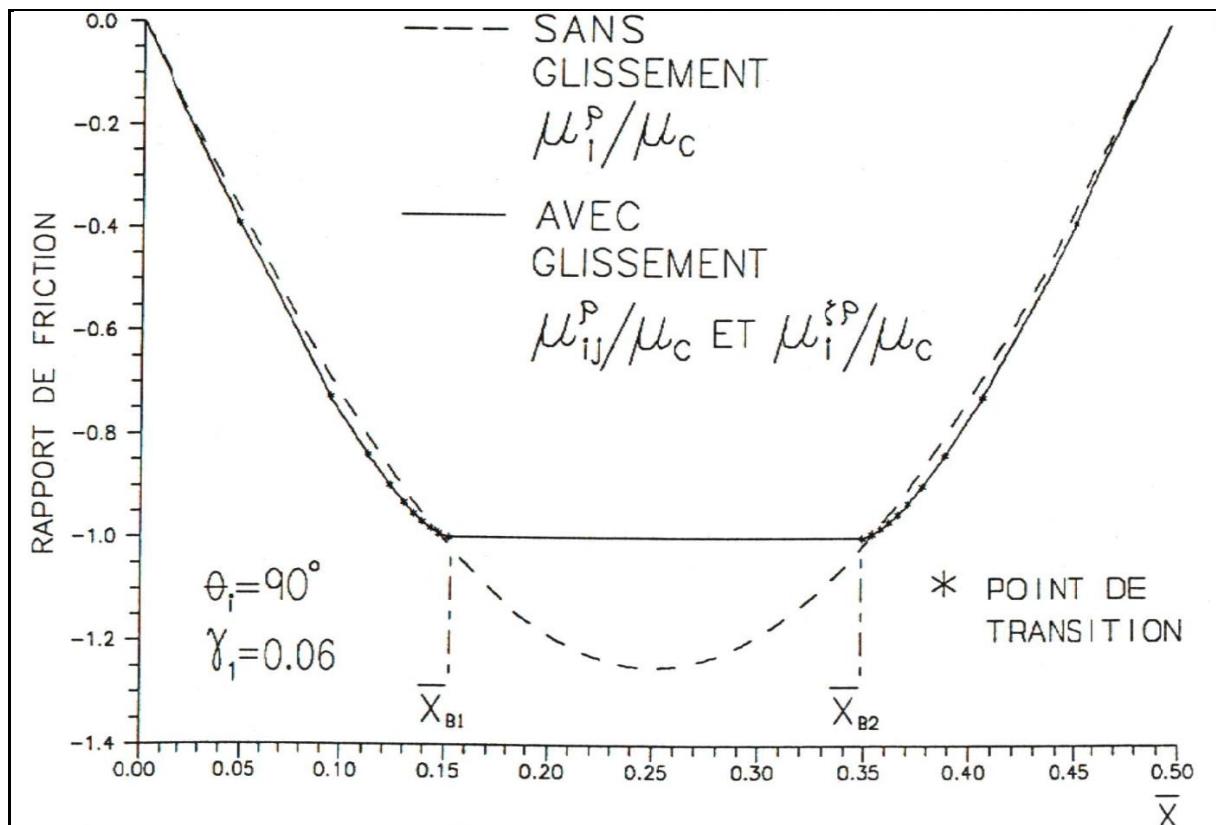
La continuité de déformation du fil pour ce modèle, sur tout le demi-pas, se voit bien sur cette figure. Comme pour les deux modèles sans complaisance, la déformation du fil dans la région de macro-glissement est donnée par une droite dont la pente représente la force de friction maximale ( $\mu_c q$ ).



**Figure 6.3(b)** Déformation du fil avec glissement et sans glissement pour le modèle avec complaisance:  $\bar{\rho}=0.8$

La figure 6.3(c) présente les courbes du rapport de friction  $R_\mu$  avec glissement et sans glissement pour le demi-pas étudié.

Il faut noter dans cette figure que la distribution du rapport de friction  $R_\mu$  avec glissement dans les régions de micro-glisserement est supérieure à celle donnée par la courbe sans glissement, malgré la complaisance. Ce phénomène est discuté en détail à la section 6.1.1.4



**Figure 6.3(c)** Rapport de friction  $R_\mu$  avec glissement et sans glissement pour le modèle avec complaisance:  $\bar{\rho}=0.8$

#### 6.1.1.4 Discussion des résultats

##### **i) $\bar{\rho} \geq 1.0$ (sans macro-glissement)**

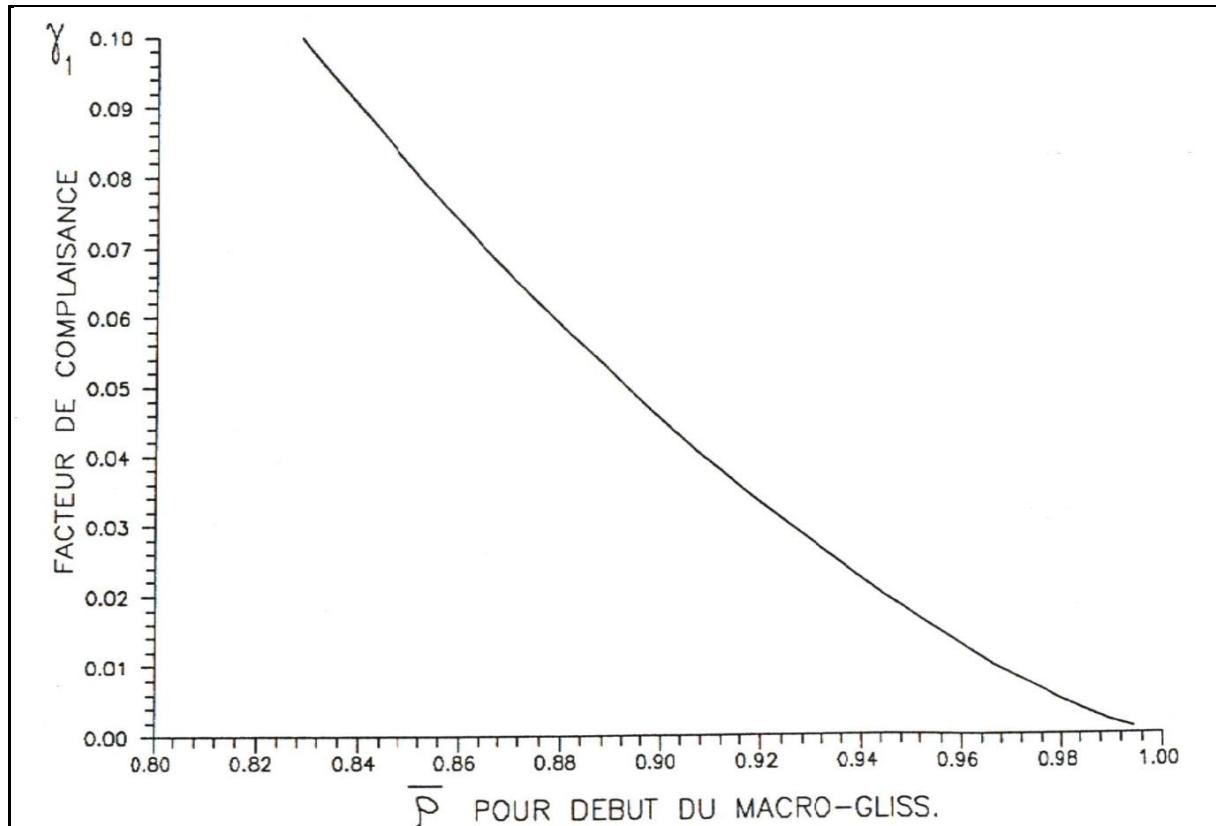
Le rayon de courbure adimensionnel  $\bar{\rho}$  (éq.2.10) doit être inférieur à 1.0 pour qu'une région de macro-glissement apparaisse dans le modèle de Hardy et dans le modèle avec continuité de déformation.

Lorsque le rayon de courbure adimensionnel  $\bar{\rho}$  est supérieur à 1.0, le modèle avec continuité de déformation et le modèle de Hardy sont identiques car il n'existe aucune région de macro-glissement. Donc le déplacement du fil, la déformation et le rapport de friction  $R_u$  (deuxième dérivée du déplacement) du fil sont égaux à ceux de la surface de l'âme sur tout le demi-pas.

La valeur du rayon de courbure adimensionnel  $\bar{\rho}$  à laquelle le macro-glissement débute pour le modèle avec complaisance dépend du paramètre de complaisance  $\gamma_1$  (eq. 5.11) utilisé.

La figure 6.4 montre que plus le facteur de complaisance  $\gamma_1$  tend vers zéro, plus la valeur du rayon de courbure pour qu'il y ait du macro-glissement tend vers 1.0.

De plus, lorsqu'il n'y a aucune région de macro-glissement (rayon de courbure adimensionnel plus grand que 1.0,  $\bar{\rho} > 1.0$ ) et que le facteur de complaisance  $\gamma_1$  tend vers zéro, alors les courbes de déplacement du fil, déformation et du rapport de friction  $R_u$  du modèle avec complaisance tendent vers celles des modèles sans complaisance.



**Figure 6.2** Courbe reliant le facteur de complaisance  $\gamma_1$  au rayon de courbure adimensionnel nécessaire pour que le macro-glissement débute.

ii)  $\bar{p} < 1.0$  (avec macro-glissement)

a) Comparaison entre le modèle de Hardy et le modèle avec continuité de déformation:

Un rayon de courbure adimensionnel inférieur à 1.0 ( $\bar{p} < 1.0$ ) assure la présence d'une région de macro-glissement pour les deux modèles sans complaisance.

Pour un même rayon de courbure adimensionnel inférieur à 1.0, le modèle avec continuité de déformation donne une région de

macro-glissement plus grande que celle du modèle de Hardy (par exemple: comparer  $\bar{X}_{B1} - \bar{X}_{B2}$  des figures 6.1 et 6.2).

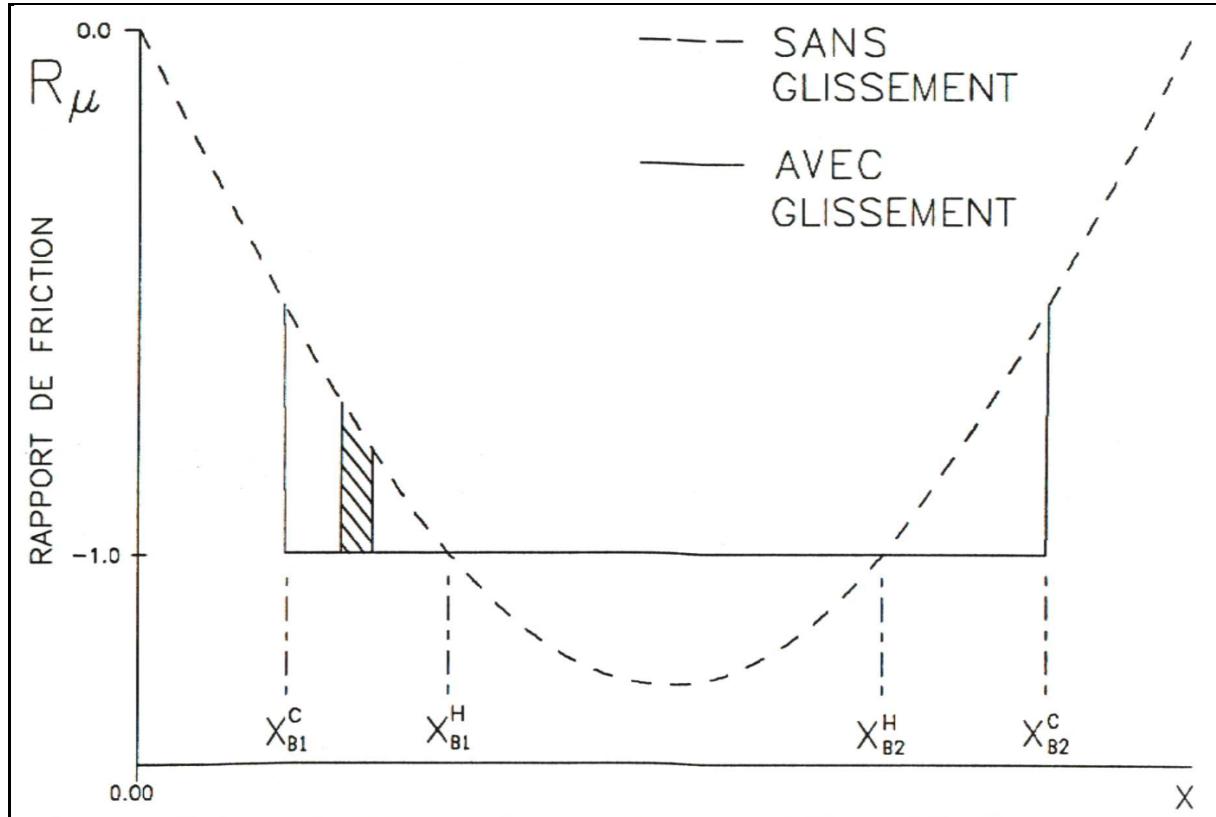
Ceci est dû au fait que le modèle de Hardy introduit des discontinuités de déformation aux bornes de la région de macro-glissement (figure 6.1(b)) qui représentent des "réactions concentrées". Ces réactions concentrées limitent la dimension de la région de macro-glissement, car elles assurent qu'il n'y ait pas de redistribution de déformation du fil entre la région de macro-glissement et les régions de glissement nul.

Le modèle avec continuité de déformation n'a pas de réactions concentrées, donc lorsqu'une région de macro-glissement apparaît, il y a nécessairement une redistribution de déformation dans le fil, ce qui implique une plus grande région de macro-glissement que celle de Hardy.

La redistribution de la déformation du fil du modèle avec continuité de déformation est nécessaire pour assurer que l'équilibre des forces agissant sur le fil dans le demi-pas soit respectée.

L'équilibre des forces du fil dans le demi-pas pour le modèle de Hardy est respecté par l'apparition des deux réactions concentrées aux bornes de la région de macro-glissement.

La distribution typique du rapport de friction  $R_u$  le long du demi-pas pour le modèle avec continuité de déformation, lorsqu'il y a du macro-glissement, est représenté par une droite partant de  $X_{B1}^C$  à  $X_{B2}^C$  (voir figure 6.5).



**Figure 6.3** Courbe typique du rapport de friction  $R_\mu$  avec glissement et sans glissement pour le modèle avec continuité de déformation

Dans la figure 6.5,  $X_{B1}^C$  est la première borne de la région de macro-glissement obtenue avec le modèle avec continuité de déformation,  $X_{B1}^H$  est la première borne de la région de macro-glissement obtenue avec le modèle de Hardy.

L'intégration de la différence entre le rapport de friction  $R_\mu$  avec glissement et le rapport de friction  $R_\mu$  sans glissement entre les positions  $X_{B1}^C$  et  $X_{B1}^H$  donne une différence de déformation qui est déterminée par :

$$\Delta \varepsilon_i = \sec \alpha \int_{X_{B1}^C}^{X_{B1}^H} \left[ +R_\mu^{\text{avec glis.}} - R_\mu^{\text{sans glis.}} \right] dX \frac{\mu_c q}{E \alpha} \quad (6.4)$$

où le signe devant  $R_\mu$  avec glissement dépend du côté du plan XY qui est considéré.

La valeur  $\Delta\varepsilon_i$  obtenue avec l'équation 6.4 est égale à la discontinuité de déformation du modèle de Hardy pour une même déformée.

Donc, l'équilibre des forces le long du demi-pas pour le modèle de Hardy est assuré par les réactions concentrées, tandis que pour le modèle avec continuité de déformation, cet équilibre est assuré par une plus grande région de macro-glissement.

**b) Comparaison entre le modèle avec continuité de déformation et le modèle avec complaisance:**

Le modèle avec continuité de déformation est présenté dans ce mémoire afin de pouvoir valider le modèle avec complaisance, car ceux-ci ont en commun l'absence de réactions concentrées présentes dans le modèle de Hardy.

Lorsque le facteur de complaisance  $\gamma_1$  dans le modèle avec complaisance tend vers zéro et qu'il existe une région de macro-glissement, alors les bornes et les courbes de déplacement du fil, déformation et du rapport de friction  $R_\mu$  du modèle avec complaisance tendent vers celles du modèle avec continuité de déformation.

**c) Comparaison entre le modèle avec complaisance et le modèle de Hardy:**

Le rapport de friction  $R_\mu$  du modèle avec complaisance, pour un facteur de complaisance  $\gamma_1$  non-nul, est toujours inférieur à celui du modèle de Hardy lorsqu'il n'y a pas de région de macro-glisserment ou que cette dernière est petite par rapport à la longueur du demi-pas. Ce qui est normal puisque la complaisance permet une diminution du déplacement et la relaxation de la déformation du fil.

Par contre, plus la région de macro-glisserment est grande (rayon de courbure petit) plus les réactions concentrées dans le modèle de Hardy deviennent importantes. Cela a pour effet que la courbe sans glissement du rapport de friction  $R_\mu$ , qui représente la distribution des forces de friction pour les régions de glissement nul du modèle de Hardy, sous-évalue la distribution de la forces de friction nécessaire dans ces régions pour assurer le glissement nul du fil.

La figure 6.3(c) montre que, pour un rayon de courbure adimensionnel  $\bar{p} = 0.8$ , la distribution du rapport de friction  $R_\mu$  pour le modèle avec complaisance (courbe avec glissement) est supérieure à celle du modèle de Hardy (courbe sans glissement) dans les régions de micro-glisserment.

Les réactions concentrées du modèle de Hardy ont également un effet sur la position des bornes de la région de macro-glisserment. Pour une petite région de macro-glisserment, les bornes de la région de macro-glisserment du modèle avec complaisance sont plus près du plan neutre que celles obtenues avec le modèle de Hardy, car la complaisance permet une diminution de déplacement du fil donc une relaxation des forces de friction agissant sur ce dernier.

Plus la région de macro-glissement est importante (rayon de courbure petit) plus les positions des bornes de cette région obtenues par le modèle avec complaisance vont tendre et même passer à l'extérieur (être plus loin du plan neutre) de celles du modèle de Hardy.

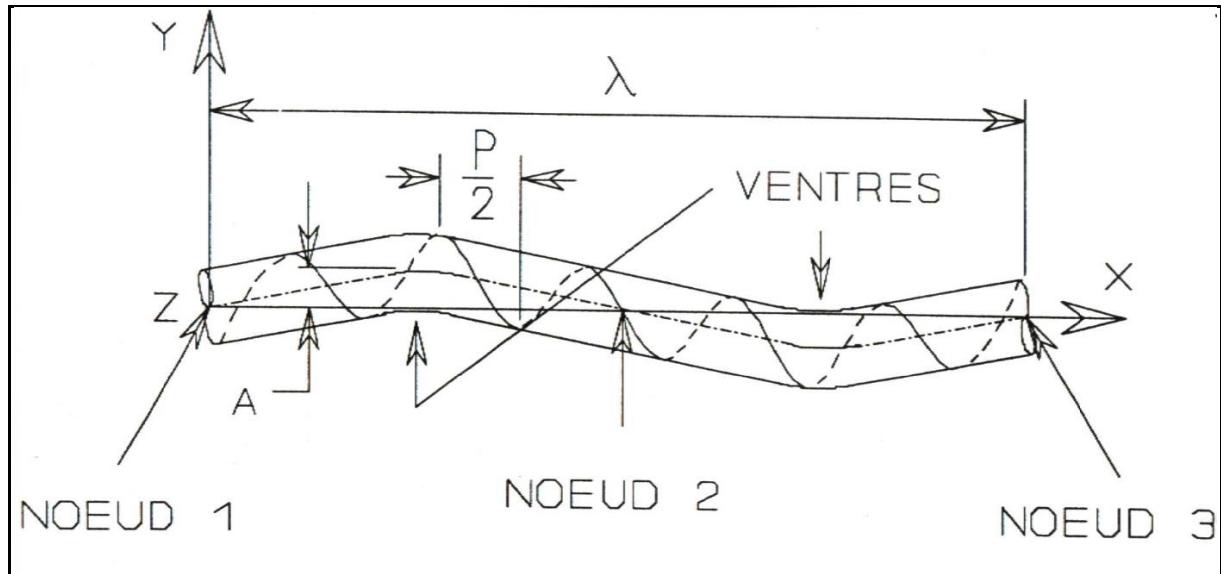
Ceci est encore attribuable au fait que les réactions concentrées du modèle de Hardy deviennent de plus en plus importantes au fur et à mesure que la région de macro-glissement devient importante. Ces réactions concentrées empêchent donc que les bornes de la région de macro-glissement s'éloignent trop du plan neutre.

### 6.1.2 Déformée sinusoïdale

Le rayon de courbure pour une déformée sinusoïdale varie en fonction de la position examinée pour une longueur d'onde donnée. Aux noeuds de la sinusoïde, qui se situent à  $N^*(\lambda/2)$  où  $N=0,1,2\dots$ , le rayon de courbure est infini (toron rectiligne). Aux ventres de la sinusoïde, qui se situent à  $N^*(\lambda/4)$  où  $N=1,3,5\dots$ , le rayon de courbure est minimum.

La figure 6.6 montre les noeuds et les ventres d'une déformée sinusoïdale dans une longueur d'onde, ainsi que l'hélice de la ligne de contact d'un fil sur la surface de l'âme.

Parce que le rayon de courbure varie à l'intérieur d'un demi-pas de fil le long de la sinusoïde, il y a une dissymétrie dans le déplacement de l'âme, dans la déformation de l'âme et dans le rapport de friction  $R_u$  pour le glissement nul par rapport au plan neutre à l'intérieur du demi-pas.



**Figure 6.4** Schéma montrant l'hélice de contact d'un fil sur la surface de l'âme

L'influence de cette dissymétrie a été évaluée; pour cela, on a considéré le cas d'un fil dont le déplacement est posé égal au déplacement de la surface de l'âme aux positions des noeuds 1 et 3 de la déformée sinusoïdale (voir figure 6.6).

Avec ces conditions limites, on a solutionné les équations pour un modèle avec complaisance linéarisée (1 portion linéaire), sans macro-glissement. Ce modèle a été essayé pour différentes valeurs de complaisance linéarisée  $\zeta_c$  (inverse de la pente, voir figure 3.7). La valeur la plus faible essayée de  $\zeta_c$  a été la complaisance tangentielle initiale (éq. 3.8) et la valeur la plus grande a été dix fois cette dernière. Dans tous les cas, il existe une légère différence de déplacement entre le fil et la surface de l'âme à l'extrados et l'intrados de chaque demi-pas de fil.

Cependant, cette différence est petite pour les demi-pas adjacents aux noeuds de la sinusoïde, elle devient de plus en plus négligeable pour les demi-pas près des ventres. Cette différence

n'existe pas pour le demi-pas de fil dont le centre du demi-pas est vis-à-vis le plan neutre à un ventre de la sinusoïde.

Cela nous amène à poser que le déplacement du fil est égal au déplacement de la surface de l'âme à l'extrados et l'intrados de chaque demi-pas de fil. Cela permet d'utiliser le modèle avec complaisance multi-linéaire pour chaque demi-pas de fil le long de la déformée sinusoïdale.

Le déplacement de la surface de l'âme pour la déformée sinusoïdale est minimal aux noeuds de la sinusoïde (point d'inflexion) et est maximal près des ventres de la sinusoïde (rayon de courbure minimale) (figure 6.6). Le macro-glissement apparaît donc en premier dans les demi-pas près des ventres, le nombre de demi-pas de fil dans lesquel il y a du macro-glissement dépend de l'amplitude de la sinusoïde.

Les courbes sans glissement du déplacement du fil et de la déformation pour cette déformée sont données par les équations A.30 et A.31. La courbe du rapport de friction  $R_u$  est obtenue en divisant A.32 par  $2\pi$ .

La figure 6.7 présente la courbe de déplacement sans glissement (éq. A.30) pour:

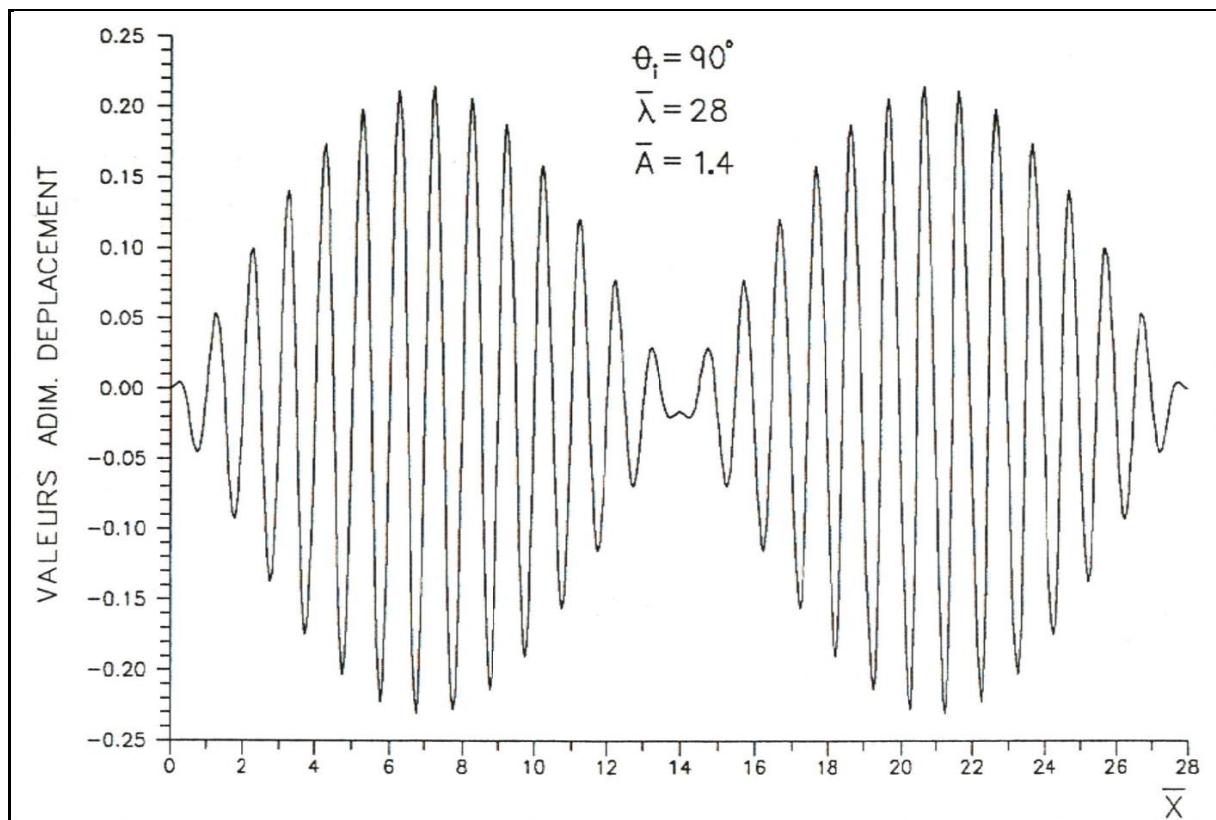
$$\Rightarrow \text{position angulaire du fil "i": } \theta_i = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \text{longueur d'onde adimensionnelle: } \bar{\lambda} = 28$$

$$\Rightarrow \text{amplitude adimensionnelle: } \bar{A} = 1.4.$$

Les graphiques des différentes courbes à l'intérieur d'un demi-pas où il y a du macro-glissement pour les modèles sans complaisance ne sont pas présentés ici car ils sont tout à fait

similaires à ceux présentés pour le rayon de courbure constant (figure 6.1 à 6.3). Pour les demi-pas où il n'y a pas de macro-glisserement le déplacement du fil des modèles sans complaisance est donné à la figure 6.7.



**Figure 6.5** Déplacement du fil sans glissement le long de la longueur d'onde.

**Courbes de déplacement du fil, de la déformation et du rapport de friction  $R_\mu$  pour le modèle avec complaisance.**

Les graphiques des différentes courbes du modèle avec complaisance, à l'intérieur d'un demi-pas, sont présentés pour:

⇒ position angulaire du fil "i":  $\theta_i = 90^\circ$

$\Rightarrow$  longueur d'onde adimensionnelle:  $\bar{\lambda} = 28$

$\Rightarrow$  amplitude adimensionnelle:  $\bar{A} = 1.4.$

$\Rightarrow$  facteur de complaisance:  $\gamma_1 = 0.06$

$\Rightarrow$  demi-pas analysé est  $\bar{X}_{\text{INF}} = 6.50$  à  $\bar{X}_{\text{SUP}} = 7.00.$

Pour ce cas,  $\bar{X}_{\text{INF}}$  correspond à l'intrados et  $\bar{X}_{\text{SUP}}$  à l'extrados.

Les courbes de déplacement et déformation pour les régions de micro-glissement (courbe avec glissement) du modèle avec complaisance sont données par A.39 et A.40. La courbe du rapport de friction  $R_\mu$  est obtenue en divisant A.41 par  $2\pi$ .

Pour les régions de macro-glissement les courbes correspondantes sont données par les équations A.42, A.43 et en divisant A.44 par  $2\pi$ .

La figure 6.8(a) montre que le déplacement du fil sans glissement est égal à celui avec glissement à  $\bar{X}_{\text{INF}} = 6.50$  et  $\bar{X}_{\text{SUP}} = 7.00$  et que ces déplacements sont non-nuls pour ces positions. Ces déplacements sont égaux en raison des conditions limites (3.51 et 3.52) qui imposent le déplacement du fil égal à celui de la surface de l'âme à l'intrados et à l'extrados.

La dissymétrie à l'intérieur du demi-pas due à cette déformée ne se voit pas clairement sur les graphiques 6.8(a), 6.8(b) et 6.8(c) car le demi-pas se situe près du ventre de la sinusoïde.

La dissymétrie dans le demi-pas peut être visualisée en comparant les distances:

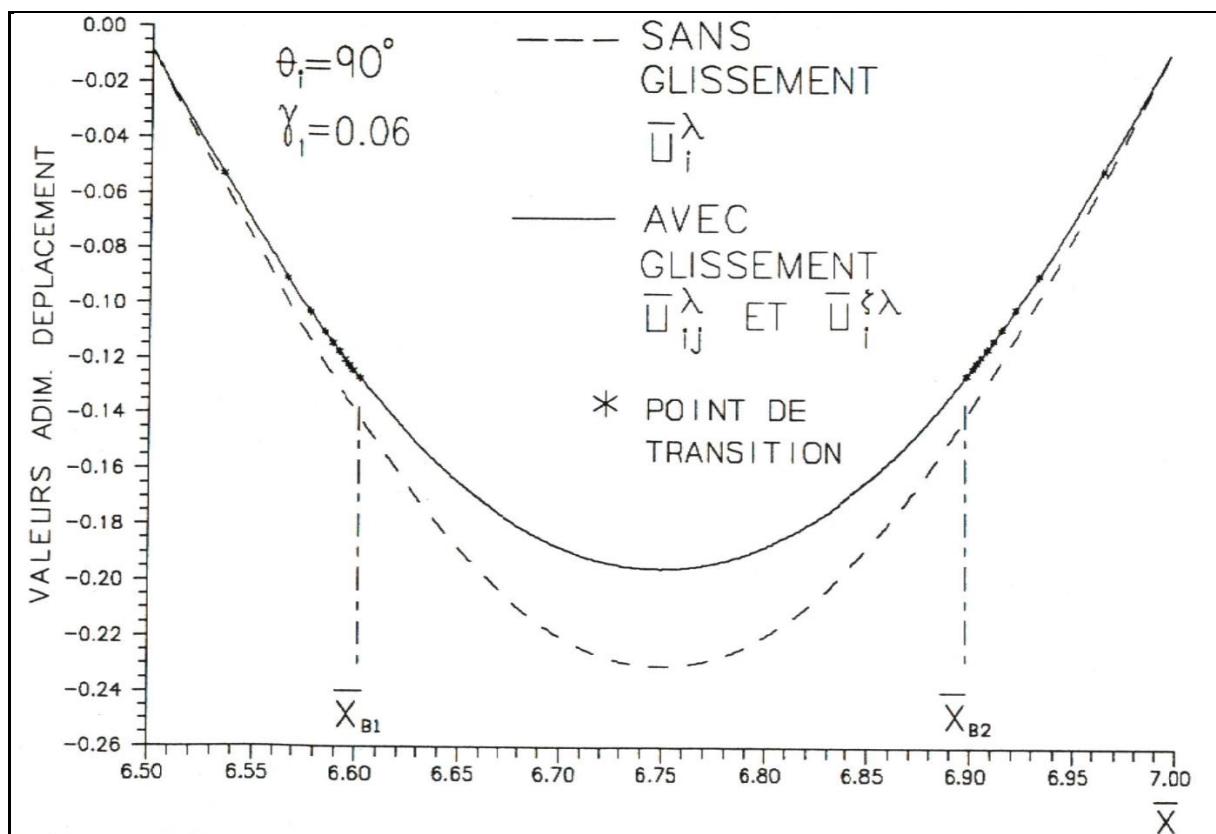
$$\bar{X}_{B1} - \bar{X}_{\text{INF}} = 0.10224$$

et

$$\bar{X}_{\text{SUP}} - \bar{X}_{B2} = 0.10129$$

Il est évident que ces deux distances ne diffèrent pratiquement pas. La longueur d'un demi-pas de fil est 0.5, donc la différence entre les deux distances ci-haut, par rapport à la longueur du demi-pas de fil est inférieure à 0.2%.

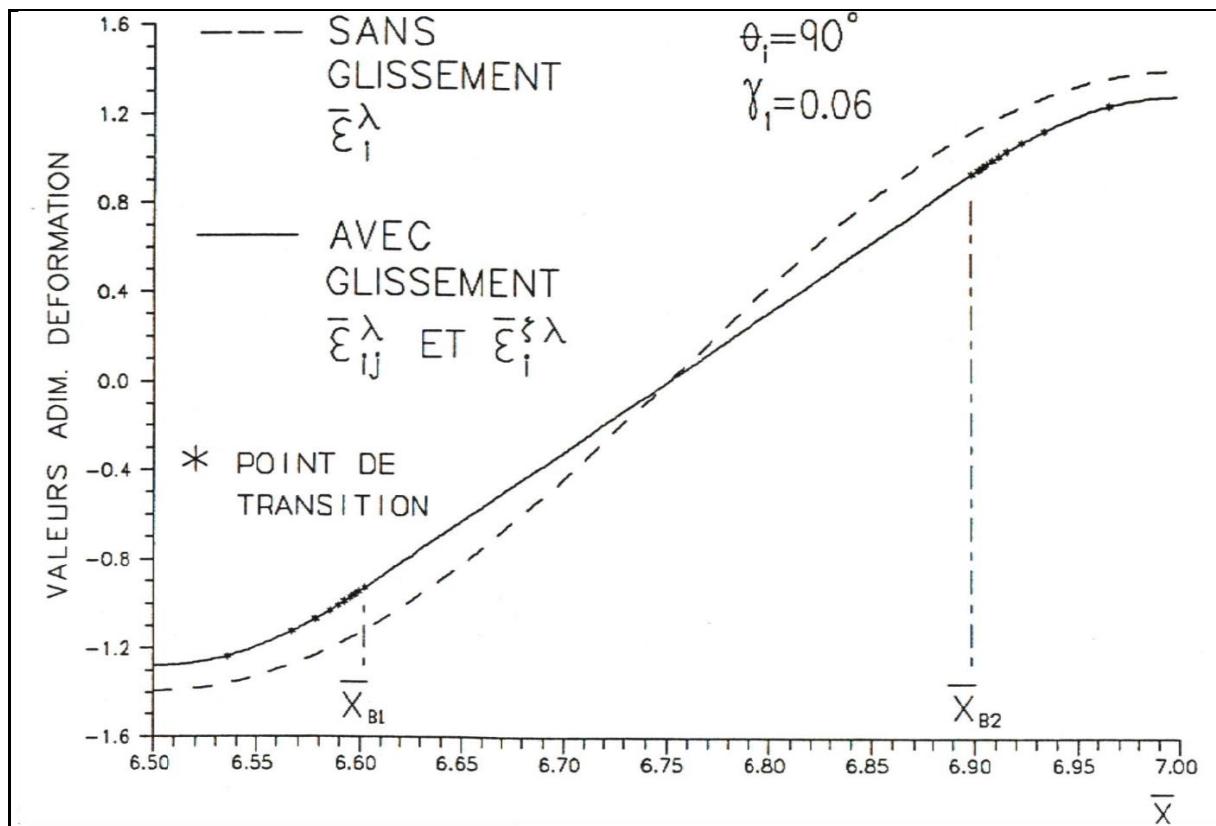
Pour un rayon de courbure constant, donc une déformée qui impose la symétrie dans chaque demi-pas, ces distances seraient égales.



**Figure 6.6(a)** Déplacement du fil avec glissement et sans glissement pour le modèle avec complaisance

La figure 6.8(b) présente les courbes de déformation du fil avec glissement et sans glissement pour le demi-pas étudié.

La déformation du fil dans la région de macro-glissement est donnée par une droite dont la pente représente la force de friction maximale entre le fil et la surface de l'âme ( $\mu_{cq}$ ) .



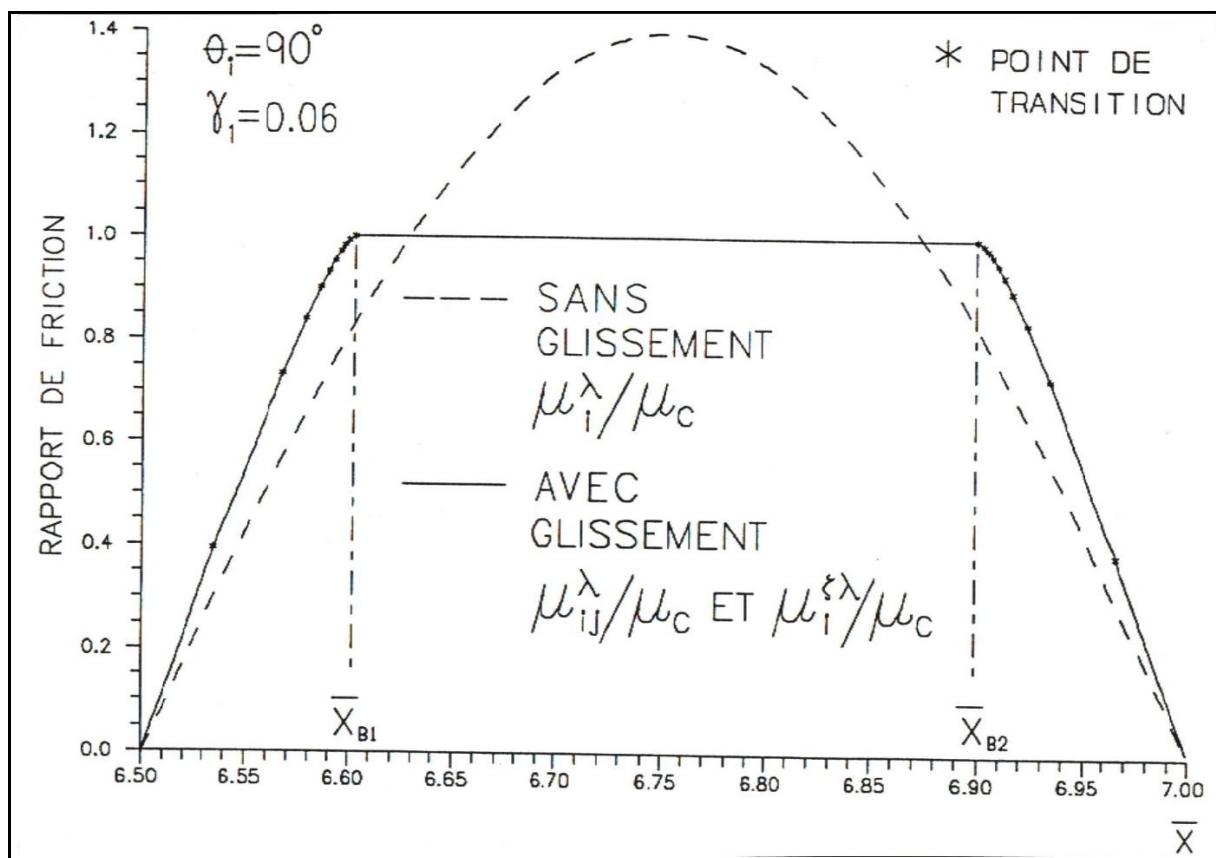
**Figure 6.8 (b)** Déformation du fil avec glissement et sans glissement pour le modèle avec complaisance

La figure 6.8(c) présente les courbes du rapport de friction  $R_\mu$  avec glissement et sans glissement pour le demi-pas étudié.

Le modèle de Hardy impose que les bornes de la région de macro-glissement soient aux intersections de la courbe en tirets avec la ligne en trait plein du plateau central de la figure 6.8(c) .

Les bornes de la région de macro-glissement du modèle avec complaisance sont à l'extérieur de celles du modèle de Hardy. Ceci est dû au fait que le rayon de courbure adimensionnel  $\bar{\rho}$  au centre du demi-pas considéré est de l'ordre de 0.72, donc suffisamment petit pour que les réactions concentrées du modèle de Hardy soient importantes.

Comme il a été discuté dans la section 6.1.1.4 lorsque les réactions concentrées du modèle de Hardy sont importantes (rayon de courbure petit), ce qui est le cas ici, les bornes du modèle avec complaisance sont à l'extérieur de celles du modèle de Hardy.



**Figure 6.8(c)** Rapport de friction  $R_\mu$  avec glissement et sans glissement pour le modèle avec complaisance.

### Début du macro-glissement ( $\bar{A} \geq 1.0$ )

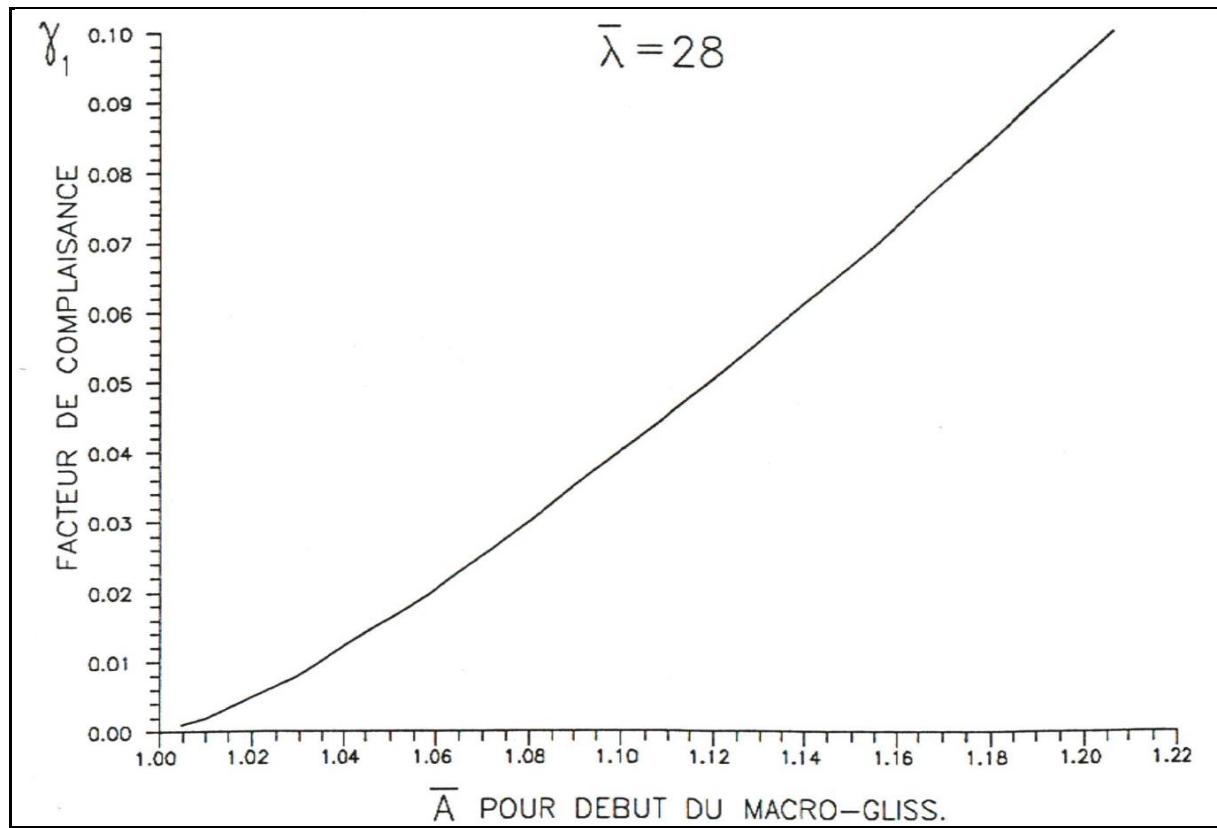
Le macro-glissement, pour la déformée sinusoïdale, débute au ventre et apparaît pour les modèles sans complaisance seulement si l'amplitude adimensionnelle  $\bar{A}$  est supérieure à 1.0 (eq. 2.23).

Lorsque l'amplitude adimensionnelle est inférieure à 1.0, les deux modèles sans complaisance sont identiques car il n'existe aucune région de macro-glissement, donc le déplacement du fil, la déformation et le rapport de friction  $R_\mu$  (deuxième dérivée du déplacement du fil) sont égaux à ceux de la surface de l'âme sur toute la longueur d'onde.

L'amplitude adimensionnelle nécessaire pour que le modèle avec complaisance ait du macro-glissement dépend du paramètre de complaisance  $\gamma_1$ .

La figure 6.9 présente la relation entre l'amplitude adimensionnelle nécessaire pour qu'il y ait du macro-glissement et le facteur de complaisance  $\gamma_1$  pour une longueur d'onde adimensionnelle  $\bar{\lambda} = 28$ .

Les courbes de déplacement, déformation et du rapport de coefficients du modèle avec complaisance, lorsqu'il n'y a pas de région de macro-glissement ( $\bar{A} < 1.0$ ) et que le facteur de complaisance  $\gamma_1$  tend vers zéro, tendent vers celles obtenues avec les deux modèles sans complaisance.



**Figure 6.9** Courbe reliant le facteur de complaisance  $\gamma_1$  à l'amplitude adimensionnelle  $\bar{A}$  nécessaire pour que le macro-glissement débute:  $\bar{\lambda}=28$

## 6.2 Rapport relatif de différence maximale de déplacement

Il est intéressant de connaître le rapport entre la différence maximale de déplacement fil-âme et le déplacement maximal de la surface de l'âme. Ce rapport, identifié par "rapport relatif de différence maximale de déplacement  $R_{DEP}$ ", est donné par:

$$R_{DEP} = \frac{(\bar{D}_i - \bar{u}_i)_{\max}}{(\bar{D}_i)_{\max}} \quad (6.5)$$

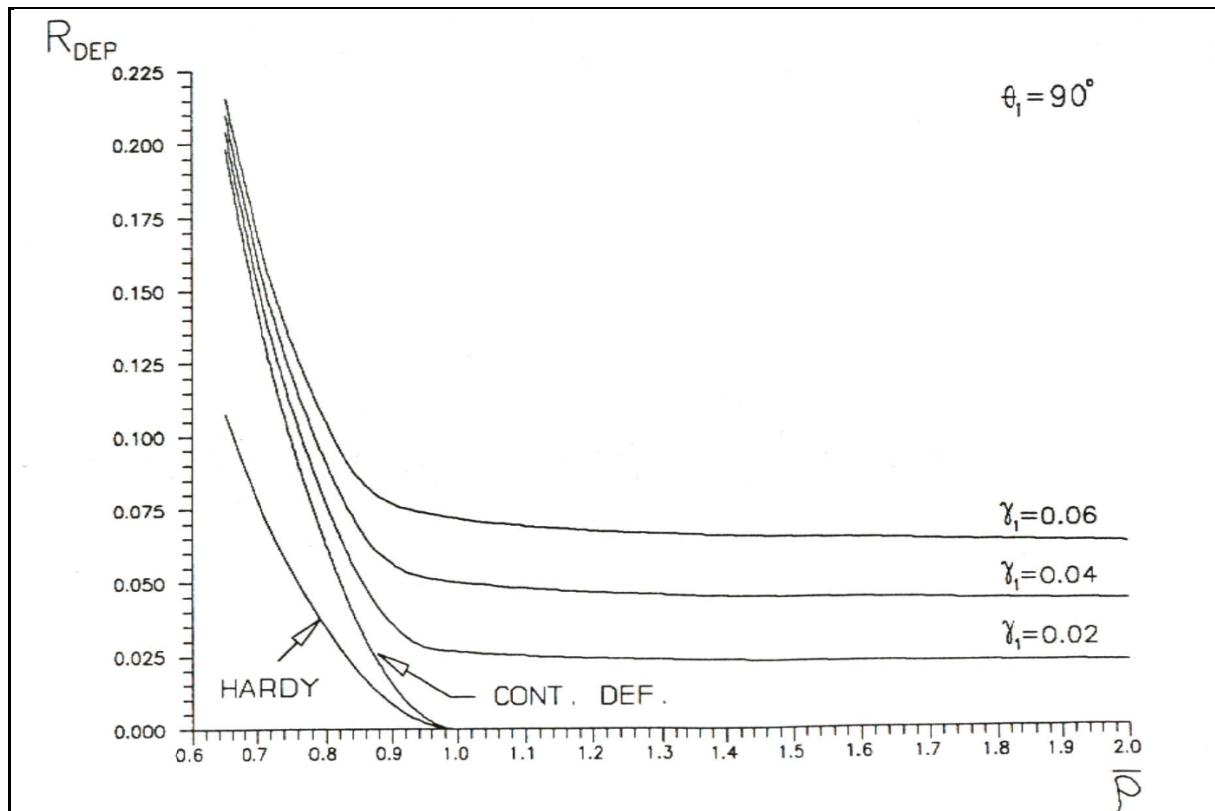
### 6.2.1 Déformée ayant un rayon de courbure constant

Pour ce type de déformée il y a symétrie par rapport au plan neutre, donc le déplacement maximal du fil et de la surface de l'âme ainsi que leur différence maximale se situent au centre du demi-pas (à  $X_M$  qui est vis-à-vis le plan neutre).

La figure 6.10 présente  $R_{DEP}$  en fonction du rayon de courbure adimensionnel imposé  $\bar{\rho}$  pour les deux modèles sans complaisance et pour trois facteurs de complaisance  $\gamma_1$  pour le modèle avec complaisance.

Cette figure montre que plus le facteur de complaisance  $\gamma_1$  tend vers zéro plus la courbe de complaisance tend vers le modèle avec continuité de déformation.

Le  $R_{DEP}$  croît moins rapidement lorsque le rayon de courbure adimensionnel  $\bar{\rho}$  diminue pour le modèle de Hardy que pour les deux autres modèles. Cette croissance moins marquée est due à l'effet des réactions concentrées de ce modèle qui limitent la dimension de la région de macro-glissement, donc implicitement limitent la différence de déplacement entre la surface de l'âme et le fil.



**Figure 6.10** Rapport relatif de différence maximale  $R_{DEP}$  de déplacement en fonction du rayon de courbure adimensionnel

Il faut également noter sur la figure 6.10 que pour un rayon de courbure adimensionnel  $\bar{p}$  croissant, les trois courbes de complaisance tendent vers des constantes.

Pour le modèle avec complaisance, si le rayon de courbure adimensionnel est suffisamment grand, il n'y a qu'une région de micro-glissement dans tout le demi-pas. Dans ce cas, en imposant les conditions limites 3.51 et 3.52 on trouve que les deux constantes de la solution complémentaire de l'équation du fil sont nulles.

L'équation de  $R_{DEP}$  pour la déformée ayant un rayon de courbure constant évalue le déplacement de la surface de l'âme et du fil

au centre du demi-pas (à  $X_M = 0.25$  pour  $\theta_i = 90^\circ$ ). Le déplacement de la surface de l'âme est alors donné par l'équation de déplacement du fil sans glissement (eq. A.1), tandis que le déplacement du fil est donné par l'équation A.17 pour le modèle avec complaisance. Lorsqu'il n'y a qu'une région de micro-glissement dans le demi-pas, ce sont les constantes de la première portion linéaire "j" qui sont utilisées.

L'équation de  $R_{DEP}$  pour le modèle avec complaisance lorsqu'il n'y a qu'une région de micro-glissement dans le demi-pas s'écrit:

$$R_{DEP} = \frac{\frac{1}{2\pi\bar{\rho}} - \frac{1}{2\pi\rho[\gamma_1\bar{\zeta}_{c1} + 1]}}{\frac{1}{2\pi\bar{\rho}}} \quad (6.6)$$

et en simplifiant:

$$R_{DEP} = \frac{\gamma_1\bar{\zeta}_{c1}}{\gamma_1\bar{\zeta}_{c1} + 1} \quad (6.7)$$

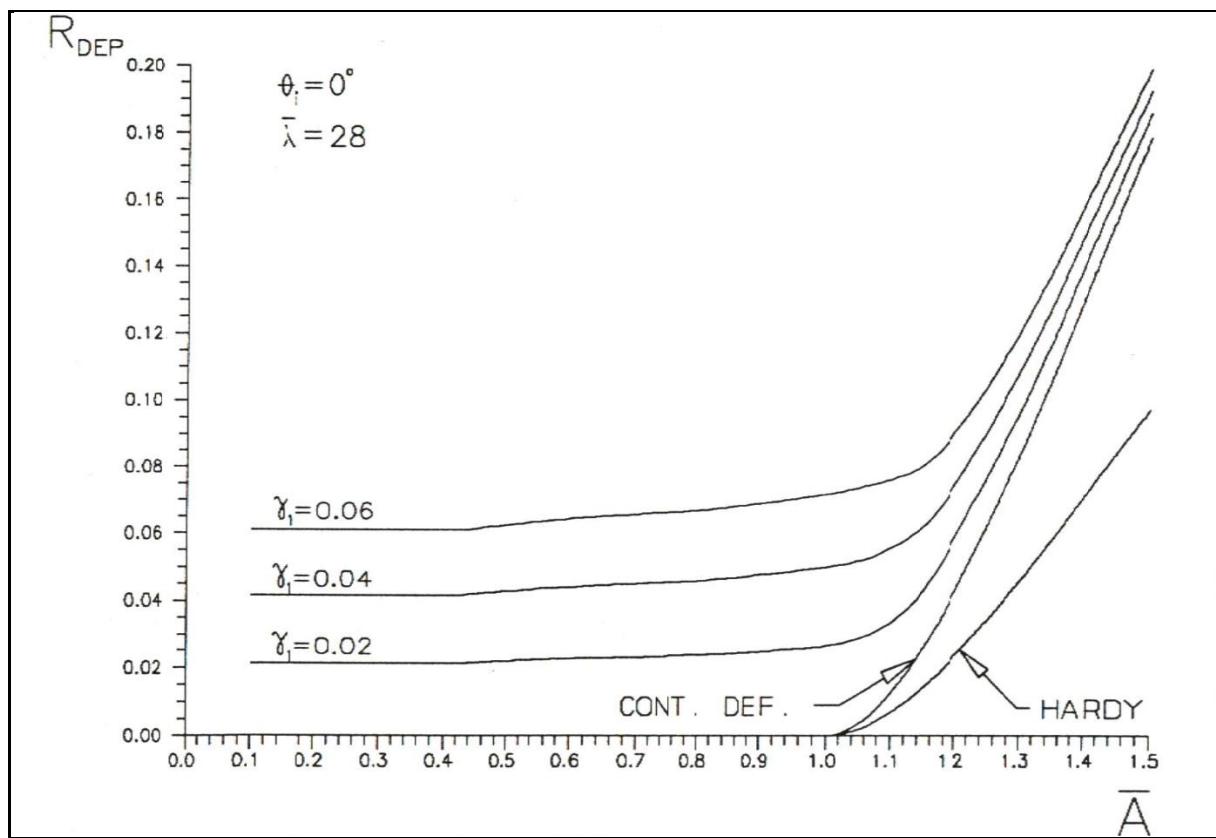
Cette équation est valable pour le modèle avec complaisance et elle montre que si le rayon de courbure adimensionnel est suffisamment grand pour qu'il n'y ait qu'une région de micro-glissement dans tout le demi-pas de fil, alors  $R_{DEP}$  est seulement fonction du paramètre de complaisance  $\gamma_1$ .

### 6.2.2 Déformée sinusoïdale

Le déplacement maximal de la surface de l'âme pour cette déformée a lieu au ventre ( $\bar{\lambda}/4$ ) vis-à-vis le plan neutre (voir figure 6.7). Le déplacement maximal du fil qui a la position angulaire  $\theta_i = 0^\circ$  à l'origine des axes a lieu au même point (pour un nombre pair de  $\bar{\lambda}$ ). La différence maximale de déplacement entre ce fil et la surface de l'âme se situe également à  $\bar{\lambda}/4$ .

La figure 6.11 présente  $R_{DEP}$  en fonction de l'amplitude adimensionnelle  $\bar{A}$  pour une longueur d'onde adimensionnelle  $\bar{\lambda} = 28$ , pour les deux modèles sans complaisance et pour trois facteurs de complaisance  $\gamma_1$  pour le modèle avec complaisance.

Cette figure montre le même type de courbes que celles obtenues avec le rayon de courbure constant (figure 6.10). Le  $R_{DEP}$  du modèle de Hardy croît moins rapidement que pour les deux autres modèles lorsque  $\bar{A}$  augmente.



**Figure 6.11** Rapport relatif de différence maximale  $R_{DEP}$  de déplacement en fonction de l'amplitude adimensionnelle pour  $\bar{\lambda} = 28$ .

Cette figure montre pour  $\bar{A}$  tendant vers zéro que les trois courbes avec complaisance tendent vers des constantes. Pour cette déformée, il n'est pas facile de trouver une équation pour ces constantes comme l'équation 6.7. Ceci est dû au fait qu'en

imposant les conditions limites 3.51 et 3.52 les deux constantes de la solution complémentaire de l'équation du fil ne deviennent pas nulles pour cette déformée, comme ce fût le cas pour le rayon de courbure constant.

Cependant, il est possible de montrer que si l'amplitude adimensionnelle  $\bar{A}$  est suffisamment petite pour qu'il n'y ait qu'une région de micro-glissement dans tout le demi-pas de fil se situant au ventre de la sinusoïde, alors  $R_{DEP}$  est effectivement indépendant de l'amplitude adimensionnelle  $\bar{A}$  pour le modèle avec complaisance.

### 6.3 Dissipation d'énergie

#### 6.3.1 Déformée ayant un rayon de courbure constant

L'équation A.45 est utilisée pour déterminer la dissipation d'énergie due au macro-glissement dans les modèles sans complaisance. Les équations A.51 et A.52 sont utilisées pour déterminer la dissipation d'énergie due au micro-glissement et au macro-glissement pour le modèle avec complaisance.

Pour ce type de déformée, un demi-pas de fil est représentatif de tous les autres demi-pas, donc il est suffisant de déterminer la dissipation d'énergie due à un fil dans un demi-pas.

La figure 6.12(a) présente les courbes de dissipation d'énergie d'un fil pour un demi-pas en fonction du rayon de courbure adimensionnel  $\bar{\rho}$  pour les deux modèles sans complaisance et pour trois facteurs de complaisance  $\gamma_1$  du modèle avec complaisance.

Cette figure montre que le modèle avec complaisance tend vers le modèle avec continuité de déformation lorsque le facteur de complaisance  $\gamma_1$  tend vers zéro. La figure 6.12(b) est l'agrandissement au niveau des points d'inflexion des courbes de la figure 6.12(a), elle permet de bien visualiser ce comportement.

Il y a une dissipation d'énergie due au macro-glissement dans les modèles sans complaisance seulement si le rayon de courbure adimensionnel  $\bar{\rho}$  est inférieur à 1.0.

La courbe du modèle avec continuité de déformation existe pour un rayon de courbure adimensionnel  $\bar{\rho}$  inférieur à 1.0 mais supérieur à 0.65. Le rayon de courbure doit être supérieur à 0.65 pour ce modèle, car pour un rayon de courbure adimensionnel inférieur, la région de macro-glissement s'étend sur tout le demi-pas. Cela implique que le fil n'a plus de points d'accrochage à l'extrados et à l'intrados et glisse sur toute sa longueur.

La différence de dissipation d'énergie entre le modèle de Hardy et celui avec complaisance est évidemment attribuable à la dissipation d'énergie due au micro-glissement, lorsque la région de macro-glissement n'est pas trop importante ( $\bar{\rho} \geq 0.7$ ).

Les tableaux 6.1(a), 6.1(b) et 6.1(c) présentent les valeurs adimensionnels de la dissipation d'énergie pour trois rayons de courbure adimensionnel  $\bar{\rho}$ . Le demi-pas considéré est  $\bar{X}_{\text{INF}} = 0.0$  à  $\bar{X}_{\text{SUP}} = 0.5$  avec  $\theta_i = 90^\circ$ . Les paramètres de ces tableaux sont:

$\bar{X}_{B1}$   $\Rightarrow$  Première borne de la région de macro-glissement.

$\bar{X}_{B2}$   $\Rightarrow$  Deuxième borne de la région de macro-glissement.

$\Delta \bar{W}_{i,jtot}^{\rho}$   $\Rightarrow$  Valeur adimensionnelle de la dissipation d'énergie

due au micro-glissement du fil "i" dans toutes les régions de micro-glissement. Cette valeur s'obtient en faisant la sommation de l'équation A.51 de toutes les régions de micro-glissement situées entre  $\text{INF}$  et  $\bar{X}_{B1}$  et de celles situées entre  $\bar{X}_{B2}$  et  $\bar{X}_{\text{SUP}}$ .

$\Delta \bar{W}_{ijmac}^\rho$   $\Rightarrow$  Valeur adimensionnelle de la dissipation d'énergie due au micro-glissement du fil "i" dans la région de macro-glissement. Cette valeur est donnée par la deuxième intégrale de l'équation A.52.

$\Delta \bar{W}_i^\rho$   $\Rightarrow$  Valeur adimensionnelle de la dissipation d'énergie due au macro-glissement du fil "i". Pour le modèle avec complaisance, cette valeur est donnée par la première intégrale de l'équation A.52, tandis que pour le modèle de Hardy cette valeur est donnée par l'équation A.45.

$\Delta \bar{W}_{itotal}^\rho$   $\Rightarrow$  Valeur adimensionnelle de la dissipation d'énergie totale du fil "i" dans le demi-pas considéré. Pour le modèle avec complaisance cette valeur est la sommation des trois types de dissipation d'énergie précédentes, tandis que pour le modèle de Hardy cette valeur est égale à  $\Delta \bar{W}_i^\rho$ .

	Modèle de Hardy	Modèle avec complaisance ( $\gamma_1=0.06$ )
$\bar{X}_{B1}$	-----	-----
$\bar{X}_{B2}$	-----	-----
$\Delta \bar{W}_{ijtot}^\rho$	-----	0.000916
$\Delta \bar{W}_{ijmac}^\rho$	-----	-----
$\Delta \bar{W}_i^\rho$	-----	-----
$\Delta \bar{W}_{itotal}^\rho$	-----	0.000916

**Valeurs adimensionnelles de dissipation d'énergie pour  $\gamma_1 = 1.0$**   
Tableau 6.1(a)

	Modèle de Hardy	Modèle avec complaisance ( $\gamma_1=0.06$ )
$\bar{X}_{B1}$	0.14758	0.15124
$\bar{X}_{B2}$	0.35242	0.34876
$\Delta \bar{W}_{i,jtot}^\rho$	-----	0.000681
$\Delta \bar{W}_{i,jmac}^\rho$	-----	0.002264
$\Delta \bar{W}_i^\rho$	0.003582	0.003269
$\Delta \bar{W}_{itotal}^\rho$	0.003582	0.006214

**Valeurs adimensionnelles de dissipation d'énergie pour  $\bar{\rho} = 0.8$**

Tableau 6.1 (b)

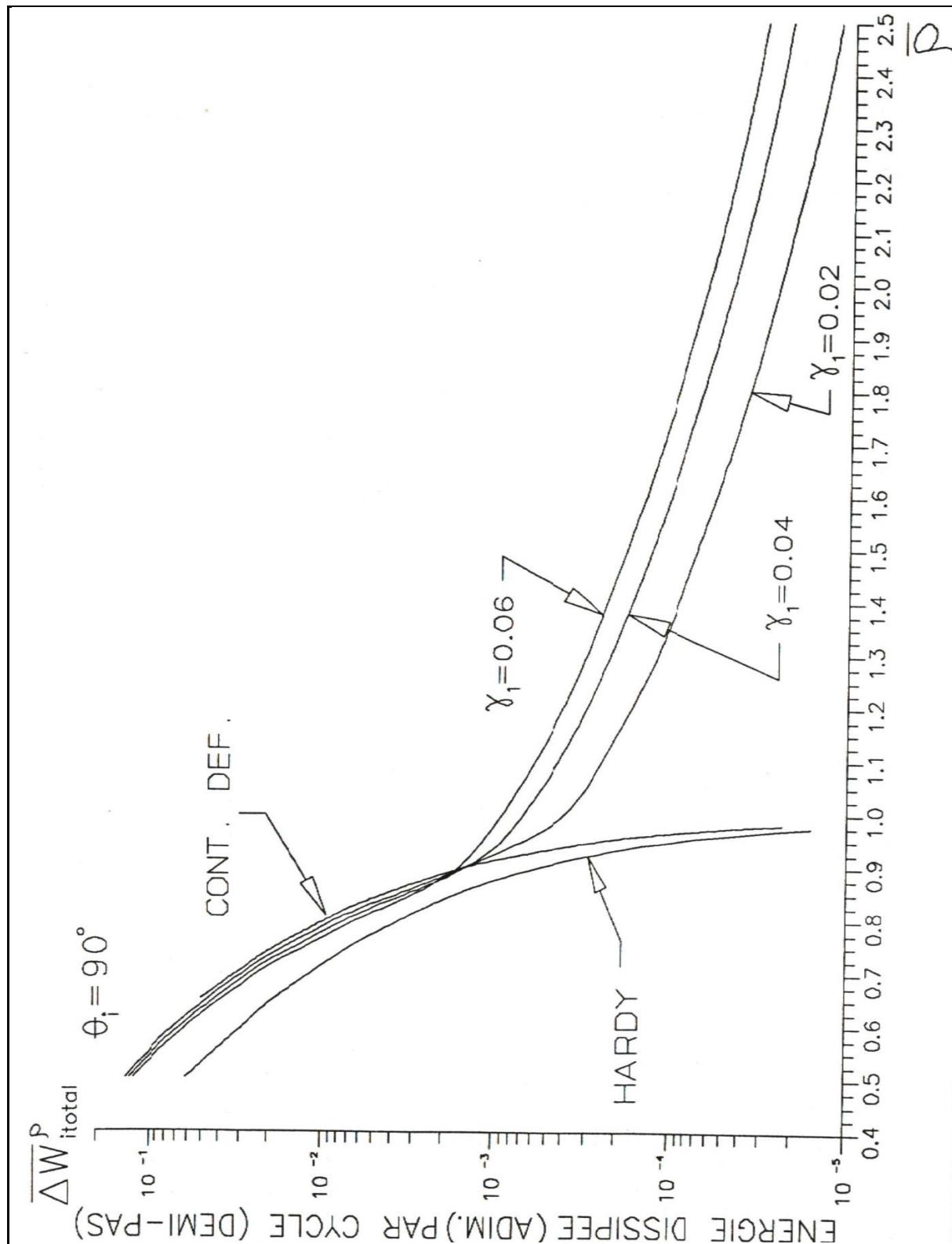
	Modèle de Hardy	Modèle avec complaisance ( $\gamma_1=0.06$ )
$\bar{X}_{B1}$	0.10242	0.05238
$\bar{X}_{B2}$	0.39754	0.44762
$\Delta \bar{W}_{i,jtot}^\rho$	-----	0.000227
$\Delta \bar{W}_{i,jmac}^\rho$	-----	0.004529
$\Delta \bar{W}_i^\rho$	0.028421	0.054760
$\Delta \bar{W}_{itotal}^\rho$	0.028421	0.059516

**Valeurs adimensionnelles de dissipation d'énergie pour  $\bar{\rho} = 0.6$**

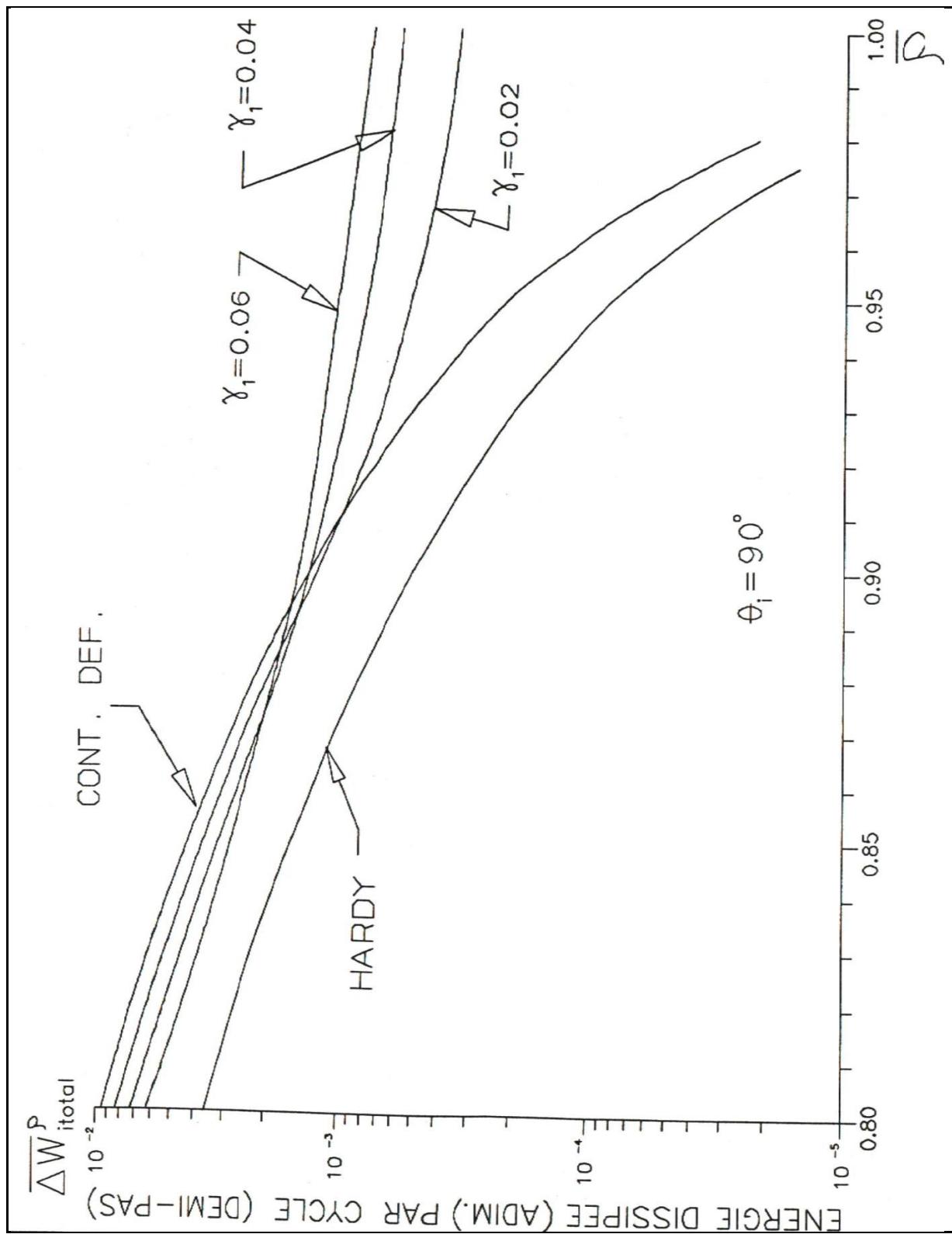
Tableau 6.1 (c)

**$\bar{\rho} \geq 0.9$**

Lorsqu'il y a très peu ou pas de macro-glissement,  $\bar{\rho} \geq 0.9$ , la différence de dissipation d'énergie entre les deux modèles provient essentiellement du fait qu'il n'y a aucune dissipation d'énergie dans les régions de glissement nul pour le modèle de Hardy tandis qu'il y a de la dissipation d'énergie dans les régions de micro-glissement pour le modèle avec complaisance.



**Figure 6.12 (a)** Dissipation d'énergie par cycle d'un fil pour un demi-pas en fonction du rayon de courbure adimensionnel.



**Figure 6.12 (b)** Agrandissement au niveau des points d'inflexion de la figure 6.12 (a).

### **$0.7 \leq \bar{p} \leq 0.9$**

Lorsque la région de macro-glissement est modérément importante par rapport à la longueur du demi-pas de fil ( $0.7 \leq \bar{p} \leq 0.9$ ) alors la région de macro-glissement dans chacun des modèles est approximativement de même dimension. Dans ce cas la différence de dissipation d'énergie entre les deux modèles provient essentiellement de la dissipation d'énergie due au micro-glissement dans la région de macro-glissement du modèle avec complaisance. Cette différence de dissipation d'énergie due au micro-glissement dans la région de macro-glissement est donnée par la deuxième intégrale de l'équation 4.15.

### **$\bar{p} \leq 0.7$**

Lorsque la région de macro-glissement est importante par rapport à la longueur du demi-pas,  $\bar{p} \leq 0.7$ , alors la différence de dissipation d'énergie entre les deux modèles est essentiellement due au fait que la région de macro-glissement du modèle avec complaisance est plus grande que celle du modèle de Hardy.

#### **6.3.2 Déformée sinusoïdale**

Les différentes équations de dissipation d'énergie sont A.45 pour les modèles sans complaisance et A.51, A.52 pour le modèle avec complaisance.

Pour ce type de déformée, il faut faire la sommation de la dissipation d'énergie de chaque demi-pas du fil tout le long de la longueur d'onde.

Cette sommation peut être simplifiée s'il y a un nombre pair

de pas de fil dans la longueur d'onde et que le fil à la position angulaire  $\theta_i = 90^\circ$  est choisi. Dans ce cas, il suffit de faire la sommation pour les demi-pas se situant entre l'origine  $\bar{X} = 0.0$  et le premier ventre de la sinusoïde  $\bar{X} = \bar{\lambda}/4$ .

Puisque la sinusoïde est symétrique d'un noeud à un ventre (figure 6.6), la sommation de  $\bar{X} = 0.0$  à  $\bar{X} = \bar{\lambda}/4$  est représentative des autres quarts de longueur d'onde. En multipliant par quatre la sommation de  $\bar{X} = 0.0$  à  $\bar{X} = \bar{\lambda}/4$  on obtient donc la dissipation d'énergie totale sur toute la longueur d'onde du fil "i".

La figure 6.13(a) présente les courbes de dissipation d'énergie en fonction de l'amplitude adimensionnelle pour les deux modèles sans complaisance et pour trois facteurs de complaisance  $\gamma_1$  du modèle avec complaisance.

Comme dans le cas du rayon de courbure constant, cette figure montre que le modèle avec complaisance tend vers le modèle avec continuité de déformation lorsque le facteur de complaisance  $\gamma_1$  tend vers zéro. L'agrandissement (figure 6.13(b)) au niveau des points d'inflexion des courbes permet de visualiser le même comportement que pour la figure 6.12(b).

Il y a de la dissipation d'énergie due au macro-glissement dans les modèles sans complaisance seulement si l'amplitude adimensionnelle  $\bar{A}$  est supérieure à 1.0.

La courbe du modèle avec continuité de déformation existe pour une amplitude adimensionnelle  $\bar{A}$  supérieure à 1.0 mais inférieure à 1.5 (pour  $\bar{\lambda}=28$ ). L'amplitude adimensionnelle doit être inférieure à 1.5 pour ce modèle, car pour une amplitude supérieure, la région de macro-glissement du demi-pas adjacent au ventre de la sinusoïde prend tout le demi-pas. Cela implique que le fil n'a plus de points d'accrochage à l'extrados et à l'intrados et donc glisse sur toute sa longueur pour ce demi-pas.

La différence de dissipation d'énergie entre le modèle de Hardy et celui avec complaisance s'explique de la même façon que dans le cas du rayon de courbure constant.

Les tableaux 6.2(a), 6.2(b) et 6.2(c) présentent les valeurs adimensionnelles de la dissipation d'énergie pour trois amplitudes adimensionnelles  $\bar{A}$ . Les valeurs des bornes présentées sont celles du demi-pas se situant le plus près du ventre, soit le demi-pas  $\bar{X}_{\text{INF}} = 6.5$  à  $\bar{X}_{\text{SUP}} = 7.0$  avec  $\theta_i = 90^\circ$ . Les paramètres de ces tableaux sont :

$\bar{X}_{B1} \Rightarrow$  Première borne de la région de macro-glissement.

$\bar{X}_{B2} \Rightarrow$  Deuxième borne de la région de macro-glissement.

$\Delta \bar{W}_{ij\text{tot}}^\lambda \Rightarrow$  Valeur adimensionnelle de la dissipation d'énergie due au micro-glissement du fil "i" dans toutes les régions de micro-glissement de tous les demi-pas. Cette valeur s'obtient en faisant la sommation de l'équation A.51 de toutes les régions de micro-glissement situées entre  $\bar{X}_{\text{INF}}$  et  $\bar{X}_{B1}$  et de celles situées entre  $\bar{X}_{B2}$  et  $\bar{X}_{\text{SUP}}$  et cela, pour tous les demi-pas de la longueur d'onde.

$\Delta \bar{W}_{ij\text{mac}}^\lambda \Rightarrow$  Valeur adimensionnelle de la dissipation d'énergie due au micro-glissement du fil "i" dans la région de macro-glissement de tous les demi-pas. Cette valeur est donnée par la sommation de la deuxième intégrale de l'équation A.52 de tous les demi-pas ( $0 \leq \bar{X} \leq \bar{\lambda}$ ).

$\Delta \bar{W}_i^\lambda \Rightarrow$  Valeur adimensionnelle de la dissipation d'énergie due au macro-glissement du fil "i" de tous les demi-pas. Pour le modèle avec complaisance, cette valeur est donnée par la sommation de la première intégrale de l'équation A.52 de tous les demi-pas, tandis que pour le modèle de Hardy cette valeur est donnée par la sommation de l'équation A.45 de tous les demi-pas ( $0 \leq \bar{X} \leq \bar{\lambda}$ ).

$\Delta\bar{W}_{i\text{total}}^\lambda \Rightarrow$  Valeur adimensionnelle de la dissipation d'énergie totale du fil "i" le long de la longueur d'onde. Pour le modèle avec complaisance cette valeur est la sommation des trois types de dissipation d'énergie précédentes, tandis que pour le modèle de Hardy cette valeur est égale à  $\Delta$ .

	Modèle de Hardy	Modèle avec complaisance ( $\gamma_1=0.06$ )
$\bar{X}_{B1}$	-----	-----
$\bar{X}_{B2}$	-----	-----
$\Delta\bar{W}_{i\text{tot}}^\lambda$	-----	0.019013
$\Delta\bar{W}_{i\text{jmac}}^\lambda$	-----	-----
$\Delta\bar{W}_i^\lambda$	-----	-----
$\Delta\bar{W}_{i\text{total}}^\lambda$	-----	0.019013

**Valeurs adimensionnelles de dissipation d'énergie pour  $\gamma_1 = 1.0$**

Tableau 6.2 (a)

	Modèle de Hardy	Modèle avec complaisance ( $\gamma_1=0.06$ )
$\bar{X}_{B1}$	6.64076	6.63290
$\bar{X}_{B2}$	6.86040	6.86815
$\Delta\bar{W}_{i\text{tot}}^\lambda$	-----	0.030183
$\Delta\bar{W}_{i\text{jmac}}^\lambda$	-----	0.037458
$\Delta\bar{W}_i^\lambda$	0.066745	0.062824
$\Delta\bar{W}_{i\text{total}}^\lambda$	0.066745	0.130465

**Valeurs adimensionnelles de dissipation d'énergie pour  $\gamma_1 = 1.3$**

Tableau 6.2 (b)

	Modèle de Hardy	Modèle avec complaisance ( $\gamma_1=0.06$ )
$\bar{X}_{B1}$	6.58430	6.52766
$\bar{X}_{B2}$	6.91676	6.97265
$\Delta \bar{W}_{ijtot}^\lambda$	-----	0.017003
$\Delta \bar{W}_{ijmac}^\lambda$	-----	0.148658
$\Delta \bar{W}_i^\lambda$	1.20146	2.289676
$\Delta \bar{W}_{itotal}^\lambda$	1.20146	2.455337

**Valeurs adimensionnelles de dissipation d'énergie pour = 2.0**

Tableau 6.2(c)

Il y donc trois cas d'amplitude adimensionnelle  $\bar{A}$  à examiner:

i)  $\bar{A} \leq 1.1$

Pour ces valeurs d'amplitude adimensionnelle, il y a très peu ou pas de macro-glissement. Dans ce cas la différence de dissipation d'énergie entre les deux modèles provient du fait qu'il n'y a aucune dissipation d'énergie dans les régions de glissement nul des différents demi-pas pour le modèle de Hardy tandis qu'il y a de la dissipation d'énergie dans les régions de micro-glissement pour le modèle avec complaisance.

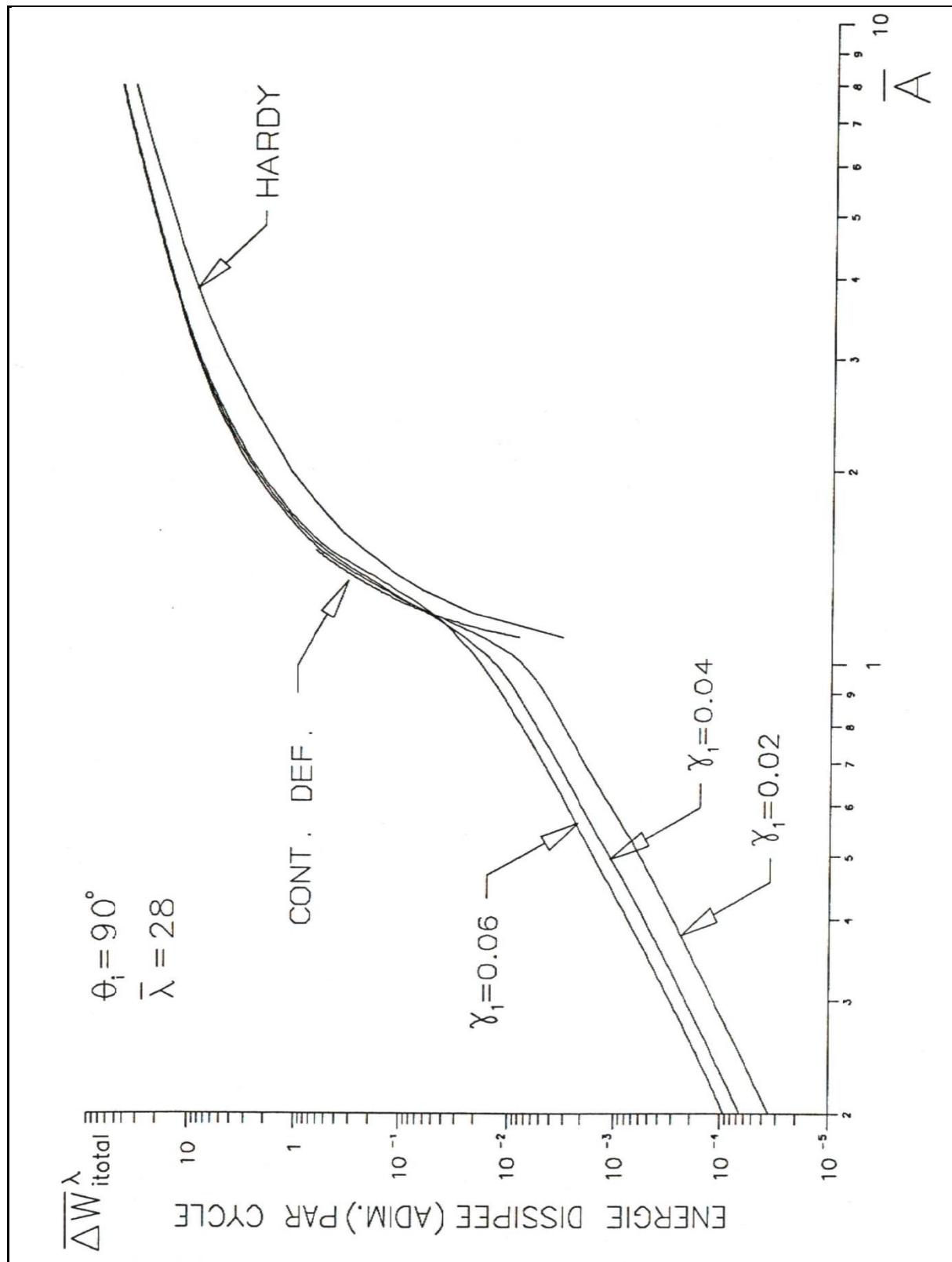
ii)  $1.1 \leq \bar{A} \leq 1.5$

Dans cet intervalle, les régions de macro-glissement des demi-pas de fil adjacents au ventre de la sinusoïde sont modérément importantes, par rapport à la longueur d'un demi-pas de fil. Les régions de macro-glissement de chaque demi-pas adjacent au ventre de la sinusoïde dans chacun des modèles sont approximativement de même dimension.

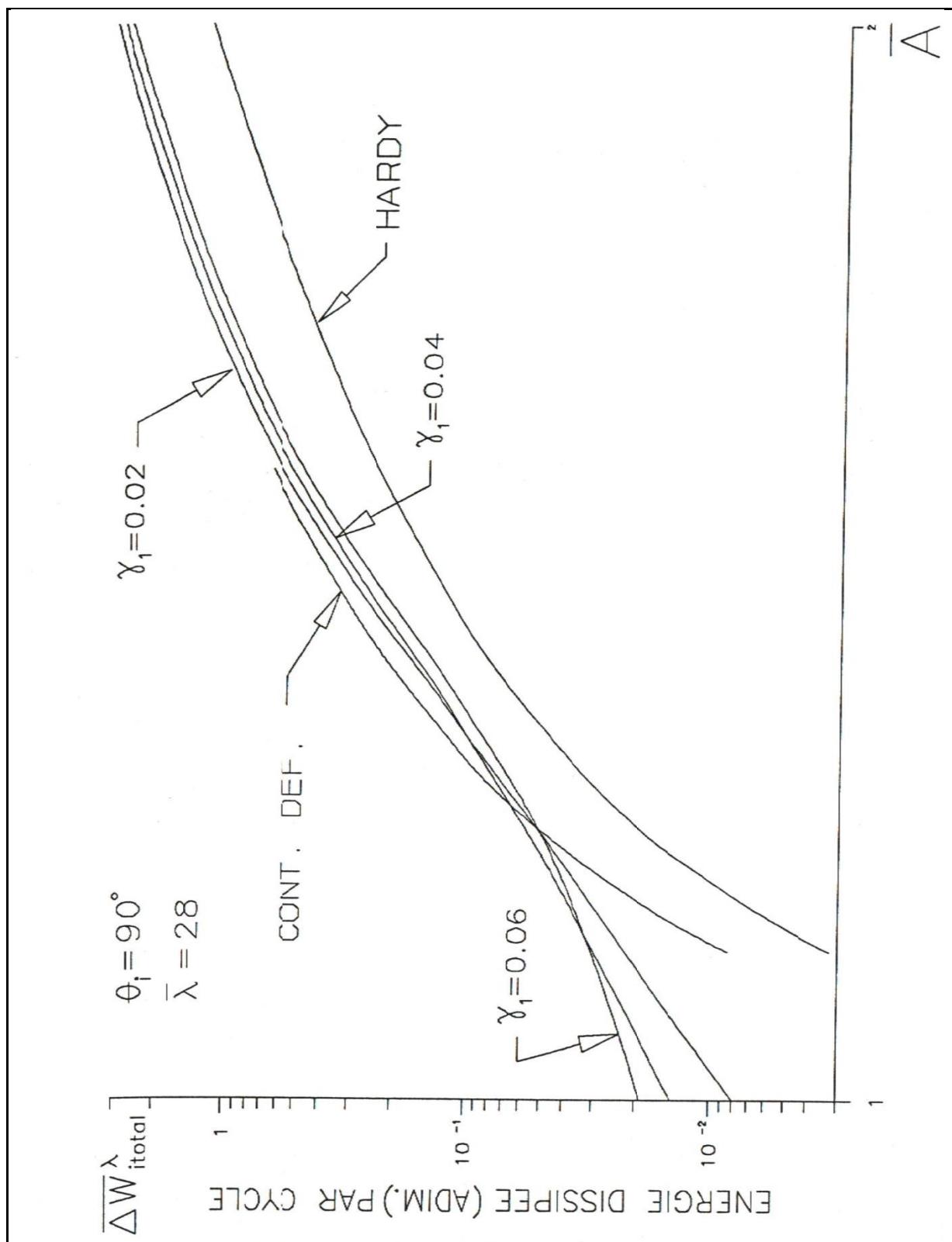
La différence de dissipation d'énergie entre les deux modèles pour cet intervalle d'amplitude adimensionnelle est donc due à la dissipation d'énergie provoquée par le micro-glissement dans les régions de macro-glissement du modèle avec complaisance et de la somme de la dissipation d'énergie due au micro-glissement dans les demi-pas où il n'y a pas de macro-glissement. La dissipation d'énergie due au micro-glissement dans les régions de macro-glissement est donnée par la deuxième intégrale de l'équation 4.15.

iii)  $\bar{A} \geq 1.5$

Pour ces valeurs d'amplitude adimensionnelle, les régions de macro-glissement des demi-pas de fil adjacents au ventre de la sinusoïde sont importantes par rapport à la longueur d'un demi-pas. La différence de dissipation d'énergie entre les deux modèles est essentiellement due au fait que les régions de macro-glissement des demi-pas adjacents au ventre de la sinusoïde du modèle avec complaisance sont plus grandes que celles du modèle de Hardy.



**Figure 6.13(a)** Dissipation d'énergie par cycle d'un fil le long de la longueur d'onde en fonction de l'amplitude adimensionnelle.



**Figure 6.13 (b)** Agrandissement au niveau des points d'inflexion de la figure 6.13(a).

## CONCLUSION

Ce mémoire présente trois modèles mathématiques pour déterminer les caractéristiques d'amortissement d'un toron  $1 \times n$  soumis à deux types de déformée. Une déformée ayant un rayon de courbure constant et une déformée sinusoïdale ont été considérées.

Le premier modèle mathématique présenté est celui de Hardy [4]. Il s'agit d'un modèle qui pose la compatibilité géométrique de déplacement, mais ne pose aucune condition sur la déformation du fil. Ceci a pour effet d'introduire des discontinuités de déformation qui représentent des réactions concentrées. Ces réactions concentrées limitent la dimension de la région de macro-glisserement, donc affectent la valeur de dissipation d'énergie obtenue avec ce modèle.

Le deuxième modèle développé est celui avec continuité de déformation. Ce modèle est identique à celui de Hardy, mais avec des conditions limites différentes. Les conditions limites utilisées dans ce modèle sont la continuité de déplacement et de déformation du fil.

Les régions de macro-glisserement obtenues avec ce modèle sont plus grandes que celles obtenues avec le modèle de Hardy, donc la valeur de dissipation est également plus grande que celle du modèle de Hardy.

Cependant, le domaine de rayon de courbure ou d'amplitude utilisable pour le modèle avec continuité de déformation est limité ( $0.65 \leq \bar{p} \leq 1.0$  pour le rayon de courbure constant ou  $1.0 \leq \bar{A} \leq 1.5$  pour la déformée sinusoïdale). Lorsque la déformation maximale de l'âme devient importante, le fil n'a plus de point d'accrochage, donc ce modèle n'est plus valide.

Le troisième modèle présenté dans ce mémoire est celui avec complaisance. Le développement de ce modèle était l'objectif principal de ce mémoire. Il inclut le comportement mécanique près de la surface de contact âme-fil (complaisance), comportement qui n'est pas considéré dans les deux modèles précédents.

Le modèle avec continuité de déformation a été présenté dans ce mémoire dans le but de valider le modèle avec complaisance. Ces deux modèles ont en commun la continuité de déformation, donc n'ont pas de réactions concentrées comme dans le modèle de Hardy.

Les résultats obtenus montrent qu'effectivement, si le facteur de complaisance  $\gamma_1$  tend vers zéro dans le modèle avec complaisance, alors les résultats de ce dernier tendent vers ceux du modèle avec continuité de déformation.

La dissipation d'énergie évaluée par le modèle avec complaisance est toujours supérieure à celle évaluée par le modèle de Hardy, pour une même déformée. Il y trois cas à distinguer:

i) Lorsque la déformée est faible ( $0.9 \leq \bar{\rho}$  ou  $\bar{A} \leq 1.1$ ), il y a très peu ou pas de macro-glissement. Alors la différence de dissipation d'énergie entre le modèle de Hardy et le modèle avec complaisance provient de la dissipation d'énergie due au micro-glissement qui est négligé dans le modèle de Hardy.

ii) Lorsque la déformée est moyennement forte ( $0.7 \leq \bar{\rho} \leq 0.9$  ou  $1.1 \leq \bar{A} \leq 1.5$ ), alors la région de macro-glissement dans chacun des modèles est modérément importante par rapport à la dimension de la longueur d'un demi-pas de fil. Dans ce cas, la différence de dissipation d'énergie provient principalement de la dissipation d'énergie due au micro-glissement dans la région de macro-glissement du modèle avec complaisance.

iii) Lorsque la déformée est importante ( $\bar{\rho} \leq 0.7$  ou  $1.5 \leq \bar{A}$ ) alors la différence de dissipation d'énergie entre les deux modèles provient du fait que les régions de macro-glissement du modèle avec complaisance sont beaucoup plus grandes que celles obtenues avec le modèle de Hardy, d'où une dissipation d'énergie par macro-glissement supérieur.

L'orientation que pourraient prendre des travaux subséquents serait de réduire au minimum les limites des modèles développés. Ces limites sont:

- ⇒ les contacts fils-fils ne sont pas considérés
- ⇒ les fils sont considérés de petites dimensions par rapport à l'âme (fils en état uniforme de contrainte axiale)
- ⇒ la force normale distribuée "q" qui pousse le fil sur l'âme est posée comme étant constante
- ⇒ le modèle avec complaisance est valide pour une âme et des fils faits du même matériau
- ⇒ le modèle avec complaisance pour la déformée sinusoïdale doit solutionner chaque demi-pas de fil séparément.
- ⇒ le modèle avec continuité de déformation a besoin de deux points d'accrochage à chaque demi-pas
- ⇒ un contact linéique est considéré; cependant dans un câble hélicoïdal, le type de contact existant entre les couches de fils est un contact ponctuel.

### BIBLIOGRAPHIE

Les références qui sont suivies d'un astérisque, sont citées dans ce mémoire.

- [1] Burden R.L., Faires J.D.; "Numerical Analysis"; Third edition, Prindle, Weber & Schmidt, 1985.
- [2] Cattaneo C.; "Sul Contatto di Corpi Elastici"; Accademia dei, Lincei, Rendiconti, Series 6, folio 27 partie I: pp.342-348, partie II: pp. 434-436, partie III: pp. 474-478, 1938. \*
- [3] Deresiewicz H.; "Oblique Contact of Nonspherical Elastic Bodies."; Journal of Applied Mechanics, Volume 24, pp. 623-624, 1957. \*
- [4] Hardy C.; "Analysis of Self-Damping Characteristics of Stranded Cables in Transverse Vibration"; CSME Mechanical Engineering Forum 1990, Toronto, June 7, 1990. \*
- [5] Hobbs R.E., Raoof M.; "Interwire Slippage and Fatigue Prediction in Stranded Cables for TLP Tethers"; Behaviour of offshore structures, Chryssostomidis C. et Connor J.J. ed., Hemisphere Publishing McGraw-Hill, New-York, 1982, Vol. 2 p. 77-99 (Proc. 3rd int. conf. on behaviour of offshore structures, 1982) \*
- [6] Hruska F.H.; "Calculation of Stresses in Wire Ropes"; Wire and Wire Product, Vol 26, p. 766-767 et 799-801, 1951
- [7] Hruska F.H.; "Radial Forces in Wire Ropes"; Wire and Wire Product, Vol 27, No.5, p.459-63, 1952 \*
- [8] Johnson K.L., "Contact Mechanics", Cambridge Univ. Press, 1987

- [9] Kreyszig E.; "Advanced Engineering Mathematics", 5th ed., John Wiley & Sons, 1985
- [10] Mindlin R.D.; "Compliance of Elastic Bodies in Contact"; Journal of Applied Mechanics, Volume 16, Transactions ASME, Volume 71, p. 259-268, September 1949. \*
- [11] Mindlin R.D., Mason W.P., Osmer T.F. et Deresiewicz H.; "Effects of an Oscillating Tangential Force on the Contact Surfaces of Elastic Spheres"; Proceedings of the First U.S. National Congress of Applied Mechanics, Chicago, Ill., pp. 203-208, 1951. \*
- [12] Popov E.P.; "Mechanics of Material", 2nd ed., Prentice-Hall inc., 1976
- [13] Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T.; "Numerical Recipes"; Cambridge University Press, 1986.
- [14] Roark R.J., Young W.C.; "Formulas for Stress and Strain"; 5ed. McGraw-Hill, 1975 \*
- [15] Timoshenko S.P., Goodier J.N.; "Theory of Elasticity", 3rd ed., McGraw-Hill, 1970

## ANNEXE A

Cette annexe présente les équations qui ont été mises sous forme adimensionnelle à l'aide des constantes présentées à la section 5.1. Ce sont ces équations adimensionnelles qui ont été utilisées pour obtenir les résultats du chapitre 6.

#### A.1 Déformée ayant un rayon de courbure constant

L'équation adimensionnelle du déplacement du fil "i" dans les régions de glissement nul est obtenue en divisant l'équation 2.5 par l'équation 5.1, puis en remplaçant les équations 5.5 et 5.7:

$$\bar{u}_i^o(\bar{X}) = \frac{1}{2\pi\bar{\rho}} [\cos\theta_i - \cos(2\pi\bar{X} + \theta_i)] \quad (\text{A.1})$$

où  $\bar{u}_i^o$  est le déplacement obtenu de l'équation adimensionnelle du fil "i" et est relié au déplacement avec dimension par:

$$\bar{u}_i^o = \frac{u_i^o}{Y_D} = \frac{u_i^o E R_F^2}{2\mu_c T_i R_a} \quad (\text{A.2})$$

L'équation adimensionnelle de la déformation du fil dans les régions de glissement nul est obtenue en divisant l'équation 2.6 par l'équation 5.2, puis en remplaçant les équations 5.5 et 5.7:

$$\bar{\varepsilon}_i^o(\bar{X}) = \frac{1}{\bar{\rho}} \sin(2\pi\bar{X} + \theta_i) \quad (\text{A.3})$$

où  $\bar{\varepsilon}_i^o$  est la déformation obtenue de l'équation adimensionnelle du fil "i" et est reliée à la déformation par:

$$\varepsilon_i^{\rho} = \frac{\varepsilon_i^{\rho}}{Y_E} = \frac{\varepsilon_i^{\rho} \pi E R_F^2}{\mu_c T_i \tan \alpha \cos \alpha} \quad (\text{A.4})$$

L'équation adimensionnelle de la deuxième dérivée du déplacement du fil "i" dans les régions de glissement nul est obtenue en dérivant l'équation 2.6, divisant le résultat par l'équation 5.3 puis en remplaçant les équations 5.5 et 5.7:

$$\overline{\frac{d^2 u_i^{\rho}}{ds^2}}(X) = \frac{2\pi}{\rho} [\cos(2\pi X + \theta_i)] \quad (\text{A.5})$$

La deuxième dérivée adimensionnelle du déplacement du fil "i" est donc reliée à la deuxième dérivée de déplacement par:

$$\overline{\frac{d^2 u_i^{\rho}}{ds^2}} = \frac{d^2 u_i^{\rho}}{ds^2} = \frac{d^2 u_i^{\rho}}{ds^2} 2\pi^2 E R_F^2 R_a = \frac{d^2 u_i^{\rho}}{ds^2} \frac{2\pi^2 E R_F^2 R_a}{\mu_c T_i \sin^2 \alpha} \quad (\text{A.6})$$

#### A.1.1 Modèle de Hardy

Pour les régions de glissement nul, le déplacement, la déformation et la deuxième dérivée du déplacement du fil "i" sont donnés par les équations A.1, A.3 et A.5 respectivement.

L'équation adimensionnelle du déplacement du fil "i" dans la région de macro-glissement est obtenue en divisant l'équation 2.13 par l'équation 5.1, puis en remplaçant l'équation 5.5:

$$u_i^{Ho}(X) = -\pi(X-X_{B1})^2 + \xi_i^{Ho}(X-X_{B1}) + \psi_i^{Ho} \quad (A.7)$$

pour  $X_{B1} \leq X \leq X_{B2}$

où les constantes  $\rho$  et  $\rho$ , sont reliées aux constantes dimensionnelles correspondantes par:

$$\xi_i^{Ho} = \frac{\xi_i^{Ho}}{Y_E} = \frac{\xi_i^{Ho} E \pi R_F^2}{\mu_c T_i \sin \alpha} \quad (A.8)$$

et

$$\psi_i^{Ho} = \frac{\psi_i^{Ho}}{Y_D} = \frac{\psi_i^{Ho} E R_F^2}{2 \mu_c T_i R_a} \quad (A.9)$$

L'équation adimensionnelle de la déformation du fil "i" dans cette région est obtenue en dérivant l'équation 2.13, divisant le résultat par l'équation 5.2 puis en remplaçant l'équation 5.5:

$$\varepsilon_i^{Ho}(X) = -2\pi(X-X_{B1}) + \xi_i^{Ho} \quad (A.10)$$

pour  $X_{B1} \leq X \leq X_{B2}$

La deuxième dérivée adimensionnelle du déplacement du fil "i" dans cette région est obtenue en dérivant l'équation 2.13 deux fois puis en divisant le résultat par l'équation 5.3, ce qui donne une constante qui représente la force de friction maximale:

$$\overline{\frac{d^2 u_i^{Ho}}{dS^2}} = -2\pi \quad (A.11)$$

#### A.1.2 Modèle avec continuité de déformation

Pour les régions de glissement nul, le déplacement, la déformation et la deuxième dérivée du déplacement du fil "i" sont

donnés par les équations A.1, A.3 et A.5 respectivement.

L'équation adimensionnelle du déplacement du fil "i" dans la région de macro-glissement est obtenue en divisant l'équation 2.29 par l'équation 5.1, puis en remplaçant l'équation 5.5:

$$u_i^{cp}(X) = -\pi(X-X_{B1})^2 + \xi_i^{cp}(X-X_{B1}) + \psi_i^{cp} \quad (A.12)$$

pour  $X_{B1} \leq X \leq X_{B2}$

où les constantes  $\rho$  et  $\rho$ , sont reliées aux constantes dimensionnelles correspondantes par:

$$\xi_i^{cp} = \frac{\xi_i^{cp}}{Y_E} = \frac{\xi_i^{cp} E \pi R_F^2}{\mu_c T_i \sin \alpha} \quad (A.13)$$

et

$$\psi_i^{cp} = \frac{\psi_i^{cp}}{Y_D} = \frac{\psi_i^{cp} E R_F^2}{2 \mu_c T_i R_a} \quad (A.14)$$

L'équation adimensionnelle de la déformation du fil "i" dans cette région est obtenue en divisant l'équation 2.30 par l'équation 5.2 puis en remplaçant l'équation 5.5:

$$\varepsilon_i^{cp}(X) = -2\pi(X-X_{B1}) + \xi_i^{cp} \quad (A.15)$$

pour  $X_{B1} \leq X \leq X_{B2}$

La deuxième dérivée adimensionnelle du déplacement du fil "i" dans cette région est obtenue en dérivant l'équation 2.30 puis en divisant le résultat par l'équation 5.3, ce qui donne une constante qui représente la force de friction maximale:

$$\overline{\frac{d^2 u_i^{cp}}{dS^2}} = -2\pi \quad (A.16)$$

### A.1.3 Modèle avec complaisance

L'équation adimensionnelle du déplacement du fil "i" est obtenue en divisant l'équation 3.28 par l'équation 5.1, puis en remplaçant les équations 5.5, 5.7 et 5.11:

$$u_{ij}^{\rho}(X) = \frac{1}{2\pi\rho} \left[ \cos\theta_i - \frac{\cos(2\pi X + \theta_i)}{[\gamma_1 \zeta_{cj} + 1]} \right] + \beta_{ij}^{\rho} e^{x\sqrt{\frac{4\pi^2}{\gamma_1 \zeta_{cj}}}} + \eta_{ij}^{\rho} e^{-x\sqrt{\frac{4\pi^2}{\gamma_1 \zeta_{cj}}}} - (\pm) 2\frac{\gamma_1}{4\pi} \overline{XCOMP}_j - (\pm) 2\frac{\gamma_1}{4\pi} \zeta_{cj} \overline{YCOMP}_j \quad (\text{A.17})$$

Les différentes constantes adimensionnelles sont reliées aux constantes dimensionnelles correspondantes par:

$$\frac{\overline{XCOMP}_j}{\zeta_{cj}} = \frac{\beta_{ij}^{\rho} \overline{XCOMP}_j R_a E}{2\mu_c T_i (1-v^2) \left[ \frac{\gamma_1 \overline{XCOMP}_j}{\rho} \sqrt{\frac{R_a E R_F}{2\pi^2 T_i^2 R_a E R_F (R_F + E R_a) (R_F + R_a)}} \right]} \quad (\text{A.18})$$

$$\eta_{ij}^{\rho} = \frac{\eta_{ij}^{\rho} R_a}{\gamma_D} = \frac{\eta_{ij}^{\rho} E R_F}{2\mu_c T_i R_a} \quad (\text{A.19})$$

L'équation adimensionnelle de la déformation du fil "i" est obtenue en divisant l'équation 3.29 par l'équation 5.2, puis en remplaçant les équations 5.5, 5.7 et 5.11:

$$\varepsilon_{ij}^{\rho}(X) = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\sin(2\pi X + \theta_i)}{[\gamma_1 \zeta_{cj} + 1]} \right] + \beta_{ij}^{\rho} \sqrt{\frac{4\pi^2}{\gamma_1 \zeta_{cj}}} e^{x\sqrt{\frac{4\pi^2}{\gamma_1 \zeta_{cj}}}} - \eta_{ij}^{\rho} \sqrt{\frac{4\pi^2}{\gamma_1 \zeta_{cj}}} e^{-x\sqrt{\frac{4\pi^2}{\gamma_1 \zeta_{cj}}}} \quad (\text{A.23})$$

L'équation adimensionnelle de la deuxième dérivée du déplacement du fil "i" est obtenue en dérivant l'équation 3.29,

divisant le résultat par l'équation 5.3 puis en remplaçant les équations 5.5, 5.7 et 5.11:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_{ij}^\rho}{ds^2}(X) &= \frac{2\pi}{\rho} \left[ \frac{\cos(2\pi X + \theta_i)}{[\gamma_1 \zeta_{cj} + 1]} \right] \\ &+ \frac{\beta_{ij}^\rho 4\pi^2}{\gamma_1 \zeta_{cj}} e^{x\sqrt{\frac{4\pi^2}{\gamma_1 \zeta_{cj}}}} + \frac{\eta_{ij}^\rho 4\pi^2}{\gamma_1 \zeta_{cj}} e^{-x\sqrt{\frac{4\pi^2}{\gamma_1 \zeta_{cj}}}} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

L'équation adimensionnelle de déplacement du fil dans la région de macro-glissement est obtenue en divisant 3.32 par 5.1, puis en remplaçant 5.5:

$$u_i^{\zeta\rho}(X) = -\pi(X - X_{B1})^2 + \xi_i^{\zeta\rho}(X - X_{B1}) + \psi_i^{\zeta\rho} \quad (\text{A.25})$$

pour  $X_{B1} \leq X \leq X_{B2}$

où les constantes  $\rho$  et  $\zeta$ , sont reliées aux constantes dimensionnelles correspondantes par:

$$\xi_i^{\zeta\rho} = \frac{\xi_i^{\zeta\rho}}{\gamma_E} = \frac{\xi_i^{\zeta\rho} E \pi R_F^2}{\mu_c T_i \sin \alpha} \quad (\text{A.26})$$

et

$$\psi_i^{\zeta\rho} = \frac{\psi_i^{\zeta\rho}}{\gamma_D} = \frac{\psi_i^{\zeta\rho} E R_F^2}{2 \mu_c T_i R_a} \quad (\text{A.27})$$

L'équation adimensionnelle de la déformation du fil "i" dans cette région est obtenue en divisant l'équation 3.33 par l'équation 5.2 puis en remplaçant l'équation 5.5:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^{\zeta\rho}(X) &= -2\pi(X - X_{B1}) + \xi_i^{\zeta\rho} \\ &\text{pour } X_{B1} \leq X \leq X_{B2} \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

La deuxième dérivée adimensionnelle du déplacement du fil "i" dans cette région est obtenue en dérivant l'équation 3.33 puis en divisant le résultat par l'équation 5.3, ce qui donne une constante qui représente la force de friction maximale:

$$\overline{\frac{d^2 u_i^{\zeta\rho}}{ds^2}} = \pm 2\pi \quad (\text{A.29})$$

## A.2 Déformée sinusoïdale

L'équation adimensionnelle de déplacement du fil "i" dans les régions de glissement nul est obtenue en divisant l'équation 2.18 par l'équation 5.1, puis en remplaçant les équations 5.5, 5.8 et 5.10:

$$u_i^\lambda(X) = \frac{A \lambda}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\lambda-1} \left[ \sin\left(2\pi X \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) + \theta_i\right) - \sin\theta_i \right] - \frac{1}{\lambda+1} \left[ \sin\left(2\pi X \left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) + \theta_i\right) - \sin\theta_i \right] \right\} \quad (\text{A.30})$$

L'équation adimensionnelle de la déformation du fil "i" dans les régions de glissement nul est obtenue en divisant l'équation 2.19 par l'équation 5.2, puis en remplaçant les équations 5.5, 5.8 et 5.10:

$$\varepsilon_i^\lambda(X) = A \sin(2\pi X + \theta_i) \sin\left(\frac{2\pi X}{\lambda}\right) \quad (\text{A.31})$$

L'équation adimensionnelle de la deuxième dérivée du déplacement du fil "i" est obtenue en dérivant l'équation 2.19, divisant le résultat par l'équation 5.3 puis en remplaçant les équations 5.5, 5.8 et 5.10:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{d^2 u_i^\lambda}{ds^2}(X)} &= \frac{2\pi A}{\lambda} \left[ \lambda \cos(2\pi X + \theta_i) \sin\left(\frac{2\pi X}{\lambda}\right) \right. \\ &\quad \left. + \sin(2\pi X + \theta_i) \cos\left(\frac{2\pi X}{\lambda}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

#### A.2.1 Modèle de Hardy

Pour les régions de glissement nul, le déplacement, la déformation et la deuxième dérivée du déplacement du fil "i" sont donnés par les équations A.30, A.31 et A.32 respectivement.

L'équation adimensionnelle du déplacement du fil "i" dans la région de macro-glissement est obtenue en divisant l'équation 2.24 par l'équation 5.1, puis en remplaçant l'équation 5.5:

$$u_i^{H\lambda}(X) = -\pi(X-X_{B1})^2 + \xi_i^{H\lambda}(X-X_{B1}) + \psi_i^{H\lambda} \quad (\text{A.33})$$

pour  $X_{B1} \leq X \leq X_{B2}$

L'équation adimensionnelle de la déformation du fil "i" dans cette région est obtenue en dérivant l'équation 2.24, divisant le résultat par l'équation 5.2 puis en remplaçant l'équation 5.5:

$$\varepsilon_i^{\lambda_p}(X) = +-2\pi(X - X_{B1}) + \xi_i^{H\lambda} \quad (A.34)$$

pour  $X_{B1} \leq X \leq X_{B2}$

La deuxième dérivée adimensionnelle du déplacement du fil "i" dans cette région est obtenue en dérivant l'équation 2.24 deux fois puis en divisant le résultat par l'équation 5.3, ce qui donne une constante qui représente la force de friction maximale:

$$\overline{\frac{d^2 u_i^{H_p}}{dS^2}} = +-2\pi \quad (A.35)$$

#### A.2.2 Modèle avec continuité de déformation

Pour les régions de glissement nul, le déplacement, la déformation et la deuxième dérivée du déplacement du fil "i" sont donnés par les équations A.30, A.31 et A.32 respectivement.

L'équation adimensionnelle du déplacement du fil "i" dans la région de macro-glissement est obtenue en divisant l'équation 2.39 par l'équation 5.1, puis en remplaçant l'équation 5.5:

$$u_i^{C\lambda}(X) = +- \pi (X - X_{B1})^2 + \xi_i^{C\lambda} (X - X_{B1}) + \psi_i^{C\lambda} \quad (A.36)$$

pour  $X_{B1} \leq X \leq X_{B2}$

L'équation adimensionnelle de la déformation du fil "i" dans cette région est obtenue en divisant l'équation 2.40 par l'équation 5.2 puis en remplaçant l'équation 5.5:

$$\varepsilon_i^{cx}(X) = -2\pi(X - X_{B1}) + \xi_i^{cx} \quad (A.37)$$

pour  $X_{B1} \leq X \leq X_{B2}$

La deuxième dérivée adimensionnelle du déplacement du fil "i" dans cette région est obtenue en dérivant l'équation 2.40, puis en divisant le résultat par l'équation 5.3, ce qui donne une constante qui représente la force de friction maximale:

$$\overline{\frac{d^2 u_i^{cx}}{dS^2}} = -2\pi \quad (A.38)$$

#### A.2.3 Modèle avec complaisance

L'équation adimensionnelle du déplacement du fil "i" est obtenue en divisant l'équation 3.30 par l'équation 5.1, puis en remplaçant les équations 5.5, 5.8, 5.10 et 5.11:

$$\begin{aligned}
u_{ij}^\lambda(X) = & \beta_{ij}^\lambda e^{X\sqrt{\frac{4\pi^2}{Y_1\zeta_{cj}}}} + \eta_{ij}^\lambda e^{-X\sqrt{\frac{4\pi^2}{Y_1\zeta_{cj}}}} \\
& - (-) 2\frac{Y_1}{4\pi} \frac{XCOMP_j}{XCOMP_j} - (\pm) 2\frac{Y_1}{4\pi} \zeta_{cj} \frac{YCOMP_j}{YCOMP_j} \\
& \frac{A}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\lambda-1} \left[ \frac{\sin(2\pi X \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) + \theta_i)}{\left[Y_1 \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)^2 \zeta_{cj} + 1\right]} - \sin \theta_i \right] \right. \\
& \left. - \frac{1}{\lambda+1} \left[ \frac{\sin(2\pi X \left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) + \theta_i)}{\left[Y_1 \left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right)^2 \zeta_{cj} + 1\right]} - \sin \theta_i \right] \right\}
\end{aligned} \tag{A.39}$$

L'équation adimensionnelle de la déformation du fil "i" est obtenue en divisant l'équation 3.31 par l'équation 5.2, puis en remplaçant les équations 5.5, 5.8, 5.10 et 5.11:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij}^\lambda(X) = & \beta_{ij}^\lambda \sqrt{\frac{4\pi^2}{Y_1\zeta_{cj}}} e^{X\sqrt{\frac{4\pi^2}{Y_1\zeta_{cj}}}} - \eta_{ij}^\lambda \sqrt{\frac{4\pi^2}{Y_1\zeta_{cj}}} e^{-X\sqrt{\frac{4\pi^2}{Y_1\zeta_{cj}}}} \\
& \frac{A}{2} \left\{ \frac{\cos(2\pi X \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) + \theta_i)}{\left[Y_1 \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)^2 \zeta_{cj} + 1\right]} - \frac{\cos(2\pi X \left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) + \theta_i)}{\left[Y_1 \left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right)^2 \zeta_{cj} + 1\right]} \right\}
\end{aligned} \tag{A.40}$$

L'équation adimensionnelle de la deuxième dérivée du déplacement du fil "i" est obtenue en dérivant l'équation 3.31, divisant le résultat par l'équation 5.3 puis en remplaçant les équations 5.5, 5.8, 5.10 et 5.11:

$$\frac{d^2 u_{ij}^\lambda}{ds^2}(X) = \frac{\beta_{ij}^\lambda 4\pi^2}{Y_1 \zeta_{cj}} e^{X\sqrt{\frac{4\pi^2}{Y_1 \zeta_{cj}}} + \frac{\eta_{ij}^\lambda 4\pi^2}{Y_1 \zeta_{cj}}} e^{-X\sqrt{\frac{4\pi^2}{Y_1 \zeta_{cj}}} + \frac{\pi A}{\lambda}} \bullet \\ \left\{ \frac{-(\lambda-1) \sin(2\pi X \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) + \theta_i)}{\left[Y_1 \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)^2 \zeta_{cj} + 1\right]} + \frac{(\lambda+1) \sin(2\pi X \left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) + \theta_i)}{\left[Y_1 \left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right)^2 \zeta_{cj} + 1\right]} \right\} \quad (\text{A.41})$$

L'équation adimensionnelle du déplacement du fil "i" dans la région de macro-glissement est obtenue en divisant l'équation 3.34 par l'équation 5.1, puis en remplaçant l'équation 5.5:

$$u_i^{\zeta\lambda}(X) = -\pi(X-X_{B1})^2 + \xi_i^{\zeta\lambda}(X-X_{B1}) + \psi_i^{\zeta\lambda} \quad (\text{A.42}) \\ \text{pour } X_{B1} \leq X \leq X_{B2}$$

L'équation adimensionnelle de la déformation du fil "i" dans cette région est obtenue en divisant l'équation 3.35 par l'équation 5.2 puis en remplaçant l'équation 5.5:

$$\varepsilon_i^{\zeta\lambda}(X) = -2\pi(X-X_{B1}) + \xi_i^{\zeta\lambda} \quad (\text{A.43}) \\ \text{pour } X_{B1} \leq X \leq X_{B2}$$

La deuxième dérivée adimensionnelle du déplacement du fil "i" dans cette région est obtenue en dérivant l'équation 3.35 puis en divisant le résultat par l'équation 5.3, ce qui donne une constante qui représente la force de friction maximale:

$$\frac{d^2 u_i^{\zeta\lambda}}{ds^2} = -2\pi \quad (\text{A.44})$$

### A.3 Équations adimensionnelles de dissipation d'énergie

L'équation de dissipation d'énergie du fil "i" dans la région de macro-glissement, pour les modèles sans complaisance, est donnée par l'équation 4.2. Cette dernière est mise sous forme adimensionnelle en la divisant par l'équation 5.4 puis en remplaçant l'équation 5.5:

$$\Delta W_i^{HC} = 4 \int_{X_{B1}}^{X_{B2}} |D_i(X) - u_i^{HC}(X)| dX \quad (\text{A.45})$$

où les déplacements, sous forme adimensionnelle, de la surface de l'âme et du fil "i" sont donnés par les équations du modèle et de la déformée considérée.

L'équation de dissipation d'énergie du fil "i" dans une région de micro-glissement pour le modèle avec complaisance est donnée par l'équation 4.12. Cette dernière est transformée sous forme adimensionnelle en deux étapes.

Premièrement, il faut diviser l'équation 4.12 de chaque côté par l'équation 5.4 puis remplacer les équations 5.5 et 5.11, ce qui donne:

$$\Delta W_{ij} = \frac{18}{5\pi Y_1} \int_{X_{Rk}}^{X_{R(k+1)}} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{|D_i - u_{ij}|}{2\delta_{\max}} \right)^{\frac{5}{2}} \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{5|D_i - u_{ij}|}{12\delta_{\max}} \left( 1 - \left( 1 - \frac{|D_i - u_{ij}|}{2\delta_{\max}} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \right] dx \quad (\text{A.46})$$

La deuxième étape consiste à mettre le numérateur et dénominateur de la fraction suivante sous une forme compatible:

$$\frac{|D_i - u_{ij}|}{\delta_{\max}} \quad (\text{A.47})$$

En divisant le numérateur et le dénominateur de cette fraction par l'équation 5.1 elle devient:

$$\frac{|D_i - u_{ij}|}{\delta_{\max}} \quad (\text{A.48})$$

où  $\delta_{\max}$  est donné par:

$$\delta_{\max} = \frac{\delta_{\max} E R_F^2}{2 \mu_c T_i R_a} = \frac{3}{8\pi} \gamma_1 \quad (\text{A.49})$$

En remplaçant l'équation A.49 dans l'équation A.48, la fraction prend la forme:

$$\frac{8\pi |D_i - u_{ij}|}{3\gamma_1} \quad (\text{A.50})$$

En substituant l'équation A.50 dans l'équation A.46, l'équation adimensionnelle de la dissipation d'énergie du fil "i" dans une région de micro-glissement bornée par  $X_{Rk}$  et  $X_{R(k+1)}$  devient:

$$\Delta W_{ij} = \frac{18}{5\pi} \gamma_1 \int_{X_{Rk}}^{X_{R(k+1)}} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{4\pi |D_i - u_{ij}|}{3\gamma_1} \right)^{\frac{5}{2}} \right] \left[ \frac{5}{3} - \frac{20\pi |D_i - u_{ij}|}{18\gamma_1} \right] \left[ 1 - \left( 1 - \frac{4\pi |D_i - u_{ij}|}{3\gamma_1} \right)^{\frac{3}{2}} \right] dX \quad (\text{A.51})$$

où les déplacements, sous forme adimensionnelle, de la surface de l'âme et du fil "i" sont donnés par les équations de la déformée considérée.

L'équation adimensionnelle de la dissipation d'énergie du fil "i" dans la région de macro-glissement de ce modèle s'obtient en divisant l'équation 4.15 par l'équation 5.4 puis en remplaçant l'équation 5.11:

$$\begin{aligned} \Delta W_i^z &= \frac{\Delta W_i^z E R_F^2 \cos \alpha}{2 \mu_c^2 T_i R_a q p} \\ &= +4 \int_{X_{B1}}^{X_{B2}} [D_i(X) - u_i^z(X) + -2\delta_{\max}] dX + \int_{X_{B1}}^{X_{B2}} \frac{3\gamma_1}{5\pi} dX \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

et puisque  $\gamma_1$  et  $\delta_{\max}$  sont des constantes:

$$\Delta W_i^z = 4 \int_{X_{B1}}^{X_{B2}} |D_i(X) - u_i^z(X)| dX - \frac{12\gamma_1}{5\pi} (X_{B2} - X_{B1}) \quad (\text{A.53})$$

où les déplacements, sous forme adimensionnelle, de la surface de l'âme et du fil "i" sont donnés par les équations de la déformée considérée.

**ANNEXE B**

Cette annexe présente le développement de l'équation de dissipation d'énergie due au micro-glissement entre deux sphères élastiques. Ce développement a été fait et présenté par Mindlin [11].

Cette équation est développée pour le cas d'une surface de contact circulaire entre deux sphères. Elle sera modifiée pour le cas du contact linéique entre deux cylindres parallèles à l'aide du facteur de forme  $\Phi$  donné par l'équation 3.10.

Lorsque deux sphères élastiques sont poussées l'une contre l'autre par une force constante "Q", normale à leur plan tangent initial, alors une surface de contact circulaire de rayon "b" est créée. Le rayon "b" de la surface circulaire est déterminé par la théorie de Hertz.

La théorie de Hertz donne également la traction normale,  $Z_z$ , sur la surface de contact comme ayant la distribution:

$$Z_z = P \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.1})$$

où       $r$                    $\Rightarrow$       distance à partir du centre de la surface de contact  
            $b$                    $\Rightarrow$       rayon de la surface de contact  
            $P=3Q/2\pi b^2$      $\Rightarrow$       pression de contact maximale.

Une fois les sphères poussées l'une contre l'autre par la force normale " $Q$ ", qui demeure constante, une force tangentielle " $F_f$ " à la surface de contact qui croît monotoniquement est appliquée. Cette force tangentielle est toujours inférieure à la force de friction maximale " $\mu_c Q$ ", où  $\mu_c$  est le coefficient de friction de Coulomb.

L'hypothèse qu'il n'y a aucun glissement sur toute la surface de contact est inacceptable car elle résulte en une distribution de traction tangentielle  $X_z$  qui tend à l'infini sur la périphérie de la région de contact.

Il faut donc poser comme hypothèse que le glissement va apparaître sur la périphérie et va se propager vers l'intérieur de la surface de contact au fur et à mesure que la force tangentielle va croître. Puisque  $X_z$  est radialement symétrique en absence de glissement, il est raisonnable de supposer que le glissement se propage sur un anneau.



**Figure B.1** Surface de contact circulaire ayant une région centrale qui adhère et un anneau où il y a du glissement

La traction tangentielle sur cette anneau de glissement est posée comme étant  $X_z = \mu_c Z_z$ , où  $\mu_c$  est le coefficient de friction de Coulomb.

Le rapport entre le rayon intérieur et extérieur de cet anneau de glissement est donné par:

$$\frac{c}{b} = \left(1 - \frac{F_f}{\mu_c Q}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{B.2})$$

où  $c$   $\Rightarrow$  rayon intérieur de l'anneau de glissement.

Les composantes de la traction tangentielle sur la surface de contact sont:

$$\begin{aligned} X_z &= \mu_c P \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} ; & c \leq r \leq b \\ X_z &= \mu_c P \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \mu_c P \left(\frac{c}{b}\right) \left(1 - \frac{r^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} ; & r \leq c \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Le déplacement tangentiel d'une sphère par rapport à la région de glissement nul (courbe O-O<sub>1</sub>-O<sub>5</sub>, figure B.2) est:

$$\delta = \frac{3(2-v)\mu_c Q}{16Gb} \left[ 1 - \left(1 - \frac{F_f}{\mu_c Q}\right)^{\frac{2}{3}} \right] \quad (\text{B.4})$$

#### **Force tangentielle $F_f$ oscillant entre les valeurs $+F$ et $-F$**

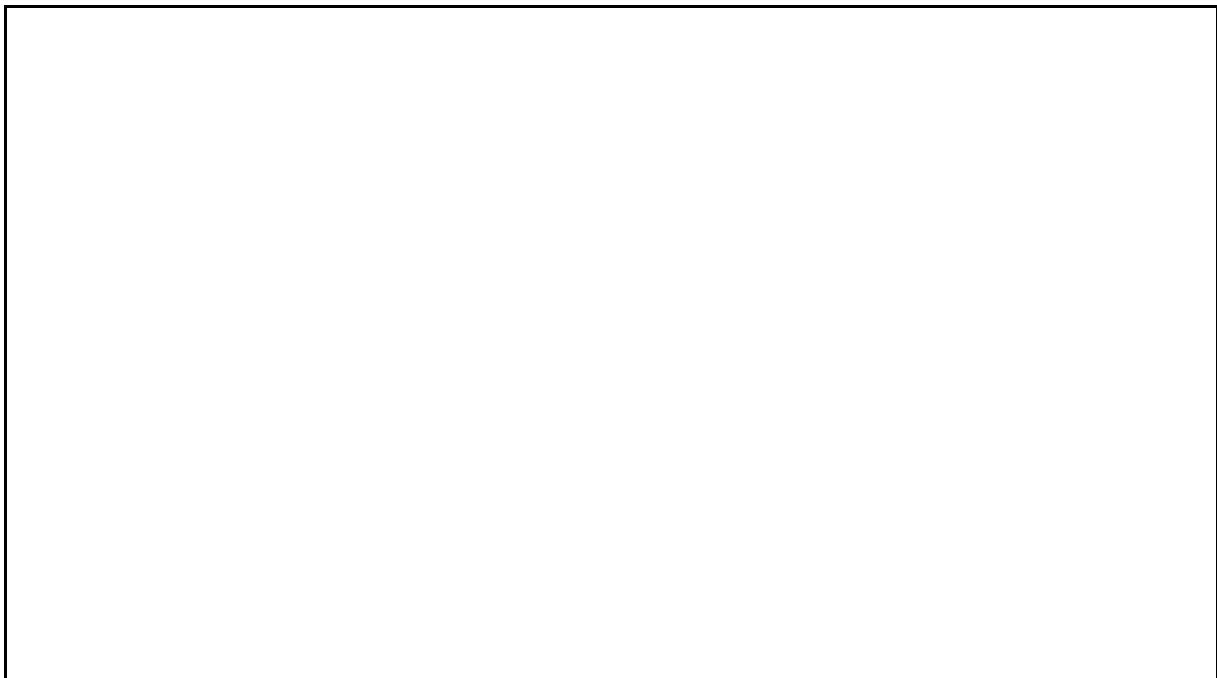
Au point O<sub>1</sub> de la courbe présentée à la figure B.2, la force tangentielle a atteint sa valeur maximale positive  $0 < +F < \mu_c Q$ . A partir de ce point, la force tangentielle commence à décroître, ce qui est équivalent à l'application d'une force dans la

direction négative.

S'il n'y a aucun glissement durant cette réduction, la traction tangentielle va tendre vers l'infini sur la périphérie de la surface de contact. Il y a donc du glissement qui doit apparaître sur un anneau et qui pénètre jusqu'à un rayon  $c'$ , où  $c \leq c' \leq b$ . Puisque ce glissement est dans la direction opposée du glissement initial, la direction de la traction  $X_z$  sur l'anneau  $c' \leq r \leq b$  est également de direction inverse de la traction tangentielle initiale, mais sa grandeur en valeur absolue est inchangée. Il faut donc additionner:

$$X_z = -2\mu_c P \left( 1 - \frac{r^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}} ; \quad c' \leq r \leq b \quad (\text{B.5})$$

à la traction initiale.



**Figure B.2** Courbe reliant le déplacement  $\delta$  à la force tangentielle  $F_f$

De plus, pour maintenir la condition de déplacement tangentiel

uniforme au-dessus de la surface de contact circulaire où il n'y a aucun glissement, il faut également additionner, selon la théorie de Cattaneo,

$$X_z = -2\mu_c P \left( 1 - \frac{r^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 2\mu_c P \left( \frac{c'}{b} \right) \left( 1 - \frac{r^2}{c'^2} \right)^{\frac{1}{2}} ; \quad r \leq c' \quad (\text{B.6})$$

à la traction initiale.

Le déplacement sur  $r \leq c'$  pour B.5 et B.6 est donné par:

$$\delta = -\frac{3(2-v)\mu_c Q}{8Gb} \left( 1 - \frac{c'^2}{b^2} \right) ; \quad r \leq c' \quad (\text{B.7})$$

La traction sur la surface de contact pour une force tangentielle décroissante est obtenue en additionnant les équations B.5 et B.6 à l'équation B.3;

$$\begin{aligned} X_z &= -\mu_c P \left( 1 - \frac{r^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}} ; & c' \leq r \leq b \\ X_z &= -\mu_c P \left( 1 - \frac{r^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 2\mu_c P \left( \frac{c'}{b} \right) \left( 1 - \frac{r^2}{c'^2} \right)^{\frac{1}{2}} ; & c \leq r \leq c' \\ X_z &= -\mu_c P \left( 1 - \frac{r^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 2\mu_c P \left( \frac{c'}{b} \right) \left( 1 - \frac{r^2}{c'^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - \mu_c P \left( \frac{c}{b} \right) \left( 1 - \frac{r^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} ; & r \leq c \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Le déplacement tangentiel d'une sphère par rapport à la région de glissement nul est obtenu en additionnant l'équation B.7 à l'équation B.4;

$$\delta_d = \frac{3(2-v)\mu_c Q}{16Gb} \left( \frac{2c'^2}{b^2} - \frac{c^2}{b^2} - 1 \right) \quad (\text{B.9})$$

où l'indice "d" indique qu'il s'agit du déplacement pour la force tangentielle décroissante.

La valeur de  $c'$  est trouvée à partir de la condition d'équilibre:

$$\begin{aligned} 600F_f &= 2\pi \int_0^b rX_z dr \\ &= \mu_c Q \left( 1 - \frac{c^3}{b^3} \right) - 2\mu_c Q \left( 1 - \frac{c'^3}{b^3} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

De l'équation B.2;

$$c = b \left( 1 - \frac{F_f^*}{\mu_c Q} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{B.11})$$

En remplaçant cette dernière dans B.10, on obtient:

$$c' = b \left( 1 - \frac{F_f^* - F_f}{2\mu_c Q} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{B.12})$$

Pour  $|F_f| \leq F$ ,  $c \leq c' \leq b$ , le déplacement tangentiel d'une sphère par rapport à un point de la surface de contact où il n'y a aucun glissement est obtenu en remplaçant les équations B.11 et B.12 dans l'équation B.9:

$$\delta_d = \frac{3(2-v)\mu_c Q}{16Gb} \left[ 2 \left( 1 - \frac{F_f^* - F_f}{2\mu_c Q} \right)^{\frac{2}{3}} - \left( 1 - \frac{F_f^*}{\mu_c Q} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] \quad (\text{B.13})$$

Cette relation entre le déplacement tangentiel et la force tangentielle donne la courbe O<sub>1</sub>-O<sub>2</sub>-O<sub>3</sub> de la figure B.2.

En comparant les équations B.11 et B.12 on voit que  $c'=c$  quand  $F_f=-F$ . Ce qui implique que le glissement négatif pénètre jusqu'au rayon intérieur de l'anneau de glissement initial lorsque la force tangentielle est complètement inversée.

La traction tangentielle est alors obtenue en plaçant  $c'=c$  dans B.8. Le résultat est identique à B.3 excepté que le signe de  $X_z$  est inversé.

Similairement, le déplacement tangentiel est obtenu en plaçant  $F_f=-F$  dans B.13, ce qui donne l'équation B.4 avec  $F_f=F$ . Donc, le déplacement au point  $O_3$  de la figure B.2 est égal et opposé à celui de  $O_1$ .

Puisque la situation à  $F_f=-F$  est identique à celle de  $F_f=F$ , excepté qu'il y a inversion de signe, un accroissement subséquent de  $F_f$  à partir de  $-F$  à  $F$  va avoir les mêmes effets que le décroissement de  $F_f$  à partir de  $F$  à  $-F$ , excepté qu'il y a inversion de signe.

Donc, lorsque l'on débute le long de  $O_3-O_4$ , le glissement apparaît à  $r=b$  dans la même direction que celui le long de  $O-O_1$ . Une fois que la traction va avoir atteint la valeur maximale  $F$ , alors  $c'$  va avoir une fois de plus pénétré jusqu'à  $c$ . Le déplacement tangentiel le long de  $O_3-O_4$  est donné par:

$$\frac{1000\delta_c}{16Gb} = -\delta_d(-F_f) \quad (B.14)$$

$$= -\frac{3(2-v)\mu_c Q}{16Gb} \left[ 2 \left( 1 - \frac{F_f^* + F_f}{2\mu_c Q} \right)^{\frac{2}{3}} - \left( 1 - \frac{F_f^*}{\mu_c Q} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right]$$

Lorsque  $F_f=F$ , le point terminal de la courbe  $O_3-O_4-O_1$  est identique à celui de la courbe  $O-O_1$ , ce qui est obtenu en comparant B.14 et B.4.

Une diminution subséquente de  $F_f$  va produire une répétition des évènements similaire à la première diminution de  $F_f$ . Donc pour une force tangentielle oscillant entre  $\pm F$ , la relation entre le déplacement tangentiel et la force tangentielle donne une courbe

d'hystérésis (voir figure B.2).

La surface contenue dans cette courbe d'hystérésis donne la dissipation d'énergie par cycle due au micro-glissement:

$$W = \frac{9(2-v)\mu_c^2 Q^2}{10Gb} \int_{\frac{-F_f^*}{(\Phi_Q \Omega_c)}}^{\frac{F_f^*}{(\Phi_Q \Omega_c)}} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{F_f^*}{\mu_c Q} \right)^{\frac{5}{3}} \right] \left[ 1 + \left( 1 - \frac{F_f^*}{\mu_c Q} \right)^{\frac{2}{3}} \right] dF_f^* \quad \{B:16\}$$

Cette équation est modifiée à l'aide du facteur de forme  $\Phi$  de Deresiewicz [3] pour le cas du contact linéique entre deux cylindres parallèles (voir section 3.1.1).

## ANNEXE C

Cette annexe présente les algorithmes des méthodes numériques utilisées dans la programmation.

### C.1 Algorithme de la méthode de Newton pour un système d'équations non-linéaires

But: Trouver l'approximation de la solution d'un système d'équations non linéaires  $\mathbf{F}(\mathbf{x})=0$  à partir d'une approximation initiale de  $\mathbf{x}$ . (Les caractères gras représentent des vecteurs ou des matrices).

Définition des variables:

-> La fonction  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  est définie comme étant le vecteur;

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = & \begin{matrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{matrix}\end{aligned}$$

où  $f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)=0$

-> Le Jacobien  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  est défini comme étant la matrice;

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix}
 \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\
 \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \cdots \\
 \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\
 \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \cdots \\
 \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n}
 \end{bmatrix}$$

Entrée: -Un nombre "n" d'équations et d'inconnues.

-Une approximation initiale de la solution  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$ .

-La tolérance désirée.

-Le nombre maximum d'itérations "N".

Sortie: L'approximation de la solution  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$  ou le message que le nombre maximum d'itérations a été dépassé.

Étape 1: Mettre  $k=1$ .

Étape 2: Pour ( $k \leq N$ ) faire les étapes 3-7.

Étape 3: Calculer  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ .

Étape 4: Résoudre le système linéaire  $n \times n \Rightarrow \mathbf{J}(\mathbf{x}) \mathbf{Y} = -\mathbf{F}(\mathbf{x})$ .

Étape 5: Mettre  $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{Y}$ .

Étape 6: Si la valeur maximale, en valeurs absolues, des composantes de  $\mathbf{Y}$  est inférieure à la tolérance, alors;

-> écrire:  $(\mathbf{x})$ , procédure complétée avec succès.

-> STOP.

Étape 7: Mettre  $k = k + 1$

Étape 8: Écrire: Nombre maximum d'itérations a été excédé,  
procédure complétée sans succès.

STOP

## C.2 Algorithme de Romberg d'intégration numérique

But: Trouver l'approximation de l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Définition des variables:

- > Le vecteur **S (JMAX+1)** sauvegarde les valeurs des approximations de "I" effectuées avec la méthode trapézoïdale.
- > Le vecteur **H (JMAX+1)** sauvegarde les valeurs de la dimension des sous-domaines utilisés pour l'approximation de "I" avec la méthode trapézoïdale .
- > "K" est le nombre de points utilisés dans l'extrapolation.
- > "EPS" est une fraction du degrés de précision désirée.

Entrée: -Les bornes d'intégration "a" et "b".

-Le nombre d'itérations maximal "JMAX".

Sortie: L'approximation de l'intégrale "I".

Étape 1: Mettre  $H(1) = 1$

$K = 5$

$J = 1$

$\text{EPS} = 1.E-6$

Étape 2: Pour ( $J \leq J_{\text{MAX}}$ ) faire les étapes 3-9.

Étape 3: Utiliser la méthode trapézoïdale pour déterminer l'approximation " $S(J)$ " avec  $2^{J-1}$  sous-domaines.

Étape 4: Si ( $J \geq K$ ) faire les étapes 5 et 6

Étape 5: Utiliser la méthode d'extrapolation polynomiale pour évaluer "I" et l'erreur estimée "DI" en utilisant le vecteur approximations "**S(J)**" et le vecteur de la dimension de leurs sous-domaines "**H(J)**".

Étape 6: Si la valeur absolue de "DI" est plus petite que la valeur absolue de "I" multipliée par "EPS", alors;  
 -> écrire "I", procédure complétée avec succès.  
 -> STOP.

Étape 7: Mettre  $S(J+1) = S(J)$

Étape 8: Mettre  $H(J+1) = 0.25*H(J)$

Étape 9: Mettre  $J = J + 1$

Étape 10: Écrire: Nombre maximal d'itérations a été excédé,

procédure complétée sans succès.

STOP

La routine qui utilise cet algorithme d'intégration provient de la référence [13]. Une description détaillée de cette routine est donné à la page 114 de la référence [13].

La routine d'intégration trapézoïdale et la routine d'extrapolation polynomiale proviennent également de la référence [13] où chacune de ces routines sont expliquées en détail.