

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

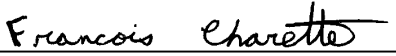
Faculté des sciences appliquées

Département de génie mécanique

CONTRÔLE ACTIF DU DÉPLACEMENT VOLUMIQUE DE STRUCTURES  
PLANES À L'AIDE DE TRANSDUCTEURS PIÉZOÉLECTRIQUES

Thèse de doctorat (Ph.D.)

Spécialité : génie mécanique

  
François Charette

À la mémoire de ma mère, *Jacqueline Consigny*

# Résumé

Les travaux présentés dans cette thèse sont axés sur l'emploi de transducteurs étendus de type piézoélectriques dans un système de contrôle actif du rayonnement acoustique. Les structures considérées sont les poutres et les plaques minces. La fonction coût retenue (valeur à minimiser) est le déplacement volumique de ces structures minces. À l'heure actuelle, il n'existe pas de capteur vibratoire qui donne directement le déplacement volumique d'une structure plane avec conditions limites quelconques, ajouts de masses et de raideurs, etc. L'objectif principal des travaux exposés dans la présente thèse est de développer de tels capteurs de déplacement volumique pour les poutres et les plaques. Les travaux ont porté sur les étapes suivantes:

- Le développement de modèles variationnels (dynamiques) qui modélisent rigoureusement l'excitation et la détection obtenues avec des transducteurs étendus piézoélectriques. Ces modèles permettent de calculer la réponse d'un capteur piézoélectrique (film PVDF) en fonction du voltage imposé à un actionneur piézoélectrique (piézocéramique). Cela pour des structures ayant des conditions limites élastiques. Puisque la méthode variationnelle est une approche qui est de type dynamique, les modèles obtenus tiennent comptes de l'ajout de masses et raideurs des différents éléments piézoélectriques sur la réponse de la structure.
- La mise au point de capteurs faits en film PVDF dont le signal est proportionnel au déplacement volumique de la structure considérée. Ces capteurs sont composés d'une ou de plusieurs bandes de PVDF ayant des formes prescrites. Ces formes sont obtenues à partir des fonctions propres (déformées modales) de la structure. Le capteur est donc indépendant de la fréquence et des caractéristiques (position, amplitude) de l'excitation.

- Déterminer les formes des bandes de PVDF à partir de fonctions propres mesurées expérimentalement (pour les plaques), afin d'obtenir le meilleur capteur possible. De plus, cela donne une approche très robuste qui est facilement applicable à des structures 'réelles'.
- L'implantation théorique et expérimentale de systèmes de contrôle actif du déplacement volumique de structures qui utilisent ce nouveau capteur comme capteur d'erreur et des actionneurs piézocéramiques comme actionneurs de contrôle. Les résultats obtenus avec ces implantations valident la stratégie de contrôle (contrôle du déplacement volumique) ainsi que l'utilisation de capteurs étendus piézoélectriques.

# Remerciements

Cette thèse de doctorat a été rendue possible grâce à la participation de plusieurs personnes que je tiens à remercier vivement.

Le professeur Alain Berry, directeur de thèse, pour ses innombrables conseils, sa disponibilité, la confiance qu'il m'a démontrée et l'intérêt constant porté aux travaux. Je tiens également à souligner les grandes compétences scientifiques et humaines d'Alain.

Le Dr Catherine Guigou, chercheuse au Vibrations and Acoustic Laboratories du Virginia Polytechnic Institute, qui par son ingéniosité et amabilité a su rendre les travaux agréables et intéressants.

Le professeur Bruno Paillard du département de génie électrique, pour avoir développé tout le côté électronique (algorithmes de contrôle, mise en oeuvre des DSP, etc.) des travaux présentés ici. De plus, il est un ami qui a réussi à m'initier au domaine du génie électrique.

Le professeur Jean Nicolas, directeur du G.A.U.S., pour m'avoir accepté au sein de son équipe de recherche.

Ma compagne Louise et nos enfants Catherine et Benoît pour leurs encouragements et leurs joies de vivre.

Mon père Gérard, mes frères et soeurs; Nicole, André, Christiane, Francine, Lucie, Céline, Martin, Denis et ma belle famille pour leur soutien moral.

Et tous les membres du G.A.U.S., plus particulièrement Celse Kafui Amédin, Olivier Beslin, Martin Bouchard, Martin Gagnon, André L'Espérance, Patrice Masson, Raymond Panneton et Marta Ruiz, avec qui j'ai eu l'occasion d'avoir des discussions enrichissantes tant au niveau scientifique que personnel.

# TABLES DES MATIÈRES

<b>1 Introduction générale de la thèse</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction .....	1
1.1.1 Types de contrôleurs digitaux (numérique) .....	4
1.1.2 Types de contrôle actif du bruit .....	5
1.1.3 Types de transducteurs pour le contrôle actif du bruit (ASAC) .....	7
1.2 États des connaissances .....	8
1.2.1 Éléments piézoélectriques utilisés comme actionneurs .....	8
1.2.2 Signal et capteur d'erreur pour un système de contrôle actif du bruit .....	10
1.3 Objectifs des travaux présentés dans la thèse .....	16
1.4 Structure du document .....	18
 <b>2 Excitation asymétrique/symétrique et mesure de déformation d'une poutre à l'aide de transducteurs piézoélectriques</b>	 <b>19</b>
2.1 Introduction .....	19
2.2 Développement du modèle A.C.P.A. ....	20
2.2.1 Configuration du système poutre-transducteurs piézoélectriques .....	21
2.2.2 Champ de déplacement .....	22
2.2.3 Déformations et contraintes .....	24
2.2.4 Équation variationnelle avec fonctionnelle d'Hamilton .....	25
2.2.5 Énergie cinétique et potentielle .....	26
2.2.6 Équations du mouvement .....	29
2.3 Indicateurs de vibration .....	30

2.3.1 Vitesse quadratique transversale .....	30
2.3.2 Réponse d'un capteur rectangulaire .....	31
2.4 Validation théorique de A.C.P.A. ....	32
2.4.1 Équations du mouvement du modèle de [GIBBS <i>et coll.</i> 1992] .....	32
2.4.2 Comparaison entre les résultats de A.C.P.A. et [GIBBS <i>et coll.</i> 1992] .....	34
2.5 Validation expérimentale du modèle A.C.P.A. ....	38
2.5.1 Vérifications des effets dynamiques des transducteurs piézoélectriques .....	40
2.5.2 Importance relative des déformations axiales et transversales .....	44
2.6 Conclusions .....	46
<b>3 Capteur PVDF de déplacement volumique d'une poutre</b> .....	<b>49</b>
3.1 Introduction .....	49
3.2 Développement théorique .....	50
3.2.1 Déplacement écrit sous forme modale .....	50
3.2.2 Déplacement et débit volumique d'une poutre .....	52
3.2.3 Réponse d'un capteur de forme quelconque .....	52
3.2.4 Forme d'un capteur PVDF prescrite par la fonction coût (dép. volumique) .....	53
3.2.5 Capteur PVDF étendu: filtreur et intégrateur des déformations .....	56
3.3 Effets dynamiques des actionneurs sur le capteur .....	59
3.3.1 Modification de la forme du capteur dû aux actionneurs piézocéramiques .....	60
3.3.2 Effets des modifications de la forme du capteur sur son signal .....	63
3.3.3 Effets du déplacement axial sur le signal du capteur .....	64
3.3.4 Excitation en flexion pure d'une poutre encastree-libre .....	65
3.4 Validation expérimentale du capteur PVDF (poutre encastree-libre) .....	67
3.5 Conclusions .....	68

<b>4</b>	<b>Contrôle actif du déplacement volumique d'une poutre</b>	<b>71</b>
4.1	Introduction	71
4.2	Indicateurs vibroacoustiques	71
4.2.1	Puissance rayonnée par une structure plane rectangulaire	72
4.2.2	Coefficient de rayonnement	75
4.3	Contrôle optimal du déplacement volumique	76
4.4	Simulations de contrôle optimal du déplacement volumique	77
4.4.1	Poutre simplement appuyée aux deux extrémités	78
4.4.2	Poutre encastrée à une extrémité libre à l'autre	83
4.4.3	Comparaison avec un contrôle vibratoire	86
4.5	Validation expérimentale du contrôle actif de déplacement volumique	90
4.6	Conclusions	106
<b>5</b>	<b>Excitation symétrique d'une plaque à l'aide de transducteurs piézoélectriques</b>	<b>108</b>
5.1	Introduction	108
5.2	Formulation variationnelle	109
5.2.1	Configuration de la plaque	109
5.2.2	Champ de déplacement	110
5.2.3	Déformations et enthalpie d'un élément piézoélectrique	111
5.2.4	Énergie cinétique et potentielle de l'élément piézoélectrique	112
5.2.5	Équation du mouvement	113
5.3	Indicateurs de vibrations	114
5.4	Validation théorique du modèle P.A.E.P.	115
5.4.1	Équation du mouvement des modèles statiques	115
5.4.2	Comparaison entre le modèle statique de [KIM <i>et coll.</i> 1991] et P.A.E.P.	117
5.5	Validations expérimentales du modèle P.A.E.P.	119
5.5.1	Plaque simplement appuyée	119
5.5.2	Plaque encastrée	123
5.6	Conclusions	127



<b>6 Capteur PVDF de déplacement volumique d'une plaque</b>	<b>129</b>
6.1 Introduction .....	129
6.2 Développement théorique .....	131
6.2.1 Déplacement transversal de la plaque .....	131
6.2.2 Coefficients de fonctions propres déterminés à partir de mesures expérimentales	131
6.2.3 Déplacement volumique .....	134
6.2.4 Réponse d'une bande PVDF de forme quelconque .....	134
6.2.5 Forme des bandes de PVDF pour obtenir un capteur de déplacement volumique	138
6.3 Capteur de déplacement volumique pour plaque .....	139
6.4 Implantation expérimentale du capteur de déplacement volumique .....	143
6.5 Conclusions .....	148
 <b>7 Contrôle actif du déplacement volumique d'une plaque</b>	 <b>150</b>
7.1 Introduction .....	150
7.2 Indicateurs vibroacoustiques .....	150
7.3 Contrôle optimal du déplacement volumique d'une plaque .....	151
7.4 Simulations de contrôle optimal du déplacement volumique d'une plaque .....	152
7.4.1 Plaque encastree-encastree-encastree-encastree .....	153
7.4.2 Plaque encastree-encastree-libre-libre .....	156
7.4.3 Comparaison avec un contrôle vibratoire .....	160
7.5 Validation expérimentale du contrôle actif de déplacement volumique d'une plaque	163
7.6 Conclusions .....	184
 <b>Conclusions</b> .....	 <b>186</b>
 <b>A Expressions des différentes matrices du modèle A.C.P.A.</b> .....	 <b>190</b>
 <b>B Expressions des différentes matrices du modèle P.A.E.P.</b> .....	 <b>194</b>
 <b>Bibliographie</b> .....	 <b>197</b>

## LISTE DES FIGURES

1.1	Différentes approches pour le contrôle du bruit .....	1
1.2	Schéma d'un système de contrôle actif de type feedforward .....	4
1.3	Schéma d'un système de contrôle actif de type feedback .....	4
1.4	Schémas du type d'actionneur de contrôle utilisé pour un contrôle ANC et ASAC .....	5
2.1	Schéma du système considéré .....	21
2.2	Champ de déplacement .....	23
2.3	Vitesses quadratiques moyenne obtenue avec A.C.P.A. et le modèle de [GIBBS <i>et coll.</i> 1992], poutre simplement appuyée .....	36
2.4	Fonctions de transfert entre le voltage du capteur et de l'actionneur, obtenues avec A.C.P.A. et le modèle de [GIBBS <i>et coll.</i> 1992], poutre simplement appuyée .....	36
2.5	Forme du 4ième mode de la poutre simplement appuyée AVEC et SANS actionneur .....	37
2.6	Forme du 6ième mode de la poutre simplement appuyée AVEC et SANS actionneur .....	38
2.7	Schéma du montage expérimental .....	39
2.8	Vitesses quadratiques moyennes théorique et expérimentale, poutre libre-libre .....	42
2.9	Fonctions transfert théorique et expérimentale, entre le voltage du capteur et de l'actionneur, poutre libre-libre .....	42
2.10	Forme du 2ième mode de la poutre libre-libre AVEC et SANS actionneur .....	43
2.11	Forme du 4ième mode de la poutre libre-libre AVEC et SANS actionneur .....	43
2.12	Intégrales des déformations de la surface de la poutre dues au déplacement axial et/ou transversal, poutre libre-libre avec actionneur positionné à $x_a=0.131\text{m}$ . .....	45
2.13	Intégrales des déformations de la surface de la poutre dues au déplacement axial et/ou transversal, poutre libre-libre avec actionneur positionné à $x_a=0.03\text{m}$ . .....	45

3.1	Schéma de la forme considéré pour le capteur PVDF .....	52
3.2	Formes de capteur de déplacement volumique pour des poutres homogènes ayant diverses conditions limites .....	55
3.3	Déformations, filtre et déformations filtrées de <i>première fonction</i> propre .....	57
3.4	Déformations, filtre et déformations filtrées de <i>troisième fonction</i> propre .....	57
3.5	Déformations, filtre et déformations filtrées de <i>cinquième fonction</i> propre .....	58
3.6	Déformations, filtre et déformations filtrées de <i>septième fonction</i> propre .....	58
3.7	Schéma de la poutre simplement appuyée .....	61
3.8	Formes de capteurs de déplacement volumique pour une poutre AVEC et SANS actionneurs .....	62
3.9	Comparaison entre le signal d'un capteur pour poutre AVEC actionneurs et le signal d'un capteur pour poutre SANS actionneurs (flexion pure) .....	63
3.10	Comparaison entre le déplacement volumique et le signal d'un capteur pour poutre AVEC actionneurs pour une excitation asymétrique .....	65
3.11	Schéma de la poutre encastree-libre .....	66
3.12	Comparaisons entre le déplacement volumique mesuré expérimentalement, le déplacement volumique théorique et le signal mesuré du capteur PVDF .....	68
4.1	Schéma d'une structure bafflée .....	72
4.2	Coefficients de rayonnements modaux, poutre simplement appuyée .....	80
4.3	Puissances rayonnés avant et après contrôle, poutre simplement appuyée .....	80
4.4	Coefficients de rayonnement avant et après contrôle, poutre simplement appuyée .....	81
4.5	Vitesses quadratiques avant et après contrôle, poutre simplement appuyée .....	81
4.6	Déplacements volumiques, poutre simplement appuyée .....	82
4.7	Coefficients de rayonnement modaux, poutre encastree-libre .....	84
4.8	Puissances rayonnées avant et après contrôle, poutre encastree-libre .....	84
4.9	Coefficients de rayonnement avant et après contrôle, poutre encastree-libre .....	85
4.10	Vitesses quadratiques avant et après contrôle, poutre encastree-libre .....	85
4.11	Déplacements volumiques, poutre encastree-libre .....	86

4.12	Puissances rayonnées avant et après contrôle du déplacement de l'extrémité libre de la poutre encastrée-libre .....	88
4.13	Coefficients de rayonnement avant et après contrôle du déplacement de l'extrémité libre de la poutre encastrée-libre .....	88
4.14	Vitesses quadratiques avant et après contrôle du déplacement de l'extrémité libre de la poutre encastrée-libre .....	89
4.15	Déplacements volumiques avant et après contrôle du déplacement de l'extrémité libre de la poutre encastrée-libre .....	89
4.16	Schéma du montage expérimental du système de contrôle actif pour poutre .....	91
4.17	Résultats théoriques à la fréquence 100 Hz .....	94
4.18	Résultats théoriques à la fréquence 180 Hz .....	95
4.19	Résultats théoriques à la fréquence 400 Hz .....	96
4.20	Résultats théoriques à la fréquence 505 Hz .....	97
4.21	Résultats théoriques à la fréquence 625 Hz .....	98
4.22	Résultats théoriques à la fréquence 988 Hz .....	99
4.23	Résultats expérimentaux à la fréquence 100 Hz .....	100
4.24	Résultats expérimentaux à la fréquence 180 Hz .....	101
4.25	Résultats expérimentaux à la fréquence 400 Hz .....	102
4.26	Résultats expérimentaux à la fréquence 505 Hz .....	103
4.27	Résultats expérimentaux à la fréquence 625 Hz .....	104
4.28	Résultats expérimentaux à la fréquence 988 Hz .....	105
5.1	Schéma de la configuration plaque-actionneur considérée .....	110
5.2	Vitesses quadratiques pour les deux modèles théoriques lorsque l'actionneur primaire induit les vibrations .....	118
5.3	Déplacements volumiques pour les deux modèles théoriques lorsque l'actionneur primaire induit les vibrations .....	118
5.4	Schéma du montage expérimentale de la plaque simplement appuyée et du type de mouvement que permettent les lamelles servant de conditions limites .....	121

5.5	Vitesses quadratiques lorsque l'actionneur primaire induit les vibrations, plaque appuyée .....	122
5.6	Déplacements volumiques lorsque l'actionneur primaire induit les vibrations, plaque appuyée .....	122
5.7	Schéma du montage expérimentale de la plaque encastree .....	125
5.8	Vitesses quadratiques lorsque l'actionneur primaire induit les vibrations, plaque encastree .....	126
5.9	Déplacements volumiques lorsque l'actionneur primaire induit les vibrations, plaque encastree .....	126
6.1	Schéma d'un capteur de déplacement volumique pour plaque simplement appuyée ...	129
6.2	Schéma des positions des points de mesures expérimentaux .....	131
6.3	Configuration typique des bandes PVDF .....	135
6.4	Formes des bandes PVDF et comparaison entre le signal du capteur et le déplacement volumique de la plaque, cas $x_{ct}=0.24m.$ et $y_{ct}=0.18m.$ .....	141
6.5	Formes des bandes PVDF et comparaison entre le signal du capteur et le déplacement volumique de la plaque, cas $x_{ct}=0.259m.$ et $y_{ct}=0.176m.$ .....	142
6.6	Schémas et photos du montage expérimental de la plaque encastree .....	144
6.7	Mesures expérimentales du déplacement volumique de la plaque et du signal du capteur PVDF lorsque l'actionneur primaire induit les vibrations .....	145
6.8	Schéma des déformées modales de la section $y=L_y/2$ pour le mode (1,1) et (5,1) .....	146
6.9	Mesures expérimentales du déplacement volumique de la plaque et du signal du capteur PVDF lorsque l'actionneur secondaire induit les vibrations .....	147
7.1	Coefficients de rayonnements modaux, plaque encastree-encastree-encastree-encastree .....	154
7.2	Puissances rayonnées avant et après contrôle, plaque encastree-encastree-encastree-encastree .....	154

7.3	Coefficients de rayonnement avant et après contrôle, plaque encastrée-encastrée-encastrée-encastrée .....	155
7.4	Vitesses quadratiques avant et après contrôle, plaque encastrée-encastrée-encastrée-encastrée .....	155
7.5	Déplacements volumiques, plaque encastrée-encastrée-encastrée-encastrée .....	156
7.6	Coefficients de rayonnements modaux, plaque encastrée-encastrée-libre-libre .....	157
7.7	Puissances rayonnées avant et après contrôle, plaque encastrée-encastrée-libre-libre .....	157
7.8	Coefficients de rayonnement avant et après contrôle, plaque encastrée-encastrée-libre-libre .....	158
7.9	Vitesses quadratiques avant et après contrôle, plaque encastrée-encastrée-libre-libre .....	158
7.10	Déplacements volumiques, plaque encastrée-encastrée-libre-libre .....	159
7.11	Puissances rayonnées avant et après contrôle du déplacement du point central de la plaque encastrée-encastrée-encastrée-encastrée .....	161
7.12	Coefficients de rayonnement avant et après contrôle du déplacement du point central de la plaque encastrée-encastrée-encastrée-encastrée .....	161
7.13	Vitesses quadratiques avant et après contrôle du déplacement du point central de la plaque encastrée-encastrée-encastrée-encastrée .....	162
7.14	Déplacements volumiques avant et après contrôle du déplacement du point central de la plaque encastrée-encastrée-encastrée-encastrée .....	162
7.15	Schéma du montage expérimental du système de contrôle actif pour plaque .....	163
7.16	Résultats théoriques à la fréquence 125 Hz .....	168
7.17	Résultats théoriques à la fréquence 140 Hz .....	169
7.18	Résultats théoriques à la fréquence 165 Hz .....	170
7.19	Résultats théoriques à la fréquence 246 Hz .....	171
7.20	Résultats théoriques à la fréquence 275 Hz .....	172
7.21	Résultats théoriques à la fréquence 322 Hz .....	173
7.22	Résultats théoriques à la fréquence 375 Hz .....	174
7.23	Résultats théoriques à la fréquence 419 Hz .....	175
7.24	Résultats expérimentaux à la fréquence 125 Hz .....	176
7.25	Résultats expérimentaux à la fréquence 139 Hz .....	177

7.26	Résultats expérimentaux à la fréquence 165 Hz .....	178
7.27	Résultats expérimentaux à la fréquence 246 Hz .....	179
7.28	Résultats expérimentaux à la fréquence 275 Hz .....	180
7.29	Résultats expérimentaux à la fréquence 320 Hz .....	181
7.30	Résultats expérimentaux à la fréquence 375 Hz .....	182
7.31	Résultats expérimentaux à la fréquence 425 Hz .....	183

## LISTE DES TABLEAUX

1.1 Tableau comparatif entre les différentes technologies de transducteurs .....	7
2.1 Fréquences propres en Hertz, poutre simplement appuyée .....	34
2.2 Caractéristiques physiques de l'actionneur, de la poutre et du capteur .....	35
2.3 Fréquences propres en Hertz, pour la poutre libre-libre .....	41
3.1 Différentes valeurs d'intégrations des fonctions propres .....	59
3.2 Caractéristiques physiques des actionneurs, de la poutre simplement appuyée et du capteur .....	60
3.3 Comparaison entre les coefficients de forme pour une poutre AVEC ou SANS actionneurs .....	62
3.4 Caractéristiques physiques des actionneurs, de la poutre encastree-libre et du capteur .....	67
5.1 Caractéristiques physiques des actionneurs et de la plaque simplement appuyée .....	117
5.2 Valeurs propres théoriques et expérimentales de la plaque simplement appuyée .....	120
5.3 Caractéristiques physiques des actionneurs et de la plaque encastree .....	123
5.4 Valeurs propres théoriques et expérimentales de la plaque encastree .....	124



## NOMENCLATURE

A	coefficients de polynôme d'une fonction propre mesurée expérimentalement: <i>sans dimension</i> .
B	coefficients des polynômes d'une fonction propre théorique: <i>sans dimension</i> .
$c_c$	capacitance du capteur piézoélectrique: $F$ .
$c_0$	vitesse du son dans le fluide: $m/s$ .
$c(\tau)$	fonction temporelle.
C	coefficients des polynômes d'approximation du déplacement: $m$ .
d	coefficient piézoélectrique de déformation/charge: $m/V$ .
D	déplacement volumique d'une structure: $m^3$
$D_{ax}$	constante d'extension axiale du modèle statique de poutre: <i>sans dimension</i> .
$D_{tr}$	constante de flexion transversale du modèle statique de poutre: $1/m$ .
e	coefficient piézoélectrique de contrainte/charge: $N/(V \cdot m)$ .
E	energie: $J$ .
f	fréquence: $Hz$ .
$\bar{f}$	transformée de Fourier d'un polynôme.
F	force: $N$ .
$F()$	fonction de forme d'une bande PVDF: $m$ .
$\hat{F}()$	fonction de forme normalisée d'une bande PVDF: <i>sans dimension</i> .
g	coefficient piézoélectrique de charge/contrainte: $V \cdot m/N$ .
H	densité électromécanique d'enthalpie: $J/m^3$ .

i	courant électrique: $A$ . ou indice.
I	moment d'inertie de la section de la poutre: $m^4$ . ou nombre total de termes.
j	nombre imaginaire $\sqrt{-1}$ ou indice.
J	nombre total de termes.
k	nombre d'onde: $1/m$ .
K	rigidité: $N/m$ .
L	longueur: $m$ . ou Lagrangien.
m	indice
M	masse: $Kg$ . ou nombre total de termes.
$\dot{M}$	constante pour les modèles statiques de plaque.
n	indice
N	nombre total de termes
p	pression acoustique en un point dans le champ lointain: $Pa$ ou indice
P	nombre total de termes.
q	charge d'une bande PVDF. ou indice
Q	nombre total de termes
r	indice
R	rayon de la sphère pour le calcul de la pression acoustique: $m$ . ou nombre total de termes
s	indice
S	nombre total de termes

$T1$	termes de matrice associés à une bande PVDF parallèle à x.
$T2$	termes de matrice associés à une bande PVDF parallèle à y.
$u$	déplacement dans la direction x: $m$ .
$U$	déplacement total dans la direction x: $m$ .
$\tilde{U}$	amplitude d'un mode axial d'une structure complexe (avec des piézos) : $m$ .
$\hat{U}$	amplitude d'un mode axial d'une structure (poutre seule) : $m$ .
$v$	déplacement dans la direction y: $m$ .
$V$	déplacement total dans la direction y: $m$ .
$w$	déplacement dans la direction z: $m$ .
$\bar{w}$	transformée de Fourier du déplacement dans la direction z: $m^2$ .
$W$	déplacement total dans la direction z: $m$ .
$\tilde{W}$	amplitude d'un mode transversal d'une structure complexe (avec des piézos) : $m$ .
$\hat{W}$	amplitude d'un mode transversal d'une structure (poutre ou plaque) : $m$ .
$\mathcal{W}$	composante de l'amplitude d'un mode transversal d'une structure qui est indépendante du voltage appliqué à l'actionneur piézoélectrique : $m/V$ .
$\langle \dot{w}^2 \rangle$	vitesse quadratique moyenne de la structure: $m^2/s^2$ .
$x,y,z$	coordonné rectangulaire.
$Y$	module de Young: $Pa$ .
$\ddot{Y}$	module de Young d'élément piézoélectrique ayant les électrodes ouvertes: $Pa$ .

### Parenthèse

$\langle \rangle$	vecteur ligne.
$\{ \}$	vecteur colonne
$[ ]$	matrice

### Lettres Grecque

$\alpha$	coefficients du polynôme qui donne la forme du capteur PVDF (poutre ou bande PVDF parallèle à l'axe x d'une plaque): <i>m</i> .
$\hat{\alpha}$	coefficients normalisés du polynôme qui donnent la forme du capteur PVDF: <i>m</i> .
$\tilde{\alpha}$	coefficients normalisés du polynôme qui donnent la forme d'un capteur PVDF qui tient compte de la présence des différents éléments piézoélectriques sur la structure: <i>m</i> .
$\beta$	coefficients du polynôme qui donne la forme du capteur PVDF parallèle à l'axe y d'une plaque: <i>m</i> .
$\chi$	variance de l'erreur.
$\delta$	impulsion de Dirac: <i>1/m</i> .
$\varepsilon$	déformation: <i>sans dimension</i> .
$\phi$	angle entre la projection de R dans le plan xy et l'axe x (voir figure 4.1): <i>rad</i> .
$\gamma$	constante du modèle statique de [DIMITRIADIS <i>et coll.</i> 1991]
$\varphi$	sous fonction modale.
$\Delta\varphi$	voltage: <i>V</i> .
$\kappa$	opérateur variationnel.
$\lambda$	longueur d'onde: <i>m</i> .
$\Lambda$	fonction de Kronecker.
$\mu$	largeur maximale d'une bande PVDF: <i>m</i> .
$\nu$	coefficient de Poisson
$\theta$	angle entre le rayon R et l'axe z (voir figure 4.1): <i>rad</i> .
$\Pi$	puissance rayonnée: <i>watt</i> .
$\rho$	densité: <i>Kg/m<sup>3</sup></i> .
$\rho_0$	densité du fluide: <i>Kg/m<sup>3</sup></i> .
$\sigma$	contrainte: <i>Pa</i> .
$\tau$	temps: <i>sec</i> .
$\omega$	pulsation de l'excitation: <i>rad/s</i> .
$\xi$	permittivité du matériau piézoélectrique: <i>F/m</i> .

- $\hat{\Psi}$  fonction normalisée d'un mode transversal d'une structure (poutre ou plaque): *sans dimension*.
- $\zeta$  coefficient de rayonnement: *sans dimension*.

### Indices

a	actionneur.
acc	accéléromètre.
c	capteur.
ct	centre d'une bande PVDF.
cin	énergie cinétique.
H	ressort horizontal.
pl	plaque.
pt	poutre.
pot	énergie potentielle.
T	ressort de torsion.
V	ressort vertical.
$q, n$	$q$ ième coefficient du polynôme de la $n$ ième fonction propre d'une structure.
$x, y, z$	projection d'une variable dans le repère cartésien.

### Exposants

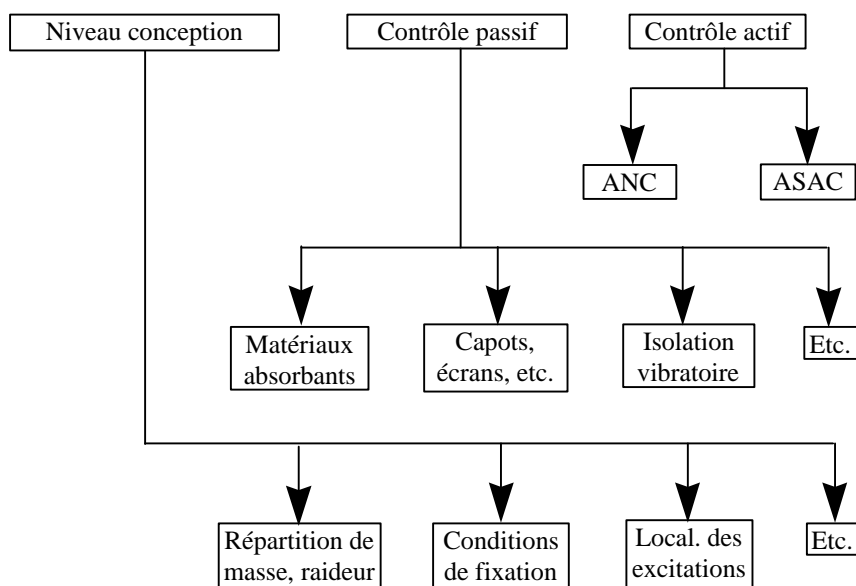
a	actionneur
ax	direction axiale (poutre)
c	capteur
cl	conditions limites
mec	mécanique
pl	plaque.
pt	poutre.
stq	modèle statique.
tr	direction transversale.
*	complexe conjugué.

# Chapitre 1

## INTRODUCTION GÉNÉRALE DE LA THÈSE

### 1.1 Introduction

En industrie, comme dans la vie de tous les jours, les bruits rayonnés par les structures qui vibrent sont généralement nuisibles et désagréables. Présentement, trois différentes approches existent pour le contrôle du bruit. Ces dernières sont présentées à la figure 1.1.



Au niveau de la conception d'une machine ou d'une structure, il est possible d'utiliser des critères acoustiques afin de minimiser le bruit qui sera généré. Cependant l'application de ces critères acoustiques doit se faire en effectuant des compromis avec les autres critères de fonctionnement de cette machine ou structure. Le contrôle actif est une approche qui est complémentaire aux deux autres et qui permet d'apporter des solutions à certains problèmes qui sont difficilement abordables avec les deux autres approches. Le contrôle actif est efficace en basses fréquences, il peut être très compact et léger. De plus les coûts associés au contrôle actif deviennent de plus en plus abordables. L'utilisation d'une approche plutôt qu'une autre dépend des caractéristiques (coût, dimensions, fréquences, excitations, etc.) du problème considéré. Il faut souligner que les solutions optimales pour un grand nombre de problèmes seront obtenues en combinant les différentes approches. D'ailleurs il y a de plus en plus de travaux qui combinent le contrôle passif avec le contrôle actif. Exemples, une couche de viscoélastique qui est contrainte activement par un élément piézoélectrique [BAZ *et coll.* 1995], les mousses actives [GUIGOU *et coll.* 1995], etc.

Le processus de contrôle, d'un système de contrôle actif, consiste à minimiser le signal provenant d'un ou plusieurs capteurs d'erreur en utilisant un ou plusieurs actionneurs de contrôle. Le signal provenant des capteurs d'erreur doit représenter correctement le champ vibratoire ou acoustique (fonction coût) qu'il faut contrôler. Le contrôleur digital détermine le voltage à imposer aux actionneurs de contrôle afin que ces derniers modifient la réponse de la structure ou du champ acoustique de façon à minimiser le signal provenant des capteurs d'erreur.

Le concept de base du contrôle actif du bruit date des années 1930. Le brevet déposé par Lueg en 1934, et qui fut accepté en 1936 [LUEG 1936], a toutes les caractéristiques d'un système de contrôle actif dans les conduits. Ce brevet utilise le principe de superposition et stipule que les variations de pression causée par une onde plane qui se propage dans un conduit rigide peuvent être éliminées si une deuxième onde d'amplitude égale mais déphasée de 180 degrés est générée.

Il y a eu peu de développement entre 1934, l'année où Lueg a déposé son brevet, et la fin des années 1980. La non disponibilité des contrôleurs digitaux en est la raison principale. Les contrôleurs digitaux sont nécessaires pour déterminer l'amplitude et la phase de l'onde secondaire



qu'il faut générer ainsi que pour les identifications et les adaptations des différents filtres digitaux. Il n'existait pas de contrôleurs digitaux avant les années 1960. Entre les années 1960 et la fin des années 1980 les contrôleurs digitaux sont devenus disponibles mais très coûteux. Donc, l'application en pratique d'un système de contrôle actif n'était pas réalisable à cette époque.

Depuis la fin des années 1980, les processeurs de traitements des signaux (DSP: Digital signal processing), qui sont la composante principale des contrôleurs digitaux, sont devenus très puissants et en même temps très abordables. Aujourd'hui, il est possible d'obtenir des cartes DSP pour moins de cent dollars. Ces cartes sont rudimentaires mais complètes. Elles peuvent être directement utilisées pour des systèmes de contrôle actif simple.

Les récents développements qui se sont faits au niveau des cartes DSP, ainsi que ceux au niveau des différents types de transducteurs, ont généré un engouement pour le contrôle actif qui est reflété dans la littérature scientifique depuis les dix dernières années ainsi que dans les applications commerciales. Quelques exemples d'applications commerciales présentement disponibles sont, le casque antibruit actif, le contrôle du bruit dans les conduits d'aérations et les cheminées, le siège antibruit pour les avions etc. Il y a beaucoup d'autres applications commerciales en développement, telles que les silencieux actifs, le contrôle du bruit dans les habitacles de différents types de véhicules, le contrôle du bruit rayonné par les transformateurs électriques etc.

Il faut souligner que le contrôle actif du bruit ou des vibrations ne sont que quelque'une des applications possibles du contrôle actif proprement dit. Lors de la dernière conférence internationale sur le contrôle actif, *ACTIVE 95*, une session complète a été consacrée aux applications non traditionnelles du contrôle actif. Par exemples, le contrôle actif s'applique aux problèmes de positionnement en robotique, [WRIGHT *et coll.* 1995] contrôlent activement la couche limite de l'écoulement d'une aile d'avion afin de minimiser la traînée, etc.

### 1.1.1 Types de contrôleurs digitaux (numérique)

Les algorithmes utilisés dans les contrôleurs digitaux représentent un axe de recherche qui est en plein développement (LMS, Filtered-X LMS, Newton LMS, etc.). Actuellement, il existe deux familles de contrôleur digital, le contrôleur “feedforward” et le contrôleur “feedback”. La figure 1.2 présente le schéma du contrôle actif du bruit dans un conduit pour un contrôleur de type feedforward. La figure 1.3 présente la même problématique, mais avec un contrôleur feedback.

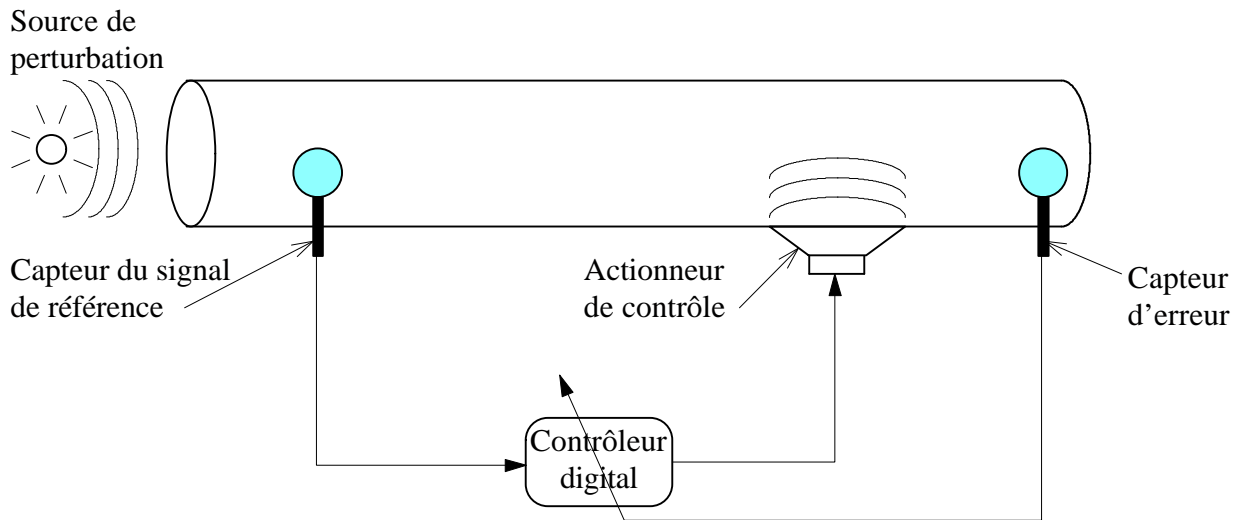


Figure 1.2: Schéma d'un système de contrôle actif de type feedforward.

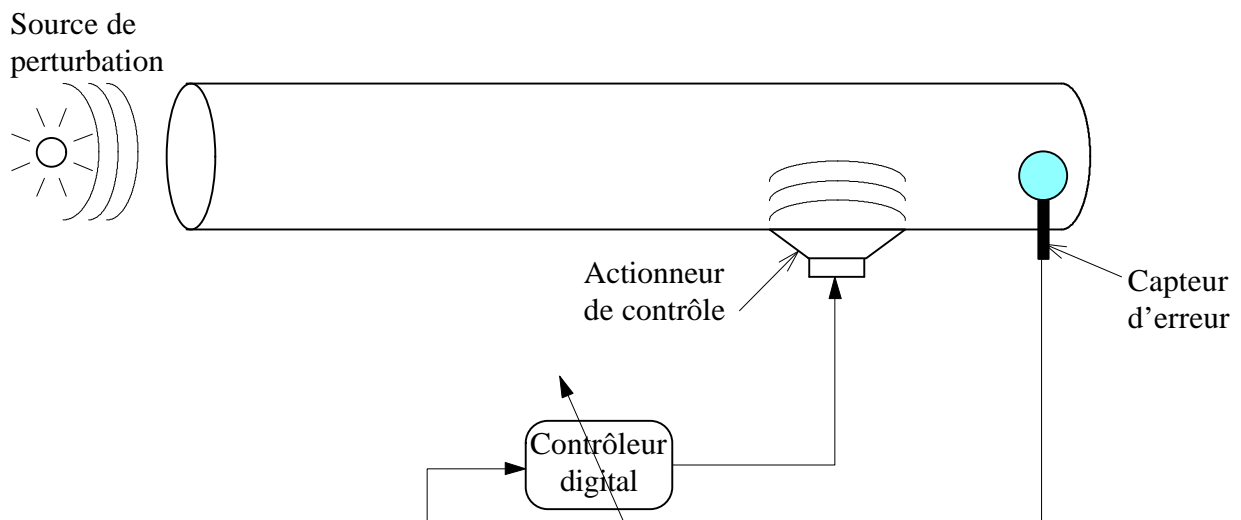


Figure 1.3: Schéma d'un système de contrôle actif de type feedback.

Ce qui différencie ces familles de contrôleurs digitaux est l'utilisation ou non d'un signal de référence. Un contrôleur feedforward utilise un signal de référence qui est pris suffisamment en amont par rapport à l'actionneur de contrôle pour laisser un certain temps de calcul. Lorsqu'il n'est pas possible d'avoir un signal de référence, alors un contrôleur feedback est nécessairement utilisé. Typiquement, les atténuations possibles avec un contrôleur feedforward sont plus importantes que celles obtenues avec un contrôleur feedback. Cependant, il y a beaucoup d'applications pratiques où il n'est pas possible d'avoir un signal de référence.

Il faut mentionner que les signaux considérés dans les présents travaux sont tous de types harmoniques (signaux périodiques ou multi-périodiques). Les simulations et expériences de contrôle sont faites en considérant un régime harmonique.

### 1.1.2 Types de contrôle actif du bruit

Présentement, il existe deux types de contrôle actif du bruit généré par des structures vibrantes. Ce qui différencie ces types est le genre d'actionneurs utilisés pour effectuer le contrôle. La figure 1.4 présente les schémas de chacune de ces approches.

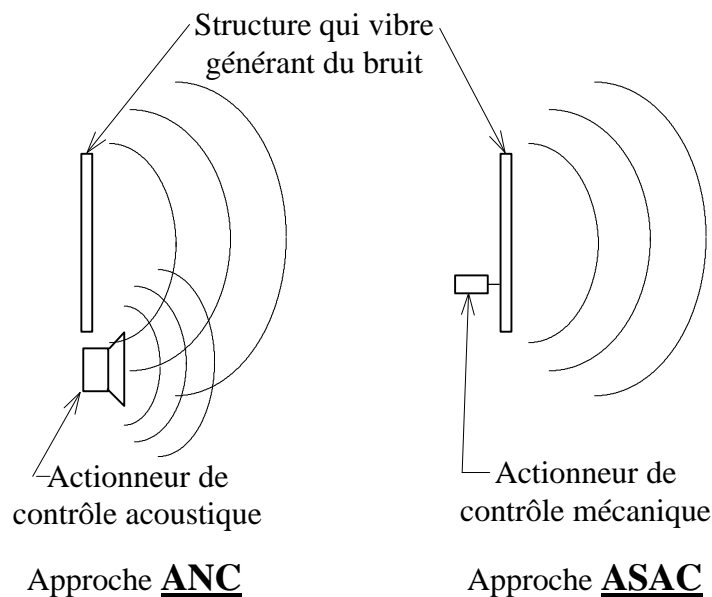


Figure 1.4: Schémas du type d'actionneur de contrôle utilisé pour un contrôle ANC et un contrôle ASAC.

Ce que Lueg a présenté dans son brevet est le contrôle actif du bruit proprement dit. L'acronyme ANC (Active Noise Control) est utilisé dans la littérature pour référer à ce type de contrôle. La caractéristique principale de ce type de contrôle est que les actionneurs de contrôle sont acoustiques (haut-parleurs). Ces sources acoustiques sont utilisés pour générer l'onde secondaire qui élimine ou minimise les fluctuations de pression produites par la source primaire. Le livre de [NELSON et coll. 1992] présente en détail ce type de contrôle actif du bruit et ses diverses applications.

[KNYASEV *et coll.* 1967] et [FULLER 1987, 1990] ont présenté une autre approche pour minimiser le bruit généré par une structure. L'acronyme ASAC (Active Structural Acoustic Control) est utilisé pour référer à cette approche. L'idée de cette approche est d'utiliser des actionneurs mécaniques qui agissent directement sur la structure qui vibre afin de modifier la distribution vibratoire dans le but de minimiser le bruit total rayonné par la structure.

L'objectif principal de l'approche ASAC est de restructurer les vibrations afin de réduire le coefficient de rayonnement global de la structure et si possible atténuer le niveau global des vibrations. Les résultats des différents travaux de [FULLER 1987, 1990, 1991a, 1992] ont montré que cette approche est efficace en basses fréquences et que généralement il est possible d'obtenir des atténuations substantielles de puissance rayonnée dans le champ lointain avec un ou deux actionneurs de contrôle seulement. Un livre qui traite de ce type de contrôle actif est présentement sous presse [FULLER *et coll.* 1995].

L'approche ASAC est le type de contrôle actif utilisé dans les travaux présentés ici. Les avantages principaux que cette approche offre par rapport à l'ANC sont:

- Des réductions de puissance rayonnée peuvent être obtenues avec seulement un ou deux actionneurs de contrôle.
- Les actionneurs de contrôle sont directement fixés à la structure, donc un système plus compact.
- Les zones d'atténuations sont généralement moins localisées.

### 1.1.3 Types de transducteurs pour le contrôle actif du bruit (ASAC)

Les récents développements faits pour différents types de transducteurs ont également participé à la croissance du nombre de travaux faits en contrôle actif en général et plus particulièrement pour le contrôle actif du bruit utilisant l'approche ASAC. Présentement, il existe plusieurs technologies de matériaux. Pour en nommer quelques-unes, il y a les piézoélectriques, les électrorhéologiques, les magnétostrictif, les électrostrictif et les matériaux à mémoire de forme. Les caractéristiques mécaniques, électriques, dynamiques, etc. de ces matériaux sont relativement différentes d'une technologie à l'autre. L'utilisation d'une technologie de transducteur dépend de l'application considérée. Le tableau 1.1, tiré de [GANDHI *et coll.* 1992] résume et compare différentes technologies de transducteurs.

TABLEAU 1.1 TABLEAU COMPARATIF ENTRE LES DIFFÉRENTES TECHNOLOGIES DE TRANSDUCTEURS

Caractéristique Technologie	Coût	Maturité technique	Poss. d'intégrat. dans une structure	Linéarité	Bande passante (Hz)	Déforma. max ( $\mu\epsilon$ )
Piézoélectrique	modéré	bonne	excellente	bonne	1 à 20000	200
mémoire de forme	faible	bonne	excellente	bonne	0 à 5	5000
Électrorhéologique	modéré	moyenne	moyenne	moyenne	0 à 12000	—
Magnétostrictif	modéré	moyenne	bonne	bonne	1 à 20000	200
Électrostrictif	modéré	moyenne	bonne	moyenne	1 à 20000	200

Généralement, c'est la technologie des matériaux piézoélectriques qui est considérée pour les applications de contrôle actif du bruit utilisant l'approche ASAC. Ces transducteurs étendus offrent beaucoup d'avantages. Ils sont peu coûteux, compacts, légers et efficaces pour générer ou détecter les vibrations. Ils peuvent être posés sur une surface de la structure ou intégrés à l'intérieur de cette dernière. La technologie des matériaux piézoélectriques se divise en deux groupes; les piézocéramiques (PZT) et les films polyvinylidène fluorides (PVDF). Les propriétés électromécaniques de chacun de ces groupes font que typiquement les piézocéramiques sont utilisés comme actionneurs tandis que les films PVDF servent de capteurs.

## 1.2 État des connaissances

La revue bibliographique présentée dans cette section est divisée en deux parties. La première partie fait état des travaux de recherches qui ont porté sur l'utilisation d'éléments piézoélectriques de type céramique (PZT) comme actionneur sur des structures planes telles que les poutres et les plaques. La deuxième partie présente les travaux qui ont porté sur le choix de l'information (fonction coût) qu'il faut minimiser dans un système de contrôle actif du rayonnement acoustique et quel type de transducteur est utilisée pour mesurer cette information.

### 1.2.1 Éléments piézoélectriques utilisés comme actionneurs

[CRAWLEY *et coll.* 1987] ont présenté une des premières études complètes sur la modélisation des éléments piézoélectriques utilisés comme actionneurs sur une poutre. Ils ont considéré le cas de l'excitation créée par deux éléments piézoélectriques fixés symétriquement sur la poutre. Les voltages imposés aux bornes des deux éléments pouvaient être en phase ou déphasés de 180 degrés. Une excitation axiale pure est imposée à la poutre lorsque les voltages sont en phase, tandis qu'une excitation en flexion pure est obtenue lorsque les voltages sont déphasés de 180 degrés. Les valeurs des forces axiales et des moments transversaux que les éléments piézoélectriques génèrent ont été déterminées suite à une analyse statique. Leurs résultats ont démontré que les forces axiales (voltages des éléments en phase) ou les moments transversaux (voltages des éléments déphasés de 180 degrés) s'appliquent aux extrémités des éléments piézoélectriques lorsque l'épaisseur de la couche de colle est mince et raide (collage parfait). Les équations obtenues suite à l'analyse statique des efforts ont ensuite été introduites dans un modèle dynamique. Les hypothèses utilisées pour ce modèle dynamique sont que les masses et raideurs des éléments piézoélectriques n'ont pas d'influence sur la réponse de la poutre et que les fréquences de résonances de ces éléments piézoélectriques sont bien supérieures aux fréquences de la bande de fréquences considérée.

L'extension des travaux de [CRAWLEY *et coll.* 1987] au cas à deux dimensions d'une plaque mince a été faite par [DIMITRIADIS *et coll.* 1991]. [DIMITRIADIS *et coll.* 1991] ont considéré le cas du collage parfait entre les éléments piézoélectriques en opposition de phase et la plaque. Leurs analyses ont montré que les efforts des éléments piézoélectriques sont transmis sur la périphérie de ces derniers. Les efforts imposés par des éléments piézoélectriques parfaitement collés sur une plaque correspondent donc à des lignes de moment qui s'appliquent aux extrémités de ces éléments. [KIM *et coll.* 1991] ont complété le cas de l'excitation par éléments piézoélectriques d'une plaque en considérant la couche de colle entre les éléments et la plaque. Les résultats qu'ils ont obtenus concordent avec ceux présentés dans les travaux précédents.

Récemment, l'excitation asymétrique d'une poutre obtenue en utilisant un seul élément piézoélectrique a été considérée dans quelques travaux. L'étude d'une excitation asymétrique diffère de la majorité des travaux présentés jusqu'ici, car ce type d'excitation introduit simultanément des efforts axiaux et transversaux dans la poutre. Pour une poutre, l'excitation asymétrique offre certains avantages par rapport à l'excitation symétrique obtenue avec deux éléments piézoélectriques posés sur chaque face de la poutre. Les deux plus importants avantages sont:

- (i) L'utilisation d'un seul élément piézoélectrique sur une face de la poutre laisse la face opposée de la poutre libre de tout actionneur. Cette face libre est alors disponible pour y coller par exemple un capteur étendu, tel qu'un film PVDF. De plus il est possible que, pour certaines applications pratiques, cette face ne soit tout simplement pas disponible à cause de contrainte mécanique et/ou géométrique.
- (ii) Les résultats des travaux de [FULLER *et coll.* 1990a] et [GIBBS *et coll.* 1992] ont montré qu'il est possible de contrôler simultanément des ondes axiales et transversales avec une excitation asymétrique.

Généralement, le bruit généré par la structure dans le milieu acoustique est associé aux mouvements transversaux de cette dernière, car ils se couplent beaucoup plus efficacement avec le milieu acoustique que les mouvements axiaux. Lorsqu'une excitation asymétrique est utilisée, il y a des mouvements axiaux et transversaux qui sont introduits dans la poutre. Les mouvements axiaux ne sont généralement pas reliés au bruit généré. Par contre, ils peuvent être détectés par un capteur de déformation. Si le signal de ce capteur de déformation est le signal d'erreur du système de contrôle actif, alors il peut y avoir une dégradation importante de la performance de contrôle due à la détection des déformations axiales par ce capteur. Il est donc important, dans le cas d'une excitation asymétrique, de déterminer la contribution relative entre les mouvements axiaux et transversaux induits dans la poutre.

Le modèle développé au chapitre 2 de la présente thèse est l'extension des travaux entamés par [PLANTIER *et coll.* 1994]. Ce nouveau modèle variationnel permet de déterminer la contribution relative entre les déformations dues au déplacement axial et celles dues au déplacement transversal d'une excitation asymétrique et d'étudier ces effets sur un capteur de déformation étendu constitué d'un film PVDF.

### 1.2.2 Signal et capteur d'erreur pour un système de contrôle actif du rayonnement acoustique

Le choix de l'information à contrôler (fonction coût) est très important dans tout système de contrôle actif. Le signal du capteur d'erreur qui est fourni au contrôleur digital doit représenter le plus efficacement possible la quantité qui doit être minimisée. Généralement, les capteurs d'erreurs utilisés en laboratoire pour les systèmes de contrôle actif du bruit sont des microphones localisés dans le champ lointain de la structure qui vibre. Cependant, pour la majorité des applications pratiques, il n'est pas possible de mettre des microphones dans le champ lointain de la structure, car:

- i) Les bruits provenant des autres sources environnantes contaminent les signaux des microphones.



- ii) L'espace nécessaire pour positionner ces microphones dans le champ lointain de la structure n'est généralement pas disponible.

Pour ces deux raisons, des alternatives aux microphones doivent être développées. L'utilisation de capteur vibratoire apparaît comme une alternative très intéressante.

Le développement de capteurs pour un système de contrôle actif de type ASAC doit être basé sur les mécanismes de rayonnement d'une structure en basses fréquences. Le bruit rayonné par des structures planes, telles que les poutres et les plaques, est directement lié à la distribution des vitesses sur la surface de la structure pour les fréquences inférieures à la fréquence critique de la structure. Les travaux de [WALLACE 1972, 1972a] et [BERRY 1991] montrent que la distribution des vitesses de certains modes (modes symétriques) rayonne plus efficacement. Le capteur à concevoir devrait donc détecter principalement ces modes qui rayonnent bien.

Les films PVDF sont des capteurs étendus sur lesquels il est possible d'appliquer des techniques de filtrage spatial en leur donnant des formes prescrites. Le type d'information qu'il faut mesurer sur la structure avec un tel capteur doit être soigneusement défini pour que la minimisation du signal de ce capteur corresponde bien à une atténuation de la puissance acoustique rayonnée.

[CLARK *et coll.* 1991a, 1992a, 1993] ont mis en évidence la possibilité d'utiliser des éléments piézoélectriques de type polyvinylidène fluorure (PVDF) comme capteur d'erreur pour un système de contrôle actif de la puissance rayonnée par une structure. [CLARK *et coll.* 1992a] ont utilisé des bandes de PVDF rectangulaires positionnés sur une plaque simplement appuyée afin d'observer seulement les modes d'ordre impair (qui sont les plus efficaces en rayonnement). Ils ont obtenu des atténuations de puissance rayonnée avec ces capteurs rectangulaires, cependant les résultats montrent qu'il pouvait y avoir des augmentations de la puissance rayonnée quand la structure est excitée hors résonance. L'optimisation de la forme des bandes PVDF pourrait éliminer ce problème de régénération de puissance rayonnée.

Une fonction coût qui a été présentée originalement par [FULLER *et coll.* 1991] et utilisée par [CLARK *et coll.* 1991a] est de détecter les composantes supersoniques (rayonnantes) du spectre

vibratoire de la structure dans le domaine des nombres d'onde. Les résultats présentés par [CLARK *et coll.* 1991a] montrent qu'il y a réduction de la puissance rayonnée lorsque les composantes supersoniques de ce spectre sont minimisées. La pression dans le champ lointain dans une direction donnée correspond à une composante supersonique du spectre vibratoire. Les résultats de simulations de [FULLER *et coll.* 1991] montrent qu'il est possible de minimiser la pression le long de n'importe quel axe de l'espace, il suffit de contrôler la composante supersonique (nombre d'onde) qui correspond à cet axe.

[CLARK *et coll.* 1993] ont développé une approche pour former des capteurs PVDF pour les poutres afin que le signal de ce capteur soit directement proportionnel à la pression dans le champ lointain le long de l'axe perpendiculaire qui est centré sur la surface de la poutre. [LEE *et coll.* 1990] ont démontré qu'il est possible de former un capteur PVDF pour que ce dernier détecte un ou plusieurs modes en particulier. [GU *et coll.* 1994] ont utilisé cette technique pour former deux bandes de films PVDF posées perpendiculairement sur une plaque. Le signal de ces bandes a permis d'observer et de contrôler activement (indépendamment de la fréquence) le mode (3,1) d'une plaque simplement appuyée.

Une autre fonction coût basée sur le concept de mode rayonnant a été étudiée par [CUNEFARE 1991], [BAUMANN *et coll.* 1991] et [ELLIOTT *et coll.* 1993]. Le but est d'écrire la puissance rayonnée en terme de modes rayonnants. Ces modes rayonnants sont construits en utilisant les vecteurs propres (fonctions propres) de la structure pour orthogonaliser la matrice des impédances de rayonnement.

[BAUMANN *et coll.* 1991] obtiennent les modes de rayonnement en passant les modes de la structure dans une série de filtres de rayonnement. Cela implique que la puissance dans le champ lointain est obtenue en passant les amplitudes modales de vitesse à travers les filtres de rayonnement. Dans ce cas, les amplitudes modales des vibrations de la structure doivent être connues pour pouvoir réduire la puissance rayonnée. En pratique, il faut donc déterminer les amplitudes modales pour chaque fréquence considérée, ce qui n'est pas nécessairement facile à faire pour bon nombre d'applications.

[CUNEFARE 1991] a utilisé les modes de rayonnement pour déterminer les distributions de vitesse qui rayonnent faiblement. La distribution de vitesse optimale sur la surface d'une poutre pour une fréquence est obtenue en solutionnant un problème aux valeurs propres. Cette distribution optimale de vitesse est écrite sous la forme de contributions de modes. La façon de forcer la structure de vibrer avec cette distribution de vitesse optimale, qui minimise la puissance rayonnée, dans une application pratique n'est pas abordée par dans cette référence.

[ELLIOTT *et coll.* 1993] ont noté que pour de faibles valeurs de  $k_0 \cdot L_x$  ( $k_0$  est le nombre d'onde acoustique et  $L_x$  la longueur principale de la structure), le coefficient de rayonnement des modes de rayonnement diminue très rapidement avec l'ordre du mode. Ils notent également que le nombre total de modes de la structure qui doivent être mesurés et contrôlés activement peut être beaucoup plus grand que le nombre de modes de rayonnement considéré.

Un système de contrôle actif pour une plaque simplement appuyée, qui utilise des films PVDF formé pour détecter les modes de rayonnement, a été implanté par [SNYDER *et coll.* 1993]. Cependant, une difficulté importante est que la distribution spatiale de ces modes de rayonnement dépend de la fréquence. Cela peut limiter l'approche aux plaques excitées à une seule fréquence.

Il a été montré par [ELLIOTT *et coll.* 1993] que les modes de rayonnement sont pratiquement indépendants de la fréquence lorsque les basses fréquences sont considérées, c'est-à-dire  $k_0 \cdot L_x \ll 1$ . Pour ces basses fréquences, seulement le premier mode de rayonnement a une contribution importante au rayonnement. Ce premier mode de rayonnement est le mode piston. Ce mode piston représente le comportement monopolaire de la structure et ce comportement monopolaire peut être détecté en mesurant le déplacement volumique total (intégration des déplacements transversaux) de la structure.

En se basant sur les résultats de [ELLIOTT *et coll.* 1993], [REX *et coll.* 1992] ont développé un capteur qui est pondéré de façon quadratique afin de mesurer le débit volumique d'une structure. Ce capteur peut être implanté dans des applications pratiques sous la forme d'un câble piézo-électrique ou de fibre optique collée ou intégrée à la structure. En utilisant la même approche,

[JOHNSON *et coll.* 1993] ont démontré qu'il est possible de mesurer le débit volumique d'une structure à deux dimensions, telle qu'une plaque. Dans ce cas, le capteur est obtenu en effectuant une pondération quadratique de l'épaisseur d'un film PVDF qui couvrirait toute la surface de la plaque. Ce type de pondération quadratique sur l'épaisseur d'un film PVDF n'étant pas réalisable en pratique, ils ont approché cette pondération quadratique en utilisant des séries de bandes rectangulaires de PVDF. Cette solution approchée nécessite la superposition de deux couches de films PVDF, ce qui semble être difficile à implanter expérimentalement (encombrement mécanique, isolation électrique entre les capteur, influence des couches de colle etc.).

À partir des résultats présentés dans la littérature et plus particulièrement ceux de [WALLACE 1972, 1972a], [BERRY 1991] et [ELLIOTT *et coll.* 1993], le contrôle du comportement monopolaire d'une structure semble être une bonne stratégie de contrôle. Ce comportement monopolaire est typiquement représenté par un grand coefficient de rayonnement en basses fréquences. Comme noté précédemment, un bon indicateur de ce comportement monopolaire est le déplacement volumique de la structure. Le déplacement volumique s'obtient facilement en intégrant les déplacements transversaux de la structure sur toute la surface de cette dernière. Il s'agit d'un indicateur qui s'obtient à partir du niveau des déplacements transversaux, qui est une information vibratoire. Il faut souligner que le déplacement volumique est une information étendue et non pas ponctuelle tel que le déplacement transversal d'un point en particulier.

Le contrôle du déplacement volumique en basses fréquences a pour but principal de réduire le coefficient de rayonnement. Suite au contrôle de déplacement volumique, la structure passe d'un comportement monopolaire à un multipolaire. Pour une structure qui vibre hors résonance, le contrôle du déplacement volumique diminue le coefficient de rayonnement sans trop changer le niveau de vibration de cette dernière. Cependant, lorsque la structure vibre sur des résonances qui ont un déplacement volumique alors le contrôle du déplacement volumique diminuent le coefficient de rayonnement et le niveau vibratoire de la structure. Lorsqu'il y a des réductions du coefficient de rayonnement et de la vitesse quadratique simultanément, les atténuations de puissance rayonnée associées à ces dernières sont considérables.

La fonction coût retenue pour les travaux présentés dans cette thèse est donc le déplacement volumique d'une structure plane. Ce déplacement volumique peut-être mesuré de différentes façons.

Le déplacement volumique peut être mesuré directement avec un microphone posé le long d'un axe centré et orthogonal au plan de la surface de la structure. Comme mentionné précédemment, il n'est pas possible d'utiliser un microphone dans le champ lointain de la structure pour la grande majorité des applications pratiques. Donc, l'utilisation de ce type de transducteur n'est pas vraiment intéressante.

Une seconde méthode moins directe est de poser sur la structure une matrice de capteurs discrets, tel que des accéléromètres, et de reconstruire le déplacement volumique à partir de ces informations ponctuelles. Le problème principal avec cette approche est que le contrôleur doit traiter toutes ces informations ponctuelles (sommer et pondérer au besoin les signaux) avant de pouvoir minimiser le déplacement volumique proprement dit. Implicitement, cela signifie que le contrôleur doit avoir une certaine puissance de calcul puisque la charge de calcul ne se limite pas à une simple minimisation d'un signal. Un deuxième désavantage important avec cette approche est le coût. Il faut acheter un certain nombre de capteurs et le contrôleur doit avoir une entrée par capteur.

La troisième méthode est de développer un capteur de vibration dont le signal est directement proportionnel au déplacement volumique. Les transducteurs qui permettent de travailler sur ce type de capteur sont les films piézoélectriques PVDF. Ces transducteurs étendus peuvent être découpés en n'importe quelle forme afin d'obtenir un filtre spatial des déformations en surface de la structure. Puisque ces transducteurs sont étendus, il est raisonnable de vouloir les utiliser pour mesurer une information étendue telle que le déplacement volumique.

Le développement théorique et la validation expérimentale de capteur de déplacement volumique, pour les poutres et les plaques, constituent la plus grande partie des travaux présentés dans cette thèse. [JOHNSON *et coll.* 1993] travaillent sur le même type de capteur, cependant l'approche

utilisée est différente de celle présentée ici. [JOHNSON *et coll.* 1993] effectuent une pondération quadratique de leur film PVDF, tandis qu'ici les fonctions propres de la structure sont utilisées pour obtenir le capteur désiré. Jusqu'à présent, [JOHNSON *et coll.* 1993] n'ont présenté aucun résultat expérimental sur leur capteur. De plus, l'approche de [JOHNSON *et coll.* 1993] est limitée à des structures dont les extrémités sont fixes, c'est-à-dire aucun déplacement transversal sur les bords de la structure.

Avec un capteur de déplacement volumique constitué d'un film PVDF, il y a un seul signal d'erreur. Le contrôleur peut directement minimiser ce signal d'erreur. Le contrôleur dans ce cas a une seule entrée et la puissance de calcul nécessaire se limite à la minimisation du signal. Les films PVDF sont de plus très abordables, un rouleau de 4m<sup>2</sup> (AgInk, 28μm d'épaisseur) coûte environ 300\$, ce qui veut dire qu'une bande typique de PVDF qui a 0.01m<sup>2</sup> de surface revient à moins de 1\$.

### 1.3 Objectifs des travaux présentés dans la thèse

L'état des connaissances permet de constater que le contrôle du déplacement volumique d'une structure plane est très intéressant pour la réduction de la puissance rayonnée dans les basses fréquences. Un capteur qui permet de mesurer directement le déplacement volumique a donc un intérêt certain. À l'heure actuelle, il n'existe pas de capteur vibratoire qui donne directement le déplacement volumique d'une structure plane avec conditions limites quelconques, ajouts de masses et de raideurs, etc. **L'objectif principal des travaux exposés dans la présente thèse est de développer de tels capteurs de déplacement volumique pour les poutres et les plaques.**

Les objectifs spécifiques, qui représentent également les originalités scientifiques, sont les suivants:

- Développer des modèles variationnels (dynamique) qui modélisent rigoureusement l'excitation et la détection obtenues avec des transducteurs étendus piézoélectriques. Ces modèles permettront de calculer la réponse d'un capteur piézoélectrique en

fonction du voltage imposé à un actionneur piézoélectrique. Cela pour des structures ayant des conditions limites élastiques. Puisque la méthode variationnelle est une approche qui est de type dynamique, les modèles obtenus tiendront comptes de l'ajout de masses et raideurs des différents éléments piézoélectriques sur la réponse de la structure.

- Mettre au point un capteur fait en film PVDF dont le signal est proportionnel au déplacement volumique de la structure considérée. Ce capteur sera composé d'une ou de plusieurs bandes de PVDF ayant des formes prescrites. Ces formes seront obtenues à partir des fonctions propres (déformées modales) de la structure. Le capteur sera donc indépendant de la fréquence et des caractéristiques (position, amplitude) de l'excitation.
- Afin d'obtenir le meilleur capteur possible, les formes des bandes de PVDF seront déterminées à partir de fonctions propres mesurées expérimentalement (pour les plaques). Cela donnera une approche très robuste qui sera directement applicable à des structures 'réelles'.
- Implanter théoriquement et expérimentalement des systèmes de contrôle actif du déplacement volumique de structures qui utilisent ce nouveau capteur comme capteur d'erreur et des actionneurs piézocéramiques comme actionneurs de contrôle.

Le but d'utiliser les transducteurs piézoélectriques comme actionneurs et capteurs est de pouvoir les coller ou même les intégrer à la structure de façon à obtenir une structure *intelligente*. Par définition, une structure intelligente doit avoir un système de traitement de l'information qui permet de gérer les capteurs et les actionneurs qu'elle possède. Une telle structure peut alors être mise dans n'importe quel environnement sans que ces caractéristiques ou performances soient affectées. Une autre raison pour laquelle les transducteurs piézoélectriques sont intéressants est qu'ils sont des transducteurs étendus qui offrent la possibilité de faire du filtrage spatial des déformations.

## **1.4 Structure du document**

La présente thèse peut essentiellement être séparée en deux parties. La première est consacrée aux poutres, la deuxième aux plaques. Les chapitres 2, 3 et 4 présentent la première partie sur les poutres, tandis que les chapitres 5, 6 et 7 présentent la deuxième partie sur les plaques.

L'approche variationnelle est utilisée pour la modélisation de l'excitation obtenu avec des transducteurs piézoélectriques. Le chapitre 2 présente le modèle développé pour les poutres qui est nommé A.C.P.A.. Le chapitre 5 présente le modèle correspondant pour les plaques qui est nommé P.A.E.P..

Les chapitres 3 et 6 sont spécifiquement consacrés au développement de capteur de déplacement volumique pour les poutres et les plaques respectivement. Ces capteurs sont constitués de films piézoélectriques PVDF et ont une forme prescrite de façon à ce que leurs signaux soient directement proportionnels au déplacement volumique de la structure. La forme de ces capteurs est basée sur les fonctions propres (déformées modales) des structures sur lesquelles ils sont appliqués.

Les chapitres 4 et 7 présentent les résultats des implantations théoriques et expérimentales de ces capteurs dans un système de contrôle actif de type ASAC. Le chapitre 4 montrent les résultats pour les poutres tandis que le chapitre 7 présentent ceux pour les plaques.



# Chapitre 2

## **EXCITATION ASYMÉTRIQUE/SYMÉTRIQUE ET MESURE DE DÉFORMATION D'UNE POUTRE À L'AIDE DE TRANSDUCTEURS PIÉZOÉLECTRIQUES**

### **2.1 Introduction**

Ce chapitre présente le développement d'un modèle dynamique et l'étude expérimentale de la réponse d'une poutre excitée par des actionneurs piézocéramiques. Le signal obtenu par un capteur étendu piézoélectrique (film PVDF) collé sur cette poutre est également étudié. Les transducteurs piézoélectriques peuvent être positionnés indépendamment le long de la poutre, de type différent et de longueurs arbitraires.

L'excitation de la poutre peut être asymétrique ou symétrique. Une excitation symétrique (flexion pure ou extension pure) est obtenue lorsqu'un élément piézoélectrique sur la surface supérieure de la poutre est vis-à-vis d'un second qui est identique mais fixé sur la surface inférieure et qu'il y a un déphasage de 180 ou 0 degrés sur les voltages imposés. Lorsque le déphasage entre les voltages est différent de 180 ou 0 degrés ou que les éléments piézoélectriques ne sont pas identiques ou qu'un seul éléments piézoélectrique est utilisé alors la poutre subit une excitation asymétrique. Une excitation asymétrique introduit simultanément dans la poutre des déplacements (déformations) axiaux et transversaux.

Les transducteurs piézoélectriques, actionneurs et capteurs, sont considérés parfaitement collés à la poutre. La formulation variationnelle est utilisée pour développer ce modèle. Cette formulation, qui est basée sur les quantités énergétiques du système mécanique, permet de considérer n'importe

quelles conditions limites pour la poutre et de prendre en considération les effets dynamiques (ajout de masse et de raideur) des transducteurs piézoélectriques sur la réponse de la poutre. Ces effets dynamiques sont négligés dans les modèles existants dans la littérature, voir [CRAWLEY *et coll.* 1987], [GIBBS *et coll.* 1992], etc. Afin d'alléger le texte, le modèle développé dans ce chapitre est référencé par l'acronyme A.C.P.A. tout au long de cette thèse (Actionneurs et Capteurs Piézoélectriques Asymétriques).

Le modèle A.C.P.A. calcule la réponse d'une poutre (déplacement axial et/ou transversal) et le voltage d'un capteur PVDF pour un voltage imposé aux bornes de l'actionneur piézocéramique. Ce modèle est validé théoriquement et expérimentalement. La validation théorique est faite en comparant les résultats de A.C.P.A. à ceux du modèle statique de [GIBBS *et coll.* 1992] trouvé dans la littérature. L'implantation expérimentale d'une poutre libre-libre excitée par un piézocéramique avec un capteur PVDF sur la surface opposée a permis la validation expérimentale.

## **2.2 Développement du modèle A.C.P.A.**

Le modèle A.C.P.A. est une extension des travaux de [PLANTIER *et coll.* 1994] et est développé à l'aide de la formulation variationnelle. La formulation variationnelle est basée sur l'utilisation de quantités scalaires. Ces quantités scalaires sont: l'énergie cinétique du système, l'énergie potentielle (déformation) du système et le travail des forces externes. La formulation variationnelle est donc fondamentalement différente de l'approche Newtonienne qui utilise des quantités vectorielles (force, moment). L'étude des systèmes semi complexes et complexes est rendue possible avec la formulation variationnelle, car il est généralement beaucoup plus facile de déterminer ou d'estimer des quantités scalaires que des quantités vectorielles. [LANCZOS 1966] et [WASHIZU 1975] présentent en détail la formulation variationnelle ainsi que des exemples d'applications.

Le développement théorique présenté dans ce chapitre est fait en considérant un seul actionneur piézoélectrique sur la poutre. Les différentes équations obtenues sont facilement généralisables à un nombre arbitraires d'actionneurs. Lorsqu'il y a plus d'un actionneur sur la poutre, il faut simplement faire la sommation des énergies potentielles et cinétiques de chacun des actionneurs en utilisant les équations présentées ici.

### 2.2.1 Configuration du système poutre-transducteurs piézoélectriques

Le système mécanique étudié est montré à la figure 2.1. Il est constitué d'une poutre avec un piézocéramique sur la surface supérieure servant d'actionneur et un film piézoélectrique PVDF sur la surface inférieure servant de capteur. Les transducteurs piézoélectriques induisent et captent des déformations. La largeur  $L_y$  est uniforme et identique pour la poutre et les transducteurs piézoélectriques. Les positions et dimensions ( $L_x$ ,  $L_z$ ) de l'actionneur et du capteur sont arbitraires.

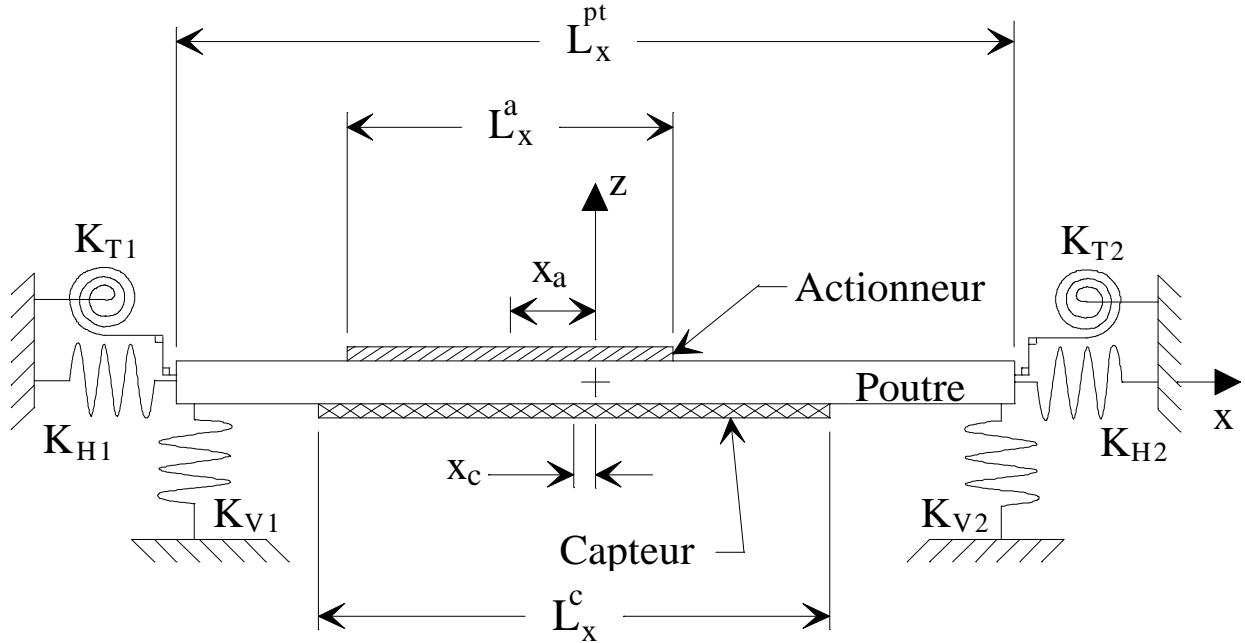


Figure 2.1: Schéma du système considéré

Les extrémités de la poutre sont attachées à des supports rigides à l'aide de ressorts qui contrôlent les déplacements axiaux et transversaux ainsi que les rotations des extrémités. La raideur de ces ressorts est complexe et peut être ajustée de façon à modéliser n'importe quelles conditions limites, incluant celles avec amortissement. Les amortissements à l'intérieur des autres éléments (poutre et transducteurs piézoélectriques) sont introduits en utilisant une notation complexe pour les différents modules d'Young. L'actionneur et le capteur sont considérés parfaitement collés à la surface de la poutre. Cette hypothèse est basée sur les travaux de [PLANTIER *et coll.* 1994] qui ont montré que les effets de la colle (cisaillement, ajout de masse et de raideur) sont très faibles en basses fréquences pour le type de collage qu'il est possible d'obtenir en pratique.

### 2.2.2 Champ de déplacement

Afin de déterminer l'énergie potentielle et cinétique du système mécanique considéré, il faut imposer un champ de déplacement admissible. Ce champ de déplacement doit être capable de satisfaire les différentes conditions limites considérées. Ici, l'hypothèse classique de Love-Kirchoff est utilisée pour décrire le déplacement de l'actionneur, de la poutre et du capteur. Cette hypothèse stipule qu'une section qui est perpendiculaire à l'axe neutre de la poutre avant déformation reste perpendiculaire à cet axe après déformation. Cela implique que les effets du cisaillement et du coefficient de Poisson sont considérés négligeables. La figure 2.2 montre un élément  $dx$  du système mécanique avant et après déformation. Il est également possible de voir sur cette figure les différentes composantes du déplacement d'un point P de la poutre.

Le champ de déplacement de la poutre est écrit sous la forme,

$$U_{pt}(x, z_{pt}, \tau) = u_{pt}(x, \tau) - z_{pt} \frac{\partial w(x, \tau)}{\partial x}, \quad (2.1a)$$

$$W_{pt}(x, \tau) = w(x, \tau), \quad (2.1b)$$

où  $U_{pt}$  et  $W_{pt}$  sont les déplacements totaux dans les directions  $x$  et  $z$  respectivement. Le terme  $u_{pt}(x, \tau)$  de l'équation (2.1a) représente le déplacement axial de la section, tandis que le terme  $(z_{pt} \partial w(x, \tau) / \partial x)$  représente le déplacement axial dû à la rotation de la section. Cette rotation de

section est introduite par le déplacement transversal. Les champs de déplacement de l'actionneur piézocéramique ( $U_a$ ,  $W_a$ ) et du capteur PVDF ( $U_c$ ,  $W_c$ ) sont écrits sous la même forme,

$$U_a(x, z_a, \tau) = u_a(x, \tau) - z_a \frac{\partial w(x, \tau)}{\partial x}, \quad (2.2a)$$

$$W_a(x, \tau) = w(x, \tau). \quad (2.2b)$$

$$U_c(x, z_c, \tau) = u_c(x, \tau) - z_c \frac{\partial w(x, \tau)}{\partial x}, \quad (2.3a)$$

$$W_c(x, \tau) = w(x, \tau). \quad (2.3b)$$

Il y a quatre fonctions inconnues ( $u_{pt}(x, \tau)$ ,  $u_a(x, \tau)$ ,  $u_c(x, \tau)$  et  $w(x, \tau)$ ) dans les trois champs de déplacement. Deux de ces fonctions,  $u_a(x, \tau)$  et  $u_c(x, \tau)$ , peuvent être éliminées en utilisant les conditions à l'interface de contact entre chacun des transducteurs piézoélectriques et la poutre.

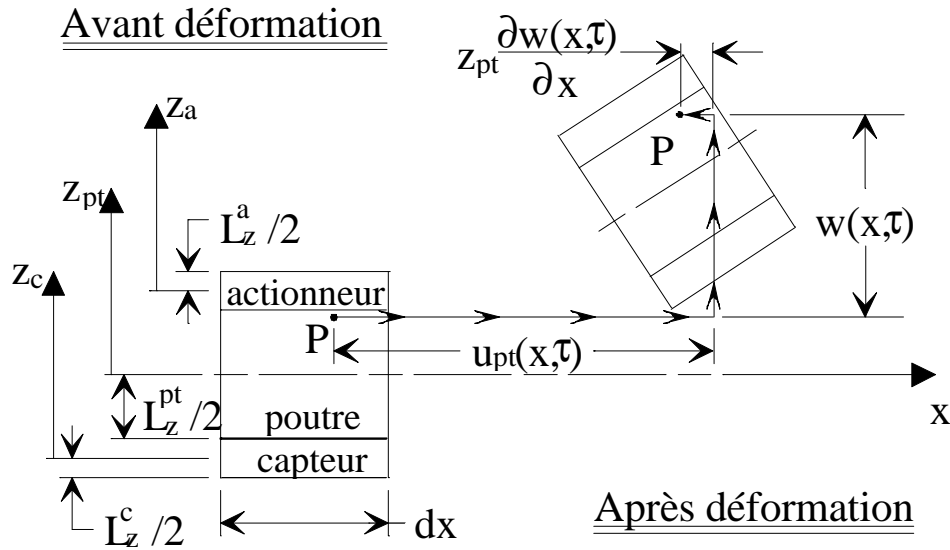


Figure 2.2: Champ de déplacement

L'hypothèse de collage parfait impose la continuité des déplacements entre la poutre et les transducteurs piézoélectriques. Ceci s'écrit sous forme mathématique comme suit,

$$U_{pt}\left(x, \frac{L_z^{pt}}{2}, \tau\right) = U_a\left(x, -\frac{L_z^a}{2}, \tau\right), \quad (2.4)$$

$$U_{pt}(x, -\frac{L_z^{pt}}{2}, \tau) = U_c(x, \frac{L_z^c}{2}, \tau). \quad (2.5)$$

Les équations (2.4) et (2.5) permettent d'écrire le déplacement axial total de l'actionneur et du capteur en fonction du déplacement axial  $u_{pt}(x, \tau)$  et transversal  $w(x, \tau)$  de la poutre,

$$U_a(x, z_a, \tau) = u_{pt}(x, \tau) - \left[ z_a + \frac{1}{2}(L_z^{pt} + L_z^a) \right] \frac{\partial w(x, \tau)}{\partial x}, \quad (2.6)$$

$$U_c(x, z_c, \tau) = u_{pt}(x, \tau) - \left[ z_c - \frac{1}{2}(L_z^{pt} + L_z^c) \right] \frac{\partial w(x, \tau)}{\partial x}. \quad (2.7)$$

Les trois champs de déplacement, actionneur (eq. (2.2b) et (2.6)), poutre (eq. (2.1a) et (2.1b)) et capteur (eq. (2.3b) et (2.7)), ne font plus apparaître que deux fonctions inconnues, soit le déplacement axial  $u_{pt}(x, \tau)$  et le déplacement transversal  $w(x, \tau)$  de la poutre.

### 2.2.3 Déformations et contraintes

Les déformations de l'actionneur, de la poutre et du capteur sont facilement déterminées à partir des champs de déplacement. Les déformations de l'actionneur sont données par,

$$\epsilon_x^a(x, z_a, \tau) = \frac{\partial U_a}{\partial x} = \frac{\partial u_{pt}(x, \tau)}{\partial x} - \left[ z_a + \frac{L_z^{pt} + L_z^a}{2} \right] \frac{\partial^2 w(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad (2.8a)$$

$$\epsilon_y^a = \epsilon_z^a = \epsilon_{xy}^a = \epsilon_{yz}^a = \epsilon_{xz}^a = 0. \quad (2.8b)$$

Les déformations de la poutre sont,

$$\epsilon_x^{pt}(x, z_{pt}, \tau) = \frac{\partial U_{pt}}{\partial x} = \frac{\partial u_{pt}(x, \tau)}{\partial x} - z_{pt} \frac{\partial^2 w(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad (2.9a)$$

$$\epsilon_y^{pt} = \epsilon_z^{pt} = \epsilon_{xy}^{pt} = \epsilon_{yz}^{pt} = \epsilon_{xz}^{pt} = 0, \quad (2.9b)$$

et celles du capteur,

$$\epsilon_x^c(x, z_c, \tau) = \frac{\partial U_c}{\partial x} = \frac{\partial u_{pt}(x, \tau)}{\partial x} - \left[ z_c - \frac{L_z^{pt} + L_z^c}{2} \right] \frac{\partial^2 w(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad (2.10a)$$

$$\epsilon_y^c = \epsilon_z^c = \epsilon_{xy}^c = \epsilon_{yz}^c = \epsilon_{xz}^c = 0. \quad (2.10b)$$

Le premier terme du côté droit des équations (2.8a), (2.9a) et (2.10a) représente la déformation

due au déplacement axial, tandis que le deuxième terme représente la déformation due au déplacement transversal (flexion de la poutre).

En utilisant la loi de Hooke, la contrainte résultante dans la poutre s'écrit

$$\sigma_x^{pt} = Y^{pt} \epsilon_x^{pt} , \quad (2.11)$$

où  $Y^{pt}$  est le module d'Young de la poutre.

Les contraintes résultantes dans l'actionneur et le capteur sont également uniaxiales dans la direction "x". Ces contraintes sont obtenues à partir des équations de la piézoélectricité linéaire [TIERSTEN 1969]. Pour les types de piézoélectriques utilisés ici, elles s'écrivent comme suit,

$$\sigma_x^a = Y_{xx}^a \epsilon_x^a + e_{zx}^a \frac{\Delta\phi^a}{L_z^a} , \quad (2.12)$$

$$\sigma_x^c = Y_{xx}^c \epsilon_x^c + e_{zx}^c \frac{\Delta\phi^c}{L_z^c} , \quad (2.13)$$

où  $Y$  est le module de Young d'éléments piézoélectriques ayant les électrodes court-circuitées,  $e_{zx}$  est le coefficient contrainte/charge et  $\Delta\phi$  est le voltage imposé entre les deux électrodes.

#### 2.2.4 Équation variationnelle avec fonctionnelle d'Hamilton

La fonctionnelle d'Hamilton correspond à l'intégrale finie du Lagrangien entre un instant initial  $\tau_1$  et un instant final  $\tau_2$ . La recherche des extrémis de la fonctionnelle permet de trouver les équations du mouvement du système mécanique considéré. L'équation variationnelle pour un système mécanique sur lequel il n'y a pas de force extérieure s'écrit,

$$\kappa \int_{\tau_1}^{\tau_2} (E_{cin}^{totale} - E_{pot}^{totale}) d\tau = 0 . \quad (2.14)$$

Dans l'équation (2.14),  $E_{cin}^{totale}$  est l'énergie cinétique totale du système,  $E_{pot}^{totale}$  est l'énergie potentielle totale du système et la différence entre ces deux énergies est appelée le Lagrangien du système. Le  $\kappa$  représente l'opérateur variationnel.

### 2.2.5 Énergie cinétique et potentielle

Les énergies cinétiques, de l'actionneur, de la poutre et du capteur, sont obtenues en effectuant la dérivée temporelle des champs de déplacement suivie d'une intégration sur le volume. Pour une largeur constante  $L_y = L_y^a = L_y^{pt} = L_y^c$ , l'énergie cinétique de chacun de ces éléments est donnée par,

$$E_{cin}^a = \frac{\rho_a L_y}{2} \int_{x_a - L_x^a/2}^{x_a + L_x^a/2} \int_{-L_z^a/2}^{L_z^a/2} \left[ \left( \frac{\partial u_{pt}(x, \tau)}{\partial \tau} - \left[ z_a + \left( \frac{L_z^{pt} + L_z^a}{2} \right) \right] \frac{\partial^2 w(x, \tau)}{\partial x \partial \tau} \right)^2 + \left( \frac{\partial w(x, \tau)}{\partial \tau} \right)^2 \right] dz_a dx, \quad (2.15)$$

$$E_{cin}^{pt} = \frac{\rho_{pt} L_y}{2} \int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} \int_{-L_z^{pt}/2}^{L_z^{pt}/2} \left[ \left( \frac{\partial u_{pt}(x, \tau)}{\partial \tau} - z_{pt} \frac{\partial^2 w(x, \tau)}{\partial x \partial \tau} \right)^2 + \left( \frac{\partial w(x, \tau)}{\partial \tau} \right)^2 \right] dz_{pt} dx, \quad (2.16)$$

$$E_{cin}^c = \frac{\rho_s L_y}{2} \int_{x_c - L_x^c/2}^{x_c + L_x^c/2} \int_{-L_z^c/2}^{L_z^c/2} \left[ \left( \frac{\partial u_{pt}(x, \tau)}{\partial \tau} - \left[ z_c - \left( \frac{L_z^{pt} + L_z^c}{2} \right) \right] \frac{\partial^2 w(x, \tau)}{\partial x \partial \tau} \right)^2 + \left( \frac{\partial w(x, \tau)}{\partial \tau} \right)^2 \right] dz_c dx. \quad (2.17)$$

L'addition des équations (2.15) à (2.17) donne l'énergie cinétique totale du système  $E_{cin}^{totale}$ .

L'énergie potentielle (déformation) de la poutre est donnée par l'intégrale de volume de la contrainte multipliée par la déformation. La poutre a une largeur constante ( $L_y^{pt} = L_y$ ), ce qui donne,

$$E_{pot}^{pt} = \frac{Y^{pt} L_y}{2} \int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} \int_{-L_z^{pt}/2}^{L_z^{pt}/2} \left[ \frac{\partial u_{pt}(x, \tau)}{\partial x} - z_{pt} \frac{\partial^2 w(x, \tau)}{\partial x^2} \right]^2 dz_{pt} dx. \quad (2.18)$$



L'intégrale de volume de la densité électromécanique d'enthalpie d'un élément piézoélectrique donne son énergie potentielle. [PLANTIER et coll., 1994] ont montré pour le cas uniaxial, que l'enthalpie électromécanique d'un élément piézoélectrique s'écrit sous la forme,

$$H = \frac{1}{2} \left[ \sigma_x \varepsilon_x + e_{zx} \frac{\Delta\phi}{L_z} \varepsilon_x - \xi_{zz} \left( \frac{\Delta\phi}{L_z} \right)^2 \right]. \quad (2.19)$$

En utilisant les équations (2.8a) et (2.12), l'enthalpie électromécanique de l'actionneur est donnée par,

$$H = \frac{Y_{xx}^a}{2} \left( \frac{\partial u_{pt}(x, \tau)}{\partial x} - \left[ z_a + \frac{L_z^a + L_z^{pt}}{2} \right] \frac{\partial^2 w(x, \tau)}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{e_{zx}^a \Delta\phi^a}{L_z^a} \left( \frac{\partial u_{pt}(x, \tau)}{\partial x} - \left[ z_a + \frac{L_z^a + L_z^{pt}}{2} \right] \frac{\partial^2 w(x, \tau)}{\partial x^2} \right) - \frac{\xi_{zz}^a}{2} \left( \frac{\Delta\phi^a}{L_z^a} \right)^2. \quad (2.20)$$

L'intégrale sur le volume de l'actionneur de cette dernière équation donne l'énergie potentielle de ce dernier,

$$E_{pot}^a = L_y \int_{x_a - L_x^a/2}^{x_a + L_x^a/2} \int_{-L_z^a/2}^{L_z^a/2} \left[ \frac{Y_{xx}^a}{2} \left( \frac{\partial u_{pt}(x, \tau)}{\partial x} - \left[ z_a + \frac{L_z^a + L_z^{pt}}{2} \right] \frac{\partial^2 w(x, \tau)}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{e_{zx}^a \Delta\phi^a}{L_z^a} \left( \frac{\partial u_{pt}(x, \tau)}{\partial x} - \left[ z_a + \frac{L_z^a + L_z^{pt}}{2} \right] \frac{\partial^2 w(x, \tau)}{\partial x^2} \right) - \frac{\xi_{zz}^a}{2} \left( \frac{\Delta\phi^a}{L_z^a} \right)^2 \right] dz_a dx. \quad (2.21)$$

Une équation similaire peut être obtenue pour le capteur. Cependant, le voltage entre les bornes d'un capteur n'est pas imposé mais plutôt lu. Cela correspond à une configuration d'électrodes ouvertes. Afin de simplifier l'équation d'énergie potentielle du capteur, le module de Young ( $\tilde{Y}$ ) pour des électrodes ouvertes est utilisé. Ce module de Young tient compte de l'influence du voltage qui est généré entre les bornes du capteur lorsqu'il est déformé. L'énergie potentielle du capteur est alors donnée par,

$$E_{\text{pot}}^c = L_y \int_{x_c - L_x^c/2}^{x_c + L_x^c/2} \int_{-L_z^c/2}^{L_z^c/2} \left[ \frac{\tilde{Y}_{xx}^c}{2} \left( \frac{\partial u_{\text{pt}}(x, \tau)}{\partial x} - \left[ z_c - \frac{L_z^c + L_z^{\text{pt}}}{2} \right] \frac{\partial^2 w(x, \tau)}{\partial x^2} \right)^2 \right] dz_c dx. \quad (2.22)$$

La relation entre le module de Young pour des électrodes ouvertes et celui pour des électrodes court-circuitées peut être trouvée dans les normes [ANSI/IEEE 1978] sur la piézoélectricité. Cette relation pour le cas uniaxial des éléments piézoélectriques utilisés ici s'écrit,

$$\tilde{Y}_{xx} = \frac{Y_{xx}}{1 - d_{zx} g_{zx} Y_{xx}}, \quad (2.23)$$

où  $d_{zx}$  et  $g_{zx}$  sont les coefficients déformation/charge et charge/contrainte respectivement.

Généralement, les manufacturiers de transducteurs piézoélectriques donnent la valeur du coefficient  $d_{zx}$  (déformation/charge) seulement. Il existe une relation qui permet de trouver une valeur approchée pour  $e_{zx}$  connaissant  $d_{zx}$ . Cette relation est,

$$e_{zx} \cong d_{zx} Y_{xx} \quad (2.24)$$

L'énergie potentielle des ressorts utilisés pour modéliser les conditions limites est,

$$E_{\text{pot}}^{\text{ressorts}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left\{ K_{Vi} [w(x_i, \tau)]^2 + K_{Hi} [u_{\text{pt}}(x_i, \tau)]^2 + K_{Ti} \left[ \frac{\partial w(x_i, \tau)}{\partial x} \right]^2 \right\}, \quad (2.25)$$

où  $x_1 = -L_x^{\text{pt}}/2$  and  $x_2 = L_x^{\text{pt}}/2$ .

En additionnant les équations (2.18), (2.21), (2.22) et (2.25), l'énergie potentielle totale  $E_{\text{pot}}^{\text{totale}}$  du système est obtenue. Une fois de plus, il faut noter que l'amortissement est introduit dans le système mécanique en utilisant des modules de Young complexe pour l'actionneur, la poutre, le capteur et des rigidités complexes pour les ressorts qui servent de conditions limites.

Il faut souligner que les équations présentées ici sont valides pour un actionneur posé sur la surface supérieure de la poutre. Lorsqu'un actionneur se situe sur la surface inférieure de la poutre, alors il faut inverser le signe devant le terme de flexion dans les différentes équations.

### 2.2.6 Équations du mouvement

Cette section présente la réponse de la poutre (déplacement axial et transversal) lorsqu'un voltage est appliqué aux bornes de l'actionneur. Les énergies, potentielles et cinétiques, du système mécanique nécessaire pour résoudre l'équation (2.14) sont connues. Malheureusement, l'équation (2.14) ne peut être solutionnée en général, il faut utiliser la méthode de Rayleigh-Ritz pour trouver une approximation de la solution. L'idée de base de la méthode de Rayleigh-Ritz est d'estimer le déplacement de tous les points en utilisant une combinaison linéaire de fonctions *essais* simples. Ces fonctions *essais* doivent satisfaire les conditions limites géométriques aux extrémités de la poutre. Les fonctions utilisées ici sont de type polynomial. La fonction d'approximation pour le déplacement axial s'écrit,

$$u_{pt}(x, \tau) = \sum_{p=0}^{P-1} c_p^{ax}(\tau) \vartheta(x) = \sum_{p=0}^{P-1} \left( C_p^{ax} e^{j\omega\tau} \right) \left( \frac{2x}{L_x^{pt}} \right)^p, \quad (2.26)$$

et pour le déplacement transversal la fonction d'approximation est

$$w(x, \tau) = \sum_{q=0}^{Q-1} c_q^{tr}(\tau) \vartheta(x) = \sum_{q=0}^{Q-1} \left( C_q^{tr} e^{j\omega\tau} \right) \left( \frac{2x}{L_x^{pt}} \right)^q. \quad (2.27)$$

L'extrémalisation de la fonctionnelle présentée à l'équation (2.14) s'effectue avec,

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{c}_p^{ax}} \right) - \frac{\partial L}{\partial c_p^{ax}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{c}_q^{tr}} \right) - \frac{\partial L}{\partial c_q^{tr}} = 0 \quad (2.28)$$

où  $L$  est le Lagrangien du système mécanique. En remplaçant les équations (2.26) et (2.27), ces deux équations couplées prennent la forme matricielle ( dimensions  $[P+Q] \times [P+Q]$  ) suivante,

$$\left[ \omega^2 \begin{pmatrix} \mathbf{M}^1 & \mathbf{M}^2 \\ \mathbf{M}^{2T} & \mathbf{M}^3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{K}^1 & \mathbf{K}^2 \\ \mathbf{K}^{2T} & \mathbf{K}^3 \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{C}^{ax} \\ \mathbf{C}^{tr} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^{ax} \\ \mathbf{F}^{tr} \end{Bmatrix}. \quad (2.29)$$

La solution de ce système d'équations linéaires permet de déterminer les coefficients inconnus  $C_p^{ax}$  et  $C_q^{tr}$ . Dans cette équation (2.29),  $\omega$  est la pulsation du voltage d'excitation, les  $\mathbf{M}$  représentent les matrices de masse du système mécanique, les  $\mathbf{K}$  sont les matrices de raideurs et les  $\mathbf{C}^{ax}$  et  $\mathbf{C}^{tr}$  sont les vecteurs contenant les inconnus  $C_p^{ax}$  et  $C_q^{tr}$  respectivement.  $\mathbf{M}^1$  et  $\mathbf{K}^1$  sont les matrices associées au déplacement axial,  $\mathbf{M}^3$  et  $\mathbf{K}^3$  sont associées au déplacement transversal.  $\mathbf{M}^2$ ,  $\mathbf{K}^2$  et leur transposées  $\mathbf{M}^{2T}$  et  $\mathbf{K}^{2T}$  représentent le couplage entre le déplacement axial et transversal. Du côté droite de l'équation (2.29),  $\mathbf{F}^{ax}$  est le vecteur de force dans la direction axial et  $\mathbf{F}^{tr}$  est le

vecteur de force dans la direction transversale. Les équations explicites qui permettent de déterminer les valeurs des différents termes de l'équation (2.29) sont donnés à l'Annexe A.

L'équation (2.29) est résolue en utilisant la méthode d'élimination de Gauss. La solution donne les coefficients inconnus  $C_p^{ax}$  et  $C_q^{tr}$ . Le déplacement axial et transversal de la poutre, donné par les équations (2.26) et (2.27), peuvent donc être évalués numériquement. La précision des équations (2.26) et (2.27) est déterminée par le nombre total de termes P et Q considéré dans la sommation. Il est généralement admis que le nombre total de termes dans la série polynomiale doit être le double du nombre de mode dans la bande de fréquences considérée. La poutre (tableau 2.2) libre-libre utilisée ici a cinq modes transversaux et aucun mode axial dans la bande de fréquences 0Hz à 3200Hz (voir table I). Théoriquement, P=1 et Q=10 donne une bonne approximation du déplacement axial et transversal. Cependant, pour garantir une bonne précision, P=6 et Q=18 ont été utilisés pour les résultats présentés dans ce chapitre.

## 2.3 Indicateurs de vibration

### 2.3.1 Vitesse quadratique transversale

Le déplacement transversal est celui qui retient le plus l'attention pour la plupart des problèmes de vibration et de bruit. Ce déplacement transversal peut être caractérisé par la vitesse quadratique. La vitesse quadratique est la moyenne spatiale et temporelle des vitesses transversales. Cela s'écrit,

$$\langle \dot{w}^2 \rangle = \frac{\omega^2}{2L_x^{pt}} \int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} |w(x)|^2 dx \quad (2.30)$$

La vitesse quadratique théorique de A.C.P.A. s'évalue en remplaçant l'équation (2.27) dans (2.30), ce qui donne

$$\langle \dot{w}^2 \rangle = \frac{\omega^2}{4} \sum_{p=0}^{Q-1} \sum_{q=0}^{Q-1} \frac{C_p^{\text{tr}} C_q^{\text{tr}*}}{p+q+1} \left[ 1 - (-1)^{p+q+1} \right] \quad (2.31)$$

où l'exposant \* représente le complexe conjugué. Il est également possible de mesurer expérimentalement la vitesse quadratique. Une comparaison entre la vitesse quadratique mesurée et calculée théoriquement avec A.C.P.A. est présentée à la section 2.5.

### 2.3.2 Réponse d'un capteur rectangulaire

[LEE *et coll.* 1991] ont présenté l'équation du courant  $i(\tau)$  en circuit fermé pour un capteur piézoélectrique qui subit une déformation mécanique. Dans notre cas, cette relation pour un élément piézoélectrique de largeur constante s'écrit,

$$i(\tau) = L_y^c e_{zx} \int_{x_c - L_x^c/2}^{x_c + L_x^c/2} \frac{\partial \varepsilon(x, z_c = 0, \tau)}{\partial \tau} dx. \quad (2.32)$$

Le capteur considéré dans la présente étude est un film PVDF étendu. Lorsqu'un capteur a une grande surface, comme dans le cas présent, il est plus pratique de mesurer directement le voltage  $\Delta\phi^c(\tau)$  plutôt que le courant  $i(\tau)$ . La relation entre le voltage et le courant, lorsqu'un instrument de mesure qui a une impédance d'entrée élevée est utilisé, s'écrit

$$\Delta\phi^c(\tau) = \frac{i(\tau)}{j\omega c_c} \quad (2.33)$$

où  $j$  indique le nombre complexe  $\sqrt{-1}$  et  $c_c$  est la capacitance du capteur. La valeur de cette capacitance est donné par

$$c_c = \frac{\xi_c L_y^c L_x^c}{L_z^c} \quad (2.34)$$

où  $\xi_c$  est la permittivité du matériau piézoélectrique. En remplaçant les équations (2.32) et (2.34) dans (2.33), puis en effectuant l'intégrale selon  $x$ , le voltage généré aux bornes du capteur (en fonction du voltage imposé à l'actionneur) est,

$$\Delta\varphi^c = \frac{e_{zx}^c L_z^c}{\xi_c L_x^c} \left\{ \sum_{p=1}^{P-1} C_p^{ax} \left[ \left( \frac{2x_c + L_x^c}{L_x^{pt}} \right)^p - \left( \frac{2x_c - L_x^c}{L_x^{pt}} \right)^p \right] + \frac{L_z^{pt} + L_z^c}{L_x^{pt}} \sum_{q=2}^{Q-1} q \cdot C_p^{tr} \left[ \left( \frac{2x_c + L_x^c}{L_x^{pt}} \right)^{q-1} - \left( \frac{2x_c - L_x^c}{L_x^{pt}} \right)^{q-1} \right] \right\} \quad (2.35)$$

## 2.4 Validation théorique du modèle A.C.P.A.

Le modèle A.C.P.A. développé à la section 2.2 est basé sur une approche dynamique. Ce modèle inclut les effets de masse rajoutée et de raideur rajoutée par l'actionneur et le capteur sur la réponse de la poutre. Il est intéressant de vérifier quelle est exactement l'influence de ces masses et raideurs rajoutées. Dans ce but, les résultats obtenus avec le modèle A.C.P.A. sont comparés avec ceux du modèle de [GIBBS *et coll.* 1992]. Le modèle de [GIBBS *et coll.* 1992] est basé sur une analyse statique de l'actionneur piézoélectrique, ce qui implique que les effets d'ajout de masse et de raideur des actionneurs piézoélectriques ne sont pas considérés.

### 2.4.1 Équations du mouvement du modèle de [GIBBS *et coll.* 1992]

[GIBBS *et coll.* 1992] contrôlent simultanément des ondes axiales et transversales qui se propagent dans une poutre infinie à l'aide d'une excitation asymétrique faite par des actionneurs piézoélectriques. Dans ce qui suit, les équations différentielles présentées par [GIBBS *et coll.* 1992] pour le déplacement axial et transversal sont rappelées et utilisées pour dériver la solution du cas d'une poutre finie simplement appuyée à ces deux extrémités. En utilisant la nomenclature de la présente thèse et la convention de signe de [POPOV 1978] pour le cisaillement et les moments de flexion, les équations différentielles obtenues par [GIBBS *et coll.* 1992] pour le déplacement axial et transversal s'écrivent respectivement,

$$\frac{\partial^2 u_{pt}^{stq}}{\partial x^2}(x, \tau) - \frac{\rho_{pt}}{Y^{pt}} \frac{\partial^2 u_{pt}^{stq}}{\partial \tau^2}(x, \tau) = D_{ax}^{stq} \frac{d_{zx}^a \Delta \varphi^a}{L_z^a} \left\{ \delta \left[ x - \left( x_a - \frac{L_x^a}{2} \right) \right] - \delta \left[ x - \left( x_a + \frac{L_x^a}{2} \right) \right] \right\}, \quad (2.36)$$

$$-\frac{\partial^4 w^{stq}}{\partial x^4}(x, \tau) - \frac{\rho_{pt} L_y^{pt} L_z^{pt}}{Y^{pt} I} \frac{\partial^2 w^{stq}}{\partial \tau^2}(x, \tau) = D_{tr}^{stq} \frac{d_{zx}^a \Delta \varphi^a}{L_z^a} \left\{ \delta' \left[ x - \left( x_a - \frac{L_x^a}{2} \right) \right] - \delta' \left[ x - \left( x_a + \frac{L_x^a}{2} \right) \right] \right\}, \quad (2.37)$$

où les constantes  $D_{ax}^{stq}$  et  $D_{tr}^{stq}$  sont obtenues à partir d'une analyse statique (équilibre des forces et moments). Ces constantes s'écrivent,

$$D_{ax}^{stq} = \frac{Y^a L_z^a \left[ \left( L_z^{pt} \right)^3 Y^{pt} + \left( L_z^a \right)^3 Y^a \right]}{\left( L_z^{pt} \right)^4 \left( Y^b \right)^2 + 4 \left( L_z^{pt} \right)^3 Y^b Y^a L_z^a + 6 \left( L_z^{pt} \right)^2 Y^b Y^a \left( L_z^a \right)^2 + 4 L_z^{pt} Y^b Y^a \left( L_z^a \right)^3 + \left( L_z^a \right)^4 \left( Y^a \right)^2}, \quad (2.38)$$

$$D_{tr}^{stq} = \frac{6 L_z^{pt} Y^{pt} Y^a L_z^a \left( L_z^{pt} + L_z^a \right)}{\left( L_z^{pt} \right)^4 \left( Y^b \right)^2 + 4 \left( L_z^{pt} \right)^3 Y^b Y^a L_z^a + 6 \left( L_z^{pt} \right)^2 Y^b Y^a \left( L_z^a \right)^2 + 4 L_z^{pt} Y^b Y^a \left( L_z^a \right)^3 + \left( L_z^a \right)^4 \left( Y^a \right)^2}. \quad (2.39)$$

En utilisant la condition limite simplement appuyée transversalement et libre axialement à chaque extrémité de la poutre, les équations (2.36) et (2.37) peuvent être solutionnées en utilisant un développement modal. Les solutions obtenues avec une expansion modale pour le déplacement axial et transversal sont respectivement,

$$u_{pt}^{stq}(x, \tau) = \frac{2 Y^b D_{ax}^{stq} d_{zx}^a \Delta \varphi^a}{\rho_{pt} L_x^{pt} L_z^a} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \left( \frac{n \pi}{L_x^{pt}} \left( x_a - \frac{L_x^a}{2} + \frac{L_x^{pt}}{2} \right) \right) - \cos \left( \frac{n \pi}{L_x^{pt}} \left( x_a + \frac{L_x^a}{2} + \frac{L_x^{pt}}{2} \right) \right)}{\omega^2 - \left( \omega_n^{ax} \right)^2} \cos \left( \frac{n \pi}{L_x^{pt}} \left( x + \frac{L_x^{pt}}{2} \right) \right) e^{j \omega \tau}, \quad (2.40)$$

pour  $-\frac{L_x^{pt}}{2} \leq x \leq \frac{L_x^{pt}}{2}$

$$w^{stq}(x, \tau) = \frac{-\pi Y^b (L_z^{pt})^2 D_{fl}^{stc} d_{zx}^a \Delta \varphi^a}{6\rho_{pt} (L_x^{pt})^2 L_z^a} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \left[ \cos \left( \frac{n\pi}{L_x^{pt}} \left( x_a - \frac{L_x^a}{2} + \frac{L_x^{pt}}{2} \right) \right) - \cos \left( \frac{n\pi}{L_x^{pt}} \left( x_a + \frac{L_x^a}{2} + \frac{L_x^{pt}}{2} \right) \right) \right]}{\omega^2 - (\omega_n^{tr})^2} \sin \left( \frac{n\pi}{L_x^{pt}} \left( x + \frac{L_x^{pt}}{2} \right) \right) e^{j\omega\tau} \quad (2.41)$$

pour  $-\frac{L_x^{pt}}{2} \leq x \leq \frac{L_x^{pt}}{2}$ .

La vitesse quadratique obtenue par le modèle de [GIBBS *et coll.* 1992], pour une poutre simplement appuyée, est déterminée en remplaçant l'équation (2.41) dans (2.30).

#### 2.4.2 Comparaison entre les résultats de A.C.P.A. et [GIBBS *et coll.* 1992]

Le Tableau 2.1 donne les fréquences propres obtenues avec le modèle de [GIBBS *et coll.* 1992] et A.C.P.A. pour la configuration poutre-transducteurs piézoélectriques donnée au Tableau 2.2. L'actionneur utilisé dans ce cas est un piézocéramique et le capteur est un film PVDF qui couvre toute la surface de la poutre. Dans ce Tableau 2.2, la valeur  $e_{zx}$  pour l'actionneur est celle fournie par le manufacturier. Pour le capteur, la valeur de  $e_{zx}$  est approchée en utilisant l'équation (2.24).

TABLEAU 2.1 FRÉQUENCES PROPRES EN HERTZ, POUTRE *SIMPLEMENT APPUYÉE*

	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
[GIBBS <i>et coll.</i> 1992]	86.42	345.70	777.82	1382.79	2160.60	3111.27
A.C.P.A.	84.83	339.18	762.60	1354.39	2113.59	3038.76
Différence relative	1.9%	1.9%	2.0%	2.1%	2.2%	2.4%

La figure 2.3 montre la vitesse quadratique transversale calculée avec le modèle de [GIBBS *et coll.* 1992] et celle obtenue avec A.C.P.A., pour la poutre du Tableau 2.2. Le Tableau 2.1 et la figure 2.3 montrent clairement que les fréquences propres de la poutre pour le modèle A.C.P.A. sont diminuées d'approximativement 2%. Les diminutions sont attribuables au fait que les



transducteurs piézoélectriques sont fixés sur la poutre et indiquent que l'ajout de masse de ces transducteurs influence plus la réponse de la poutre que l'ajout de rigidité de ces derniers.

**TABEAU 2.2 CARACTÉRISTIQUES PHYSIQUES DE L'ACTIONNEUR, DE LA POUTRE ET DU CAPTEUR**

	<b>Actionneur</b>	<b>Poutre</b>	<b>Capteur</b>
Longueur (mm)	25.38	295	295
Largeur (mm)	12.65	12.65	12.65
Épaisseur (mm)	0.18	3.25	0.11
Densité (Kg/m <sup>3</sup> )	7614	2726	3400
Module de Young (N/m <sup>2</sup> )	(63×10 <sup>9</sup> , 0)	(71×10 <sup>9</sup> , 35.5×10 <sup>7</sup> )	(2×10 <sup>9</sup> , 0)
Permittivité $\xi$ (F/m)	————	————	106×10 <sup>-12</sup>
$d_{zx}$ (m/V)	190×10 <sup>-12</sup>	————	23×10 <sup>-12</sup>
$e_{zx}$ (N/(V·m))	12.0	————	0.046
Position le long de la poutre (mm)	$x_a = 131$	————	$x_c = 0$

Les fonctions de transferts entre le voltage du capteur et celui de l'actionneur sont présentées pour chacun des modèles à la figure 2.4. Comme il a été noté précédemment, les fréquences naturelles sur cette figure sont décalées de 2% vers le bas pour le modèle A.C.P.A.. Le point important à noter sur la figure 2.4, est l'apparition de petites résonances vis-à-vis des modes 2 (339Hz), 4 (1354Hz) et 6 (3039Hz) dans la fonction de transfert du modèle A.C.P.A.. Ces résonances sont absentes dans la fonction de transfert du modèle de [GIBBS *et coll.* 1992].

Les déformations dues à des modes transversaux (flexion) pairs (2,4,6,...) sont antisymétriques par rapport au centre de la poutre. Ceci est vrai pour une poutre homogène qui a des conditions limites identiques à chaque extrémité. Dans ce cas, l'intégration des déformations de surface le long de la poutre de ces modes transversaux antisymétriques est nulle. Un capteur PVDF étendu agit comme un intégrateur spatial des déformations. Donc, le signal d'un capteur PVDF qui couvre toute la surface de la poutre est directement proportionnel à l'intégration des déformations à la surface de cette dernière et devrait être indépendant des déformations dues aux modes pairs.

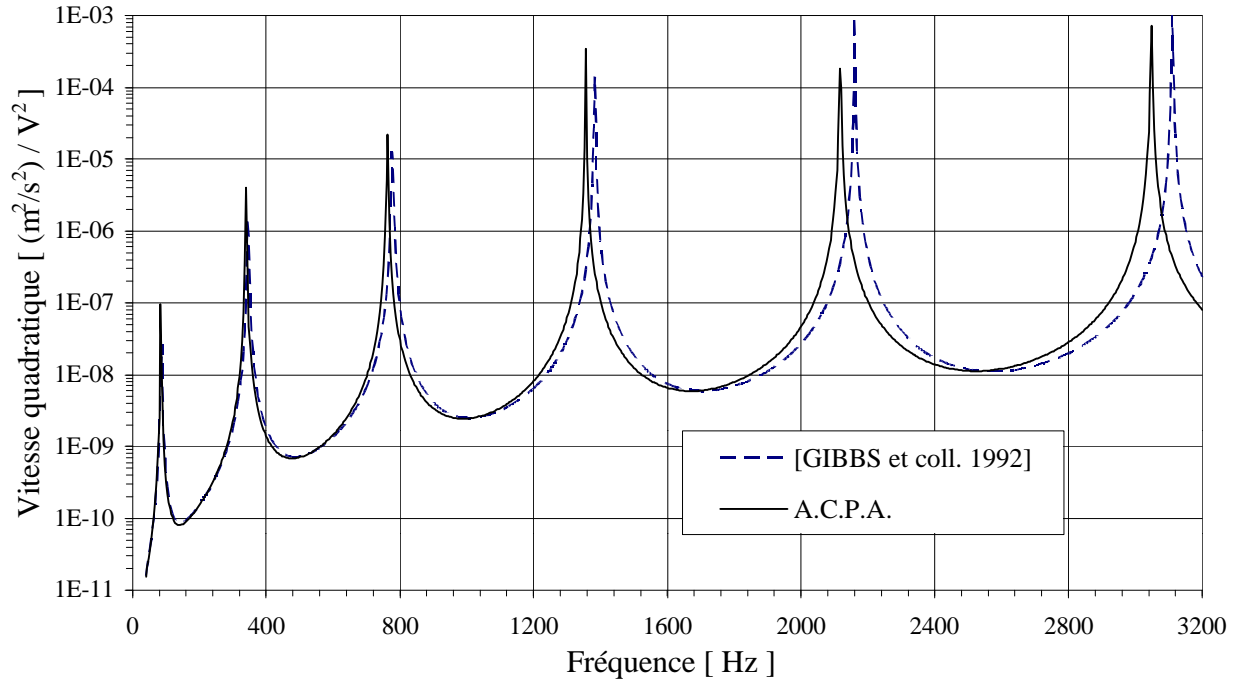


Figure 2.3: Vitesse quadratique moyenne obtenue avec A.C.P.A. et le modèle de [GIBBS *et coll.* 1992], poutre *simplement appuyée*

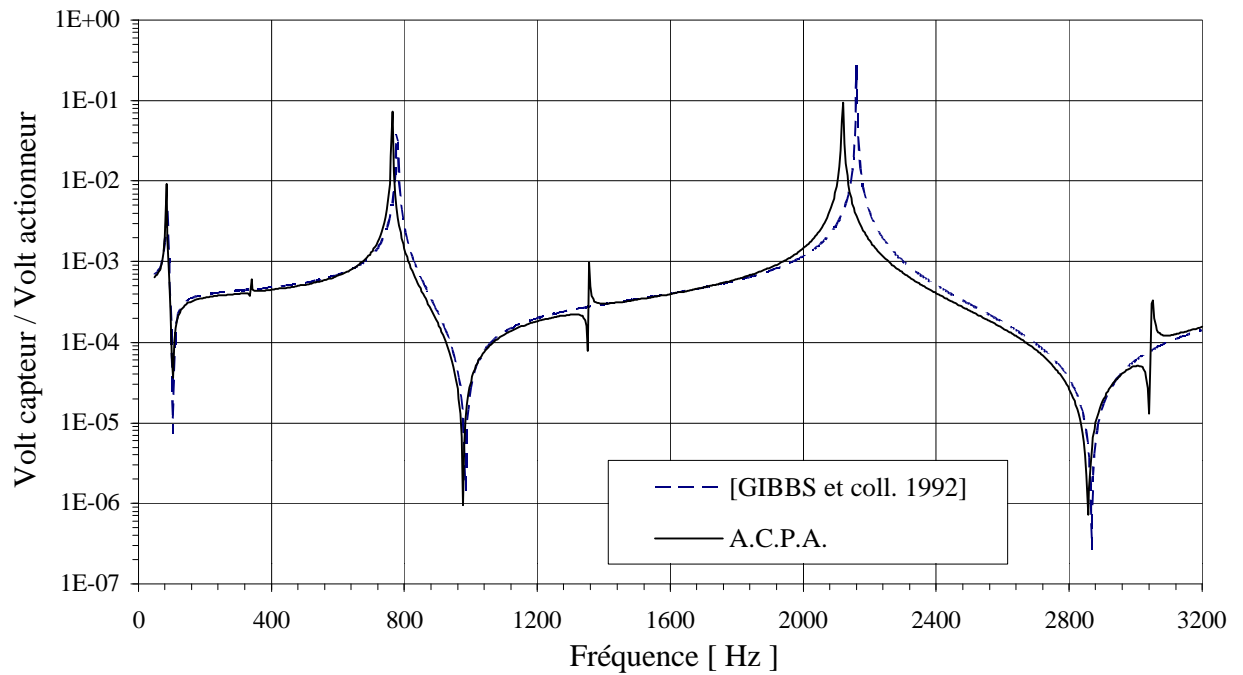


Figure 2.4: Fonctions de transferts entre le voltage du capteur et de l'actionneur, obtenues avec A.C.P.A. et le modèle de [GIBBS *et coll.* 1992], poutre *simplement appuyée*

C'est le cas de la fonction de transfert du modèle de [GIBBS *et coll.* 1992] où les résonances des modes antisymétriques n'apparaissent pas. Le fait que les modes pairs soient présents dans la fonction de transfert de A.C.P.A. indique que l'ajout de masse et de raideur de l'actionneur et du capteur sont suffisamment importants pour introduire une dissymétrie dans les déformées propres. Pour la configuration poutre-transducteurs piézoélectriques considérée ici, seul l'ajout de masse et de raideur de l'actionneur contribuent à introduire de la dissymétrie dans les formes des modes. Le capteur couvre toute la surface de la poutre, la masse et la raideur du capteur sont distribuées également sur toute la longueur de la poutre; ils n'affectent donc pas la symétrie des modes.

L'actionneur est positionné près d'une extrémité de la poutre, cette extrémité correspond à un noeud pour tous les modes. Les effets dynamiques de l'actionneur sont suffisants pour faire apparaître la résonance à 339Hz (mode 2) dans la réponse du capteur (fig. 2.4), mais pas suffisants pour permettre la visualisation d'un changement dans la forme de ce mode. Cela provient du fait que le capteur est sensible aux déformations et non aux déplacements. Cependant, les changements dus à ces effets dynamiques de l'actionneur dans la forme du mode 4 et du mode 6 sont présentés aux figures 2.5 et 2.6 respectivement. Ces figures montrent le déplacement transversal de la poutre pour le mode considéré et indiquent la position du centre de la poutre ainsi que celles des extrémités de l'actionneur. La figure 2.5 montre que le mode 4 est modifié entre les positions  $x \approx 0.6$  à  $x \approx 0.9$ . Cette modification est faible, car l'actionneur se situe entre un noeud et un ventre du mode 4. La modification est beaucoup plus importante pour le mode 6, voir figure 2.6, car pour ce mode l'actionneur est positionné sur un ventre.

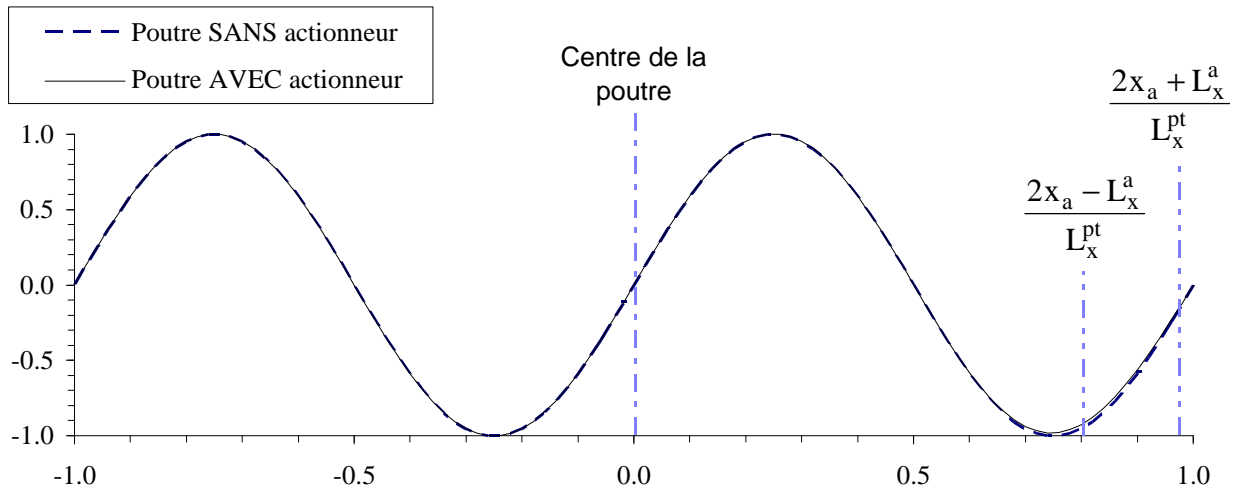


Figure 2.5: Forme du 4<sup>ième</sup> mode de la poutre simplement appuyée, AVEC et SANS actionneur.

L'importance de la modification de la forme d'un mode due à un transducteur piézoélectrique (actionneur ou capteur) est fonction de l'ajout de masse et de raideur, ainsi que de la dimension et de la position de ce transducteur piézoélectrique par rapport aux modes considérés.

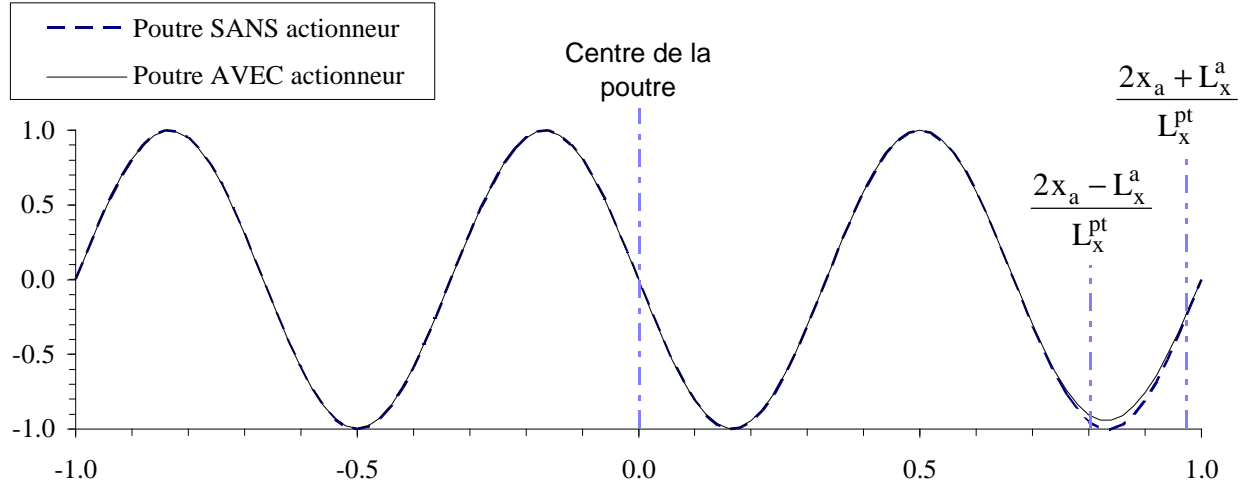


Figure 2.6: Forme du 6<sup>ième</sup> mode de la poutre simplement appuyée, *AVEC* et *SANS* actionneur.

## 2.5 Validation expérimentale du modèle A.C.P.A.

L'objectif de cette section est de valider expérimentalement le modèle A.C.P.A.. Les points importants à valider sont les effets dynamiques des transducteurs piézoélectriques sur la réponse de la poutre (capter les modes pairs dans le cas d'un capteur qui couvre toute la surface de la poutre) et l'importance relative entre les déformations axiales et les déformations transversales dues à l'excitation asymétrique.

La configuration poutre-transducteurs piézoélectriques du Tableau 2.2 est considérée pour l'implantation expérimentale. Les conditions limites *libre-libre* sont imposées à cette poutre. Le montage expérimental utilisé est présenté schématiquement à la figure 2.7. La poutre est suspendue par deux ficelles pour approcher les conditions limites libre-libre. L'analyseur dynamique utilisé est un B&K 2032. Les vitesses transversales de la poutre sont mesurées avec un

vibromètre laser POLYTEC OFV 1102. Un tel capteur vibratoire n'a aucun contact physique avec la poutre, donc il n'influence pas la réponse de la poutre. Le voltage maximum du signal pseudo-aléatoire fourni à l'actionneur est d'environ 60 Volts, tandis que le voltage retourné par le capteur est d'environ 1 Volt. L'actionneur est collé à la poutre avec de la colle Loctite SuperBonder et le capteur est collé avec du ruban conducteur double face (fait par le manufacturier 3M).

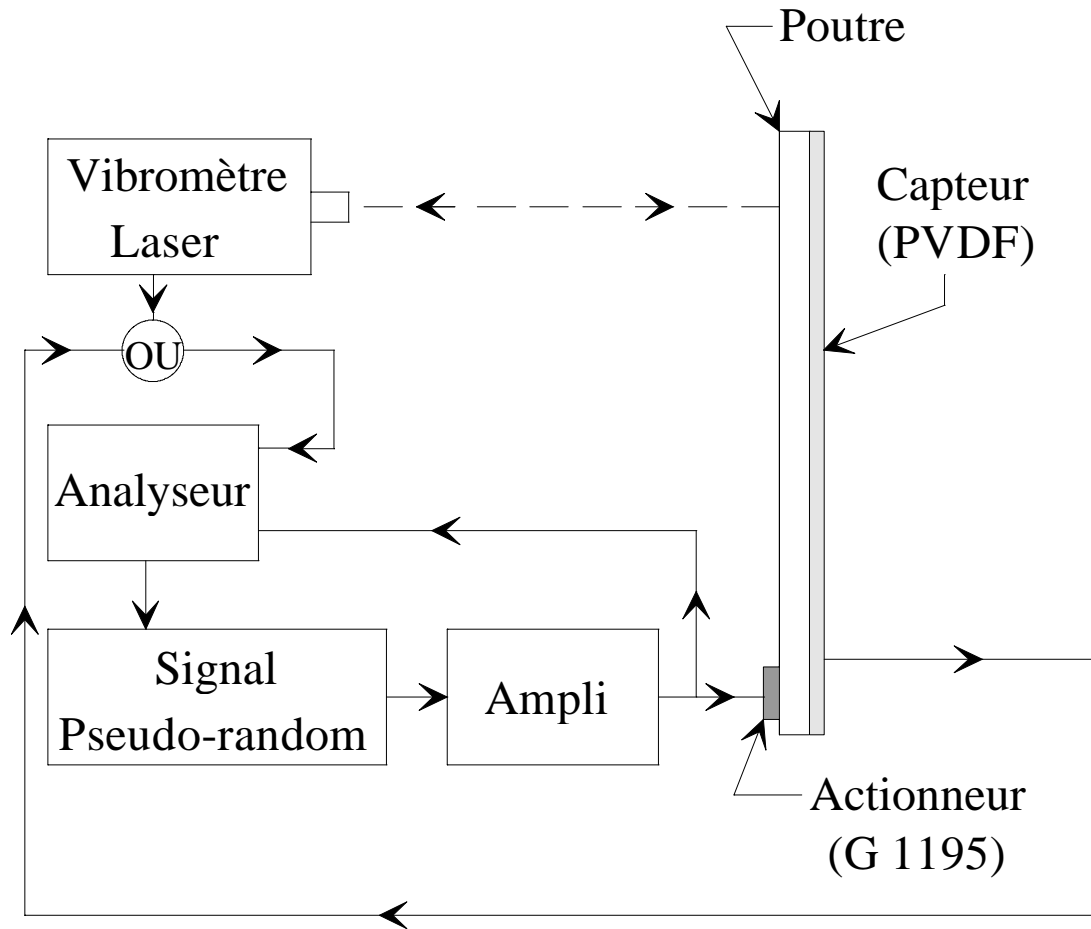


Figure 2.7: Schéma du montage expérimental.

Les valeurs présentées dans le tableau 2.2 ont toutes été mesurées expérimentalement, à l'exception des coefficients  $d_{zx}$ ,  $e_{zx}$  de l'actionneur et du capteur ainsi que leurs module de Young. Les valeurs utilisées pour ces variables sont celles fournies par le manufacturier. L'amortissement mesuré dans la poutre est  $\approx 0.5\%$ . L'amortissement dans les transducteurs piézoélectriques est ignoré car aucune caractéristique d'amortissement n'est disponible et a priori leurs amortissements semblent être très faibles. La densité du film PVDF est ajustée de façon à

tenir compte de la masse du ruban utilisée pour coller ce film PVDF à la poutre. Le film PVDF couvre toute la surface de la poutre, la masse du ruban nécessaire pour le fixer est du même ordre de grandeur que la masse totale du PVDF, il faut donc en tenir compte.

### 2.5.1 Vérifications des effets dynamiques des transducteurs piézoélectriques

Comparer la vitesse quadratique moyenne théorique obtenue avec A.C.P.A. à celle mesurée expérimentalement, permet de vérifier la modélisation des déplacements transversaux d'une poutre actionnée asymétriquement par un piézocéramique. La vitesse quadratique moyenne expérimentale s'obtient en mesurant la vitesse de 14 points équidistants le long de poutre, puis en utilisant la version discrétisée de l'équation (2.30) qui s'écrit,

$$\langle \dot{w}^2 \rangle \approx \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^N \dot{w}(x_n) \dot{w}^*(x_n). \quad (2.42)$$

Dans l'équation (2.42), N est le nombre total de point de mesure le long de la poutre,  $\dot{w}(x_i)$  est la vitesse complexe du  $i^{\text{ème}}$  point de mesure et  $\dot{w}^*(x_i)$  est le conjugué complexe de cette valeur.

La figure 2.8 montre la vitesse quadratique moyenne théorique et expérimentale en fonction de la fréquence. Ces résultats montrent une bonne concordance entre la théorie et les mesures expérimentales.

Hors résonance, il y a une légère différence entre les courbes présentées à la figure 2.8. Cette différence croît en fonction de la fréquence. Cette différence est attribuée à la couche de colle utilisée pour fixer l'actionneur. Il a été montré par [PLANTIER *et coll.*, 1994] que le module de cisaillement de la colle décroît en fonction de la fréquence. Ils ont démontré que la couche de colle a peu d'effet en basses fréquences et que le piézocéramique peut être considéré parfaitement collé. Par contre, en hautes fréquences, la couche de colle doit être considérée puisque le module de cisaillement de cette dernière est inférieur dans ces hautes fréquences et que les efforts de cisaillement sont plus importants en hautes fréquences. Ceci explique la différence entre les

courbes de la figure 2.8 car le modèle A.C.P.A. est développé avec l'hypothèse de collage parfait. Les effets de cisaillement dans la couche de colle ne sont donc pas considérés dans A.C.P.A..

Le Tableau 2.3 donne les cinq premières fréquences propres expérimentales et théoriques. Les différences relatives sont inférieures à 1% entre les fréquences propres expérimentales et théoriques. Ces différences relatives sont beaucoup plus petites que celles obtenues entre le modèle de [GIBBS *et coll.* 1992] et A.C.P.A. (Tableau 2.1). Ceci confirme que la modélisation des effets de l'ajout de masse des piézos sur la réponse de la poutre est correcte.

TABLEAU 2.3 FRÉQUENCES PROPRES EN HERTZ POUR LA POUTRE *LIBRE-LIBRE*

	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
Modèle A.C.P.A.	189.67	525.46	1033.47	1711.86	2560.11
Résultats expérimentaux	188	524	1036	1716	2568
Différence relative	0.9%	0.3%	0.2%	0.2%	0.3%

Les fonctions de transferts, théorique et expérimentale, entre le voltage du capteur et le voltage de l'actionneur ( $\Delta\phi^c/\Delta\phi^a$ ) sont présentées à la figure 2.9. Une fois de plus, il est possible d'observer que ces deux fonctions de transferts concordent bien, ce qui valide la modélisation du capteur PVDF.

Toutefois, les amplitudes diffèrent légèrement hors résonance. Une partie de cette différence est due au fait que les caractéristiques des transducteurs piézoélectriques ( $d_{zx}$ ,  $e_{zx}$  et le module de Young) n'ont pu être mesurées expérimentalement. De plus, les effets de la couche de ruban utilisé pour coller le capteur et ceux de la couche de colle utilisée pour l'actionneur ne sont pas inclus dans le modèle.

Il est important de noter dans la figure 2.9, que les résonances correspondant au mode 2 (256Hz) et au mode 4 (1716Hz) apparaissent sur les deux fonctions de transferts. Cela montre que la forme des modes est bel et bien modifiée par la présence des transducteurs piézoélectriques sur la poutre.

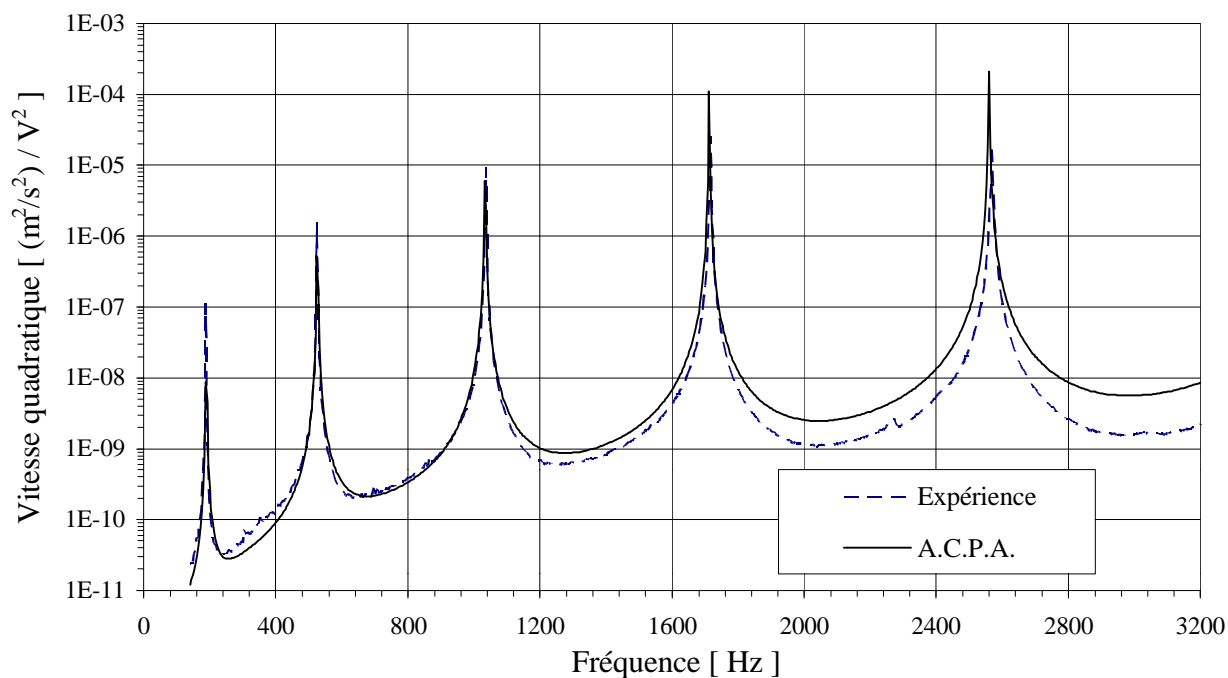


Figure 2.8: Vitesse quadratique moyenne théorique et expérimentale, poutre *libre-libre*.

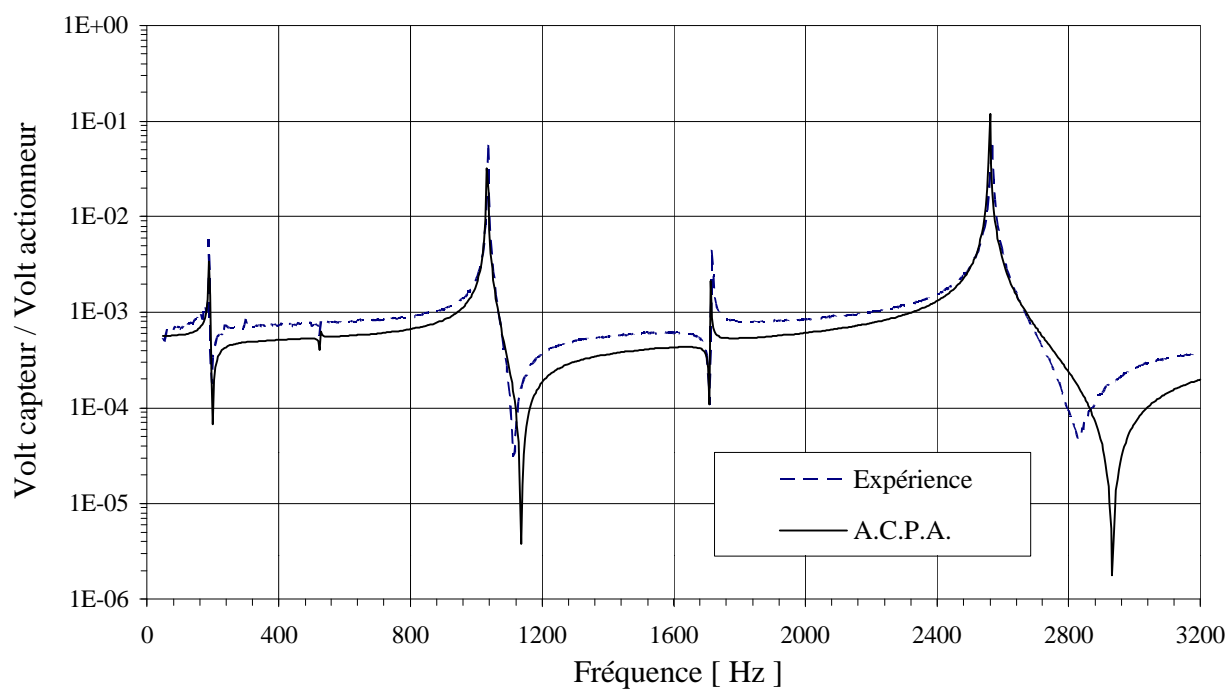


Figure 2.9: Fonctions de transferts théorique et expérimentale, entre le voltage du capteur et de l'actionneur, poutre *libre-libre*.



Les figures 2.10 et 2.11 présentent les formes du mode 2 et du mode 4 respectivement. Le mode 2 est localement plus affecté par la masse et la raideur de l'actionneur. Cela est dû au fait que l'actionneur est situé sur un ventre de ce mode. Dans le cas du mode 4, l'actionneur passe par un noeud de ce mode, la modification de la forme de ce mode est donc moins importante.

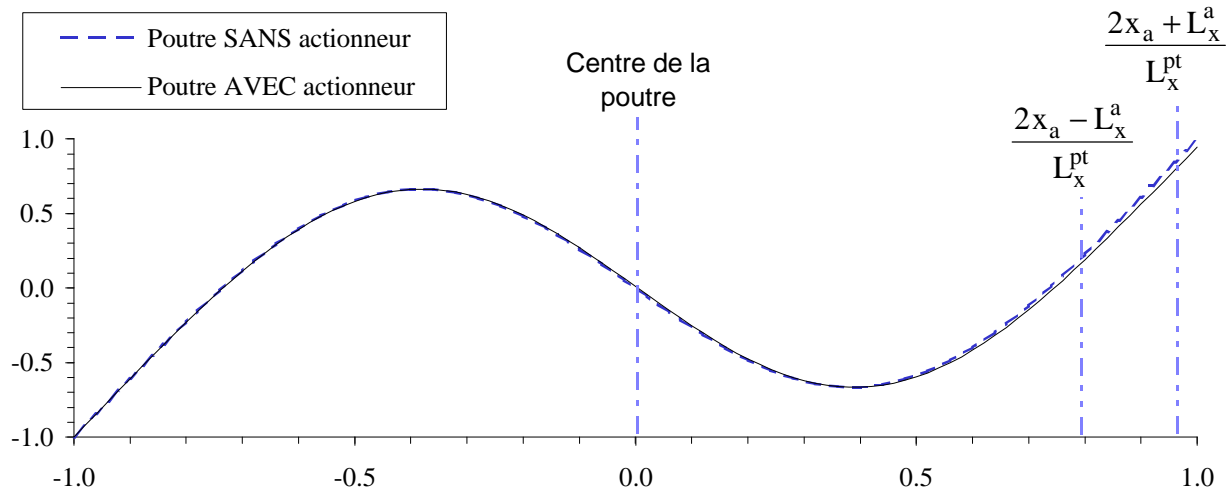


Figure 2.10: Forme du 2<sup>ème</sup> mode de la poutre libre-libre, AVEC et SANS actionneur.

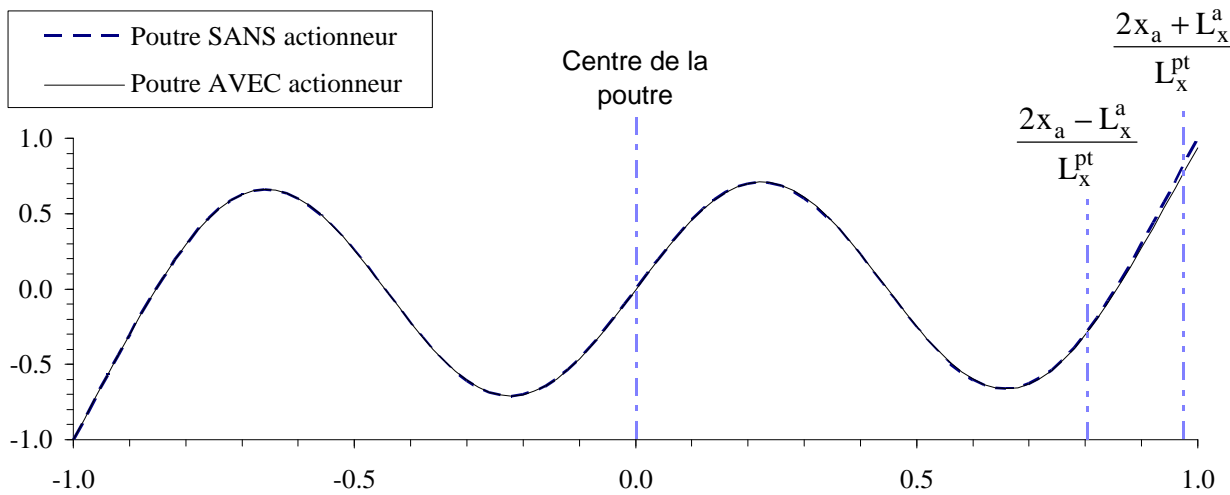


Figure 2.11: Forme du 4<sup>ème</sup> mode de la poutre libre-libre, AVEC et SANS actionneur.

### 2.5.2 Importance relative des déformations axiales et transversales

L'excitation asymétrique utilisée introduit des déplacements axiaux et transversaux simultanément. Il est intéressant d'étudier quelle est la proportion entre les déformations causées par le déplacement axial et celles dues au déplacement transversal.

La figure 2.12 montre les intégrales des déformations en surface de la poutre calculées par A.C.P.A. pour la configuration poutre-transducteurs piézoélectriques du tableau 2.2. Sur cette figure 2.12, il y a l'intégrale des déformations dues au déplacement axial, celle dues au déplacement transversal, ainsi que l'intégrale de la somme de ces déformations. Il est observé que l'intégrale des déformations due au déplacement axial peut être considérée comme une constante dans la bande de fréquences étudiée (le premier mode axial de la poutre est près de 8650Hz). Cette valeur constante de l'intégrale des déformations axiales est négligeable pour les fréquences près d'une résonance transversale et prédominante près d'une anti-résonance transversale. Ceci montre que les déformations axiales déterminent la réponse du capteur pour les fréquences près des anti-résonances transversales pour cette configuration poutre-transducteurs piézoélectriques.

À la figure 2.9, les anti-résonances de la fonction de transfert théorique se situent à des fréquences supérieures à celles obtenues expérimentalement. Puisque c'est les déformations dues au déplacement axial qui déterminent la réponse du capteur près des anti-résonances transversales, il est possible de conclure que les déformations dues au déplacement axial sont surévaluées par le modèle théorique ou qu'elles ne sont pas introduites correctement expérimentalement. Il est fort probable que ce soit les déformations expérimentales qui ne sont pas bien introduites dans la poutre, car la couche de colle entre l'actionneur et la poutre n'est sûrement pas parfaite et [PLANTIER et coll., 1994] ont montré que cette couche de colle affecte plus la composante axiale que la composante transversale.

La figure 2.13 présente les différentes intégrales des déformations de la surface de la poutre, dans le cas où l'actionneur serait positionné à 3cm du centre de la poutre ( $x_a = 0.03$  m). La composante axiale de la figure 2.13 est pratiquement constante et a approximativement la même valeur que celle de la figure 2.12. Ceci est dû au fait que la première résonance axiale est près de 7000Hz.

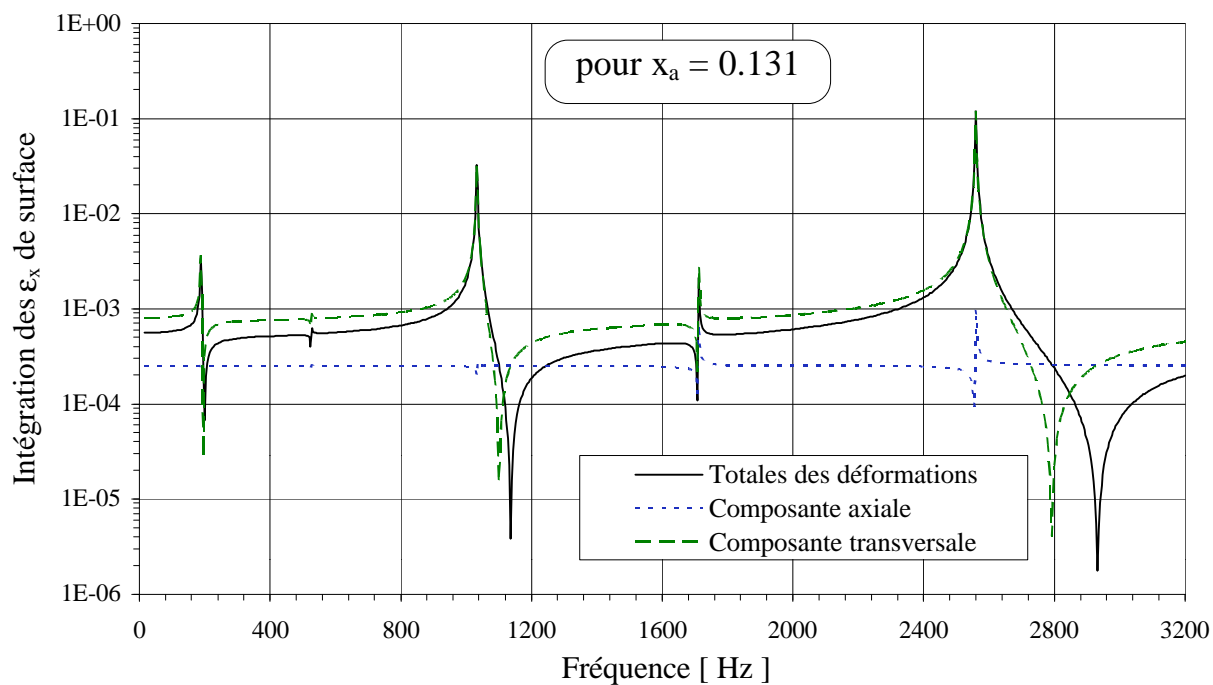


Figure 2.12: Intégrales des déformations de la surface de la poutre dues au déplacement axial et/ou transversal, poutre *libre-libre* avec actionneur positionné à  $x_a = 0.131$  m.

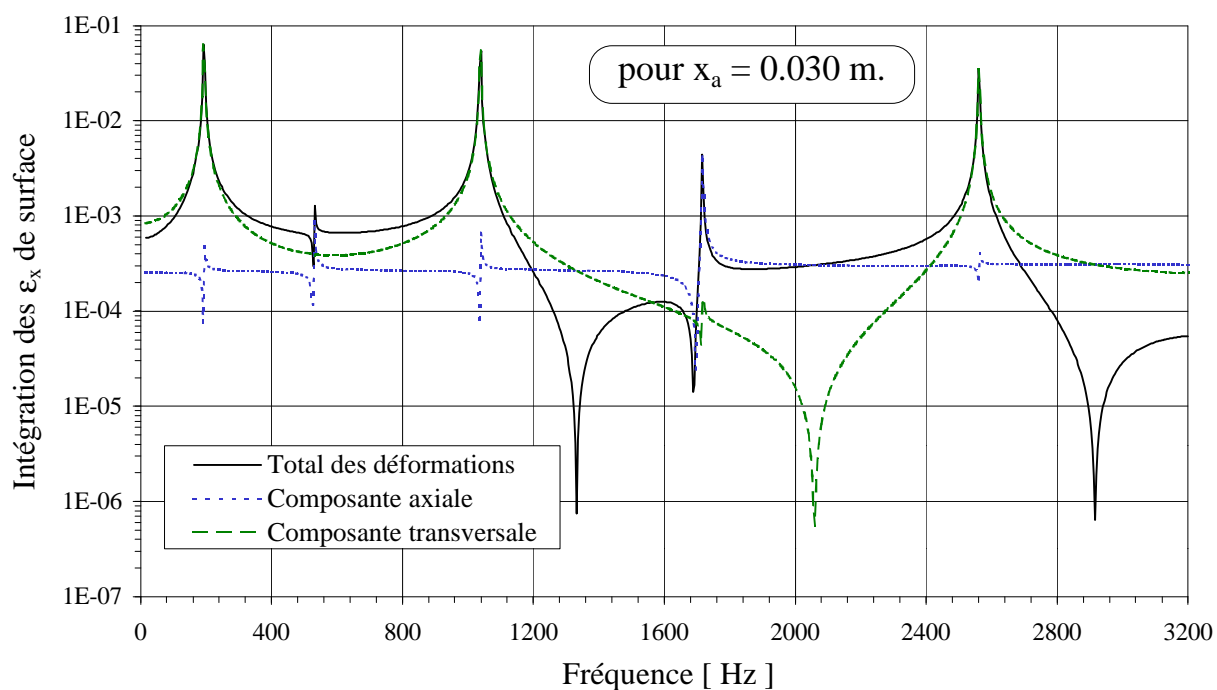


Figure 2.13: Intégrale des déformations de la surface de la poutre dues au déplacement axial et/ou transversal, poutre *libre-libre* avec actionneur positionné à  $x_a = 0.03$  m.

En conclusion, la composante axiale est indépendante de la position de l'actionneur dans la bande de fréquences considérée. Cependant, la composante transversale est fonction de la position de l'actionneur. Hors-résonance, la figure 2.13 montre que la composante transversale est généralement du même ordre de grandeur que la composante axiale, alors que pour la figure 2.12 ceci est vrai près des anti-résonances seulement. Cela est dû au fait que l'actionneur positionné à 3cm du centre de la poutre n'introduit pas autant de déplacement transversal que dans le cas où il est positionné à 13.1cm du centre de la poutre.

Les observations mentionnées au paragraphe précédent sont valides pour la plupart des poutres. Cependant, selon les conditions limites considérées, la position et la dimension de l'actionneur asymétrique seront différentes.

## **2.6 Conclusions**

Un modèle dynamique, appelé A.C.P.A., a été développé pour étudier l'excitation asymétrique et symétrique d'une poutre. Cette excitation est introduite dans la poutre à l'aide d'éléments piézoélectriques céramiques. Ce modèle permet également de déterminer le signal d'un capteur PVDF. L'approche variationnelle est utilisée pour le développement de ce modèle. Cette approche est basée sur les quantités énergétiques du système (énergies potentielle et cinétique). Elle permet de considérer n'importe quelles conditions limites pour la poutre, tout en tenant compte des effets dynamiques des transducteurs piézoélectriques sur la réponse de la poutre. Les réponses, axiale et transversale, de la poutre sont approchées à l'aide de la méthode de Rayleigh-Ritz.

La comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux montre que les effets dynamiques des transducteurs piézoélectriques sur la réponse de la poutre correspondent principalement à un ajout de masse. Cet ajout de masse réduit légèrement les fréquences propres de la poutre. Les résultats montrent également que les déformées propres des modes sont suffisamment modifiées

par l'ajout de masse et de raideur des transducteurs piézoélectriques pour permettre la détection des modes pairs (antisymétriques) par le capteur PVDF.

Généralement, lorsqu'un article de la littérature scientifique présente des résultats expérimentaux de capteur PVDF étendu et que ce dernier détecte les modes antisymétriques alors qu'il ne devrait pas, l'explication donnée pour l'apparition de ces modes antisymétriques dans la réponse du capteur est qu'il y a des erreurs expérimentales. Les erreurs possibles mentionnées sont que le PVDF est mal positionné, découpé, collé etc. Il est certain qu'il y a toujours des erreurs ou incertitudes expérimentales. Cependant, le modèle dynamique présenté ici montre clairement que l'apparition des modes antisymétriques dans la réponse du capteur est principalement due à la perte de symétrie de ces modes qui est causée par la présence des différents éléments piézoélectriques collés à la poutre. Pour certaines applications, la connaissance des fréquences propres et des déformées propres des modes est très importante (exemple: capteur PVDF modaux, capteur de déplacement volumique). Donc, pour ces applications, il est préférable de tenir compte de l'ajout de masse et de raideur des transducteurs étendus posés sur la poutre.

Les résultats expérimentaux ont également montré que pour les hautes fréquences les déplacements axiaux et transversaux sont surévalués par le modèle. Cela est attribuable aux effets de la couche de colle qui ne sont pas considérés dans le développement théorique du modèle.

Un capteur PVDF agit comme un intégrateur spatial des déformations. Une étude qui compare l'intégrale sur toute la longueur de la poutre des déformations dues au déplacement axial à celle dues au déplacement transversal a été faite. Cette étude montre que l'intégrale des déformations axiales est inférieure à celle des déformations transversales, pour la configuration poutre-transducteurs piézoélectriques utilisée expérimentalement. Cependant, l'intégrale des déformations axiales est indépendante de la position de l'actionneur dans la bande de fréquence considérée (car la première résonance axiale est près de 7000Hz), tandis que celle des déformations transversales est dépendante de la position de l'actionneur. Cela implique, que pour certaines positions de l'actionneur, l'intégrale des déformations due au déplacement axial est du même ordre de grandeur que celle dû au déplacement transversal pour les fréquences hors-résonance.

Le modèle théorique développé dans ce chapitre est valide pour des structures unidimensionnelles (poutres). Il permet de mieux comprendre l'excitation et la détection possible avec des actionneurs et capteurs piézoélectriques, ainsi que leurs effets dynamiques sur les structures. Ce modèle est utilisé dans le chapitre 3 pour concevoir des films PVDF ayant une forme prescrite par une fonction coût. La fonction coût utilisée au chapitre 3 est le déplacement volumique de la structure.

# Chapitre 3

## CAPTEUR PVDF DE DÉPLACEMENT VOLUMIQUE D'UNE POUTRE

### 3.1 Introduction

Le chapitre 2 a introduit le fait que le signal d'un capteur piézoélectrique est proportionnel à l'intégration des déformations que sa surface couvre. Un aspect très important qui n'a pas été discuté dans le chapitre 2 est la possibilité de filtrer spatialement les déformations lorsqu'une forme est donnée au capteur. Un capteur piézoélectrique étendu peut donc filtrer spatialement et intégrer les déformations à la surface d'une structure. Cette double fonctionnalité que peut remplir un capteur piézoélectrique explique l'intérêt que la communauté scientifique lui a démontré dans les dernières années.

Le but du présent chapitre est d'exploiter la possibilité de faire du filtrage spatial avec un capteur étendu constitué d'un film PVDF. Le film PVDF est un matériau piézoélectrique très souple et très flexible qui est disponible en rouleau. Il est donc possible de couper n'importe quelle forme de ce film PVDF avec une simple paire de ciseaux. La forme qu'il faut donner à ce film PVDF pour que le signal soit proportionnel à la fonction coût désirée doit être déterminée de façon rigoureuse. Ce chapitre présente l'approche théorique utilisée pour former un film PVDF de façon à ce que son signal soit proportionnel au déplacement volumique d'une poutre. La raison pour laquelle c'est le déplacement volumique de la poutre qui est utilisé comme fonction coût est étudiée et expliquée en détail au chapitre 4. L'approche présentée dans ce chapitre 3 est générale et permet éventuellement de considérer d'autres fonctions coût qui donneront d'autres formes (filtres) .

## 3.2 Développement théorique

### 3.2.1 Déplacement écrit sous forme modale

Le déplacement transversal d'une poutre peut être estimé par une somme finie de contributions modales. Pour un nombre total de  $N$  modes, le déplacement transversal s'écrit,

$$w(x) = \sum_{n=1}^N \hat{W}_n \hat{\Psi}_n(x) \quad (3.1)$$

où  $\hat{W}_n$  est l'amplitude modale du  $n^{\text{ième}}$  mode et  $\hat{\Psi}_n$  est la fonction propre de ce mode.

En général, les fonctions propres d'une poutre vérifient les relations d'orthogonalité suivantes,

$$\int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} \hat{\Psi}_m(x) \hat{\Psi}_n(x) dx = \Lambda_{mn} \int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} \left( \hat{\Psi}_m(x) \right)^2 dx \quad (3.2a)$$

$$\int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} \frac{d^2 \hat{\Psi}_m(x)}{dx^2} \frac{d^2 \hat{\Psi}_n(x)}{dx^2} dx = \Lambda_{mn} \int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} \left( \frac{d^2 \hat{\Psi}_m(x)}{dx^2} \right)^2 dx \quad (3.2b)$$

$$\int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} \frac{d^4 \hat{\Psi}_m(x)}{dx^4} \hat{\Psi}_n(x) dx = \Lambda_{mn} \int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} \frac{d^4 \hat{\Psi}_m(x)}{dx^4} \hat{\Psi}_m(x) dx \quad (3.2c)$$

où  $\Lambda_{mn}$  est la fonction de Kronecker définie comme étant,

$$\Lambda_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{pour } m \neq n \\ 1 & \text{pour } m = n \end{cases} \quad (3.3)$$

À partir des matrices générales de masse et de raideur du modèle A.C.P.A., il est possible de déterminer les valeurs et vecteurs propres de la poutre. Les vecteurs propres ainsi calculés contiennent les coefficients des fonctions propres correspondantes. L'algorithme utilisé pour calculer les valeurs et vecteurs propres emploie la décomposition de Cholesky, voir le livre de [PRESS *et coll.* 1992].



Le déplacement transversal est écrit sous forme polynomiale dans le modèle A.C.P.A.. Il est donc préférable d'écrire les fonctions propres sous forme polynomiale. Ces fonctions propres prennent la forme suivante,

$$\Psi_n(x) = \sum_{q=0}^{Q-1} B_{q,n} \left( \frac{2x}{L_x^{pt}} \right)^q \quad (3.4)$$

où  $B_{q,n}$  est le  $q^{ième}$  coefficient de la  $n^{ième}$  fonction propre. Chaque fonction propre est ensuite normalisée par rapport à sa norme en utilisant,

$$\hat{B}_{q,n} = \frac{B_{q,n}}{\sqrt{\int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} \Psi_n(x) \Psi_n(x) dx}}. \quad (3.5)$$

La  $n^{ième}$  fonction propre normalisée est donnée par

$$\hat{\Psi}_n(x) = \sum_{q=0}^{Q-1} \hat{B}_{q,n} \left( \frac{2x}{L_x^{pt}} \right)^q. \quad (3.6)$$

Une fois les fonctions propres normalisées connues, les amplitudes modales sont déterminées en posant que le déplacement transversal écrit sous forme modale est égal au déplacement transversal écrit sous forme polynomiale,

$$\sum_{n=1}^N W_n \sum_{q=0}^{Q-1} \hat{B}_{q,n} \left( \frac{2x}{L_x^{pt}} \right)^q = \sum_{q=0}^{Q-1} C_q^{tr} \left( \frac{2x}{L_x^{pt}} \right)^q. \quad (3.7)$$

Cette dernière équation peut également s'écrire sous forme matricielle,

$$[\hat{\mathbf{B}}_{q,n}] \{ \hat{\mathbf{W}}_n \} = \{ \mathbf{C}_q^{tr} \}. \quad (3.8)$$

Il faut noter que le nombre total de modes  $N$  doit être égal au degré maximum  $Q$  du polynôme pour que le système matriciel ait autant d'équations que d'inconnues. La matrice du côté gauche contient les vecteurs propres en colonnes et le vecteur du côté droite contient les coefficients du polynôme de déplacement transversal. Les amplitudes modales sont déterminées en solutionnant ce système d'équations linéaires.

### 3.2.2 Déplacement et débit volumique d'une poutre

Le déplacement volumique est défini comme étant l'intégrale sur toute la longueur de la poutre du déplacement transversal, d'où

$$D = L_y^{pt} \int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} w(x) dx = L_y^{pt} \sum_{n=1}^N \hat{W}_n \int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} \hat{\Psi}_n(x) dx \quad (3.9)$$

Lorsqu'une excitation de type harmonique est supposée, le débit volumique de la poutre est obtenu en multipliant l'équation (3.9) par  $j\omega$ . Ce qui implique, pour une fréquence donnée, qu'il est équivalent de minimiser le débit volumique ou le déplacement volumique.

### 3.2.3 Réponse d'un capteur de forme quelconque

Le voltage d'un capteur PVDF ayant une forme quelconque, pour une structure à une dimension en flexion pure, a été présenté par [LEE *et coll.* 1990]. Ce voltage est proportionnel à l'intégrale des déformations que la surface du PVDF couvre. Ce qui donne,

$$\Delta\phi^c = e_{zx} \frac{L_z^{pt} + L_z^c}{2c_c} \int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} \int_{-F(x)}^{F(x)} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} dy dx \quad (3.10)$$

où  $F(x)$  est la fonction qui donne la forme du PVDF (i.e. demi largeur du film PVDF à la position  $x$ ) telle que schématisée à la figure 3.1.

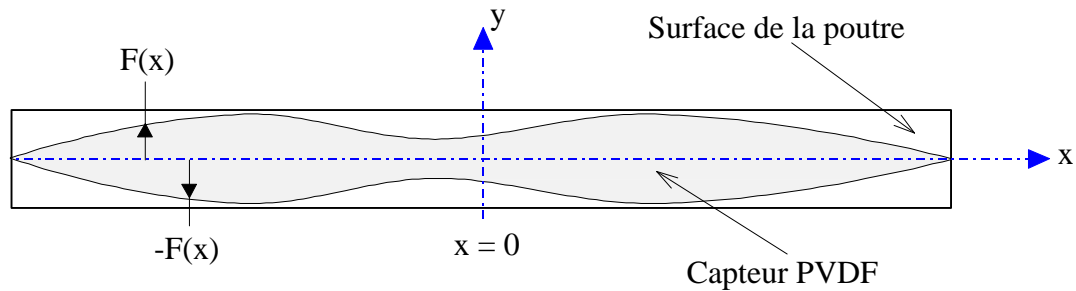


Figure 3.1: Schéma de la forme considérée pour le capteur PVDF

En remplaçant l'équation (3.1) dans l'équation (3.10), puis en effectuant l'intégration par rapport à  $y$ , le voltage du PVDF devient,

$$\Delta\phi^c = -\frac{e_{zx}}{c_c} \left( L_z^{pt} + L_z^c \right) \sum_{n=1}^N \hat{W}_n \int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} F(x) \frac{d^2 \hat{\Psi}_n(x)}{dx^2} dx \quad (3.11)$$

Afin de pouvoir utiliser les relations d'orthogonalités qui existent entre les fonctions propres d'une poutre, équation (3.2), la fonction qui donne la forme du PVDF est posée comme étant une combinaison linéaire de deuxième dérivée des fonctions propres de la poutre. D'où

$$F(x) = \sum_{m=1}^N \alpha_m \frac{d^2 \hat{\Psi}_m(x)}{dx^2} \quad (3.12)$$

Dans cette équation de la forme du PVDF, les  $\alpha_m$  sont les coefficients inconnus à déterminer.

Lorsque l'équation (3.12) est insérée dans l'équation (3.11), cette dernière devient,

$$\Delta\phi^c = -\frac{e_{zx}}{c_c} \left( L_z^{pt} + L_z^c \right) \sum_{m=1}^N \alpha_m \sum_{n=1}^N \hat{W}_n \int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} \frac{d^2 \hat{\Psi}_m(x)}{dx^2} \frac{d^2 \hat{\Psi}_n(x)}{dx^2} dx \quad (3.13)$$

Avec la relation d'orthogonalité (3.2b), l'équation (3.13) se simplifie à,

$$\Delta\phi^c = -\frac{e_{zx}}{c_c} \left( L_z^{pt} + L_z^c \right) \sum_{n=1}^N \alpha_n \hat{W}_n \int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} \left( \frac{d^2 \hat{\Psi}_n(x)}{dx^2} \right)^2 dx \quad (3.14)$$

### 3.2.4 Forme d'un capteur PVDF prescrite par la fonction coût (déplacement volumique)

La forme qu'un capteur PVDF doit avoir pour que son signal soit proportionnel au déplacement volumique (présentée originalement par [GUIGOU *et coll.* 1994]) est obtenue en posant que le voltage du capteur PVDF (éq 3.14) est proportionnel au déplacement volumique (éq 3.9),  $\Delta\phi^c \equiv D$ ,

$$-\frac{e_{zx}}{c_c} \left( L_z^{pt} + L_z^c \right) \sum_{n=1}^N \alpha_n \hat{W}_n \int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} \left( \frac{d^2 \hat{\Psi}_n(x)}{dx^2} \right)^2 dx \equiv L_y^{pt} \sum_{n=1}^N \hat{W}_n \int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} \hat{\Psi}_n(x) dx \quad (3.15)$$

En identifiant terme à terme l'équation (3.15), le capteur obtenu est indépendant des amplitudes modales (fréquence, caractéristiques de l'excitation) et le  $n^{\text{ème}}$  coefficient de la forme capte le déplacement volumique du  $n^{\text{ème}}$  mode. L'expression pour les coefficients  $\alpha_n$  obtenue suite à l'identification terme à terme est,

$$\alpha_n = \frac{-c_c L_y^{pt} \int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} \hat{\Psi}_n(x) dx}{e_{zx} (L_z^{pt} + L_z^c) \int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} \frac{d^2 \hat{\Psi}_n(x)}{dx^2} dx} \quad (3.16)$$

La forme du capteur PVDF dépend des fonctions propres de la poutre. Ces fonctions propres dépendent des conditions limites et des différents ajouts de masses et de raideurs qu'ils est possible de retrouver sur la poutre (ex. ajout de masse et de raideur des éléments piézoélectriques). Ces fonctions propres peuvent provenir d'un modèle théorique ou selon les besoins elles peuvent être mesurées expérimentalement (voir chapitre 6 pour les plaques). La figure 3.2 présente les diverses formes qu'un capteur de déplacement volumique peut avoir en fonction des conditions limites. Les différentes combinaisons de conditions limites considérées sont celles qui se retrouvent classiquement dans la littérature. Les formes présentées sont valides pour des poutres isotropes, qui ont une section rectangulaire sur lesquelles il n'y a aucun ajout de masse ou de raideur. Un croisement dans une forme de capteur indique un changement de polarité du film piézoélectrique.

L'équation (3.16) montre que si l'intégrale sur toute la longueur de la poutre d'une fonction propre est nulle (mode parfaitement anti-symétrique), alors la forme du capteur de déplacement volumique est indépendante de ce mode, car le coefficient  $\alpha_n$  correspondant est nul. Seulement les modes (fonctions propres) qui ont un déplacement volumique non nul vont déterminer la forme du capteur de déplacement volumique. Il faut souligner, qu'une fois les coefficients de forme  $\alpha_n$  données par l'équation (3.16) sont connus, la forme du capteur est normalisée par rapport à la demi-largeur de la poutre en utilisant,

$$\hat{\alpha}_n = \left( \frac{\alpha_n}{|F(x)|_{MAX}} \right) \frac{L_y^{pt}}{2} \quad (3.17)$$

où  $|F(x)|_{MAX}$  est la valeur absolue maximum de la forme non normalisée.

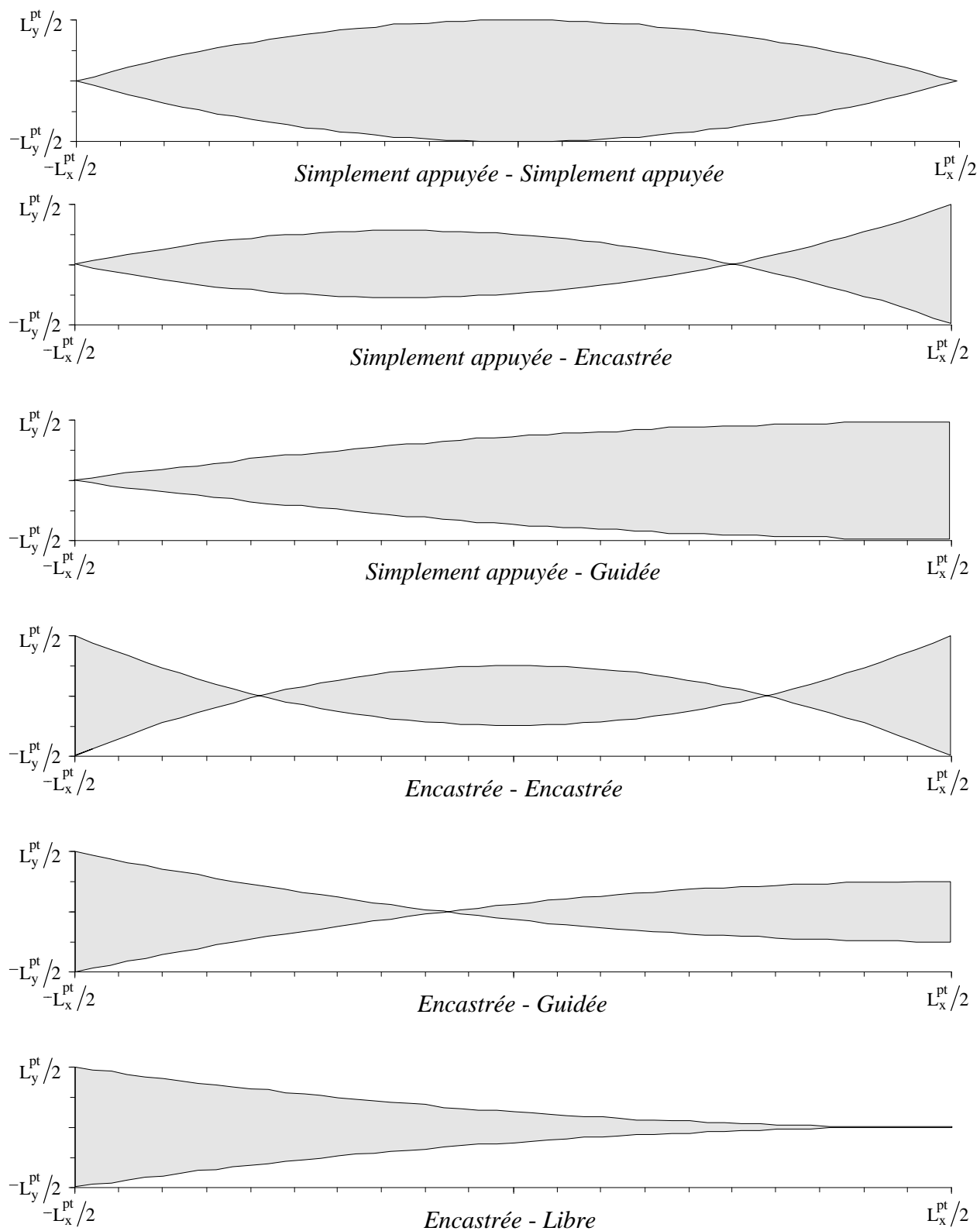


Figure 3.2: Formes de capteur de déplacement volumique pour des poutres homogènes ayant diverses conditions limites.

La forme normalisée du capteur est donnée par,

$$\hat{F}(x) = \sum_{n=1}^N \hat{\alpha}_n \frac{d^2 \hat{\Psi}_n}{dx^2} \quad (3.18)$$

$$\text{où } -\frac{L_y^{pt}}{2} \leq \hat{F}(x) \leq \frac{L_y^{pt}}{2}.$$

Ceci est fait dans le but d'avoir la plus grande surface possible de capteur sans dépasser les limites physiques de la poutre.

### 3.2.5 Capteur PVDF étendu: filtreur et intégrateur des déformations

Par définition l'opération de filtrage spatial comprend elle-même une intégration. Cependant, ces deux opérations sont traitées séparément pour les travaux présentés ici. Ceci est fait dans le but de faciliter l'explication du fonctionnement d'un capteur PVDF.

Un film PVDF est un capteur étendu de déformation. En lui donnant une forme prescrite, ce capteur devient un filtre spatial de déformation. La forme du capteur indique le filtre de déformation imposé et le capteur lui-même intègre ces déformations filtrées. Un capteur PVDF étendu effectue donc deux opérations physiquement, le filtrage et l'intégration des déformations.

Des exemples d'opérations de filtrage faites par un capteur de déplacement volumique sont présentés aux figures 3.3 à 3.6 pour les modes 1, 3, 5 et 7 respectivement. Ces figures montrent le filtrage de ces modes fait par un capteur de déplacement volumique pour une poutre homogène de dimensions  $3.26\text{mm} \times 12.67\text{mm} \times 295\text{mm}$  qui est simplement appuyées aux deux extrémités. Seulement les quatre premiers modes impairs sont présentés, car ils sont les plus importants. Chacune de ces figures présente la déformation du mode  $d^2\hat{\Psi}/dx^2$ , le filtre spatial  $\hat{F}(x)$  imposé et le résultat de la multiplication de ces deux quantités.

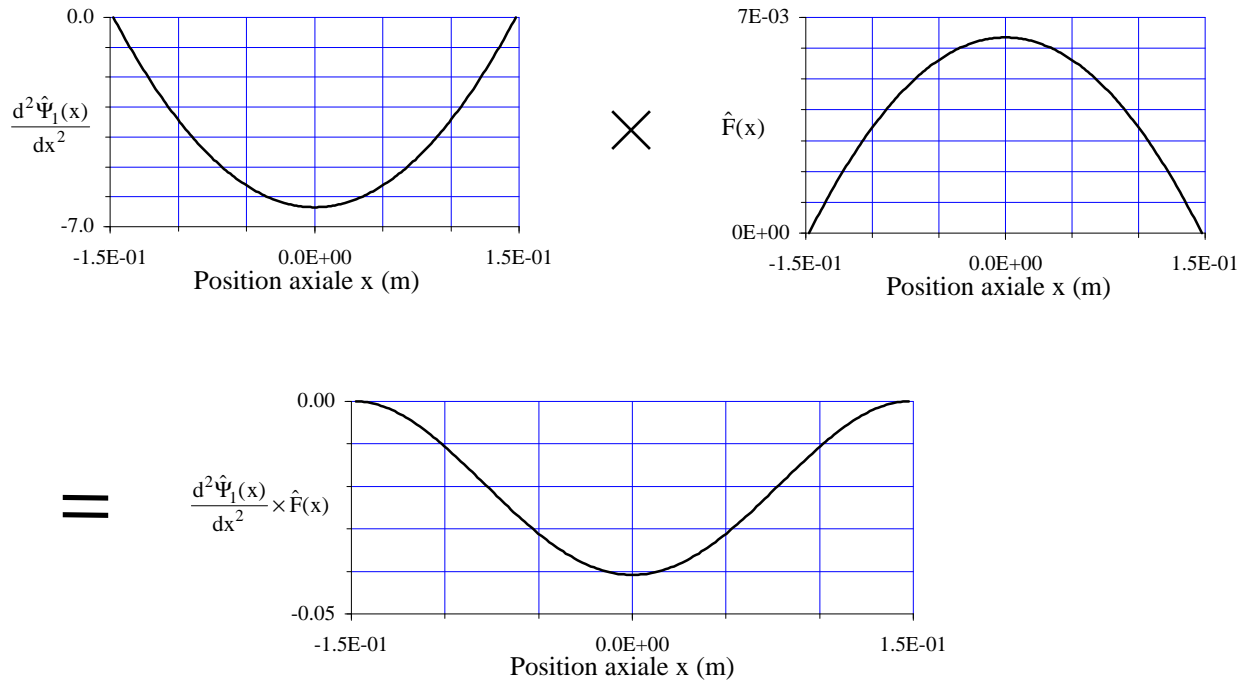


Figure 3.3: Déformations, filtre et déformations filtrées de la *première* fonction propre.

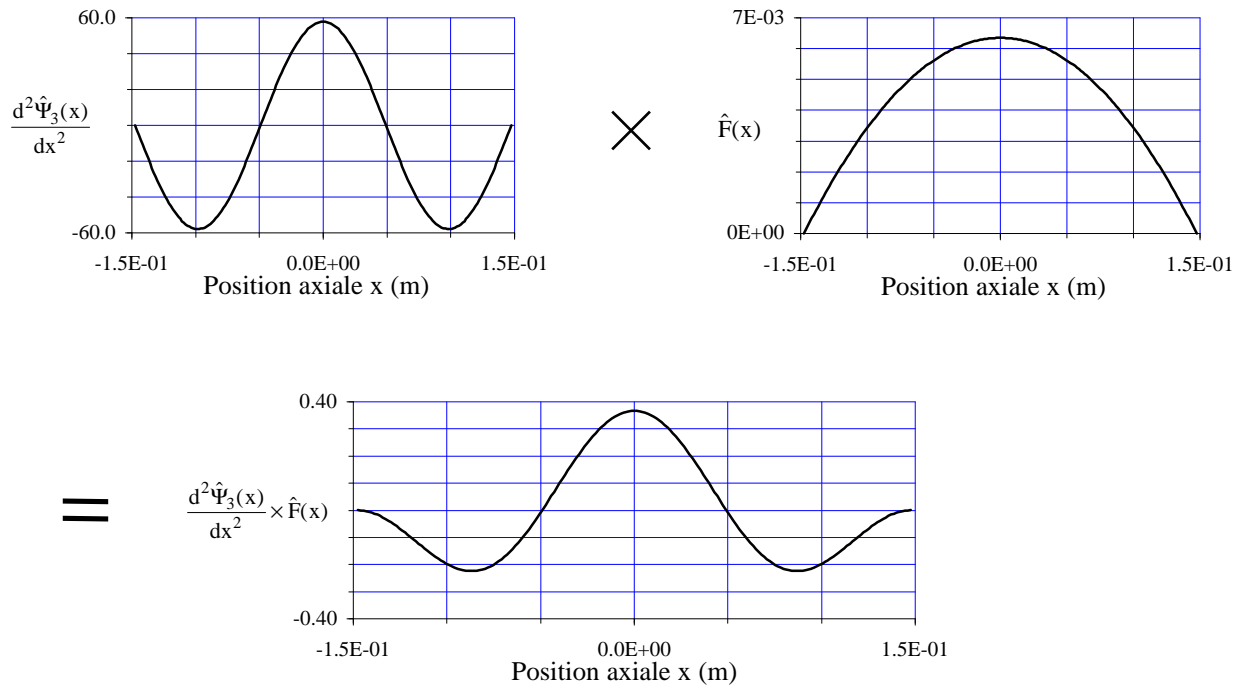


Figure 3.4: Déformations, filtre et déformations filtrées de la *troisième* fonction propre.

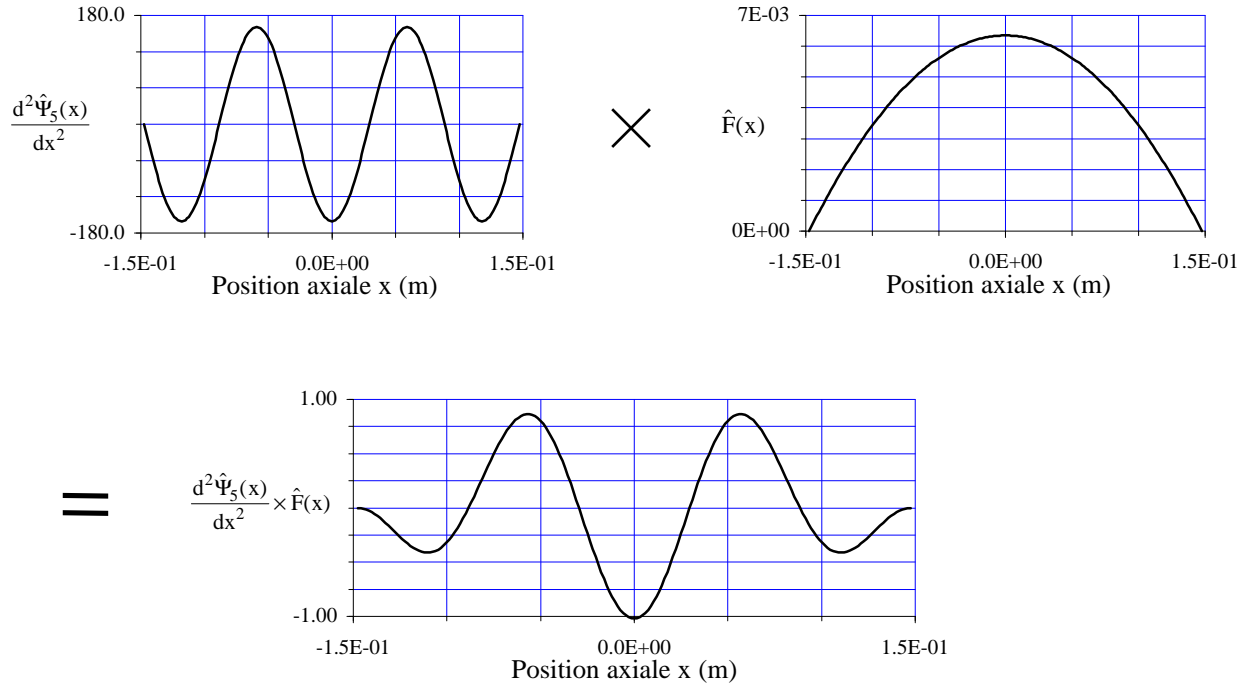


Figure 3.5: Déformations, filtre et déformations filtrées de la cinquième fonction propre.

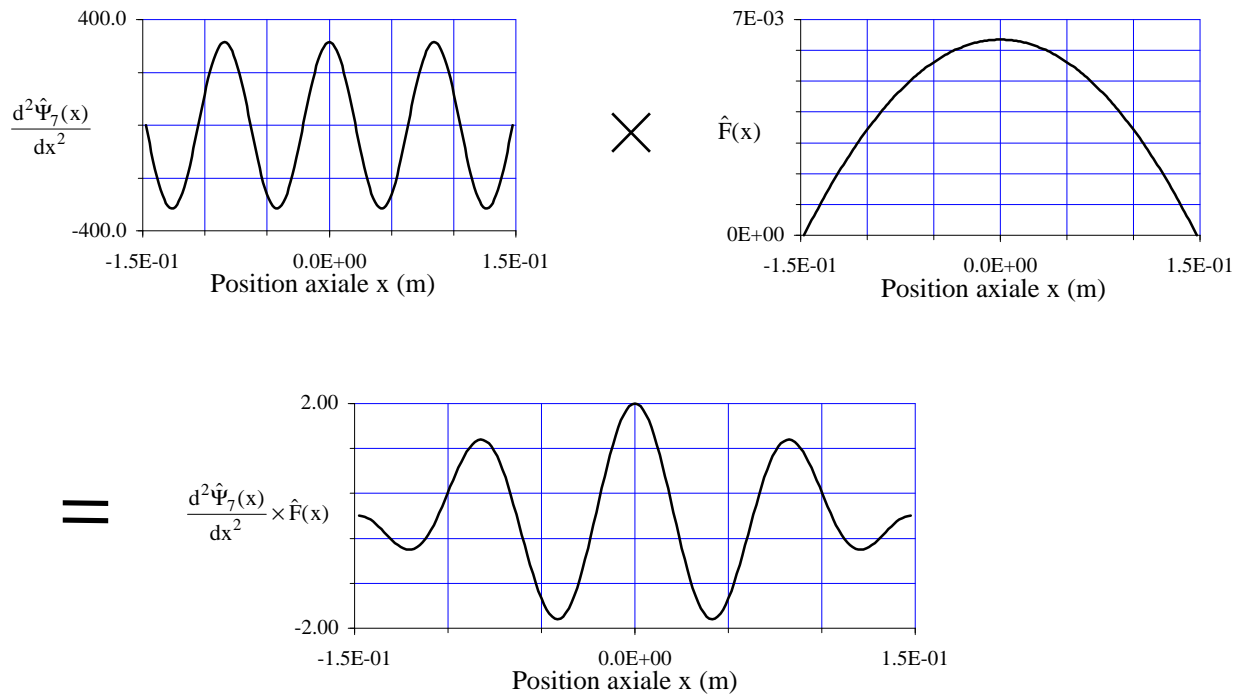


Figure 3.6: Déformations, filtre et déformations filtrées de la septième fonction propre.



Les figures 3.3 à 3.6 présentent le filtrage des déformations fait par la forme du capteur PVDF. Le signal du capteur PVDF est proportionnel à l'intégrale des déformations qu'il filtre. La colonne de droite du tableau 3.1 présente les valeurs d'intégrations filtrées pour les modes impairs considérés. Pour fin de comparaison, la colonne du milieu de ce tableau donne les valeurs d'intégration des deuxièmes dérivées des fonctions propres.

TABLEAU 3.1 DIFFERENTES VALEURS D'INTEGRATIONS DES FONCTIONS PROPRES

	$\int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} \frac{d^2 \hat{\Psi}_n(x)}{dx^2} dx$	$\int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} \frac{d^2 \hat{\Psi}_n(x)}{dx^2} \hat{F}(x) dx$
Mode 1	-8.18	$-4.21 \times 10^{-2}$
Mode 3	-24.54	$-1.40 \times 10^{-2}$
Mode 5	-40.87	$-8.43 \times 10^{-3}$
Mode 7	-57.19	$-6.01 \times 10^{-3}$

Dans le tableau 3.1, il ne faut pas comparer les valeurs des intégrales de déformations à celles des intégrales des déformations filtrées, mais plutôt le rapport entre la valeur d'un mode par rapport à un autre. Ce tableau montre que la valeur de l'intégrale des déformations pour le mode n, correspond à n fois celle du mode 1. Tandis que la valeur de l'intégrale des déformations filtrées pour le mode n, correspond à celle du mode 1 divisé par n. Le filtrage introduit donc une pondération  $1/n^2$  par rapport à la valeur de l'intégrale sans filtrage. Cette pondération de  $1/n^2$  est celle désirée puisque le but du filtre est de reconstruire le déplacement  $w(x)$  à partir des déformations  $d^2w(x)/dx^2$ .

### 3.3 Effets dynamiques des actionneurs sur le capteur

Le modèle A.C.P.A., présenté au chapitre 2, montre que les formes des modes (fonctions propres) de la poutre sont affectées par l'ajout de masse et de raideur des actionneurs piézocéramiques collés à la poutre. Puisque les coefficients de la forme du capteur PVDF (équation (3.16)) dépendent principalement des fonctions propres de la poutre, cette forme va être affectée par l'ajout de masse et de raideur des actionneurs. Le but de cette section est d'évaluer de combien la

forme du capteur est affectée et également d'étudier l'influence de ces variations de forme sur le signal du capteur. Ces études ne pouvaient être faites par [GUIGOU *et coll.* 1994] car il s'agissait d'un modèle statique.

De plus, le capteur est développé en considérant uniquement la flexion de la poutre. Il est important de vérifier de combien le signal du capteur est affecté par les déformations dues au déplacement axial lorsqu'une excitation asymétrique est utilisée.

### 3.3.1 Modifications de la forme du capteur PVDF dues aux actionneurs piézocéramiques

La poutre utilisée pour vérifier les modifications de la forme du capteur, dues à la présence des actionneurs, a les conditions limites simplement appuyées aux deux extrémités. La configuration poutre-transducteurs piézoélectriques est présentée au Tableau 3.2 et à la figure 3.7.

Il y a deux actionneurs piézocéramiques collés sur la poutre car cette poutre pourrait éventuellement être utilisée pour les expériences de contrôle actif. La figure 3.7 montre qu'il s'agit d'actionneurs asymétriques. Dans un premier temps, la composante axiale due à cette excitation asymétrique est négligée dans les simulations. L'étude de l'influence de cette composante axiale sur le signal du capteur est présentée à la section 3.3.3.

TABLEAU 3.2 CARACTÉRISTIQUES PHYSIQUES DES ACTIONNEURS, DE LA POUTRE SIMPLEMENT APPUYÉE ET DU CAPTEUR

	Actionneur Primaire	Actionneur Secondaire	Poutre	Capteur
Longueur $L_x$ (mm)	28.1	28.1	295	295
Largeur $L_y$ (mm)	12.67	12.67	12.67	$F(x)$ à $-F(x)$
Épaisseur $L_z$ (mm)	0.19	0.19	3.26	0.028
Densité $\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	7614	7614	2710	3400
Module de Young (N/m <sup>2</sup> )	(63×10 <sup>9</sup> , 0)	(63×10 <sup>9</sup> , 0)	(67×10 <sup>9</sup> , 34×10 <sup>7</sup> )	(2×10 <sup>9</sup> , 0)
$d_{zx}$ (m/V)	166×10 <sup>-12</sup>	166×10 <sup>-12</sup>	————	23×10 <sup>-12</sup>
$e_{zx}$ (N/(V·m))	11	11	————	0.05
Position en x (mm)	$x_{a1} = 74.2$	$x_{a2} = -10.5$	————	$x_c = 0$

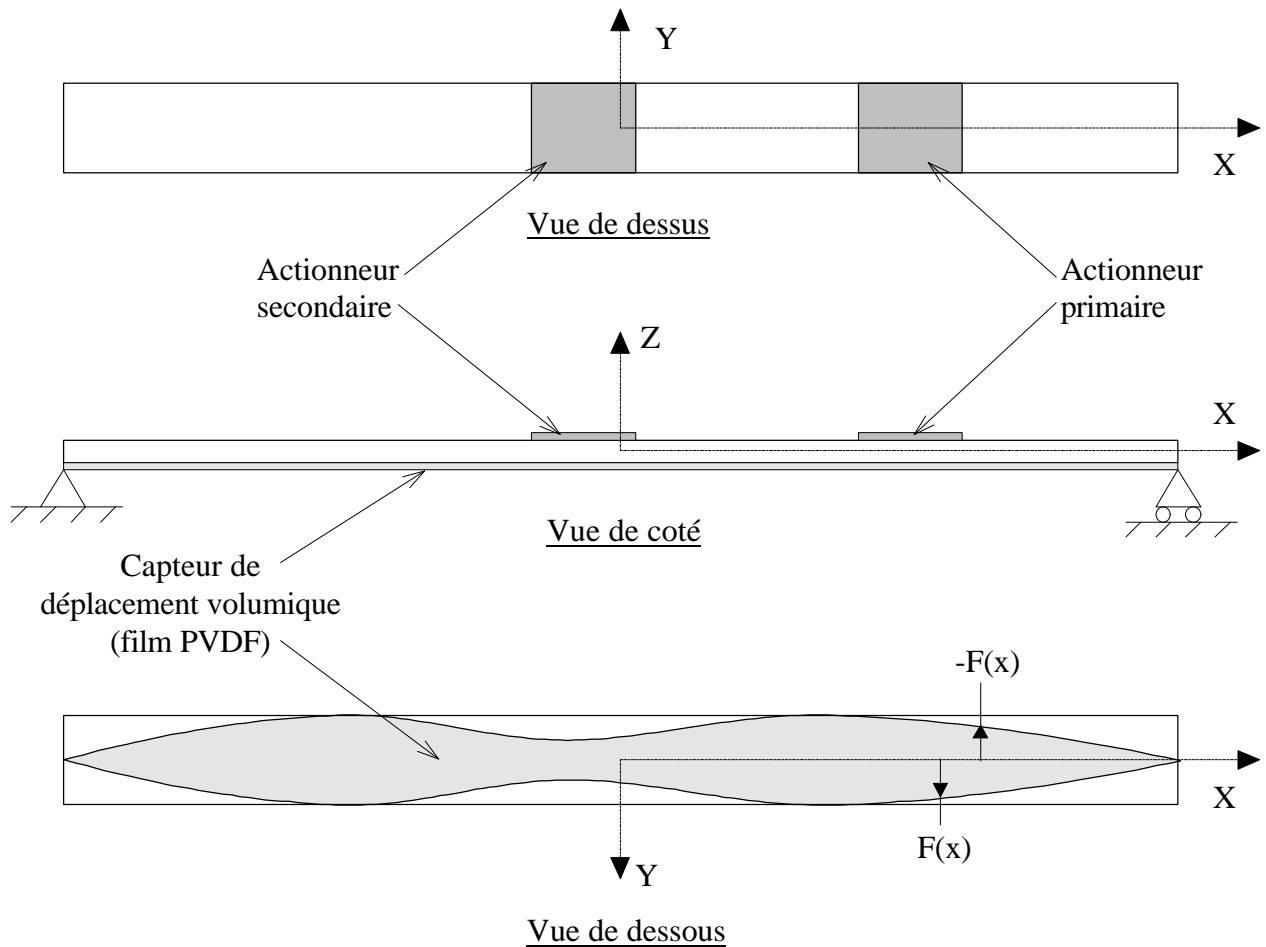


Figure 3.7: Schéma de la poutre simplement appuyée.

La figure 3.8 présente deux formes de capteur de déplacement volumique. La première est pour une poutre avec des actionneurs (voir Tableau 3.2) et la deuxième est pour la même poutre mais sans actionneurs (poutre homogène). Cette figure 3.8 permet de constater que, là où les actionneurs se situent, le capteur de déplacement volumique est plus mince dans le cas de la poutre avec actionneurs (les fonctions propres ont été modifiées). La forme  $F(x)$  du capteur de déplacement volumique de cette poutre avec actionneurs est composée d'une contribution de tous les modes, car aucun mode n'est parfaitement antisymétrique. Les modes pairs (2,4,6, etc.) ne sont pas parfaitement antisymétriques dus à l'ajout de masse et de raideur des actionneurs.

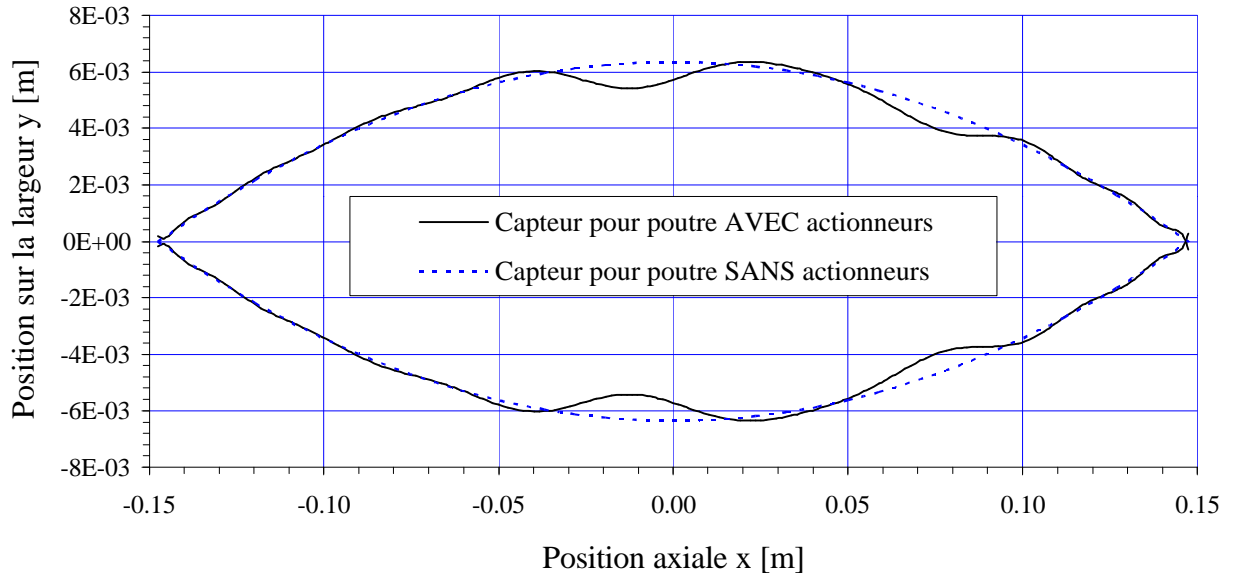


Figure 3.8: Formes de capteurs de déplacement volumique pour une poutre *AVEC* et *SANS* actionneurs.

Le tableau 3.3 permet de comparer les coefficients  $\hat{\alpha}_n$  pour la poutre sans actionneurs aux coefficients  $\tilde{\alpha}_n$  pour la poutre avec actionneurs. Les coefficients pairs  $\tilde{\alpha}_n$  pour la poutre avec actionneurs sont non nuls. Il faut également noter que le premier coefficient est de loin le plus important et que globalement plus  $n$  augmente plus le coefficient est faible (effet du  $1/n^2$ ). Il est clair qu'à partir du 9<sup>ième</sup> mode, la contribution des modes supérieurs devient négligeable.

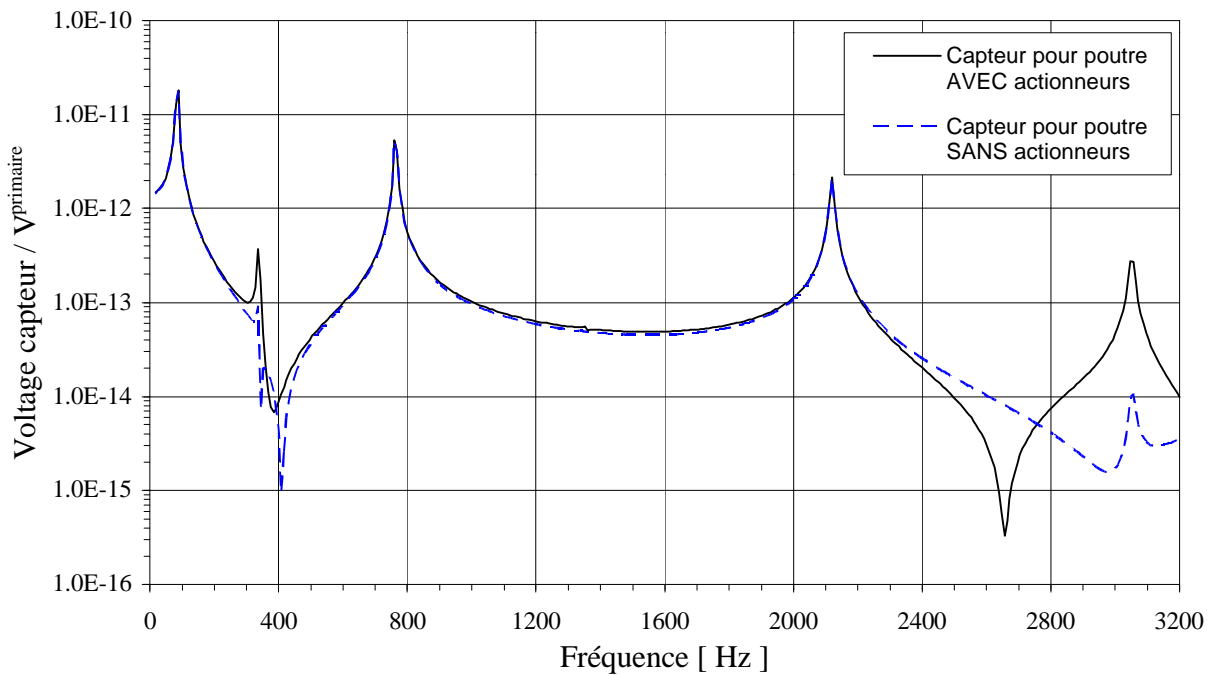
TABLEAU 3.3 COMPARAISON ENTRE LES COEFFICIENTS DE FORME POUR UNE POUTRE AVEC OU SANS ACTIONNEURS

	$\hat{\alpha}_n$	$\tilde{\alpha}_n$
Mode 1	$1.606 \times 10^{-1}$	$1.554 \times 10^{-1}$
Mode 2	0.0	$1.219 \times 10^{-4}$
Mode 3	$6.616 \times 10^{-4}$	$6.627 \times 10^{-4}$
Mode 4	0.0	$5.751 \times 10^{-6}$
Mode 5	$5.154 \times 10^{-5}$	$4.954 \times 10^{-5}$
Mode 6	0.0	$-3.555 \times 10^{-6}$
Mode 7	$9.607 \times 10^{-6}$	$1.105 \times 10^{-5}$
Mode 8	0.0	$4.887 \times 10^{-7}$
Mode 9	$2.744 \times 10^{-6}$	$2.231 \times 10^{-6}$
Mode 10	0.0	$2.683 \times 10^{-8}$

### 3.3.2 Effets des modifications de la forme du capteur sur son signal

Cette section présente la comparaison théorique entre le signal d'un capteur dont la forme ne tient pas compte des actionneurs à celui d'un capteur dont la forme tient compte des actionneurs. La forme de chacun de ces capteurs est présentée à la figure 3.8. La poutre simplement appuyée donnée au tableau 3.2 est donc le cas étudié pour ces simulations. Les simulations permettent de quantifier les effets dynamiques des actionneurs sur le signal d'un capteur dont la forme ne tient pas compte de ces derniers.

La figure 3.9 présente les signaux des capteurs. Globalement, cette figure 3.9 permet de voir que la différence entre les signaux de ces capteurs est principalement importante lorsque le signal total est faible. Lorsque le signal total est faible (voltage  $\sim 0$ ), le moindre changement de forme du capteur introduit une valeur de voltage non négligeable par rapport à zéro. Inversement, lorsque le voltage est grand, un petit changement de la forme n'a pas d'importance car la valeur du voltage introduit par les changements de forme est négligeable par rapport au voltage total. Les modifications de la forme sur le signal du capteur peuvent être considérées négligeables en bas de 2400Hz pour la configuration poutre-transducteurs piézoélectriques utilisée ici.



### 3.3.3 Effets du déplacement axial sur le signal du capteur

Une excitation asymétrique introduit un déplacement axial et transversal simultanément. Le développement du capteur de déplacement volumique présenté dans ce chapitre a été fait en considérant de la flexion seulement. Le déplacement axial n'a aucune influence sur le déplacement volumique de la poutre, mais les déformations que ce déplacement axial génère sont détectées par le capteur PVDF. Le signal total du capteur est donc bruité par ces déformations axiales. Comme il a été vu au chapitre 2, l'importance des déformations axiales sur le signal du capteur est plus ou moins grande en fonction de la position et dimension de l'actionneur.

L'influence du déplacement axial sur le signal du capteur est présentée à la figure 3.10. Sur cette figure, la courbe du déplacement volumique est superposée au signal du capteur pour fin de comparaison. Cette figure montre que le signal du capteur n'est pas du tout proportionnel au déplacement volumique de la poutre. Cela est dû aux déformations axiales qui sont beaucoup trop importantes hors résonances, par rapport aux déformations transversales pour cette configuration de poutre-transducteurs piézoélectriques. Ces résultats permettent de conclure qu'une excitation asymétrique pose des problèmes lorsque le signal désiré est fonction du déplacement transversal seulement et que le capteur utilisé est un capteur de déformation qui détecte les déformations totales à la surface de la structure.

Il serait intéressant d'avoir un capteur de déplacement volumique qui serait indépendant des déformations axiales. Cependant, la déformation totale à la surface de la poutre est la somme des déformations axiales et transversales. Ces composantes de déformation sont indépendantes. Cela implique que si la valeur d'une seule des composantes de déformations à la surface de la poutre doit être connue, il faut au minimum deux capteurs pour pouvoir les distinguer.

Une solution possible est de mettre un deuxième capteur de déplacement volumique ayant exactement la même forme que le premier, sur la surface opposée de la poutre. En mettant ces deux capteurs en opposition de phase, puis en additionnant leurs signaux, le signal total est alors indépendant des déformations axiales. Cette solution est la réciproque de mettre deux actionneurs

vis-à-vis et de leur imposer un voltage  $180^\circ$  hors de phase de telles sortes que la poutre est excitée en flexion pure. Une des raisons pour lesquelles l'excitation asymétrique est considérée vient du fait qu'il n'est pas possible de superposer un PVDF sur un actionneur piézoélectrique. Donc, mettre un deuxième capteur de déplacement volumique du côté de la poutre où les actionneurs sont déjà collés n'est pas possible expérimentalement. De toute façon, cette solution n'est pas viable car il est beaucoup plus facile de mettre deux actionneurs vis-à-vis et d'exciter en flexion pure directement que de mettre deux capteurs de déplacement volumique vis-à-vis et d'utiliser une excitation asymétrique.

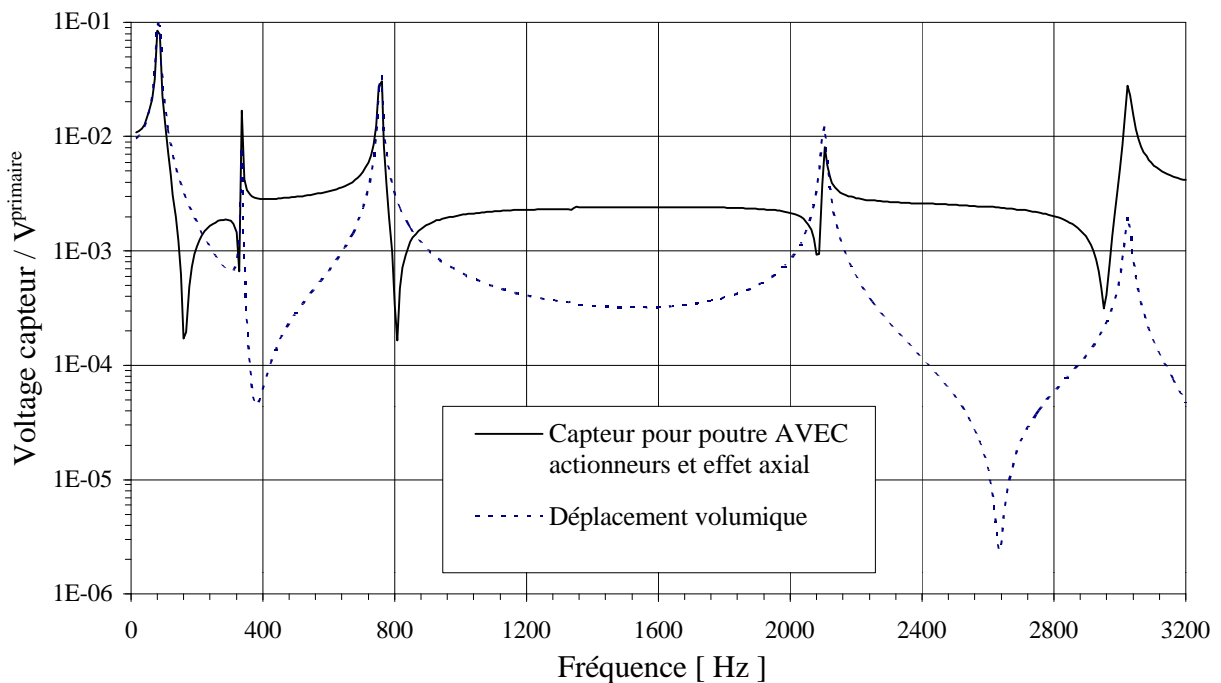


Figure 3.10: Comparaison entre le déplacement volumique et le signal d'un capteur pour poutre *AVEC* actionneurs pour une excitation **asymétrique**.

### 3.3.4 Excitation en flexion pure d'une poutre encastré-libre

Les caractéristiques physiques de la poutre et des transducteurs piézoélectriques utilisés dans cette section sont données au Tableau 3.4. Ici, les conditions limites sont encastrées-libres. Les conditions limites ont été changées pour deux raisons. La première, est que ce type de conditions

limites donnent à la poutre un comportement volumique beaucoup plus important que dans le cas simplement appuyé. Ce point est discuté plus en détail au chapitre 4. La deuxième, est que le modèle théorique permet de considérer n'importe quelles conditions limites. Il est donc intéressant de vérifier ce modèle pour d'autres conditions limites.

La solution qui a été retenue pour exciter une poutre en flexion pure est montrée schématiquement à la figure 3.11. L'idée est d'utiliser une poutre deux fois plus large et de normaliser la largeur maximum du PVDF au quart de la poutre au lieu de la demi comme précédemment. Cela laisse suffisamment de place de chaque côté du capteur PVDF pour mettre des actionneurs qui sont symétriques de part et d'autre de la poutre.

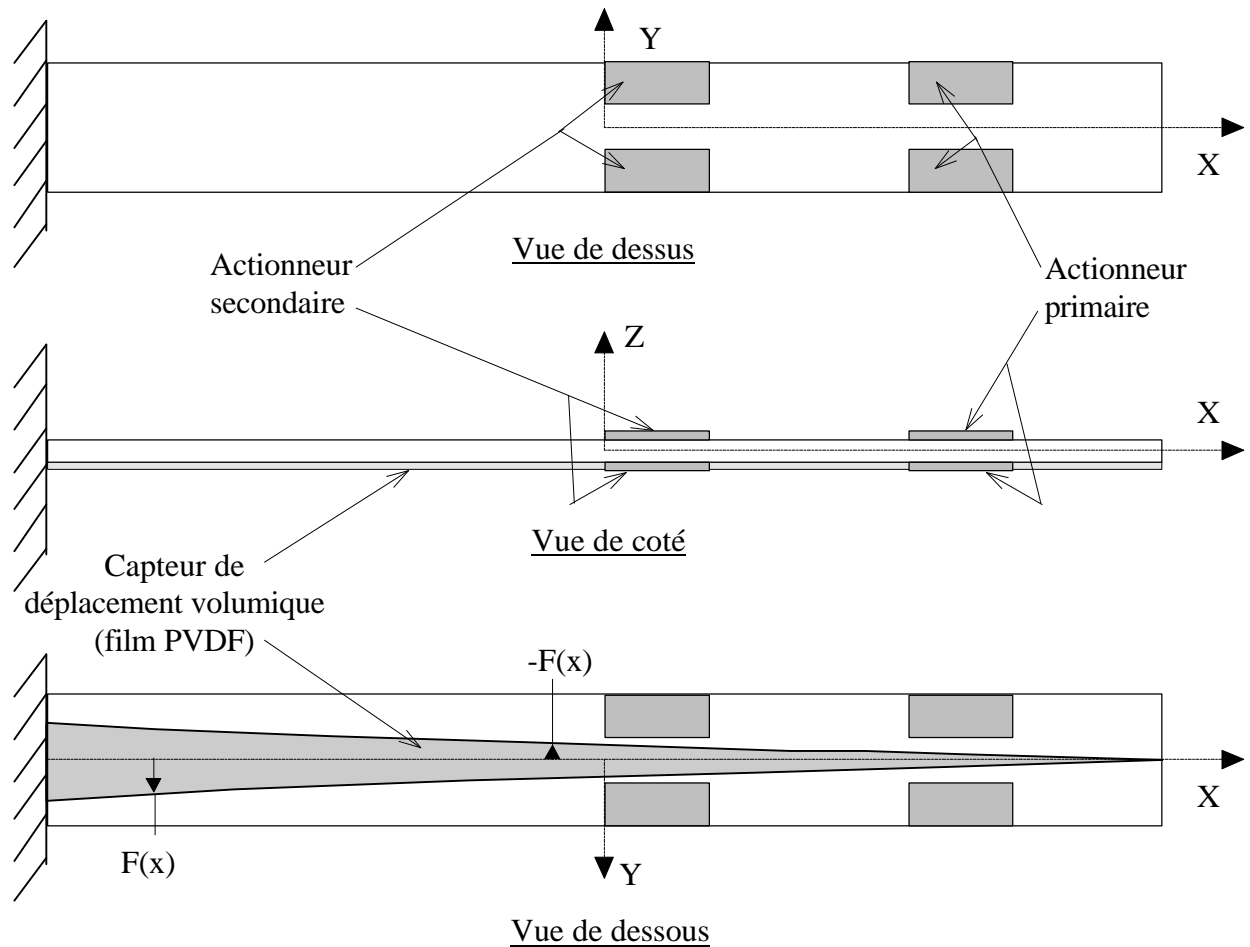


Figure 3.11: Schéma de la poutre encastree-libre.



Comme il est montré à la figure 3.11, chaque actionneur est composé de quatre éléments piézocéramiques. La distance entre l'actionneur secondaire et le capteur PVDF est faible, mais suffisamment grande pour qu'il n'y ait pas trop d'interférences entre ces deux transducteurs.

**TABLEAU 3.4 CARACTÉRISTIQUES PHYSIQUES DES ACTIONNEURS, DE LA POUTRE ENCASTRÉE-LIBRE ET DU CAPTEUR**

	<b>Actionneur Primaire</b>	<b>Actionneur Secondaire</b>	<b>Poutre</b>	<b>Capteur</b>
Longueur $L_x$ (mm)	21.3	21.3	300	300
Largeur $L_y$ (mm)	9.0 (1 piézo)	9.0 (1 piézo)	25.5	$\hat{F}(x)$ à $-\hat{F}(x)$
Épaisseur $L_z$ (mm)	0.254	0.254	3.21	0.028
Densité $\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	7750	7750	2684	3400
Module de Young (N/m <sup>2</sup> )	(61×10 <sup>9</sup> , 0)	(61×10 <sup>9</sup> , 0)	(67×10 <sup>9</sup> , 34×10 <sup>7</sup> )	(2×10 <sup>9</sup> , 0)
$d_{zx}$ (m/V)	166×10 <sup>-12</sup>	166×10 <sup>-12</sup>	————	23×10 <sup>-12</sup>
$e_{zx}$ (N/(V·m))	11	11	————	0.05
Position en x (mm)	$x_{a1} = 80.6$	$x_{a2} = 10.6$	————	$x_c = 0$

### 3.4 Validation expérimentale du capteur PVDF (poutre encastrée-libre)

La validation est faite avec la poutre encastrée-libre du Tableau 3.4. Le déplacement volumique expérimental s'obtient en mesurant le déplacement transversal de différents points le long de la poutre, puis utiliser la version discrétisé de l'équation (3.9),

$$D = \frac{L_x^{pt} L_y^{pt}}{N} \sum_{n=1}^N w(x_n). \quad (3.19)$$

Le déplacement transversal a été mesuré en 10 points équidistants le long de la poutre avec un vibromètre laser. Avec ces mesures et l'équation (3.19), le déplacement volumique expérimental est déterminé. La figure 3.12 présente le déplacement volumique expérimental, le déplacement volumique théorique calculé par le modèle et le signal mesuré provenant du capteur de déplacement volumique.

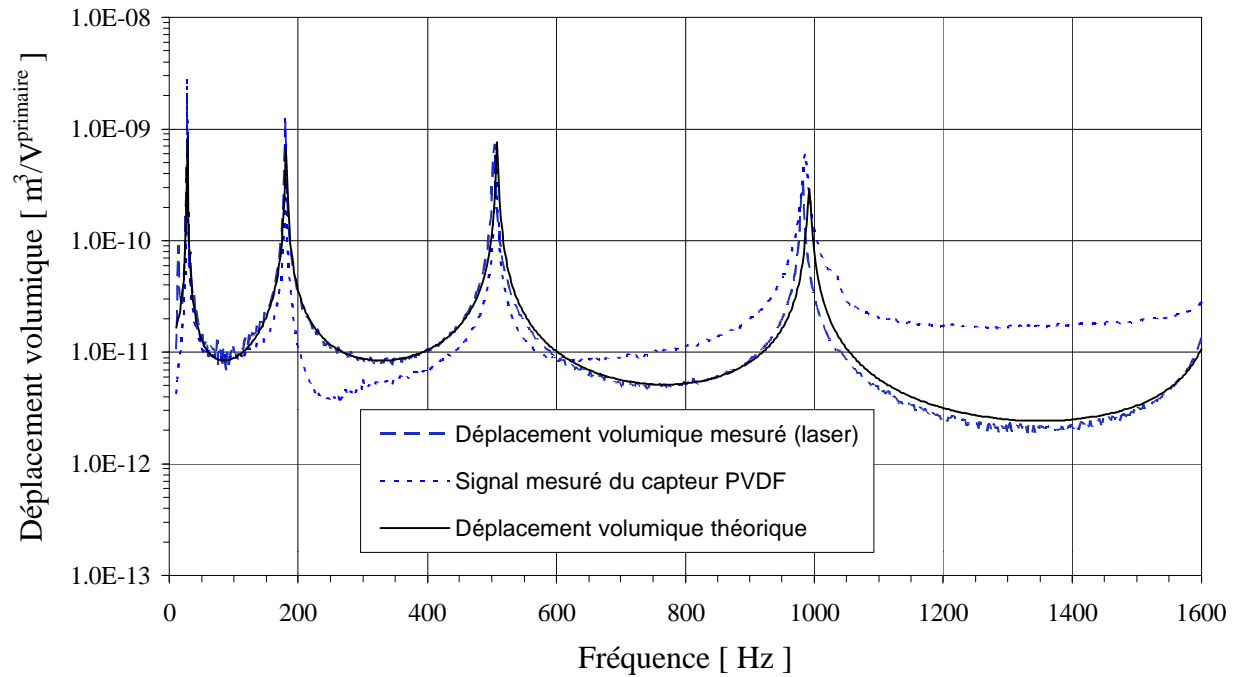


Figure 3.12: Comparaisons entre le déplacement volumique mesuré expérimentalement, le déplacement volumique théorique et le signal mesuré du capteur PVDF.

Cette figure montre que la courbe du déplacement volumique théorique concorde très bien avec la courbe expérimentale. Cela démontre que le modèle prédit très bien le déplacement transversal. Hors résonance, il y a des différences entre les courbes de déplacement volumique et le signal du capteur. Ces différences peuvent être attribuées aux erreurs expérimentales, telles que le découpage du capteur, son positionnement, etc.. Globalement, le capteur fonctionne assez bien. Au chapitre 4 ce même capteur est utilisé dans un système de contrôle actif et les résultats obtenus avant et après contrôle confirment que le capteur est proportionnel au déplacement volumique.

### 3.5 Conclusions

Ce chapitre présente le développement théorique utilisé pour obtenir un capteur de déplacement volumique pour poutre. Le capteur est constitué d'un film PVDF piézoélectrique et sa forme est telle que le signal électrique obtenu est proportionnel au déplacement volumique de la poutre. La

forme de ce capteur dépend principalement des fonctions propres de la poutre et est indépendante de la fréquence et des caractéristiques de l'excitation (amplitude, position, etc.). Les résultats du chapitre 2 ont montré que les fonctions propres d'une poutre sont légèrement modifiées par les effets dynamiques des actionneurs sur la réponse de la poutre. Donc, la présence des actionneurs sur la poutre modifie légèrement la forme du capteur.

Une comparaison théorique entre un capteur dont la forme ne tient pas compte des actionneurs et un capteur dont la forme tient compte des actionneurs a été faite. La comparaison montre que les différences entre les signaux de ces deux capteurs sont importantes pour les fréquences où les signaux sont faibles. Pour les fréquences près des résonances de flexions de la poutre, les signaux des capteurs sont forts et il n'y a aucune différence. Globalement, ces effets peuvent être considérées négligeable en bas de 2400Hz pour la configuration poutre-transducteurs piézoélectriques utilisée ici. Cependant, il faut souligner que ces effets peuvent devenir important si la masse des piézoélectriques approche celle de la poutre.

Ce capteur de déformations étendu, qui a une forme prescrite, effectue deux opérations mathématiques sur les déformations de la poutre. Il filtre et intègre spatialement ces déformations. Le signal obtenu par ce capteur peut entrer directement dans le contrôleur comme signal d'erreur. Le contrôleur n'a aucun traitement numérique supplémentaire à faire sur le signal. L'implantation en pratique d'un système de contrôle actif qui utilise un tel capteur est simple, car un contrôleur à une entrée est suffisant.

Des résultats théoriques pour une poutre simplement appuyée excitée asymétriquement ont montré que le capteur de déplacement volumique ne fonctionnerait pas bien avec ce type d'excitation pour la configuration poutre-transducteurs piézoélectriques utilisée ici. L'excitation asymétrique induit un déplacement axial et transversal dans la poutre. Les déformations dues à ce déplacement axial viennent bruite le signal du capteur PVDF. L'importance des déformations axiales dans le signal du capteur PVDF dépend de la position et dimension de l'actionneur asymétrique. Pour la poutre utilisée ici, le niveau des déformations axiales est très élevé hors résonance par rapport aux déformations transversales, ce qui limite l'utilisation du capteur PVDF à des fréquences qui sont près des résonances de flexion.

Finalement, une poutre encastrée-libre excitée en flexion pure a été étudiée. Les résultats obtenus expérimentalement montrent que le signal du capteur PVDF mesuré est proportionnel au déplacement volumique de la poutre mesurée avec un vibromètre laser et à celui prédit par le modèle théorique. Ces résultats prouvent qu'il est possible de filtrer et intégrer spatialement les déformations avec un capteur étendu PVDF afin d'obtenir le signal désiré.

# Chapitre 4

## CONTRÔLE ACTIF DU DÉPLACEMENT VOLUMIQUE D'UNE POUTRE

### 4.1 Introduction

La méthode pour obtenir un capteur de déplacement volumique a été présentée au chapitre 3. Le but de ce chapitre 4 est d'implanter théoriquement et expérimentalement ce type de capteur dans un système de contrôle actif. Dans un premier temps, une étude théorique est faite pour évaluer l'efficacité du contrôle de déplacement volumique sur la réduction de la puissance acoustique rayonnée. Cette étude montre que cette stratégie de contrôle est très efficace pour certaines poutres et moins pour d'autres. Dans un deuxième temps, l'implantation expérimentale d'un système de contrôle actif du déplacement volumique est effectuée. La poutre utilisée expérimentalement est la poutre encastree-libre de la section 3.3.4. Les résultats expérimentaux et théoriques concordent très bien et montrent que la stratégie de contrôle est très efficace pour réduire le rayonnement acoustique de cette poutre.

### 4.2 Indicateurs vibroacoustiques

Afin de pouvoir quantifier la réduction du rayonnement acoustique avant et après contrôle du déplacement volumique, les indicateurs vibroacoustiques suivants sont utilisés; le déplacement volumique, la vitesse quadratique, la puissance rayonnée et le facteur de rayonnement. Le déplacement volumique et la vitesse quadratique ont été définis et utilisés dans les chapitres précédents. La puissance rayonnée et le facteur de rayonnement sont définis et présentés ici.

#### 4.2.1 Puissance rayonnée par une structure plane rectangulaire

Les coordonnées sphériques utilisées pour la mise en équations des indicateurs vibro-acoustique sont montrées à la figure 4.1.

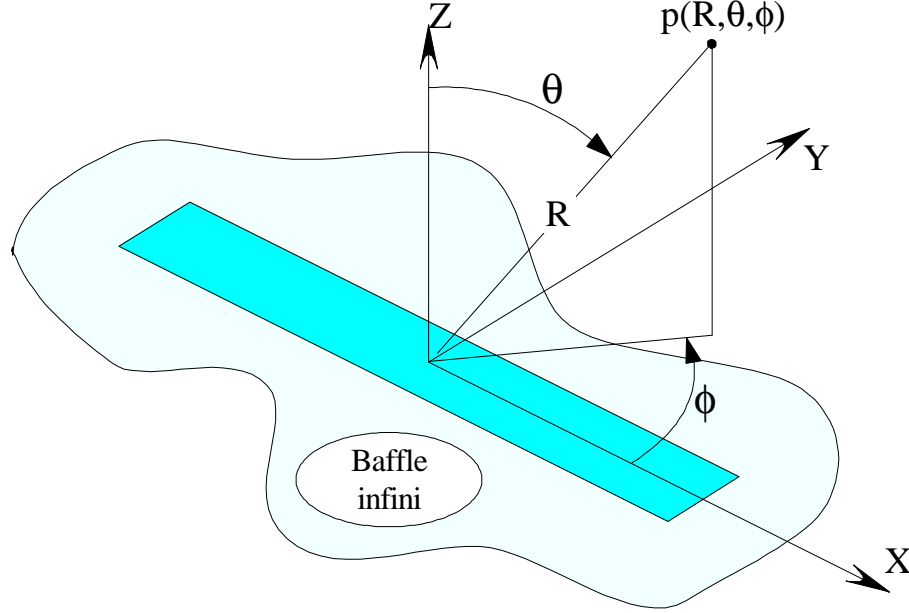


Figure 4.1: Schéma d'une structure bafflée.

La puissance rayonnée dans le demi-espace  $z > 0$  est définie comme étant l'intégrale de l'intensité acoustique sur une demi-sphère, [JUNGER *et coll.* 1972],

$$\Pi = \frac{R^2}{2\rho_0 c_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} |p(R, \theta, \phi)|^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \quad . \quad (4.1)$$

[JUNGER *et coll.* 1972] donne également l'équation de la pression en tout point dans le champs lointain d'une structure plane rayonnante. Avec la nomenclature utilisée dans cette thèse, la pression en un point dans le champs lointain s'écrit,

$$p(R, \theta, \phi) = -\frac{\omega^2 \rho_0 e^{-jk_0 R}}{2\pi R} \bar{w}(k_x, k_y) \quad (4.2)$$

Dans cette équation,  $k_x$  et  $k_y$  sont les projections du nombre d'onde dans le milieu fluide sur les axes  $x$  et  $y$  respectivement. Le terme  $\bar{w}(k_x, k_y)$  est la transformée de Fourier spatiale

bidimensionnelle du déplacement transversal de la structure. Le nombre d'onde acoustique  $k_0$  et ses projections  $k_x, k_y$  sont donnés par,

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0} \quad (4.3)$$

$$k_x = k_0 \sin \theta \cos \phi \quad (4.4)$$

$$k_y = k_0 \sin \theta \sin \phi \quad (4.5)$$

Le terme  $c_0$  dans l'équation (4.3) représente la célérité du son dans le fluide.

En insérant l'équation (4.2) dans (4.1), la puissance rayonnée devient une intégrale double de la transformée de Fourier bidimensionnelle sur une demi-sphère. L'équation de la puissance rayonnée prend alors la forme suivante,

$$\Pi = \frac{\omega^4 \rho_0}{8\pi^2 c_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left| \bar{w}(k_x, k_y) \right|^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (4.6)$$

La puissance rayonnée ne peut être évaluée que lorsque la transformée de Fourier est connue. La transformée de Fourier spatiale bidimensionnelle est définie comme étant,

$$\bar{w}(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) e^{jk_x x} e^{jk_y y} dx dy \quad (4.7)$$

Cependant, puisque la structure est bafflée, c'est-à-dire qu'il y a un déplacement transversal sur la structure seulement et que partout ailleurs le déplacement transversal est nul, alors les bornes d'intégration de l'équation (4.7) deviennent,

$$\bar{w}(k_x, k_y) = \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} w(x, y) e^{jk_x x} e^{jk_y y} dx dy \quad (4.8)$$

Cette équation permet de voir que si un point le long de l'axe  $z$  est considéré,  $\theta = k_x = k_y = 0.0$ , alors la transformée de Fourier spatiale devient égale au déplacement volumique,

$$\bar{w}(k_x, k_y) = \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} w(x, y) dx dy = D \quad (4.9)$$

Il est possible de montrer que la pression d'un point situé sur l'axe  $z$  est directement proportionnelle au déplacement volumique de la structure en insérant l'équation (4.9) dans (4.2). Le signal du capteur de déplacement volumique est donc proportionnel à celui donné par un micro situé le long de l'axe  $z$  dans le champ lointain de la structure.

Le déplacement transversal d'une poutre est fonction de la position le long de l'axe  $x$  seulement. Pour une position  $x$  donnée, le déplacement le long de l'axe  $y$  est constant et égale à celui du point situé à  $y=0$ . En insérant le déplacement transversal d'une poutre dans l'équation (4.8), puis en effectuant l'intégration le long de  $y$ , cette équation devient,

$$\bar{w}(k_x, k_y) = \frac{2 \sin(k_y L_y^{pt}/2)}{k_y} \int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} w(x) e^{ik_x x} dx \quad (4.10)$$

Avec l'équation (2.27), qui donne le déplacement transversal  $w(x)$ , la transformée de Fourier spatiale prend la forme suivante,

$$\bar{w}(k_x, k_y) = \frac{2 \sin(k_y L_y^{pt}/2)}{k_y} \sum_{q=0}^{Q-1} C_q^{tr} \bar{f}_q(k_x) \quad (4.11)$$

où

$$\bar{f}_q(k_x) = \int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} \left( \frac{2x}{L_x^{pt}} \right)^q e^{ik_x x} dx \quad (4.12)$$

La solution de cette intégrale est présentée dans les travaux de [BERRY 1991]. Cette solution s'obtient en effectuant une intégration par partie. Dépendant de l'ordre d'intégration par partie est faite, une équation de récursivité directe ou inverse est obtenue. L'équation de récursivité directe est instable numériquement lorsque l'argument  $k_x$  devient petit. L'équation de récursivité inverse nécessite un peu plus d'itérations pour son évaluation, mais est stable numériquement. Dues à ces caractéristiques de stabilité numérique, seulement l'équation de récursivité inverse est utilisée dans les travaux présentés ici. Cette équation de récursivité s'écrit,

$$\bar{f}_q(k_x) = \frac{L_x^{pt}}{2(q+1)} \left[ e^{jk_x \frac{L_x^{pt}}{2}} + (-1)^q e^{-jk_x \frac{L_x^{pt}}{2}} \right] - \frac{jk_x L_x^{pt}}{2(q+1)} \bar{f}_{q+1}(k_x) \quad (4.13)$$



Cette équation a comme propriété de converger vers zéro lorsque l'indice  $q$  devient grand. En imposant un indice  $q$  suffisamment grand, généralement  $q=50$  est amplement grand pour les ordres maximums de polynôme utilisés ici, alors cette propriété de convergence permet de poser  $\bar{f}_{51}(k_x) = 0.0$ . Avec cette valeur initiale, il est possible d'évaluer  $\bar{f}_q(k_x)$  pour tout  $q$  inférieur ou égale à 50. L'évaluation de la transformée de Fourier bidimensionnelle pour la poutre est obtenue avec les équations (4.13) et (4.11).

Connaissant la transformée de Fourier pour une poutre, la puissance rayonnée par celle-ci est alors calculée à l'aide de l'équation (4.6). Cependant, l'intégrale double de cette équation ne peut être solutionnée algébriquement. Il faut avoir recours à une intégration numérique pour déterminer la puissance rayonnée. L'algorithme d'intégration utilisé dans les programmes provient de la librairie mathématique NAG. Il s'agit d'un algorithme adaptatif qui est donné dans le fichier d01fcft.f de cette librairie.

#### 4.2.2 Coefficient de rayonnement

Le coefficient de rayonnement est défini comme étant le rapport entre la puissance rayonnée par la structure et la puissance rayonnée par un piston de surface équivalente qui vibre à une vitesse égale à la vitesse quadratique moyenne de la structure. Sous forme mathématique, cela donne l'équation suivante,

$$\zeta = \frac{\Pi}{\rho_0 c_0 L_x^{pt} L_y^{pt} \langle \dot{w}^2 \rangle} . \quad (4.14)$$

### 4.3 Contrôle optimal du déplacement volumique

Le signal du capteur de déplacement volumique est le signal d'erreur du système de contrôle actif proposé ici. Le contrôle optimal a pour but de minimiser ce signal d'erreur à l'aide de l'actionneur secondaire (contrôle). Les vibrations non désirées sont introduites par l'actionneur primaire (excitation). Le but de cette section est de déterminer l'amplitude et la phase du voltage à imposer sur le secondaire afin que le signal du capteur de déplacement volumique soit minimisé.

Le déplacement transversal de la poutre dû au primaire est donné par,

$$w(x) = \sum_{n=1}^N \hat{W}_n^{a1} \hat{\Psi}_n(x) \quad (4.15)$$

où  $\hat{W}_n^{a1}$  sont les amplitudes modales de l'excitation. Ces amplitudes modales dépendent des caractéristiques de l'actionneur primaire (position, dimension, caractéristiques piézoélectriques, etc.) et du voltage imposé à ce dernier. Il est possible d'écrire ces amplitudes modales sous la forme,

$$\hat{W}_n^{a1} = \Delta\phi^{a1} \mathbf{W}_n^{a1}. \quad (4.16)$$

Dans cette dernière équation,  $\mathbf{W}_n^{a1}$  sont les composantes des amplitudes modales normalisées par rapport au voltage.

En utilisant le théorème de superposition, le déplacement transversal de la poutre, lorsqu'il y a un voltage sur le primaire et le secondaire, s'écrit,

$$w(x) = \sum_{n=1}^N \left( \Delta\phi^{a1} \mathbf{W}_n^{a1} + \Delta\phi^{a2} \mathbf{W}_n^{a2} \right) \hat{\Psi}_n(x). \quad (4.17)$$

Le voltage du capteur de déplacement volumique dans ce cas est alors donné par,

$$\Delta\phi^c = -\frac{e_{zx}}{c_c} \left( L_z^{pt} + L_z^c \right) \sum_{n=1}^N \alpha_n \left( \Delta\phi^{a1} \mathbf{W}_n^{a1} + \Delta\phi^{a2} \mathbf{W}_n^{a2} \right) \int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} \left( \frac{d^2 \hat{\Psi}_n(x)}{dx^2} \right)^2 dx \quad (4.18)$$

Lorsque ce voltage est minimisé, c'est-à-dire  $\Delta\phi^c=0.0$ , il est possible d'obtenir une expression pour le voltage du secondaire en fonction du primaire,

$$\Delta\varphi^{a_2} = -\Delta\varphi^{a_1} \frac{\sum_{n=1}^N \alpha_n W_n^{a_1} \int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} \left( \frac{d^2 \hat{\Psi}_n(x)}{dx^2} \right)^2 dx}{\sum_{n=1}^N \alpha_n W_n^{a_2} \int_{-L_x^{pt}/2}^{L_x^{pt}/2} \left( \frac{d^2 \hat{\Psi}_n(x)}{dx^2} \right)^2 dx} \quad (4.19)$$

#### 4.4 Simulations de contrôle optimal du déplacement volumique

Une analyse de l'équation (4.19) permet de voir grossièrement quel type de structure se prête bien au contrôle du déplacement volumique. Le voltage de contrôle pour la minimisation du déplacement volumique, donné par l'équation (4.19), dépend de l'intégrale des déformations propres de la structure. Le pire cas, où le contrôle du déplacement volumique ne fonctionne pas, est celui d'une structure qui n'a pas de déplacement volumique (les intégrales de déformation sont nulles). Dans ce cas, le voltage de contrôle est indéterminé. Un exemple d'une telle structure est le cas d'une poutre homogène qui est libre à ces deux extrémités. Évidemment, le contrôle du déplacement volumique n'a aucun sens dans ce cas.

L'opposé de l'exemple de la poutre libre-libre est celui d'une poutre homogène qui est encastree à une extrémité et libre à l'autre. Tous les modes d'une poutre encastree-libre ont un déplacement volumique non nul et contribuent au déplacement volumique total de la structure. Dans ce cas, le contrôle du déplacement volumique va affecter tous les modes et donner de bons résultats sur une large bande de fréquences.

Les cas qui se situent entre ces deux extrêmes sont ceux de structures dont un mode sur deux a un déplacement volumique non nul. Par exemple, une poutre homogène simplement appuyée ou encastree aux deux extrémités. Pour ces structures, le contrôle du déplacement volumique affecte un mode sur deux et va donner de bons résultats en basses fréquences.

Une bonne façon de déterminer si le contrôle du déplacement volumique est efficace pour une structure est de regarder les coefficients de rayonnement modaux. Si tous les coefficients modaux ont un comportement multipolaire, alors la stratégie de contrôle du déplacement volumique est tout à fait inefficace (ex. poutre libre-libre). Si certains modes d'une structure ont des coefficients de rayonnement de type monopolaire (6dB/oct.) et d'autres ont des coefficients de rayonnement de type dipolaire (12dB/oct.), alors la minimisation du déplacement volumique s'attaque seulement aux modes de type monopolaire (ex. Poutre simplement appuyée aux deux extrémités). Une structure dont les coefficients modaux ont tous un comportement monopolaire est idéale pour le contrôle du déplacement volumique (ex. Poutre encastree-libre).

Une dernière remarque que l'analyse de l'équation (4.19) permet de faire est que, même si la structure a un déplacement volumique, il est probable qu'il sera impossible de faire du contrôle à certaines fréquences. Effectivement, en fonction de la position et de la dimension de l'actionneur secondaire, la combinaison linéaire des amplitudes modales  $\mathbf{W}_n^{a2}$  multipliée par les intégrales de déformations propres (dénominateur de l'équation (4.19)) peut tendre vers zéro à certaines fréquences. Lorsque le dénominateur de l'équation (4.19) approche la valeur zéro, cela indique que l'actionneur secondaire ne peut pas introduire de déplacement volumique à la structure. Puisque le secondaire ne peut pas introduire de déplacement volumique à ces fréquences, il n'a donc pas l'autorité nécessaire à ces fréquences, ce qui rend impossible le contrôle.

Pour les simulations de contrôle présentées dans cette section, le voltage imposé à l'actionneur primaire a une amplitude de 1 volt et une phase nulle pour toutes les fréquences. Le voltage du secondaire (amplitude et phase) pour minimiser le déplacement volumique est donné par l'équation (4.19). Les différents indicateurs vibroacoustiques sont présentés avant et après contrôle afin de quantifier l'efficacité du contrôle de déplacement volumique.

#### 4.4.1 Poutre simplement appuyée aux deux extrémités

Les simulations de la poutre simplement appuyée sont faites avec la configuration poutre-transducteurs piézoélectriques donnée au tableau 3.1. Pour ces simulations, l'introduction des

déformations axiales par les actionneurs asymétriques sont négligées, donc la poutre est en flexion pure. La figure 4.2 donne les coefficients de rayonnement modaux et les figures 4.3 à 4.6 présentent les différents indicateurs avant et après contrôle pour cette poutre simplement appuyée. La bande de fréquence où le contrôle du déplacement volumique donne de très bon résultats est en basses fréquences dans ce cas. La limite de ces basses fréquences se situe où les coefficients de rayonnement modaux de type monopolaire croisent ceux de type multipolaire. Au dessus de cette limite en fréquence, le contrôle du déplacement volumique correspond à un contrôle vibratoire des modes de type monopolaire.

La figure 4.2 montre que le croisement entre les coefficients modaux de type monopolaire et ceux de type multipolaire commence aux environs de la fréquence sans dimension  $k_0 L_x = 1.4$ . Cette limite en fréquence donne la bande de fréquence pour laquelle le contrôle du déplacement volumique est très efficace pour une poutre simplement appuyée. Pour la poutre considérée ici, cette fréquence sans dimension correspond à la fréquence 250Hz.

La figure 4.3 montre que les réductions de la puissance acoustique sont dans les régions de fréquences; 0Hz à 250Hz, 480Hz à 1200Hz et 1700Hz à 2500Hz. Les réductions les plus importantes sont dans la bande 0Hz à 250Hz et sont reliées aux réductions du coefficient de rayonnement combinées avec des réductions du niveau vibratoire. La figure 4.4 donne le coefficient de rayonnement avant et après contrôle et montre que dans la bande 0Hz à 250Hz ce dernier est passé d'une pente qui est typique d'un monopole (6 dB/oct.) à celle d'un dipôle (12 dB/oct.). La bande de fréquences 0Hz à 250Hz correspond bien avec celle prédite à l'aide des facteurs de rayonnement modaux.

Les réductions dans la bande 480Hz à 1200Hz sont principalement dues à des réductions du niveau vibratoire, voir la vitesse quadratique à la figure 4.5. Cependant, autour de 1100Hz, les réductions peuvent être attribuables à une légère réduction du coefficient de rayonnement. Pour toutes les fréquences supérieures à 1200Hz, les réductions de la puissance rayonnée sont attribuables à des réductions du niveau vibratoire des modes ayant un comportement monopolaire. Au dessus de 1200Hz, le coefficient de rayonnement avant et après contrôle est semblable.

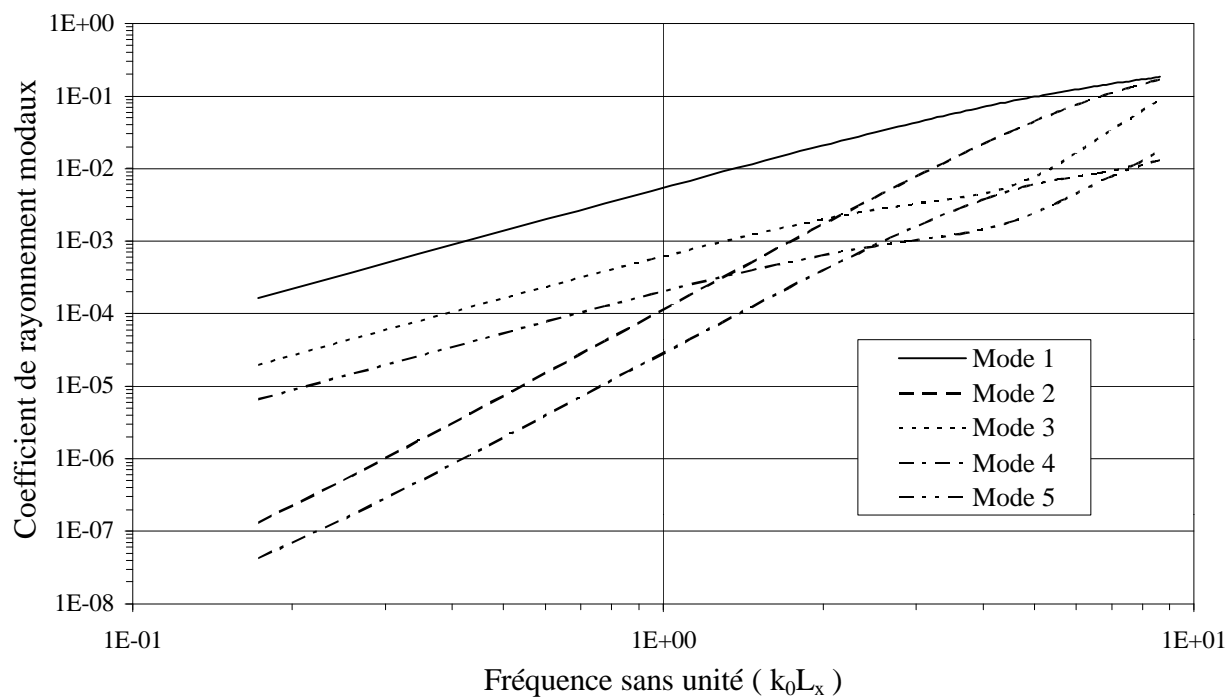


Figure 4.2: Coefficients de rayonnement modaux, poutre simplement appuyée.

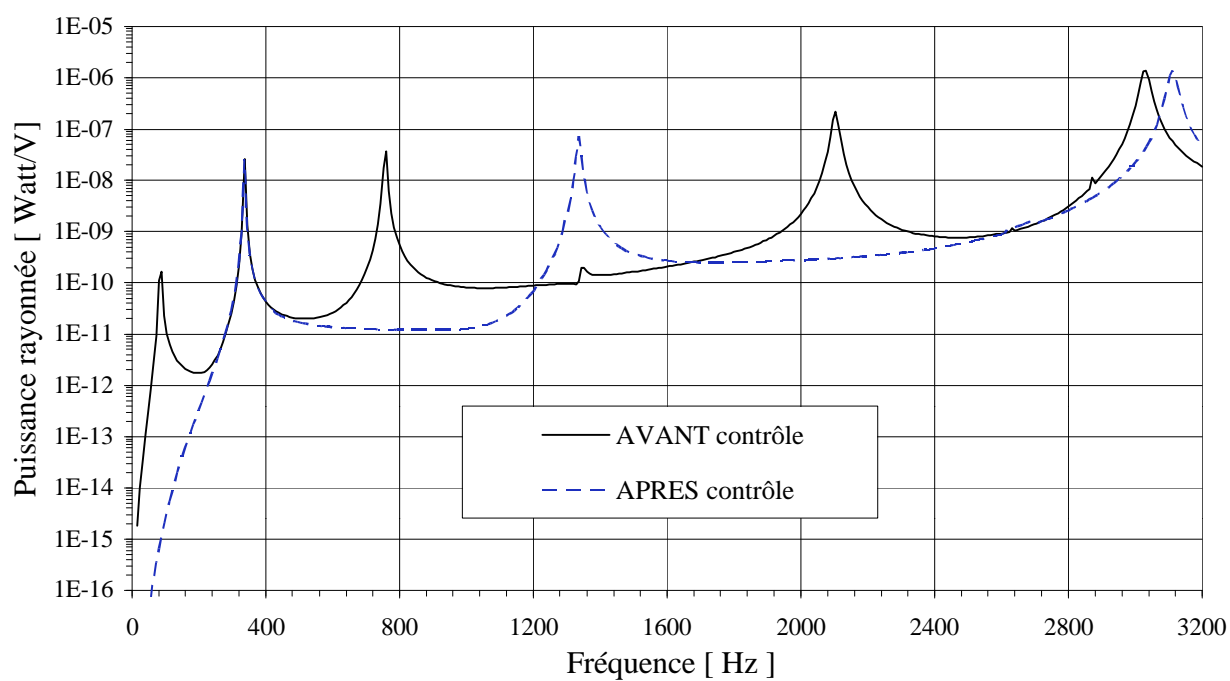


Figure 4.3: Puissances rayonnées avant et après contrôle, poutre simplement appuyée.

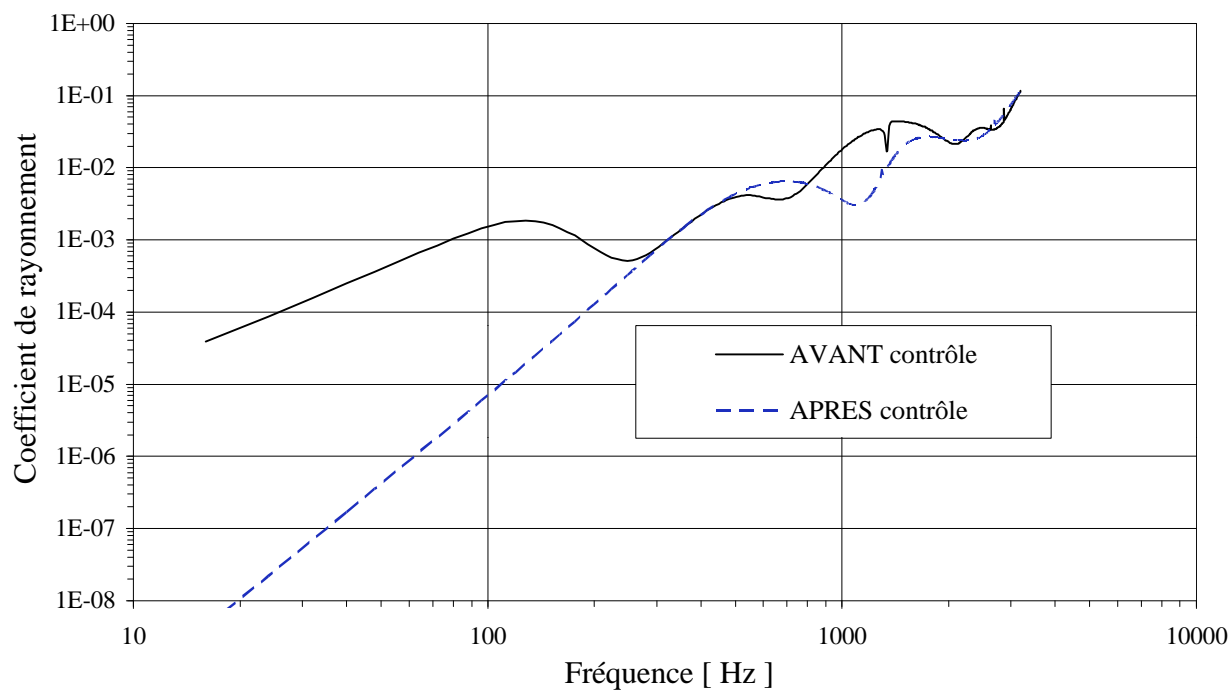


Figure 4.4: Coefficients de rayonnement avant et après contrôle, poutre simplement appuyée.

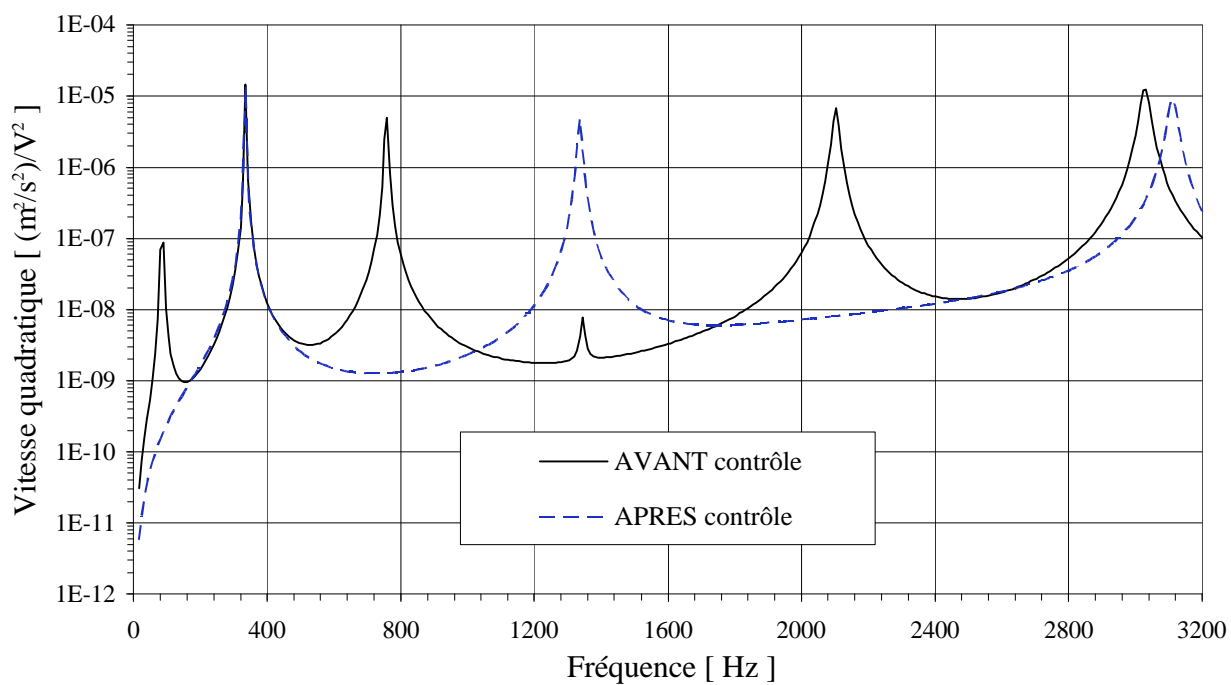


Figure 4.5: Vitesses quadratiques avant et après contrôle, poutre simplement appuyée.

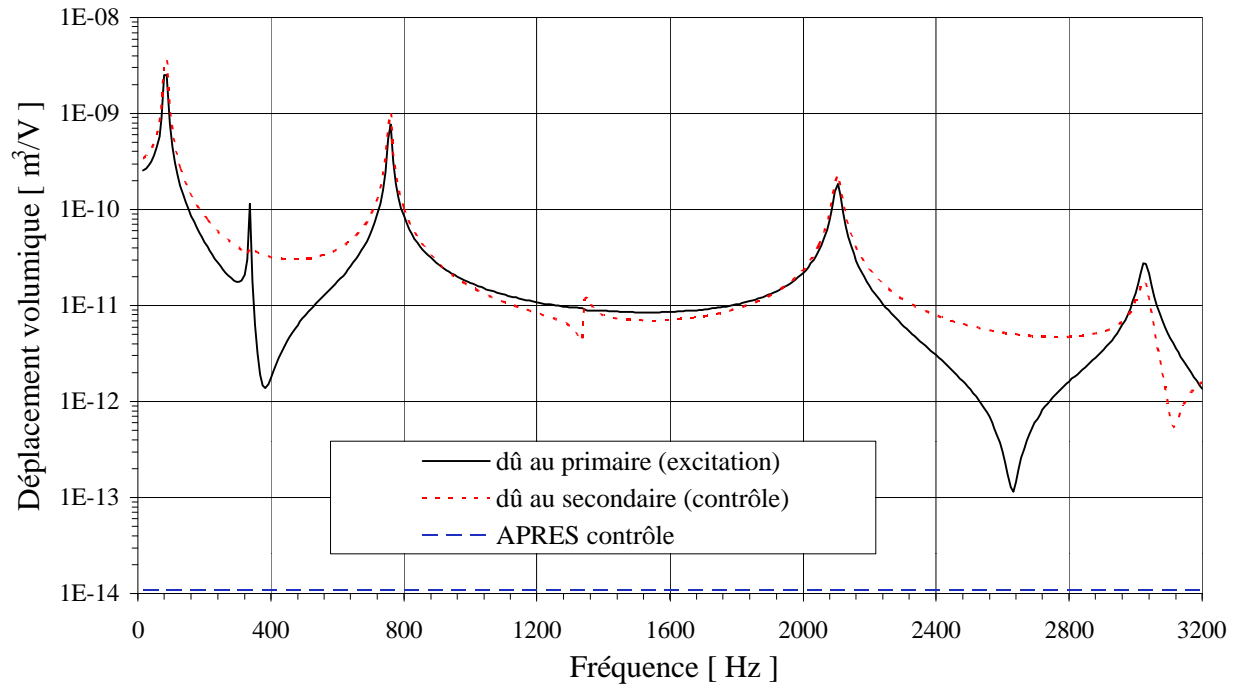


Figure 4.6: Déplacements volumiques, poutre simplement appuyée.

Il faut également noter qu'il y a une importante augmentation de la puissance rayonnée dans les bandes de fréquences; 1200Hz à 1600Hz et 3050Hz à 3200Hz. L'augmentation dans la bande 1200Hz à 1600Hz est due au fait que la position de l'actionneur primaire (piézocéramique d'excitation) empêche ce dernier d'actionner de façon importante le mode 4. Le niveau vibratoire est donc faible avant contrôle. Cependant, lorsque l'actionneur secondaire (piézocéramique de contrôle) est en fonctionnement, ce dernier a une position qui lui permet de bien actionner le mode 4. De plus, le mode 4 a peu ou pas de déplacement volumique, donc la contribution de ce mode n'apparaît pas dans le signal du capteur de déplacement volumique. Le contrôleur ne voit pas ce mode, ce qui fait que ce dernier n'est pas contrôlé et apparaît fortement après contrôle.

Dans la bande 3050Hz à 3200Hz, l'augmentation de la puissance rayonnée est due au manque d'autorité du secondaire dans cette bande de fréquences. La figure 4.6 montre trois courbes de déplacement volumique en fonction de la fréquence. La première est le déplacement volumique induit par le primaire (déplacement volumique avant contrôle), la deuxième est le déplacement volumique du secondaire lorsqu'un volt est appliqué sur ce dernier et la troisième est le



déplacement volumique de la structure après contrôle. Fondamentalement, la deuxième courbe représente l'autorité du secondaire (piézocéramique de contrôle). Les antirésonances de cette courbe situent les fréquences où le secondaire introduit peu ou pas de déplacement volumique à la structure. Dans le cas présent, c'est à 3120Hz que le déplacement volumique du secondaire est très faible par rapport à celui du primaire. Il faut un très grand voltage sur le secondaire pour que ce dernier puisse annuler le déplacement volumique du primaire. Même si le déplacement volumique est annulé à cette fréquence, le voltage nécessaire sur le secondaire pour y arriver est suffisamment important pour que le niveau de vibrations de la poutre après contrôle soit augmenté de façon considérable. C'est cette augmentation des vibrations qui génère une augmentation de la puissance rayonnée.

#### 4.4.2 Poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre

La poutre encastrée-libre est une structure qui a un comportement monopolaire sur une large bande de fréquence. Le contrôle du déplacement volumique est extrêmement efficace pour cette poutre. Les résultats de simulations présentés ici sont pour la poutre encastrée-libre de la section 3.3.4. La figure 4.7 donne les coefficients de rayonnement modaux pour cette poutre et montre que les premiers modes ont tous un comportement de type monopolaire.

La puissance rayonnée présentée à la figure 4.8 est réduite de 10 à 25 dB hors résonance et de 30 à 60 dB près des résonances. Il y a une augmentation de la puissance rayonnée seulement près de 600Hz. La figure 4.11 montre que le secondaire a une antirésonance près de 600Hz. L'augmentation de la puissance dans cette région est due au fait qu'il faut appliquer un très grand voltage sur le secondaire pour réussir à annuler le déplacement volumique (manque d'autorité de l'actionneur secondaire). Ce grand voltage sur ce piézocéramique de contrôle augmente le niveau global des vibrations dans cette région de fréquence, voir figure 4.10, ce qui augmente la puissance rayonnée. Une optimisation de la position et de la dimension du secondaire pourrait certainement éviter ce genre de problème.

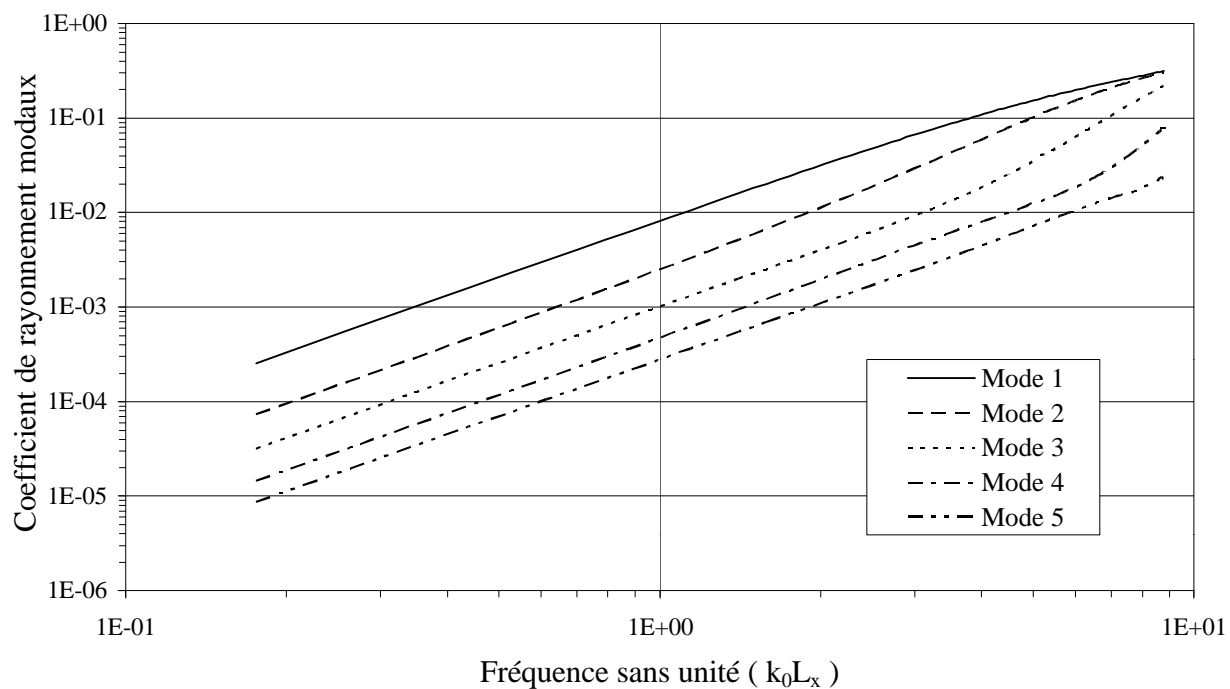


Figure 4.7: Coefficients de rayonnement modaux, poutre encastree-libre.

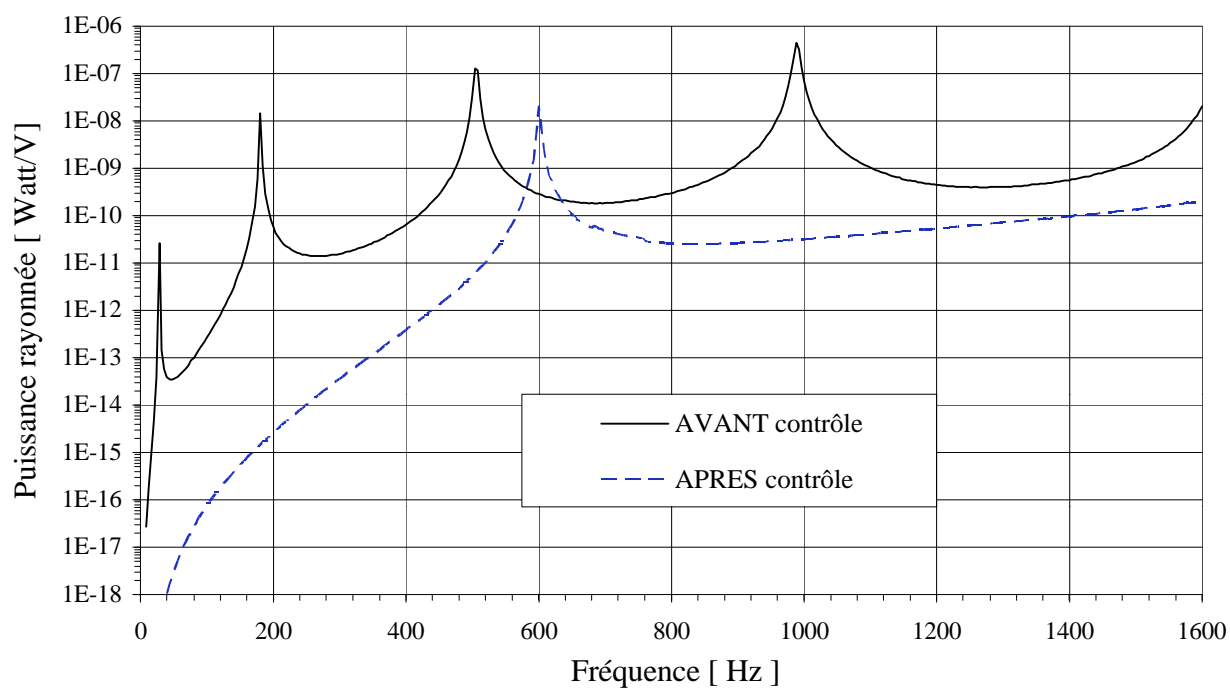


Figure 4.8: Puissances rayonnées avant et après contrôle, poutre encastree-libre.

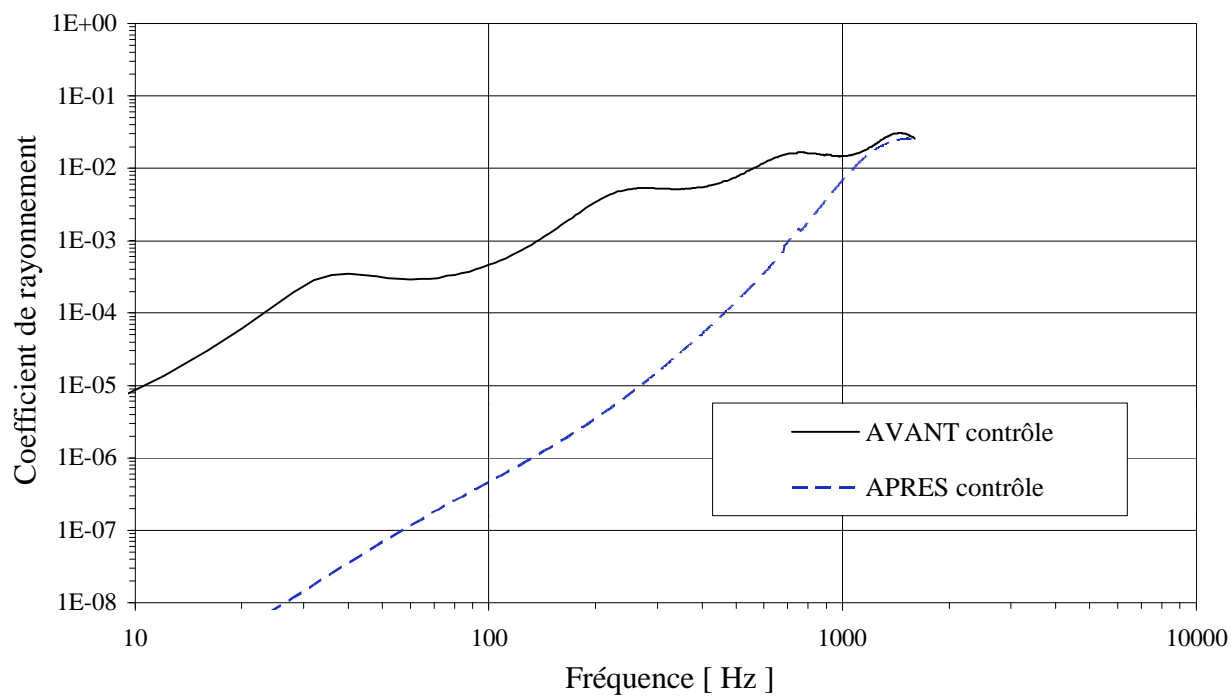


Figure 4.9: Coefficients de rayonnement avant et après contrôle, poutre encastree-libre.

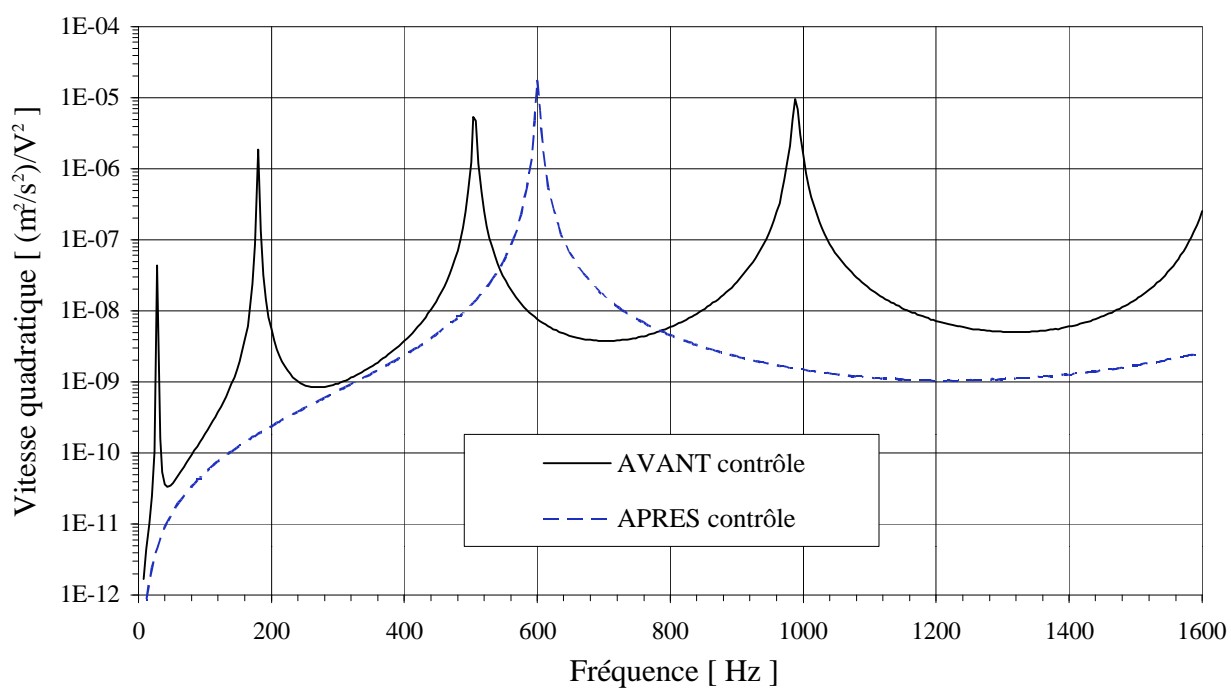


Figure 4.10: Vitesses quadratiques avant et après contrôle, poutre encastree-libre.

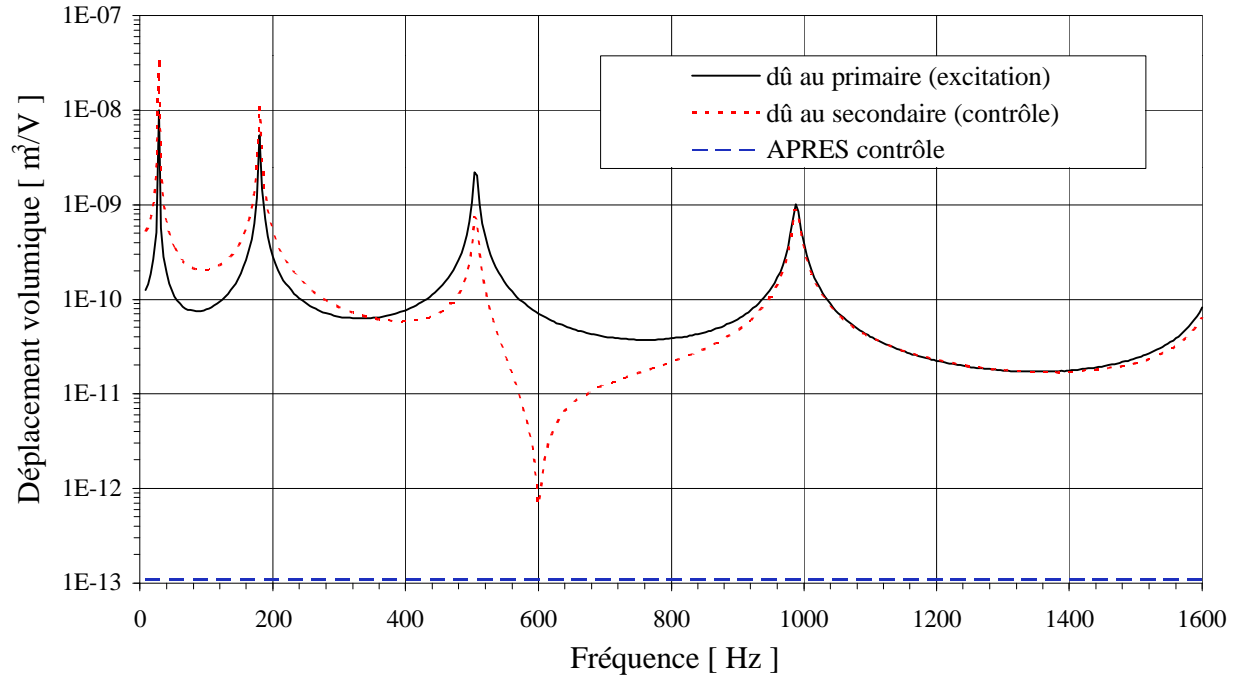


Figure 4.11: Déplacements volumiques, poutre encastrée-libre.

La figure 4.9 montre que la poutre encastrée-libre a bien un comportement monopolaire (6 dB/oct.) avant contrôle sur la bande de fréquence 0Hz à 1600Hz. Après contrôle, ce comportement devient multipolaire (12 dB/oct.). Pour cette poutre, le contrôle du déplacement volumique est efficace sur une très large bande de fréquences. Le contrôle dans cette bande de fréquences est seulement limité par l'autorité du piézocéramique de contrôle (dimension et position).

#### 4.4.3 Comparaison avec un contrôle vibratoire

Il est intéressant de comparer les résultats obtenus pour le contrôle du déplacement volumique à ceux obtenus avec un contrôle vibratoire. Le capteur de déplacement volumique fait avec un film PVDF permet d'avoir un système de contrôle actif à un signal d'erreur. Afin de comparer des choses semblables, un système de contrôle actif vibratoire qui utilise un seul signal d'erreur est considéré. Ce signal d'erreur provient d'un accéléromètre mis à la position  $x_{acc}$ . Le voltage du

contrôle optimal pour cette fonction coût est obtenu en posant  $w(x_{acc})=0$ , voir équation (4.17). Ce voltage de contrôle est alors donné par,

$$\Delta\varphi_{x_{acc}}^{a_2} = -\Delta\varphi^{a_1} \frac{\sum_{n=1}^N \mathbf{w}_n^{a_1} \hat{\Psi}_n(x_{acc})}{\sum_{n=1}^N \mathbf{w}_n^{a_2} \hat{\Psi}_n(x_{acc})}. \quad (4.20)$$

L'efficacité d'un contrôle actif du déplacement d'un point dépend de la position du point considéré. Si ce point est sur le noeud d'un mode, alors l'accéléromètre ne détectera pas ce mode, donc le contrôleur ne pourra minimiser la contribution de ce mode.

La poutre encastree-libre utilisée précédemment est la structure considérée pour les simulations de contrôle du déplacement d'un point. Pour ce type de structure, le capteur de déplacement volumique détecte tous les modes de la structure. Afin d'avoir l'équivalent dans le cas du contrôle de déplacement ponctuel, il faut choisir une position  $x_{acc}$  qui permet à l'accéléromètre de voir tous les modes de la poutre encastree-libre. La position qui satisfait ce critère est l'extrémité libre de la poutre, c'est-à-dire  $x_{acc}=0.15\text{m}$  pour la poutre considérée ici.

Les figures 4.12 à 4.15 présentent les indicateurs vibroacoustiques avant et après contrôle du déplacement de l'extrémité libre de la poutre encastree-libre. Les résultats montrent clairement que cette fonction coût n'est pas très efficace pour minimiser les différents indicateurs vibroacoustiques. La puissance rayonnée a globalement le même niveau avant et après contrôle, voir figure 4.12. Les effets du contrôle se traduisent principalement par une translation des résonances. Il s'agit bien d'un contrôle vibratoire pur, puisque le coefficient de rayonnement, figure 4.13, est pratiquement le même avant et après contrôle.

Il est normal que le contrôle d'une information ponctuelle, tel que le déplacement transversal d'un point, soit beaucoup moins efficace que le contrôle d'une information étendue, tel que le déplacement volumique. Le contrôle d'une seule information ponctuelle sur la structure ne peut pas tenir compte des mauvaises restructurations de la déformée transversale après contrôle.

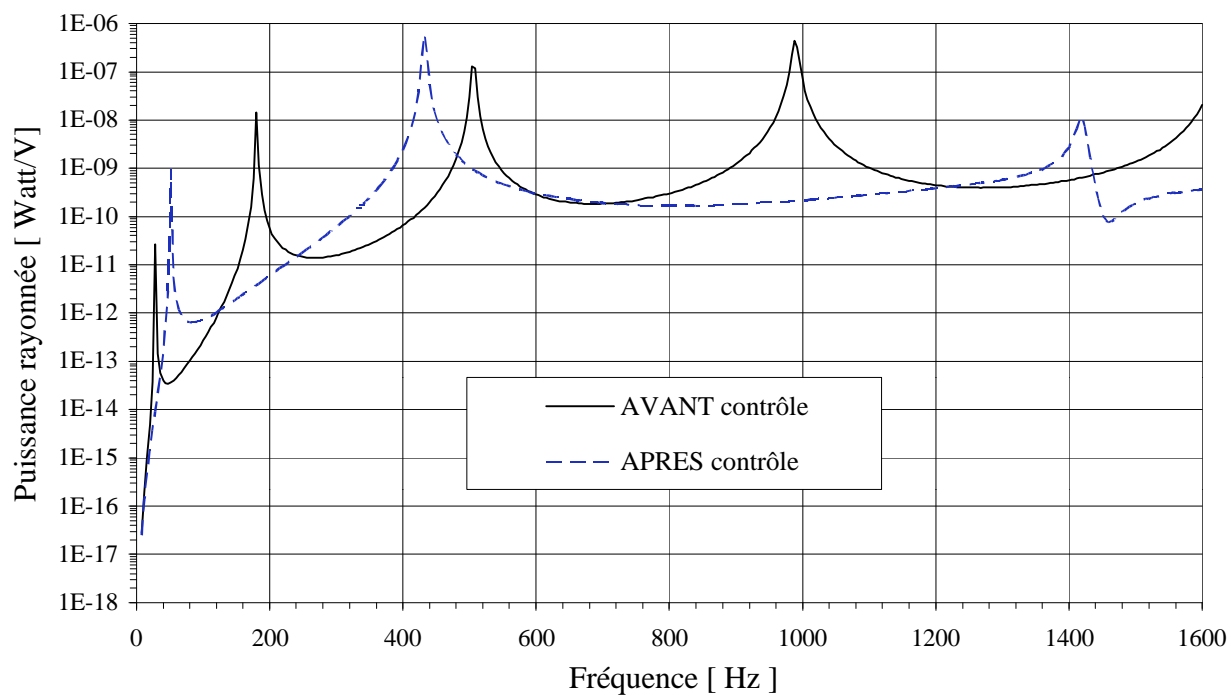


Figure 4.12: Puissances rayonnées avant et après contrôle du déplacement transversal de l'extrémité libre de la poutre encastree-libre.

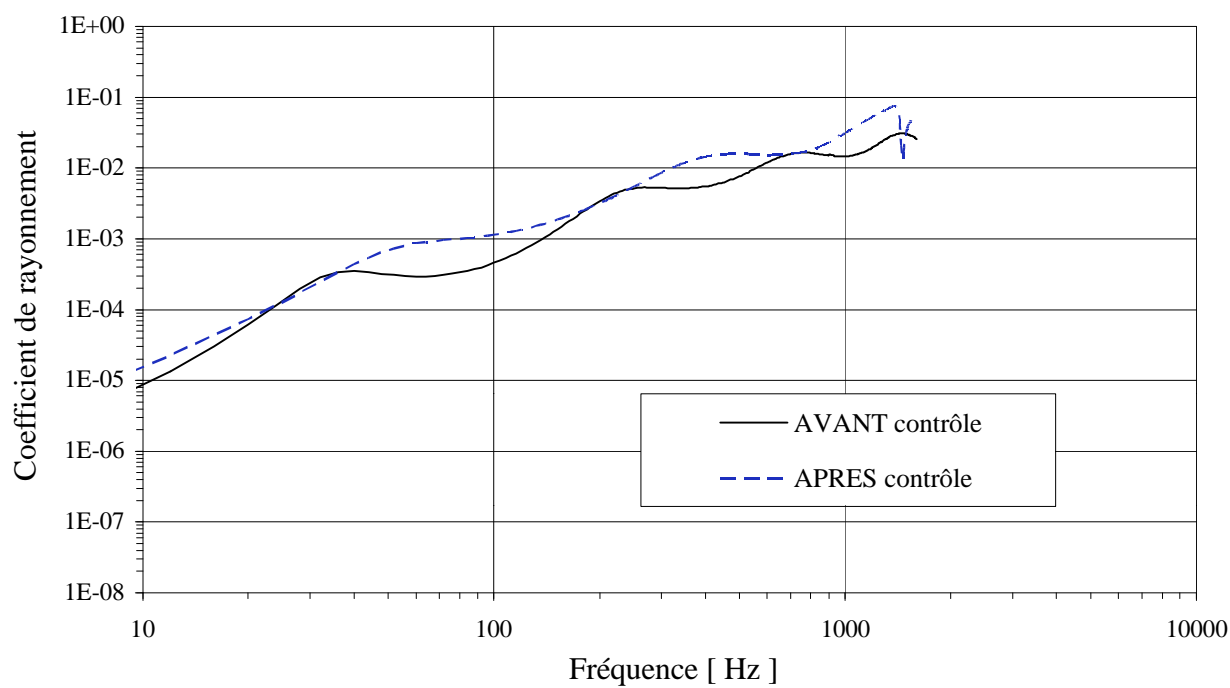


Figure 4.13: Coefficients de rayonnement avant et après contrôle du déplacement transversal de l'extrémité libre de la poutre encastree-libre.

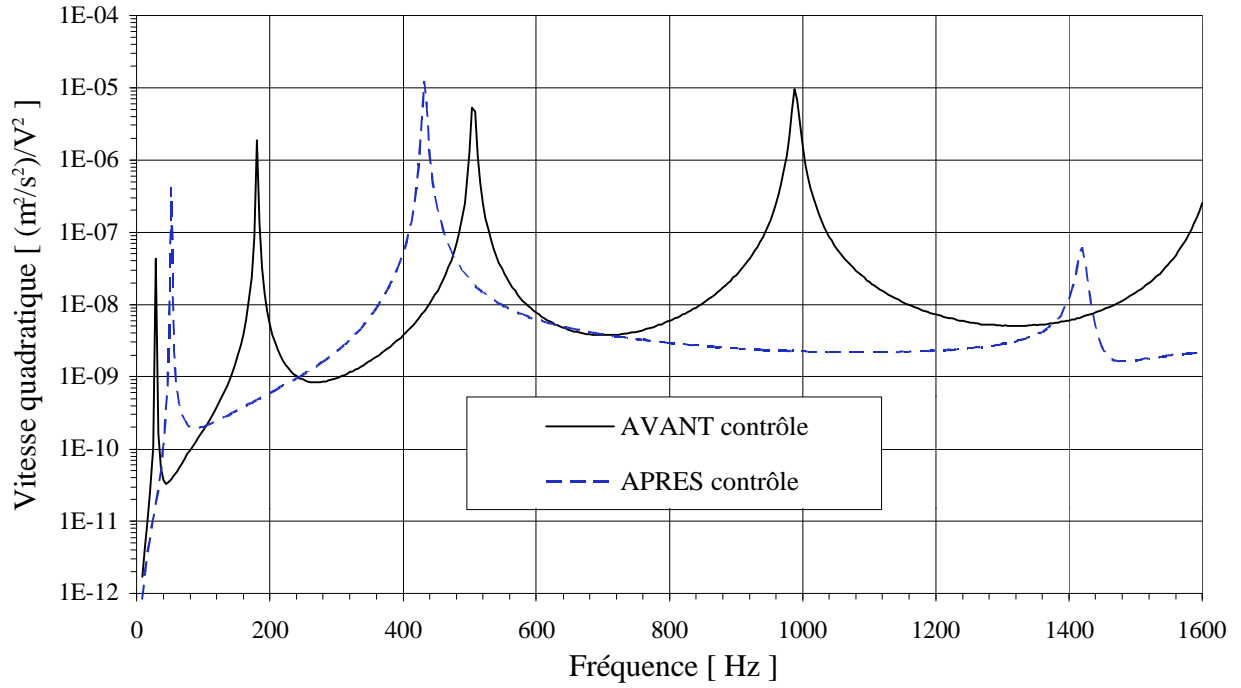


Figure 4.14: Vitesses quadratiques avant et après contrôle du déplacement transversal de l'extrémité libre de la poutre encastree-libre.

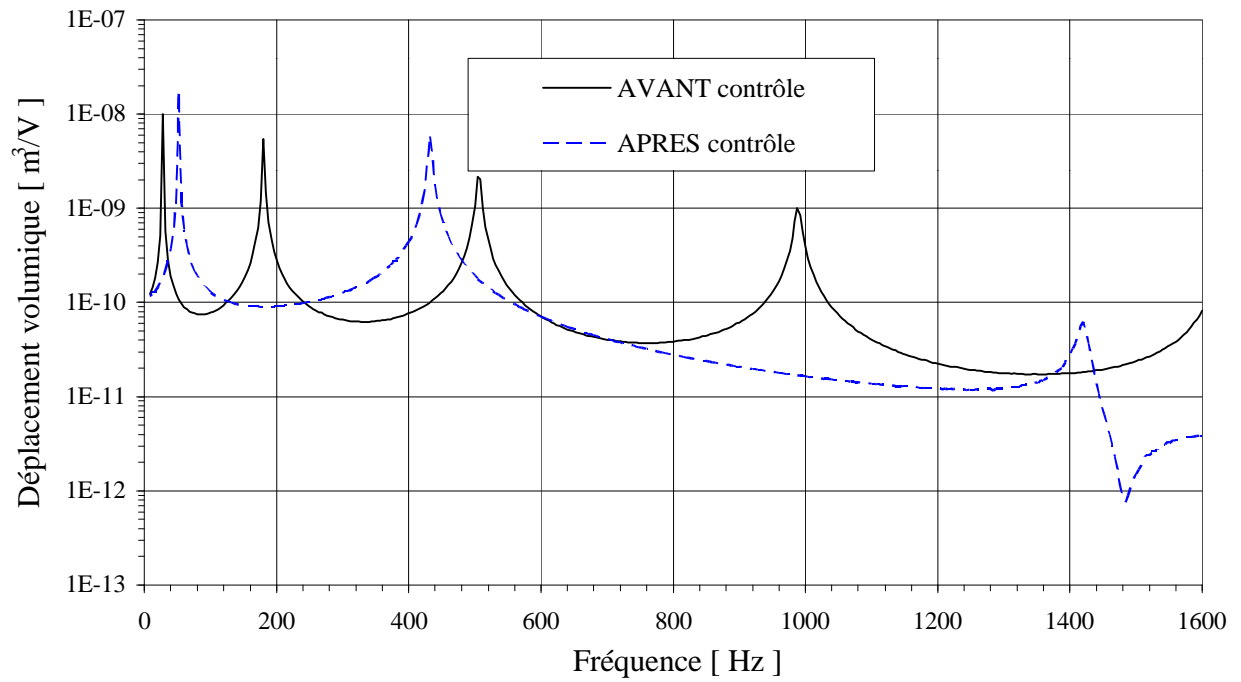


Figure 4.15: Déplacements volumiques avant et après contrôle du déplacement transversal de l'extrémité libre de la poutre encastree-libre.

Le contrôle d'une information étendue fait à l'aide d'un capteur étendu (film PVDF) assure que les restructurations de la déformée transversale de la poutre n'ont pas d'effets néfastes. Comme il a été montré à la section précédente, les régénérations de la puissance acoustique lors d'un contrôle de déplacement volumique sont associées à un manque d'autorité de l'actionneur de contrôle et non à une mauvaise restructuration de la déformée.

#### 4.5 Validation expérimentale du contrôle actif de déplacement volumique

L'auteur tient à remercier et à souligner l'excellent travail qui a été fait par Bruno Paillard et Martin Bouchard du département de génie électrique. Ce sont eux qui ont fait l'implantation expérimentale de tout ce qui est électronique (pré-ampli haute impédance, mise en oeuvre de la carte DSP, programmation des algorithmes de contrôle, etc.).

Un contrôleur harmonique feedforward avec un algorithme de type LMS a été utilisé afin de valider expérimentalement la stratégie de contrôle présentée ici ainsi que l'utilisation d'un capteur de déplacement volumique PVDF. La référence de ce contrôleur feedforward est le générateur sinusoïdal connecté au piézocéramique d'excitation. La figure 4.16 montre le montage expérimental utilisé.

Une fois de plus, la poutre encastree-libre utilisée est celle de la section 3.3.4. Les mesures vibratoires sont faites avec le vibromètre laser. Ces mesures permettent de reconstruire les déformées expérimentales de la poutre ainsi que le calcul de la vitesse quadratique et du déplacement volumique avant et après contrôle. De plus, des mesures de pression dans le quart du plan longitudinal de la poutre (plan  $y=0$ ,  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ) sont également effectuées avant et après contrôle. Il faut souligner que ces mesures de pressions sont faites dans le but d'obtenir les tendances de la réduction dans le champ lointain de la poutre. Ce ne sont pas des mesures qui peuvent être comparées directement aux valeurs théoriques de pressions car la poutre expérimentale n'a pas de baffle. Afin d'avoir un indicateur acoustique global dans le quart du plan de mesure des niveaux de pression, une pseudo-puissance rayonnée est définie comme étant,

$$\Pi = \frac{R^2}{\rho_0 c_0} \int_0^{\pi/2} |p(R, \theta)|^2 \sin(\theta) d\theta . \quad (4.21)$$



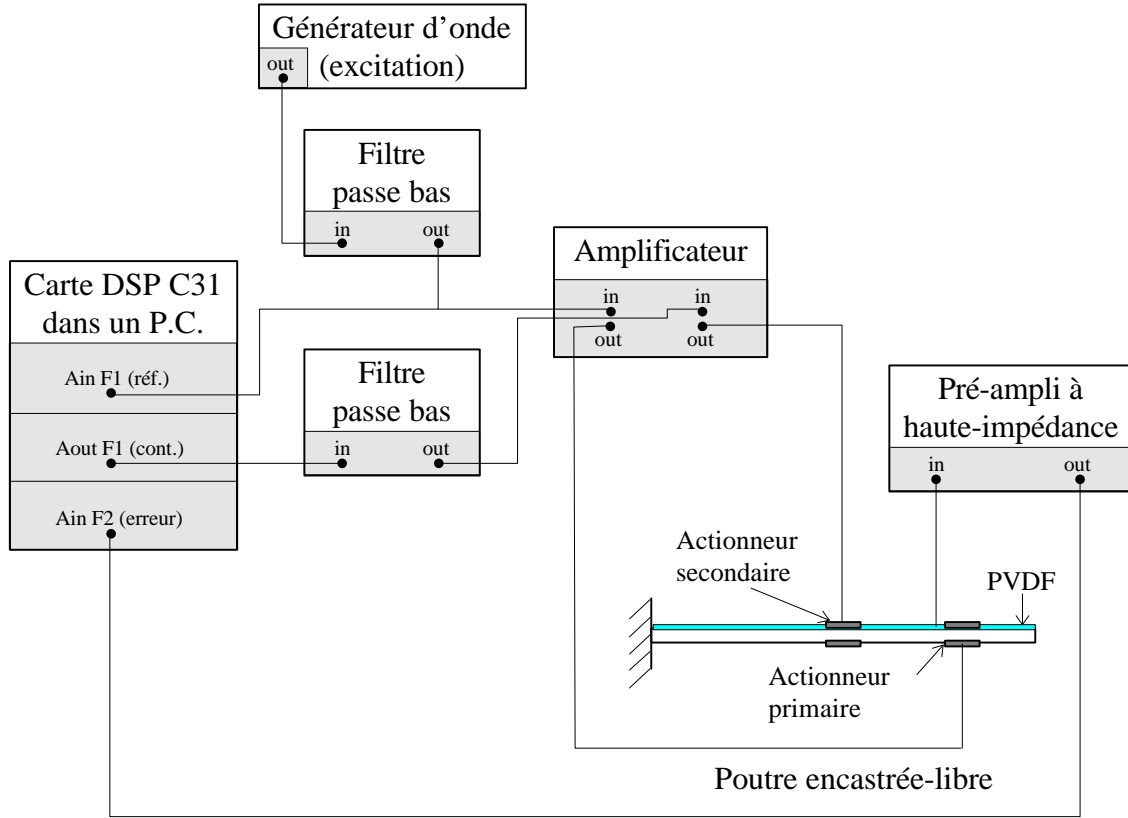


Figure 4.16: Schéma du montage expérimental du système de contrôle actif pour poutre.

Puisque les mesures de pression sont faites à différents angles  $\theta_i$  donnés, la version discrétisée de cette équation s'écrit,

$$\Pi = \frac{\pi R^2}{2I\rho_0 c_0} \sum_{i=1}^I |p(R, \theta_i)|^2 \sin(\theta_i). \quad (4.22)$$

Cette pseudo-puissance est calculée puis normalisée pour chacune des fréquences de mesure.

Les six fréquences considérées sont; 100, 180, 400, 505, 625 et 983Hz. Les fréquences 180, 505 et 983Hz correspondent aux modes 2, 3 et 4 respectivement. Les autres fréquences sont hors résonances et se situent entre ces différents modes. Les résultats théoriques pour ces six fréquences sont présentés aux figures 4.17 à 4.22. Les résultats expérimentaux correspondants sont présentés aux figures 4.23 à 4.28.

Les résultats théoriques de pression avant contrôle sont pratiquement d'amplitude constante sur tout le quart de cercles. Ceci est typique d'une source monopolaire. Après contrôle, le niveau de pression n'est plus du tout constant et un minimum apparaît à  $\theta = 0^\circ$ . Alors, la distribution de pression est typique d'une source dipolaire. De plus, la minimisation de la pression le long de l'axe z confirme le lien entre la pression le long de cet axe et le déplacement volumique. Le signal d'erreur fourni par le capteur de déplacement volumique PVDF donne les mêmes résultats que si ce signal d'erreur provenait d'un microphone posé le long de l'axe z.

Les résultats théoriques vibratoires pour les résonances, figures 4.18, 4.20 et 4.22, montrent que le contrôle du déplacement volumique agit sur la déformée de la structure ainsi que sur le niveau vibratoire de cette dernière. Effectivement, pour ces trois fréquences, la réduction du niveau vibratoire est l'élément essentiel à la réduction de la pseudo-puissance dans le plan.

Hors résonance, les réductions de la pseudo-puissance pour les fréquences 100Hz (figure 4.17) et 400Hz (figure 4.19) proviennent principalement de la restructuration de la déformée de la poutre. Les réductions du niveau vibratoire pour ces deux fréquences sont faibles par rapport à celles obtenues pour la pseudo-puissance.

La fréquence 625Hz est un exemple où le manque d'autorité du contrôleur fait augmenter la pseudo-puissance. Afin de minimiser le déplacement volumique, il faut que le contrôleur induise de grands déplacements. Ces grands déplacements ont pour effets d'augmenter de façon importante le niveau vibratoire de la structure, ce qui a comme répercussion une augmentation de la pseudo-puissance. Pour cette fréquence, les gains pouvant être obtenus sur la pseudo-puissance par la réduction du déplacement volumique sont trop faibles par rapport à l'augmentation du niveau vibratoire.

Les résultats expérimentaux sont obtenus en effectuant des mesures de vitesse à l'aide d'un vibromètre laser sur dix points équidistants le long de la poutre. Les mesures de pression sont faites avec un microphone positionné à une distance  $R=1.2m$  de la poutre.

Les résultats expérimentaux de pression pour la fréquence 100Hz ne sont pas disponibles car cette fréquence se situe sous la fréquence de coupure ( $\approx 120\text{Hz}$ ) de la chambre semi-anéchoïque utilisée. Les résultats de pression pour la fréquence 400Hz ainsi que les résultats vibratoires pour la fréquence 625Hz ne sont également pas disponibles. Ceci est dû à des erreurs de manipulation expérimentale. L'ordre de grandeur entre les déplacements théoriques (figure 4.18) et expérimentaux (figure 4.24) pour la fréquence 180Hz diffère d'un facteur cinq approximativement. Cette différence est probablement due à une erreur entre l'échelle de l'analyseur B&K et celle du vibromètre laser.

À l'exception de la fréquence 625Hz, les déformées transversales de la poutre mesurées expérimentalement concordent excessivement bien avec celles prédites théoriquement.

Il faut noter que les distributions expérimentales de pression diffèrent de celles prédites par le modèle théorique. Ces différences dans les champs de pression sont principalement attribuables au fait que la poutre expérimentale n'a pas de baffle. La poutre expérimentale n'a pas de baffle car le but premier de ces mesures de pression est d'obtenir l'ordre de grandeur des réductions possibles pour un cas qui est plus près de la réalité que des conditions limites théoriques.

Les champs de pression théoriques et expérimentaux diffèrent. Cependant, il est intéressant de noter que les réductions de la pseudo-puissance pour les fréquences 505Hz et 983Hz sont approximativement les mêmes. De plus, le gain de la pseudo-puissance à 625Hz prédit par le modèle théorique correspond également à celui obtenu expérimentalement. La réduction théorique de la pseudo-puissance pour la fréquence 180Hz est de 66dB, comparativement à 26dB obtenue expérimentalement. Cette grande différence provient essentiellement du fait que dans le cas théorique les niveaux de pression après contrôle à cette fréquence sont inférieurs à 0dB. Or expérimentalement il est impossible de mesurer de si bas niveaux de pression, le bruit de la chambre semi-anéchoïque se situant à  $\approx 10\text{dB}$ . De plus, il n'a pas été possible de mesurer des niveaux de pressions expérimentaux à 100Hz, car ces derniers étaient inférieurs à celui du bruit de la chambre anéchoïque, soit  $\approx 10\text{dB}$ . Malheureusement, il n'est pas possible de faire des comparaisons pour la fréquence 400Hz due à la non-disponibilité des mesures de pression expérimentales (erreurs de manipulations).

	Avant contrôle (dB)	Après contrôle (dB)	Différences(dB)
Vitesse quadratique	-97.4	-102.8	5.4
Débit volumique	-202.3	$-\infty$	—
Pseudo-puissance normalisée	20.7	-11.8	32.5

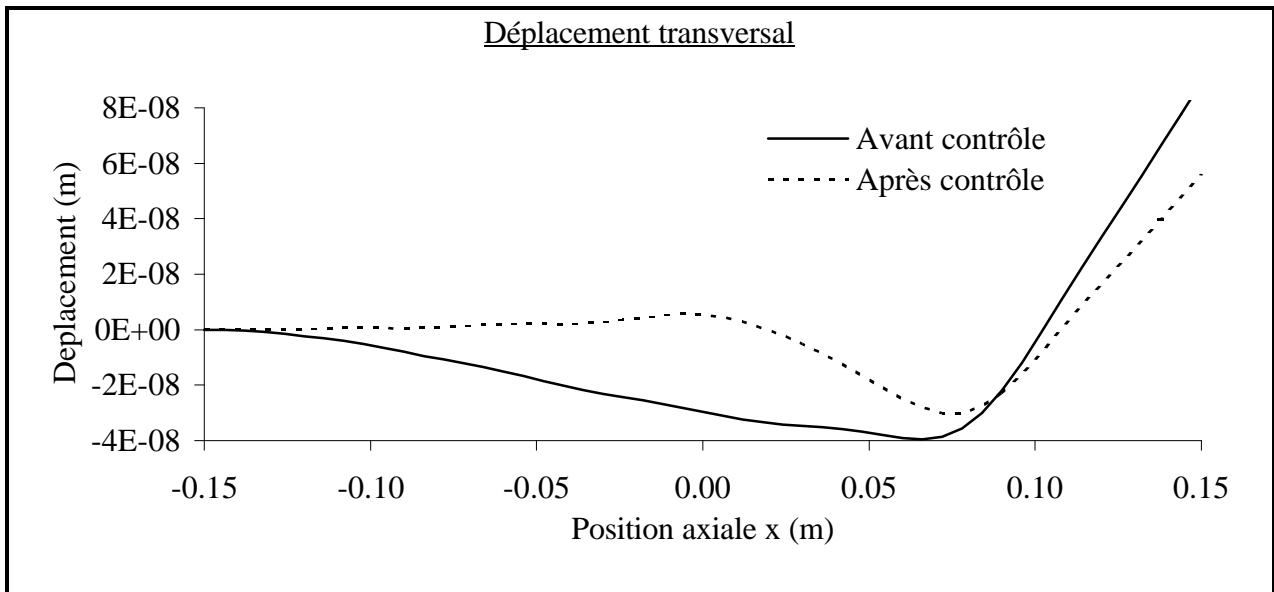
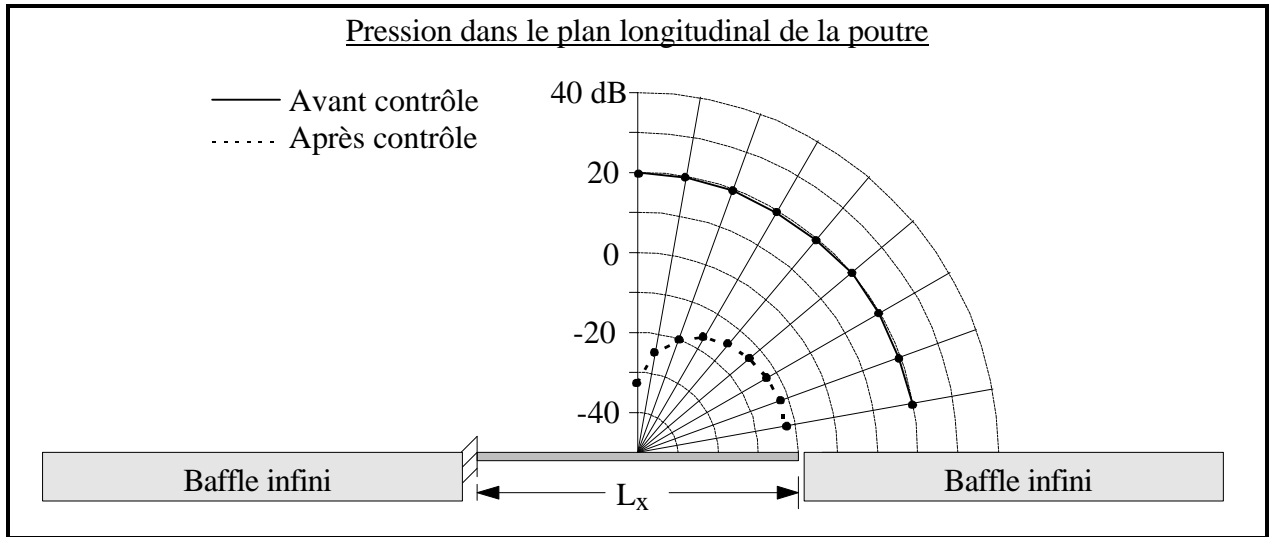


Figure 4.17: Résultats théoriques à la fréquence **100 Hz**

	Avant contrôle (dB)	Après contrôle (dB)	Différences(dB)
Vitesse quadratique	-58.0	-97.3	39.3
Débit volumique	-166.0	$-\infty$	—
Pseudo-puissance normalisée	67.5	1.2	66.3

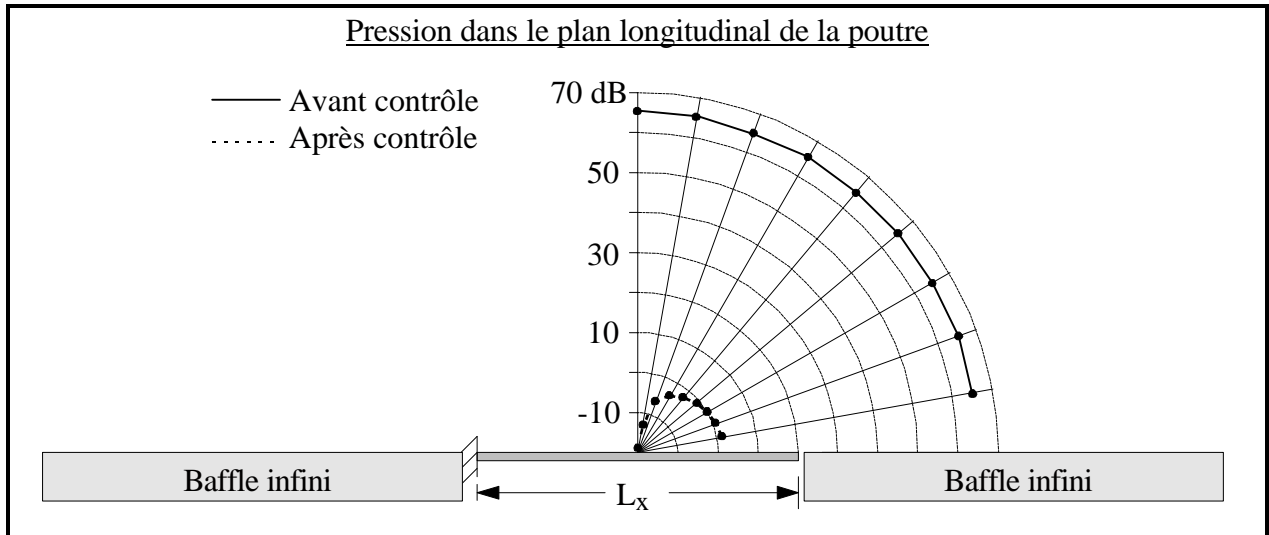
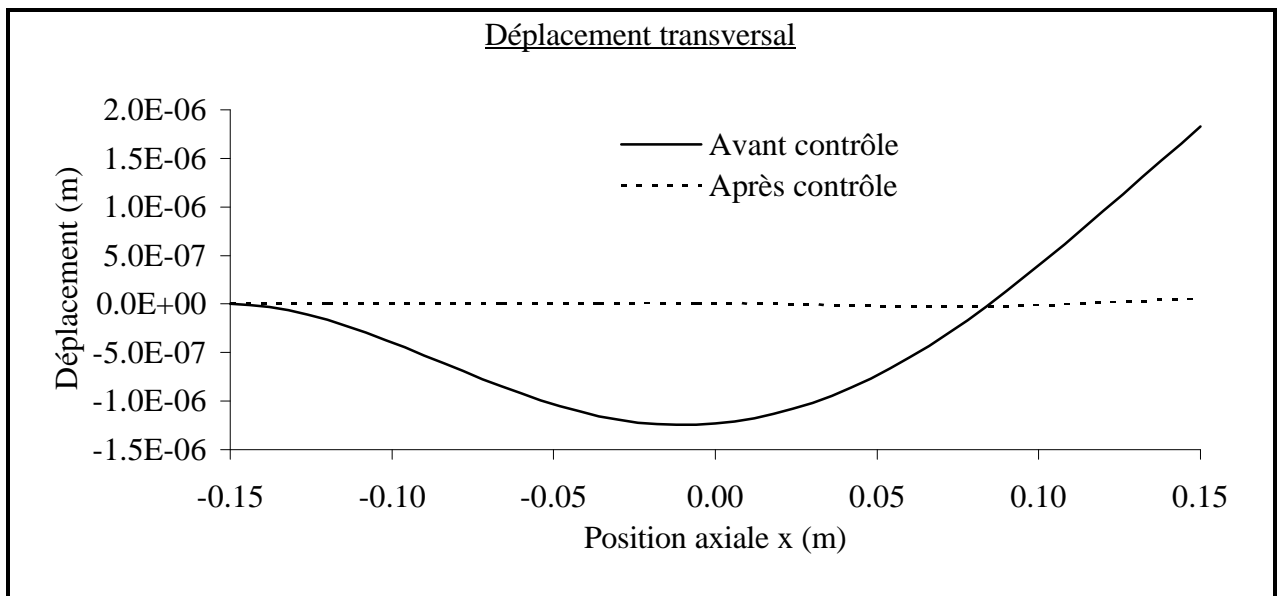


Figure 4.18: Résultats théoriques à la fréquence **180 Hz**



	Avant contrôle (dB)	Après contrôle (dB)	Différences(dB)
Vitesse quadratique	-84.3	-86.2	1.9
Débit volumique	-202.4	$-\infty$	—
Pseudo-puissance normalisée	44.6	25.8	18.8

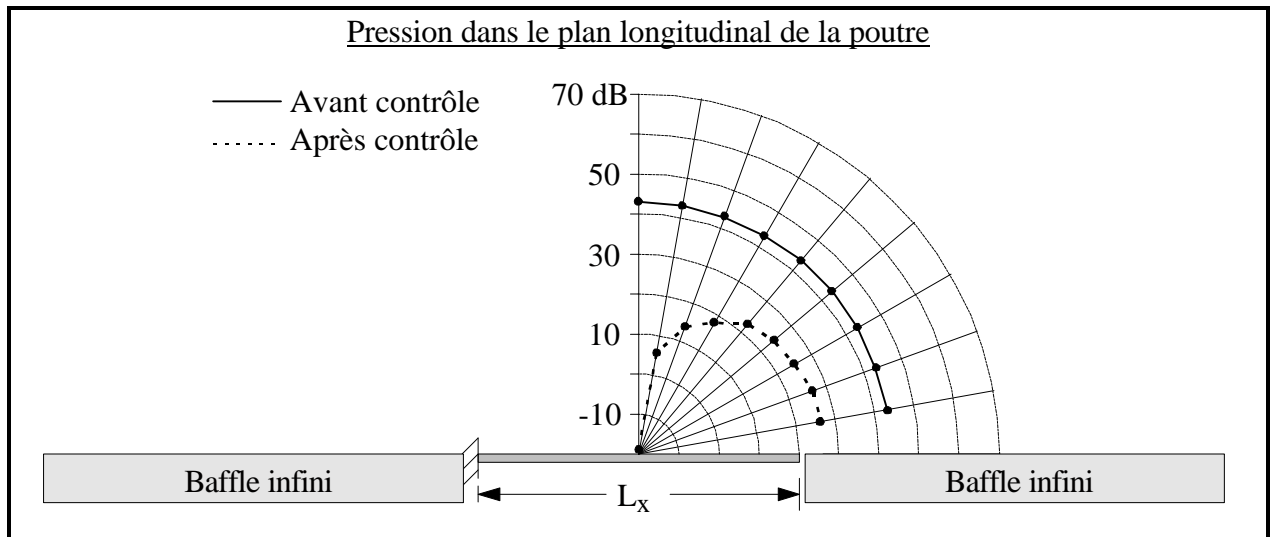
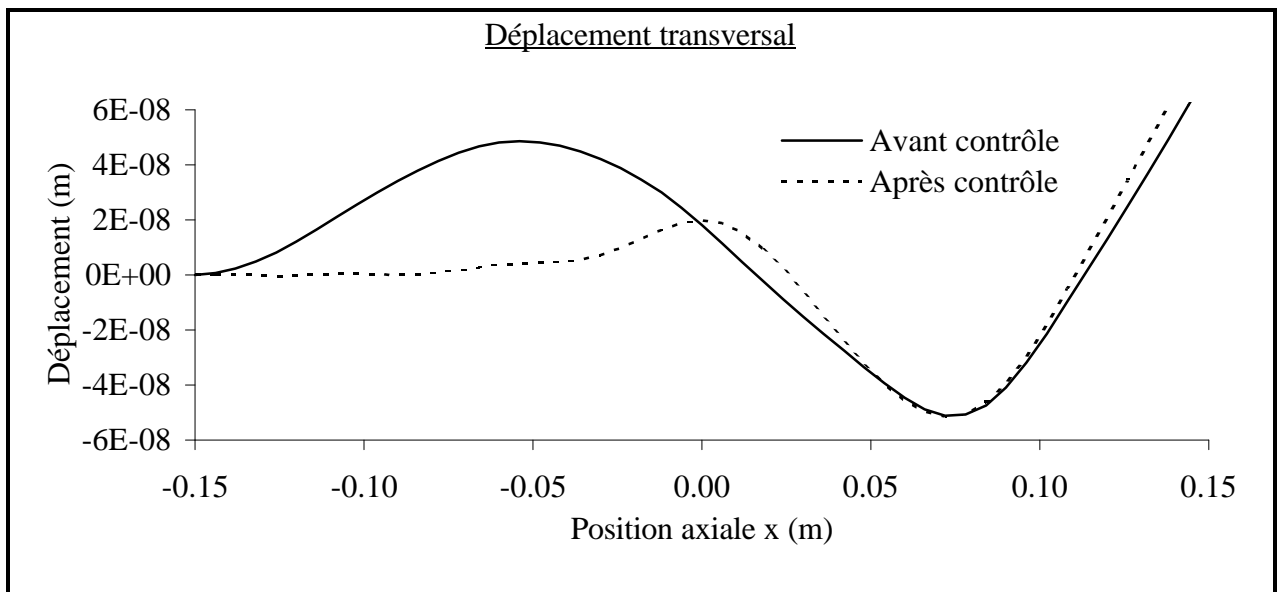


Figure 4.19: Résultats théoriques à la fréquence **400 Hz**



	Avant contrôle (dB)	Après contrôle (dB)	Différences(dB)
Vitesse quadratique	-51.7	-78.7	27.0
Débit volumique	-172.3	$-\infty$	—
Pseudo-puissance normalisée	79.3	38.4	40.9

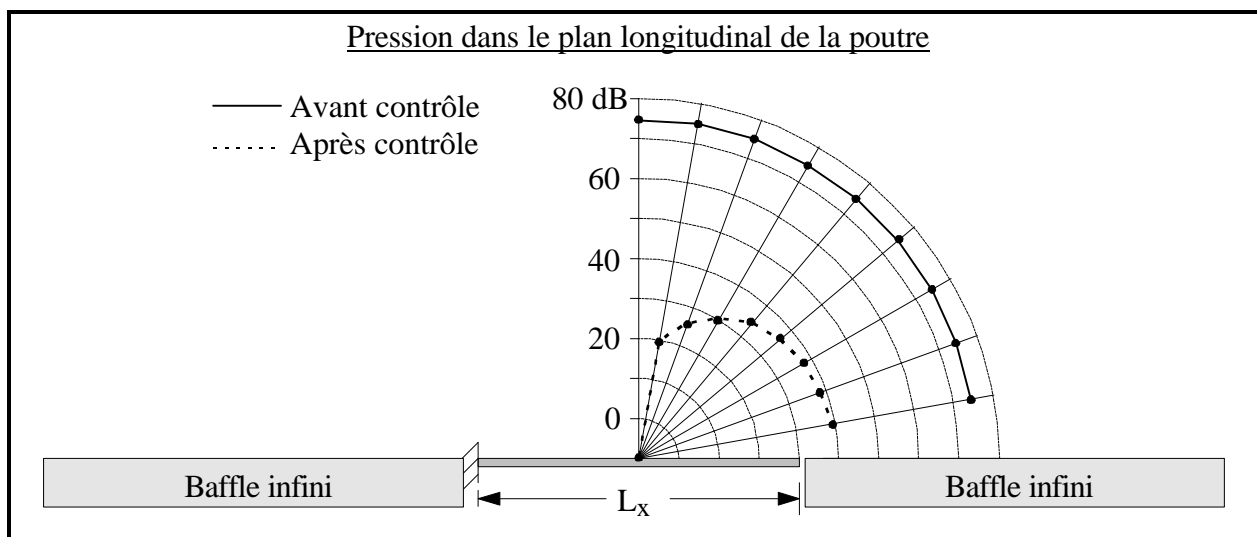
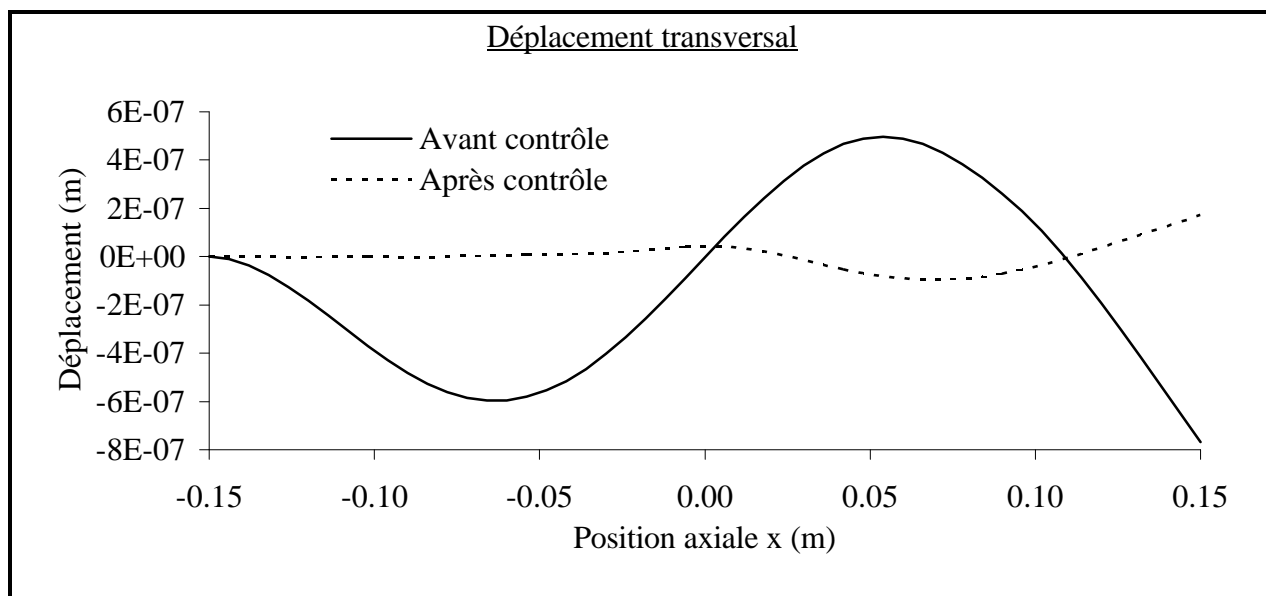


Figure 4.20: Résultats théoriques à la fréquence **505 Hz**



	Avant contrôle (dB)	Après contrôle (dB)	Différences(dB)
Vitesse quadratique	-82.6	-66.2	-16.4
Débit volumique	-204.9	$-\infty$	—
Pseudo-puissance normalisée	50.5	55.4	-4.9

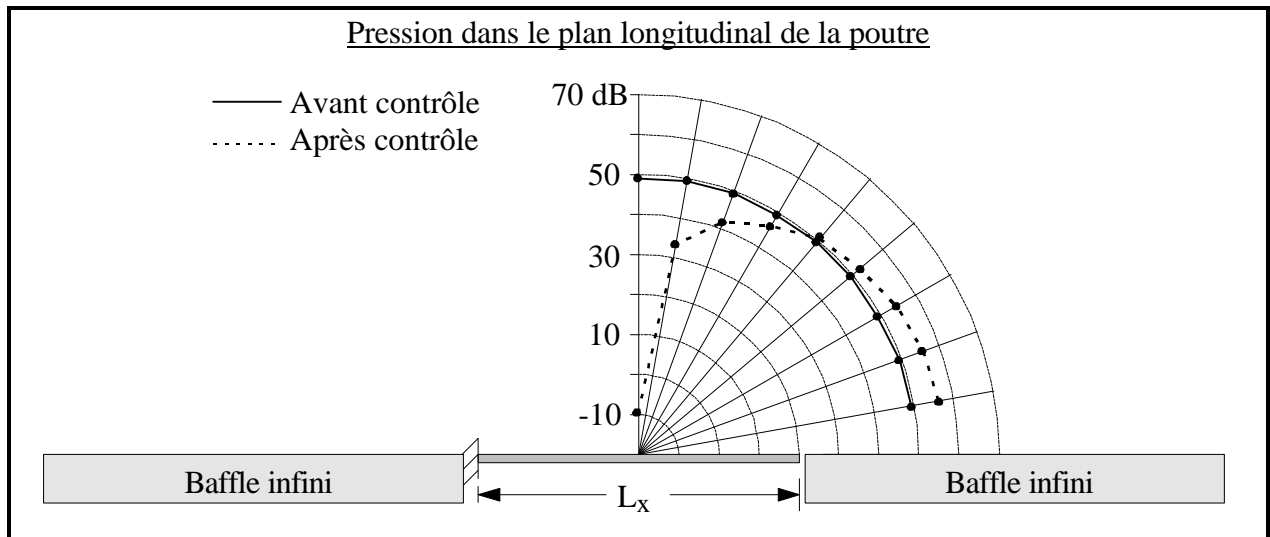
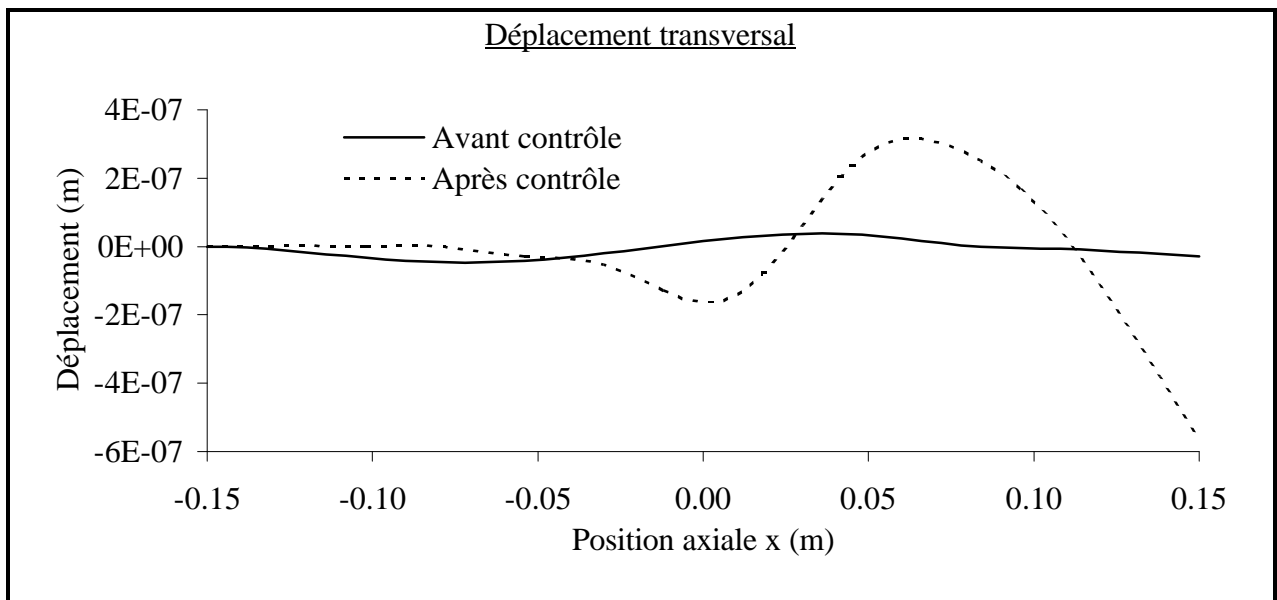


Figure 4.21: Résultats théoriques à la fréquence **625 Hz**





	Avant contrôle (dB)	Après contrôle (dB)	Différences(dB)
Vitesse quadratique	-55.3	-88.8	33.5
Débit volumique	-185.0	$-\infty$	—
Pseudo-puissance normalisée	78.0	44.9	33.1

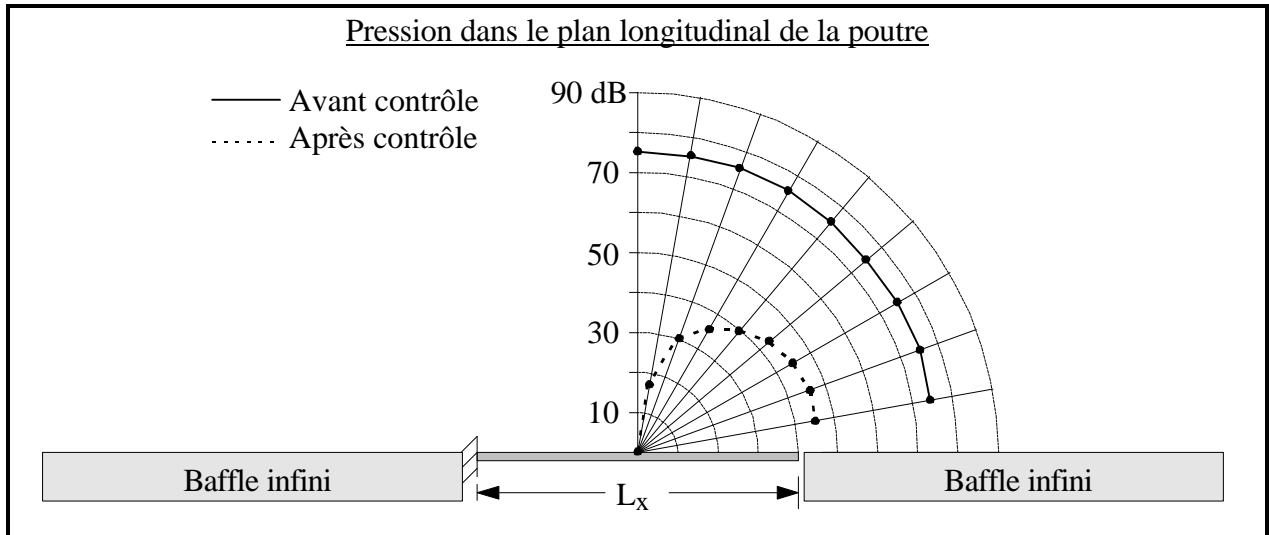
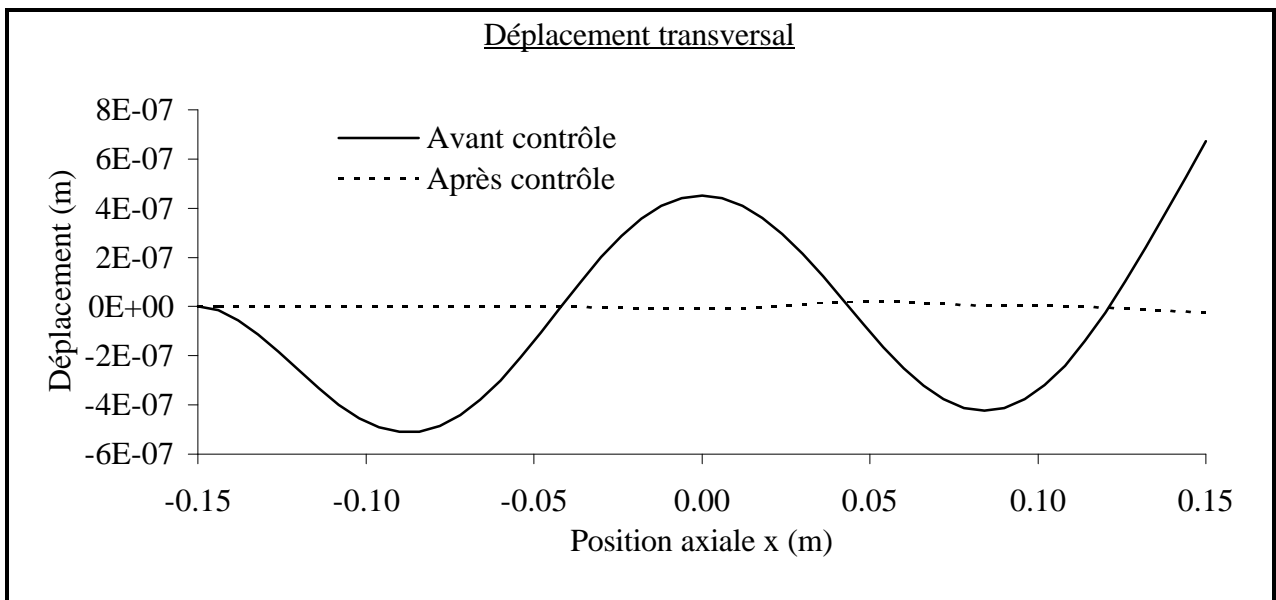


Figure 4.22: Résultats théoriques à la fréquence **988 Hz**



	Avant contrôle (dB)	Après contrôle (dB)	Différences(dB)
Identif. branche de contrôle	0	-16.5	16.5
Contrôleur (Signal PVDF)	0	-23.4	23.4
Vitesse quadratique	-97.8	-103.4	5.6
Débit volumique	-202.0	-211.3	9.3
Pseudo-puissance normalisée	N.D.	N.D.	N.D.

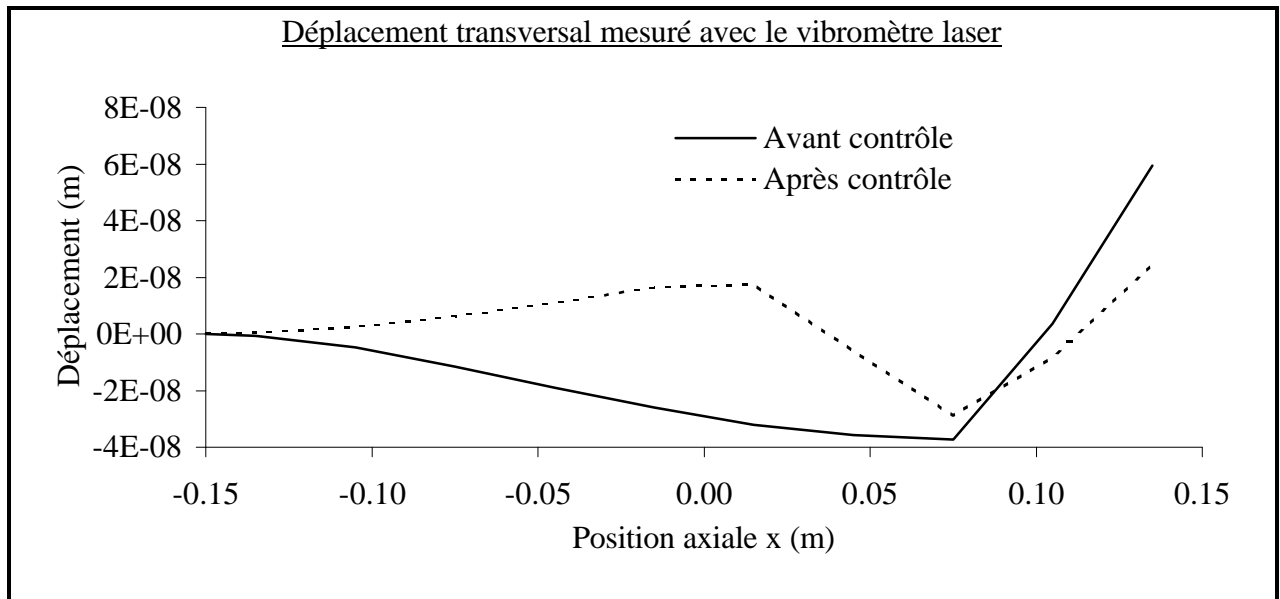
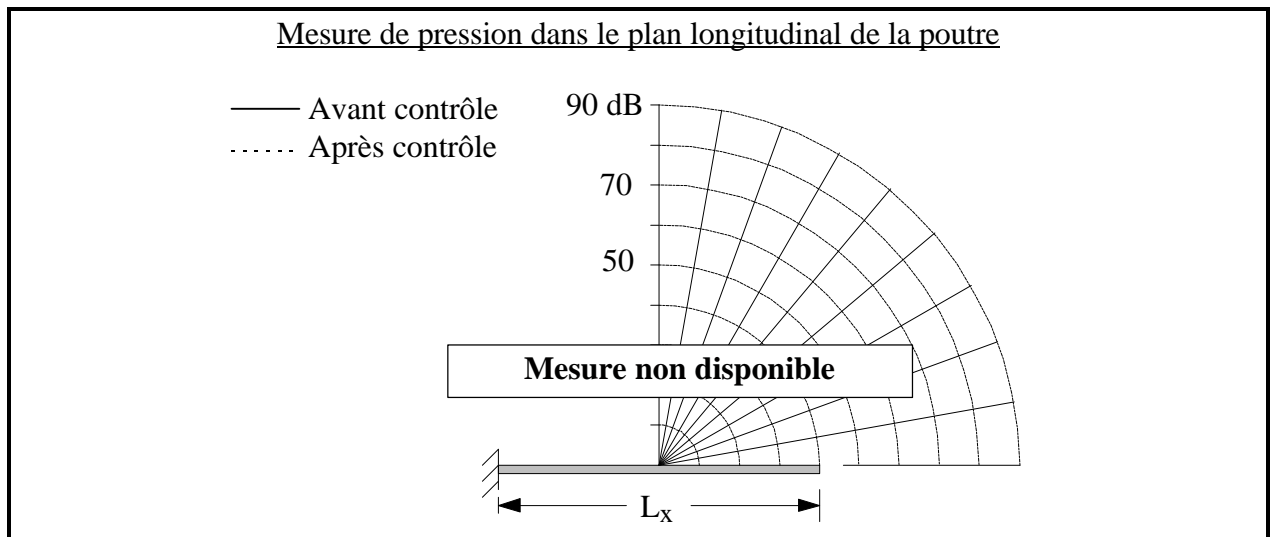


Figure 4.23: Résultats expérimentaux à la fréquence **100 Hz**

	Avant contrôle (dB)	Après contrôle (dB)	Différences(dB)
Identif. branche de contrôle	0	-11.0	11.0
Contrôleur (Signal PVDF)	0	-44.2	44.2
Vitesse quadratique	-48.4	-97.8	49.4
Débit volumique	-156.2	-209.4	53.2
Pseudo-puissance normalisée	35.6	9.5	26.1

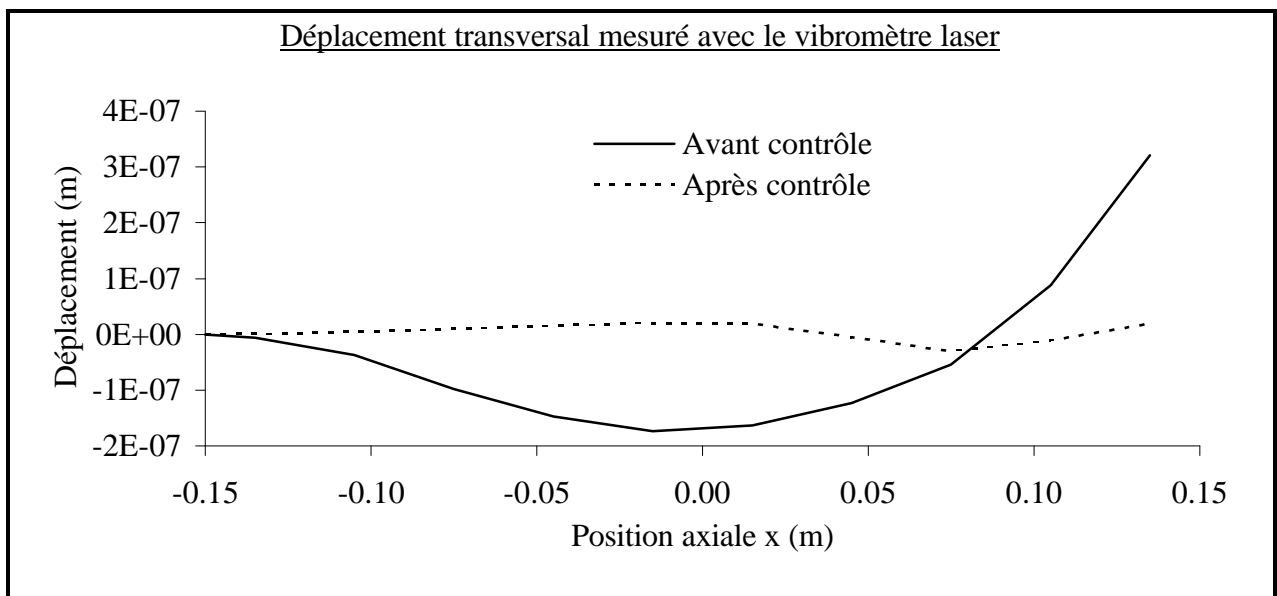
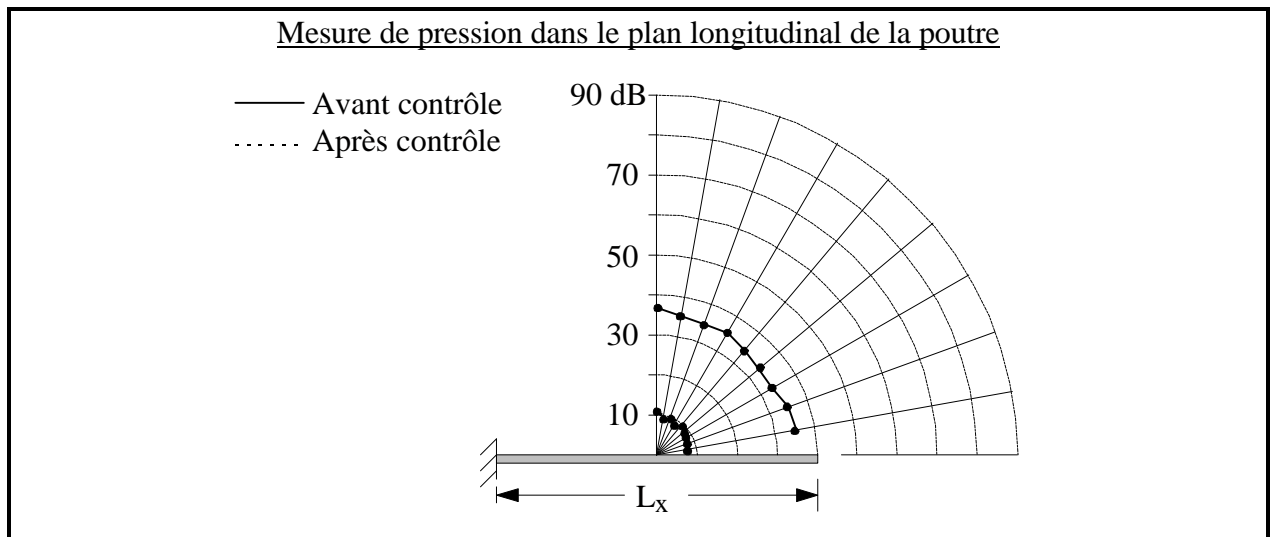


Figure 4.24: Résultats expérimentaux à la fréquence **180 Hz**

	Avant contrôle (dB)	Après contrôle (dB)	Différences(dB)
Identif. branche de contrôle	0	-10.0	10.0
Contrôleur (Signal PVDF)	0	-11.1	11.1
Vitesse quadratique	-84.8	-86.5	1.7
Débit volumique	-203.3	-209.7	6.4
Pseudo-puissance normalisée	N.D.	N.D.	N.D.

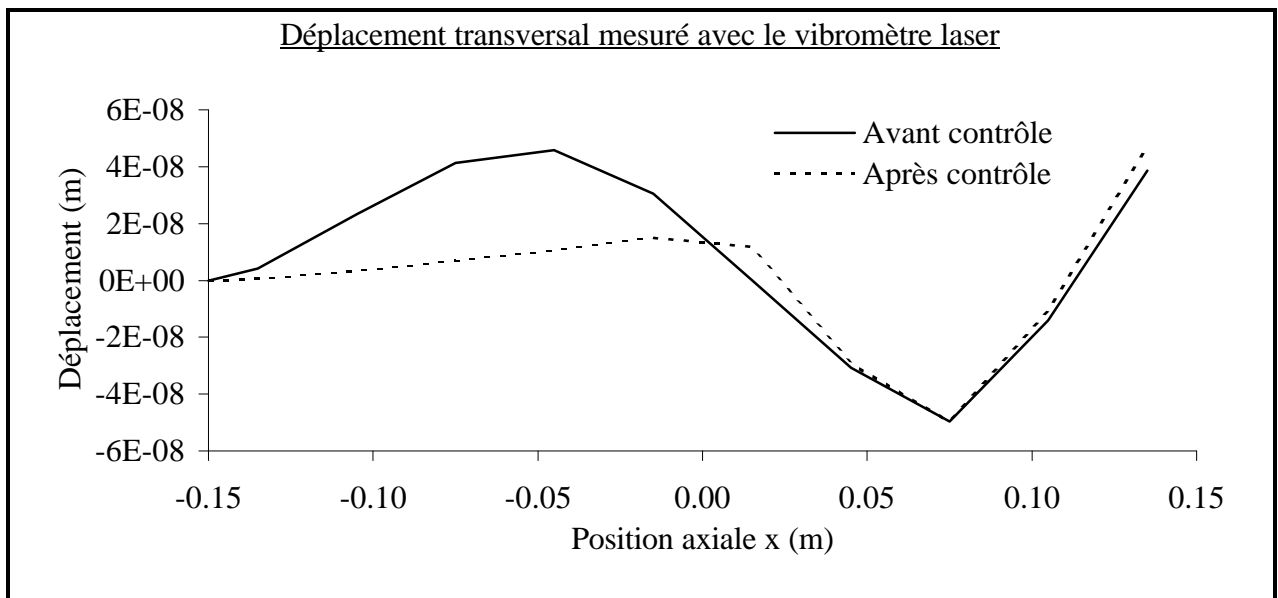
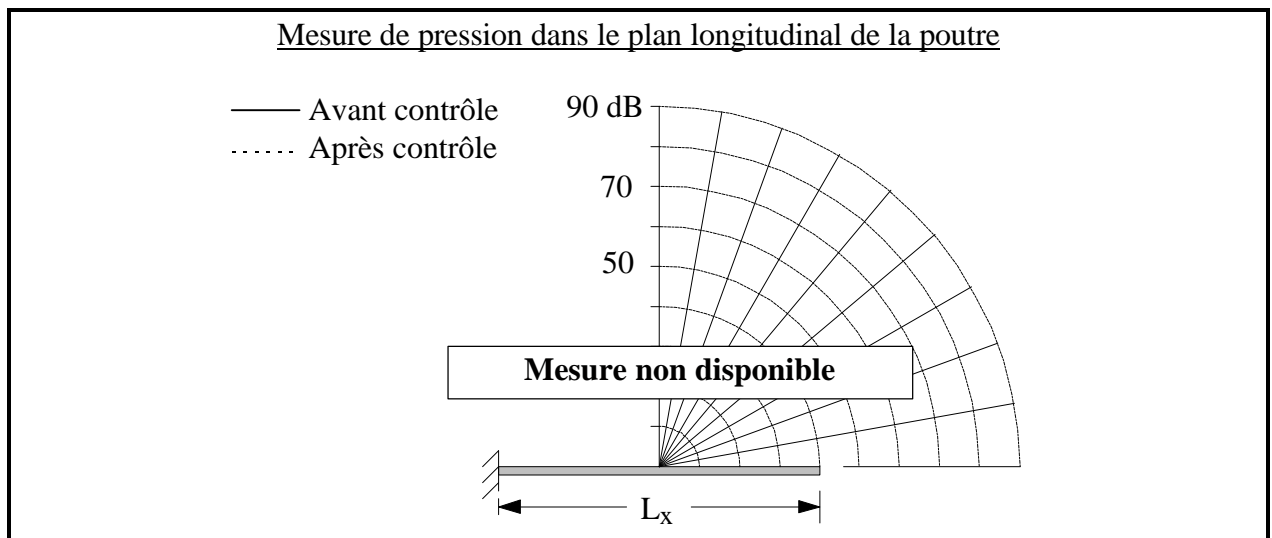


Figure 4.25: Résultats expérimentaux à la fréquence **400 Hz**

	Avant contrôle (dB)	Après contrôle (dB)	Différences(dB)
Identif. branche de contrôle	0	-10.0	10.0
Contrôleur (Signal PVDF)	0	-42.9	42.9
Vitesse quadratique	-42.5	-77.7	35.2
Débit volumique	-162.5	-199.1	36.6
Pseudo-puissance normalisée	52.6	16.8	35.8

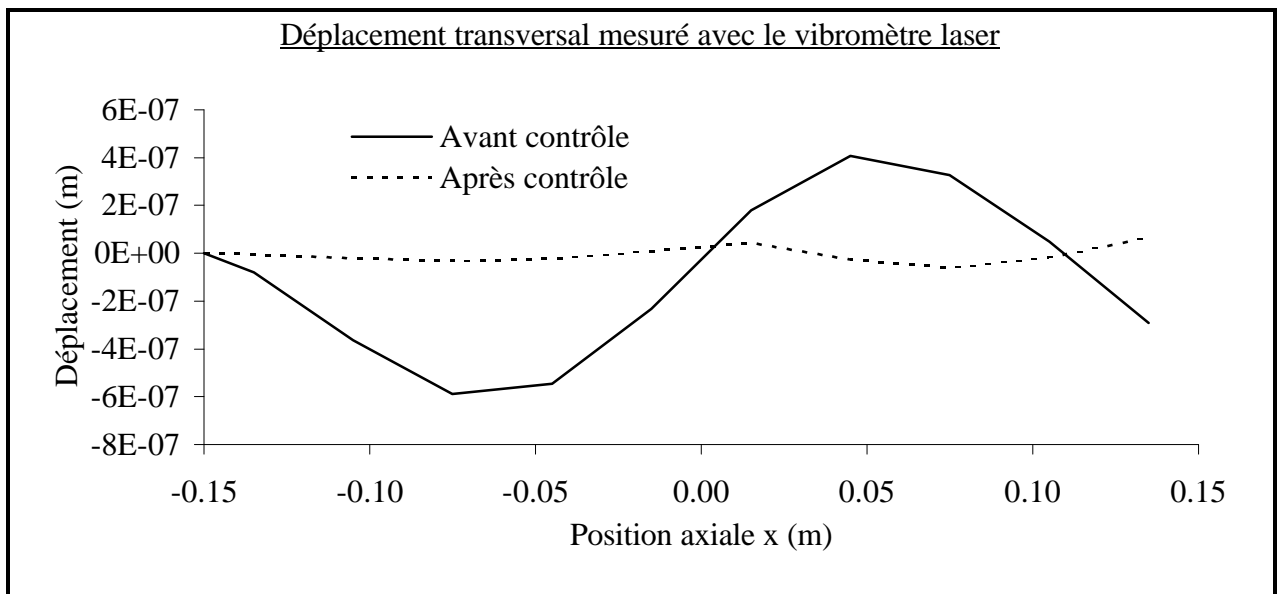
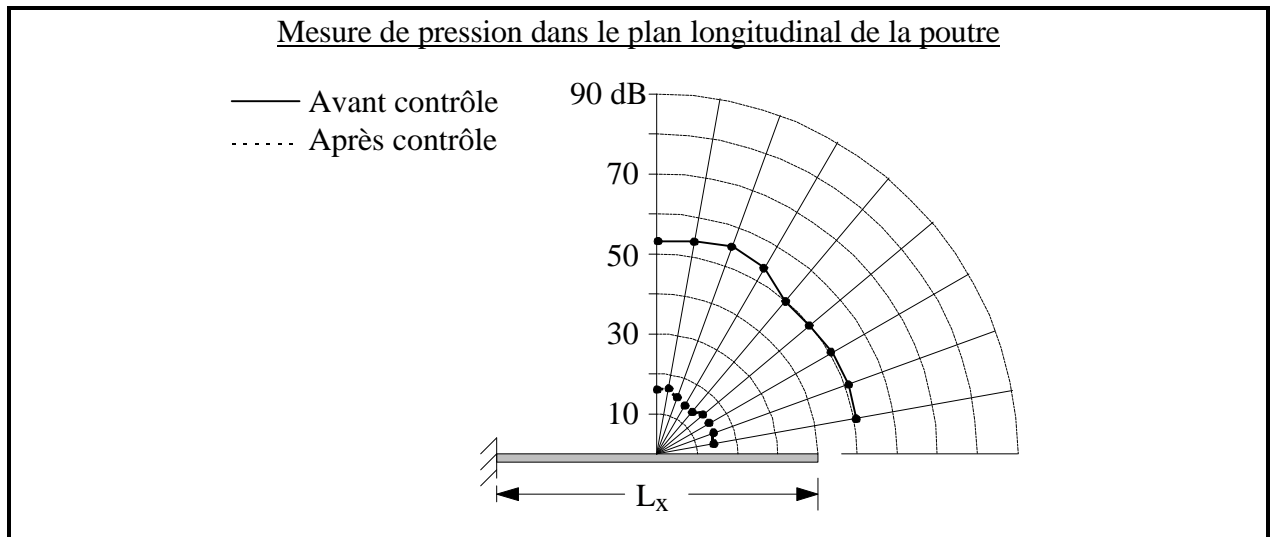


Figure 4.26: Résultats expérimentaux à la fréquence **505 Hz**

	Avant contrôle (dB)	Après contrôle (dB)	Différences(dB)
Identif. branche de contrôle	0	-16.0	16.0
Contrôleur (Signal PVDF)	0	-21.0	21.0
Vitesse quadratique	-83.3	-80.4	-2.9
Débit volumique	-204.9	-204.6	-0.3
Pseudo-puissance normalisée	14.8	17.6	-2.8

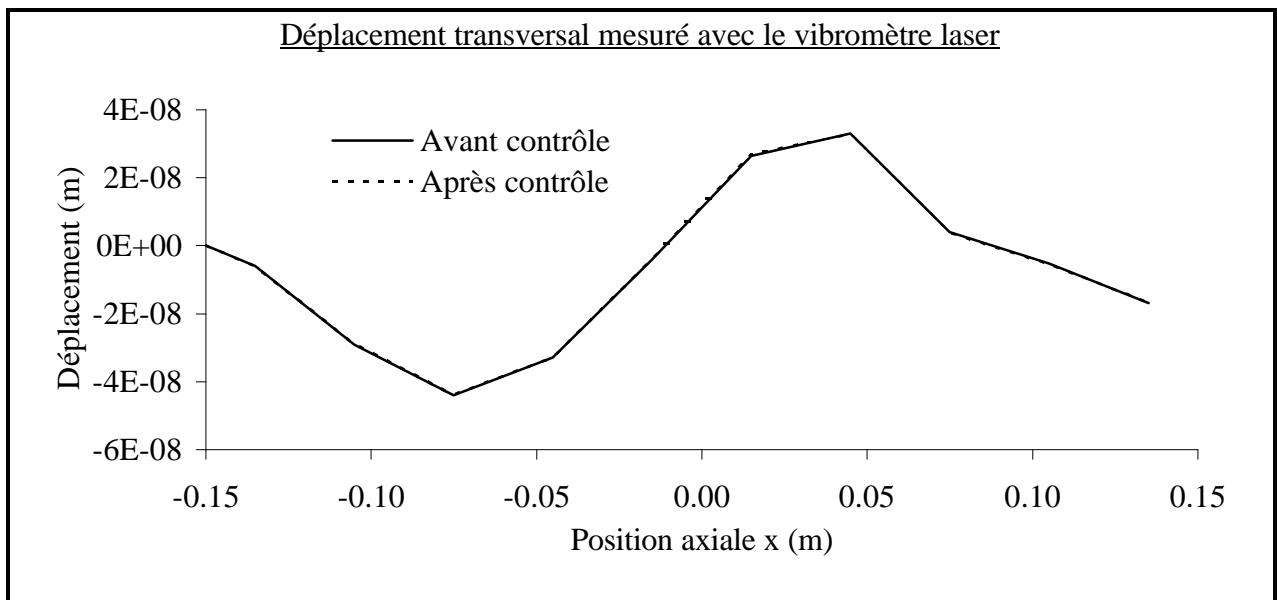
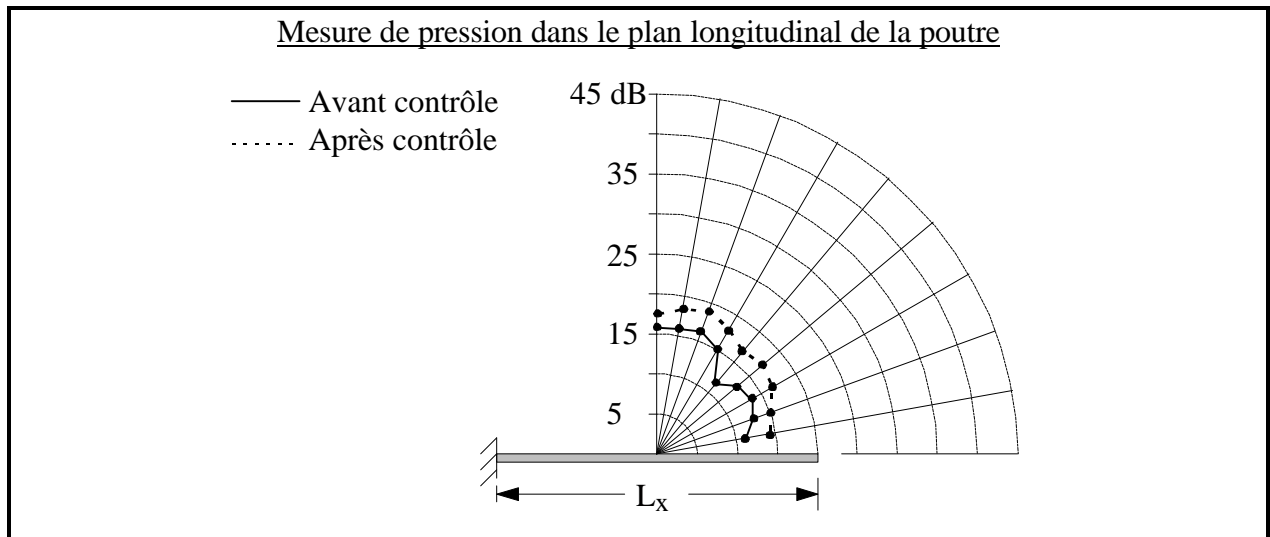


Figure 4.27: Résultats expérimentaux à la fréquence **625 Hz**

	Avant contrôle (dB)	Après contrôle (dB)	Différences(dB)
Identif. branche de contrôle	0	-9.6	9.6
Contrôleur (Signal PVDF)	0	-38.3	38.3
Vitesse quadratique	-46.5	-79.5	33.0
Débit volumique	-165.7	-199.2	33.5
Pseudo-puissance normalisée	71.5	40.2	31.3

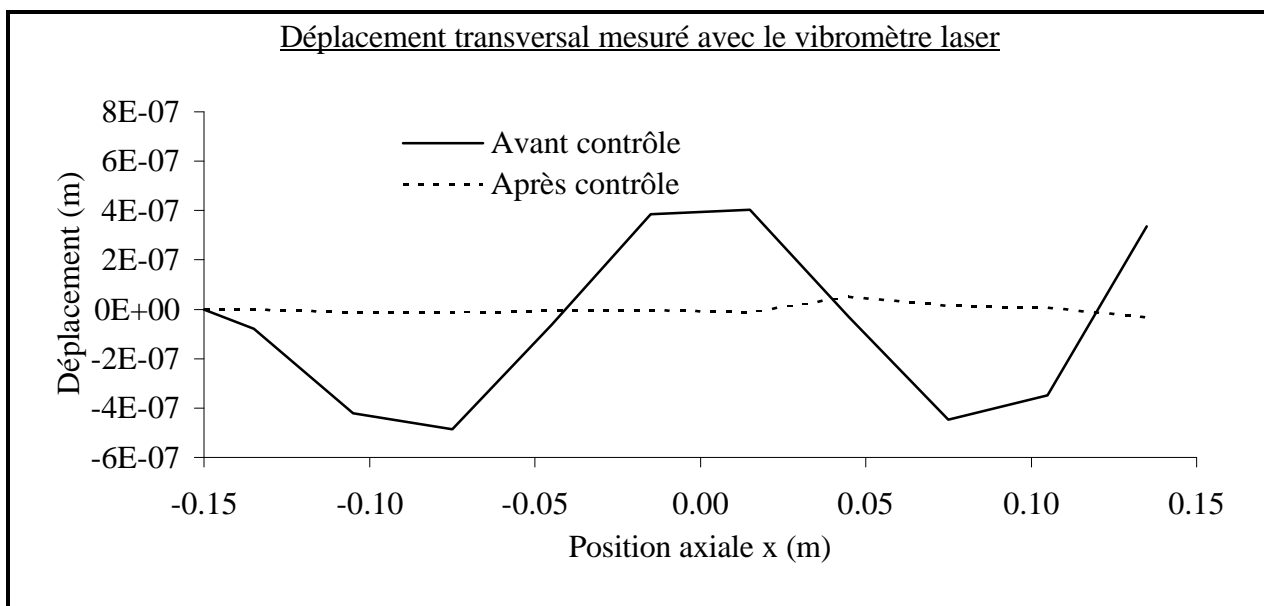
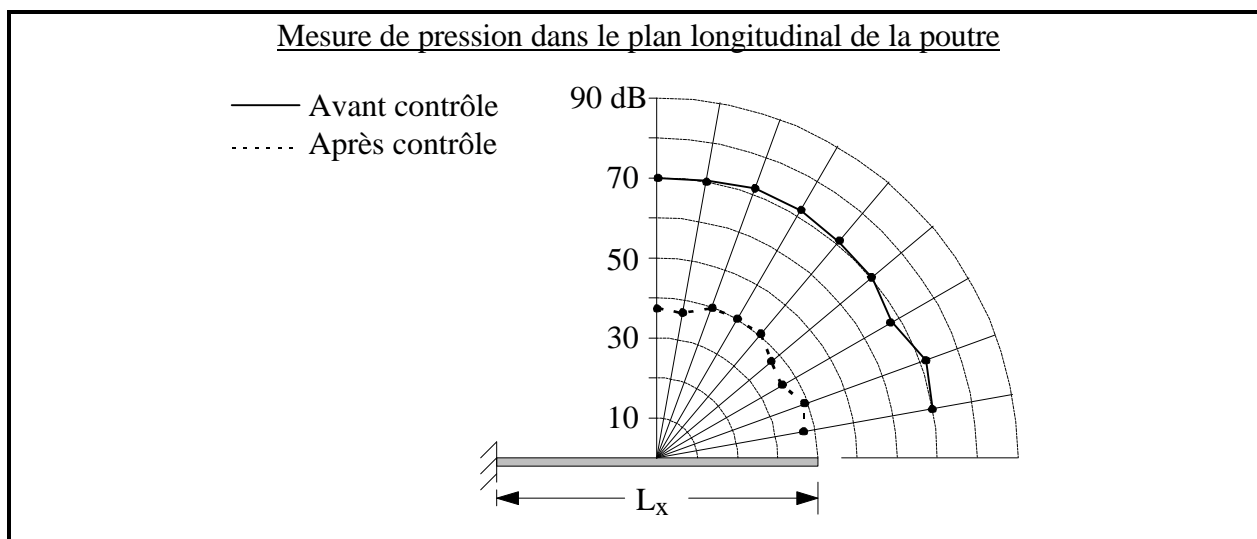


Figure 4.28: Résultats expérimentaux à la fréquence **988 Hz**

## 4.6 Conclusions

Ce chapitre présente les résultats théoriques et expérimentaux obtenus avec un système de contrôle actif du déplacement volumique d'une poutre. Les simulations du contrôle optimal du déplacement volumique ont permis de faire une étude théorique qui a montré que plus une structure a un comportement vibratoire qui a un fort déplacement volumique plus le contrôle de ce dernier donnera de bons résultats. Par exemple, il est impossible de faire du contrôle de déplacement volumique pour une poutre libre-libre, tandis que de très bons résultats sont obtenus sur une large bande de fréquence pour une poutre encastree-libre. Le meilleur indicateur qui permet de trouver la bande de fréquence où le contrôle du déplacement volumique donne d'excellents résultats est la fréquence où les courbes avant et après contrôle du coefficient de rayonnement se croisent.

Les simulations ont également permis de comparer les résultats obtenus avec le contrôle de déplacement volumique à ceux d'un contrôle vibratoire pur. La fonction coût utilisée pour le contrôle vibratoire est le déplacement transversal d'un point. Le point retenu pour une poutre encastree-libre est l'extrémité libre de cette poutre. Les résultats obtenus avec ce contrôle vibratoire montrent que ce type de fonction coût est mal adapté à la réduction du rayonnement acoustique de la poutre. Cette étude a démontrée que, pour obtenir une réduction de la puissance acoustique sur une large bande, le contrôle d'une seule information ponctuelle (déplacement d'un point) ne se compare pas avec celui d'une information étendue (déplacement volumique).

Un contrôleur harmonique feedforward est utilisé pour l'implantation expérimentale d'un système de contrôle actif du déplacement volumique. Des séries de mesure pour six fréquences ont été faites. Les mesures vibratoires expérimentales (déformées de poutre) concordent très bien avec celles données par le modèle théorique. Les champs de pressions théoriques montrent bien que le rayonnement de la poutre est de type monopolaire avant contrôle et multipolaire après contrôle. De plus, la minimisation maximale après contrôle est toujours le long de l'axe  $z$ . Ce qui correspond au même type de champ de pression qui serait obtenu si le capteur d'erreur était un microphone positionné le long de l'axe  $z$ .



Les champs de pression expérimentaux diffèrent de ceux obtenus théoriquement. Ces différences sont principalement dues au fait que la poutre expérimentale n'a pas de baffle. Malgré ces différences dans les champs de pression, les prédictions théoriques de la pseudo-puissance concordent relativement bien avec les valeurs expérimentales.

# Chapitre 5

## EXCITATION SYMÉTRIQUE D'UNE PLAQUE À L'AIDE DE TRANSDUCTEURS PIÉZOÉLECTRIQUES

### 5.1 Introduction

La formulation variationnelle pour un actionneur piézoélectrique posé sur une plaque est développée dans ce chapitre. Comme pour le cas de la poutre, présenté au chapitre 2, cette formulation variationnelle permet d'inclure les effets d'ajout de masse et de raideur des actionneurs sur la réponse dynamique de la plaque.

Seulement une excitation de type symétrique (flexion pure) est considérée pour la plaque. Il n'y a pas vraiment d'intérêts à utiliser une excitation asymétrique comme pour la poutre, car il est très facile de mettre un actionneur et un capteur sur la même surface sans qu'ils se superposent. De plus, l'hypothèse de flexion pure permet d'utiliser directement les résultats (matrices de masse et raideur de la plaque) des travaux de [BERRY 1991].

La formulation variationnelle est une méthode qui est modulaire. Il faut dans un premier temps calculer les matrices de masses et de raideurs de chacun des éléments du système mécanique considéré, ainsi que les vecteurs de force qui s'appliquent sur ce dernier. Puis, l'addition de ces différents vecteurs et matrices donne le système d'équations linéaires du système mécanique considéré.

[BERRY 1991] a développé un modèle variationnel très complet de plaque mince en flexion pure ayant des conditions limites quelconques. Ce qui est absent dans ce modèle, c'est le vecteur de

force ainsi que les matrices de masse et de raideur des éléments piézoélectriques. Le but de ce chapitre est d'appliquer la méthode variationnelle à des éléments piézoélectriques afin de trouver les matrices de masse et de raideur et le vecteur de force de ces derniers. Une fois ces matrices et vecteurs connus, il faut simplement les additionner à celles et ceux du modèle de [BERRY 1991] pour obtenir un modèle variationnel de plaque actionnée par des éléments piézoélectriques. L'acronyme utilisé pour référencer ce nouveau modèle est P.A.E.P. (**P**laque **A**ctionnée par **E**léments **P**iézoélectriques)

## 5.2 Formulation variationnelle

Par définition, un actionneur piézoélectrique pour une plaque est composé d'une paire d'éléments piézocéramiques (PZT), un sur chacune des faces de la plaque. Ces deux éléments sont localisés au même endroit. Cette configuration d'actionneur permet d'introduire uniquement des déplacements transversaux dans la plaque (flexion pure). Seulement les énergies, potentielles et cinétiques, des éléments piézoélectriques sont développées ici. Les équations pour les autres éléments du système mécanique (plaque, conditions limites, etc.) proviennent des travaux de [BERRY 1991].

### 5.2.1 Configuration de la plaque

Le système mécanique plaque-actionneur considéré est montré à la figure 5.1. Les hypothèses faites pour la plaque sont qu'elle est rectangulaire, mince et homogène. Les déplacements transversaux de cette plaque sont faibles en amplitude de telle sorte que son comportement est linéaire. Les conditions limites de la plaque sont modélisées par des ressorts linéiques distribués sur toute la longueur de chaque côté. Ces ressorts contrôlent le déplacement transversal et la rotation des extrémités de la plaque.

Un actionneur piézoélectrique pour plaque est composé d'un élément piézocéramique localisé vis-à-vis un second situé sur la surface opposée, voir la figure 5.1. Il y a un actionnement symétrique (flexion pure) lorsque ces deux éléments piézocéramiques ont les propriétés suivantes:

- Ils occupent la même position  $x_a, y_a$ .
- Ils ont les mêmes dimensions physiques (longueur, largeur et épaisseur).
- Ils ont les mêmes caractéristiques mécaniques et piézoélectriques.
- Il y a un déphasage de  $180^\circ$  entre leur voltage respectif.

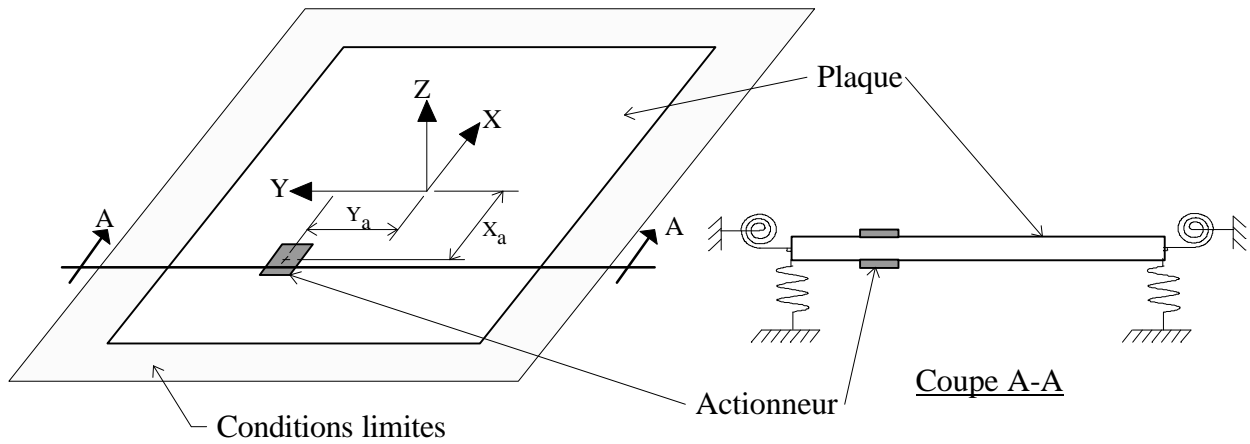


Figure 5.1: Schéma de la configuration plaque-actionneur considérée.

### 5.2.2 Champ de déplacement

Les énergies, potentielles et cinétiques, des éléments piézocéramiques qui composent un actionneur sont calculées à partir du champ de déplacement admissible de la plaque. Une fois de plus, les hypothèses de Love-Kirchoff sont utilisées ce qui permet d'écrire le déplacement de la plaque comme étant,

$$U^{pl}(x, y, z, \tau) = -z \frac{\partial w(x, y, \tau)}{\partial x} \quad (5.1a)$$

$$V^{pl}(x, y, z, \tau) = -z \frac{\partial w(x, y, \tau)}{\partial y} \quad (5.1b)$$

$$W^{pl}(x, y, \tau) = w(x, y, \tau) \quad (5.1c)$$

où  $U^{pl}$ ,  $V^{pl}$  et  $W^{pl}$  sont les déplacements totaux dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  respectivement. Connaissant le champ de déplacement de la plaque et en posant qu'il y a une parfaite adhésion entre les éléments piézocéramiques et la plaque, alors le champ de déplacement de l'élément piézocéramique qui est sur le dessus de la plaque est donné par,

$$U^{pz}(x, y, z^{pz}, \tau) = -\left(z^{pz} + \frac{L_z^{pl} + L_z^{pz}}{2}\right) \frac{\partial w(x, y, \tau)}{\partial x} \quad (5.2a)$$

$$V^{pz}(x, y, z^{pz}, \tau) = -\left(z^{pz} + \frac{L_z^{pl} + L_z^{pz}}{2}\right) \frac{\partial w(x, y, \tau)}{\partial y} \quad (5.2b)$$

$$W^{pz}(x, y, \tau) = w(x, y, \tau) \quad (5.2c)$$

Le champ de déplacement du piézocéramique qui se situe sous la plaque est identique à celui donné en (5.2), à l'exception du signe à l'intérieur des parenthèses qui doit être inversé.

### 5.2.3 Déformations et enthalpie d'un élément piézoélectrique

Les déformations de l'élément piézocéramique qui est sur le dessus de la plaque s'obtient en dérivant son champ de déplacement (équation 5.2),

$$\varepsilon_{xx}^{pz}(x, y, z^{pz}, \tau) = -\left(z^{pz} + \frac{L_z^{pl} + L_z^{pz}}{2}\right) \frac{\partial^2 w(x, y, \tau)}{\partial x^2} \quad (5.3a)$$

$$\varepsilon_{yy}^{pz}(x, y, z^{pz}, \tau) = -\left(z^{pz} + \frac{L_z^{pl} + L_z^{pz}}{2}\right) \frac{\partial^2 w(x, y, \tau)}{\partial y^2} \quad (5.3b)$$

$$\varepsilon_{xy}^{pz}(x, y, z^{pz}, \tau) = -\left(z^{pz} + \frac{L_z^{pl} + L_z^{pz}}{2}\right) \frac{\partial^2 w(x, y, \tau)}{\partial x \partial y} \quad (5.3c)$$

$$\varepsilon_{zz}^{pz}(x, y, z^{pz}, \tau) = \varepsilon_{zx}^{pz}(x, y, z^{pz}, \tau) = \varepsilon_{zy}^{pz}(x, y, z^{pz}, \tau) = 0 \quad (5.3d)$$

L'enthalpie de cet élément piézocéramique est obtenue à partir des équations de la piézoélectricité linéaire [TIERSTEN 1969],

$$H = \frac{1}{2} \left( Y_{xx}^{pz} \left( (\epsilon_{xx}^{pz})^2 + (\epsilon_{yy}^{pz})^2 \right) + 2Y_{xy}^{pz} \epsilon_{xx}^{pz} \epsilon_{yy}^{pz} + Y_{xyxy}^{pz} (\epsilon_{xy}^{pz})^2 \right) - \frac{\Delta\phi^{pz}}{L_z^{pz}} e_{zx} (\epsilon_{xx}^{pz} + \epsilon_{yy}^{pz}) - \frac{\xi_{zz}^{pz}}{2} \left( \frac{\Delta\phi^{pz}}{L_z^{pz}} \right)^2 \quad (5.4)$$

où  $e_{zx}$  et  $\xi_{zz}$  sont des constantes piézoélectriques,  $\Delta\phi^{pz}$  est le voltage imposé,  $Y_{xx}^{pz}$  et  $Y_{xy}^{pz}$  sont les constantes de rigidités et

$$Y_{xyxy}^{pz} = \frac{1}{2} (Y_{xx}^{pz} + Y_{yy}^{pz}). \quad (5.5)$$

#### 5.2.4 Énergie cinétique et potentielle de l'élément piézoélectrique

L'énergie cinétique de l'élément piézocéramique sur le dessus de la plaque s'obtient en effectuant une dérivée temporelle de son champ de déplacement, équation (5.2), suivit d'une intégrale sur le volume de l'élément. Ce qui donne,

$$E_{cin}^{pz} = \frac{\rho^{pz}}{2} \int_{-L_z^{pz}/2}^{L_z^{pz}/2} \int_{y_a - L_y^{pz}/2}^{y_a + L_y^{pz}/2} \int_{x_a - L_x^{pz}/2}^{x_a + L_x^{pz}/2} \left( \left( - \left( z^{pz} + \frac{L_z^{pl} + L_z^{pz}}{2} \right) \frac{\partial^2 w(x, y, \tau)}{\partial x \partial \tau} \right)^2 + \left( - \left( z^{pz} + \frac{L_z^{pl} + L_z^{pz}}{2} \right) \frac{\partial^2 w(x, y, \tau)}{\partial y \partial \tau} \right)^2 + \left( \frac{\partial w(x, y, \tau)}{\partial \tau} \right)^2 \right) dx dy dz^{pz} \quad (5.6)$$

L'énergie potentielle est obtenue en faisant une intégrale sur le volume de l'enthalpie (équation (5.4)) de l'élément piézoélectrique,

$$E_{pot}^{pz} = \frac{1}{2} \int_{-L_z^{pz}/2}^{L_z^{pz}/2} \int_{y_a - L_y^{pz}/2}^{y_a + L_y^{pz}/2} \int_{x_a - L_x^{pz}/2}^{x_a + L_x^{pz}/2} H dx dy dz^{pz}. \quad (5.7)$$

Un actionneur piézoélectrique pour plaque est composé de deux éléments piézocéramique. Ces deux éléments piézocéramiques sont identiques et posés symétriquement par rapport au plan neutre de la plaque. Les énergies d'un actionneur piézoélectrique sont simplement deux fois celles d'un des éléments piézocéramiques qui le composent. Les équations (5.6) et (5.7) donnent respectivement l'énergie cinétique et potentielle d'un élément piézocéramique, donc pour un actionneur les énergies sont données par,

$$E_{\text{cin}}^a = 2 \cdot E_{\text{cin}}^{\text{pz}} \quad \text{et} \quad E_{\text{pot}}^a = 2 \cdot E_{\text{pot}}^{\text{pz}} . \quad (5.8)$$

### 5.2.5 Équation du mouvement

Comme pour la poutre, la méthode de Rayleigh-Ritz est utilisée pour trouver une approximation du déplacement transversal de la plaque. Les fonctions essais sont une fois de plus de type polynomial et prennent la forme suivante,

$$w(x, y, \tau) = \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{q=0}^{Q-1} C_{pq} \left( \frac{2x}{L_x^{\text{pl}}} \right)^p \left( \frac{2y}{L_y^{\text{pl}}} \right)^q e^{j\omega\tau} . \quad (5.9)$$

En remplaçant les équations (5.8) et (5.9) ainsi que celles pour la plaque et les conditions limites dans l'équation variationnelle (2.14), puis en effectuant l'extrémalisation, le système d'équations linéaires ( dimensions  $[P \cdot Q] \times [P \cdot Q]$  ) suivant est obtenu,

$$\left( \omega^2 \left( [M^a] + [M^{\text{pl}}] \right) - \left( [K^a] + [K^{\text{pl}}] + [K^{\text{cl}}] \right) \right) \{C\} = \{F^a\} + \{F^{\text{mec}}\} . \quad (5.10)$$

La matrice de masse  $[M^a]$  et de raideur  $[K^a]$  de ce système d'équations linéaires, ainsi que le vecteur force  $\{F^a\}$ , sont valides pour un actionneur qui est composé de deux éléments piézocéramiques. Les équations pour bâtir ces matrices et ce vecteur sont données à l'annexe B. Lorsqu'il y a plusieurs actionneurs sur la plaque, il faut bâtir les matrices et les vecteurs de chaque actionneur avec les équations de l'annexe B puis additionner les différentes matrices et vecteurs.

Les matrices et vecteurs des actionneurs doivent être additionnés à celles et ceux de la plaque  $[M^{\text{pl}}]$  et  $[K^{\text{pl}}]$ , des conditions limites  $[K^{\text{cl}}]$  et du vecteur des forces extérieures  $\{F^{\text{mec}}\}$ . Les

différentes équations pour obtenir ces matrices et vecteurs sont données à l'annexe A des travaux de [BERRY 1991]. Une fois que toutes les matrices et vecteurs de chaque élément du système mécanique sont additionnés, alors le système d'équations linéaires global présenté en (5.10) est obtenu. La solution de ce système global donne les coefficients inconnus  $C_{pq}$ , ce qui permet d'évaluer le déplacement transversal de la plaque en tout point avec l'équation (5.9).

### 5.3 Indicateurs de vibrations

Les indicateurs de vibrations utilisés pour vérifier le modèle P.A.E.P. sont la vitesse quadratique et le déplacement volumique de la plaque.

La vitesse quadratique moyenne pour une plaque est définie par,

$$\langle \dot{w}^2 \rangle = \frac{1}{2L_x^{pl} L_y^{pl}} \int_{-L_y^{pl}/2}^{L_y^{pl}/2} \int_{-L_x^{pl}/2}^{L_x^{pl}/2} \left| \frac{\partial w(x,y)}{\partial \tau} \right|^2 dx dy. \quad (5.11)$$

En utilisant l'équation (5.9), qui donne le déplacement transversal de la plaque, l'expression de la vitesse quadratique moyenne écrit sous forme matricielle est,

$$\langle \dot{w}^2 \rangle = \frac{\omega^2}{8} \langle C_{mn} \rangle \left[ \frac{1 - (-1)^{m+p+1}}{m + p + 1} \cdot \frac{1 - (-1)^{n+q+1}}{n + q + 1} \right] \{ C_{pq}^* \}. \quad (5.12)$$

Le déplacement volumique d'une plaque est donné par l'intégration des déplacements transversaux sur toute la surface de la plaque,

$$D = \int_{-L_y^{pl}/2}^{L_y^{pl}/2} \int_{-L_x^{pl}/2}^{L_x^{pl}/2} w(x,y) dx dy. \quad (5.13)$$

En remplaçant l'équation (5.9) dans cette dernière,



$$D = \frac{L_x^{pl} L_y^{pl}}{4} \langle C_{mn} \rangle \left\{ \frac{1 - (-1)^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1} \right\}. \quad (5.14)$$

#### 5.4 Validation théorique du modèle P.A.E.P.

Il est possible de trouver dans la littérature scientifique plusieurs modèles de plaque actionnée par une paire d'éléments piézoélectriques. Tous ces modèles ont en commun l'hypothèse que les ajouts de masse et de raideur de ces éléments piézoélectriques n'influencent pas la réponse dynamique de la plaque. Cette section permet de vérifier la validité de cette hypothèse.

Un autre point commun de ces divers modèles est l'utilisation d'une analyse statique des contraintes pour déterminer les efforts appliqués sur la plaque par les éléments piézoélectriques, d'où la dénomination *modèle statique*.

##### 5.4.1 Equation du mouvement des modèles statiques (plaque simplement appuyée)

[DIMITRIADIS *et coll.* 1991] donnent le déplacement transversal d'une plaque, simplement appuyée sur les quatre côtés, qui est actionnée par des éléments piézoélectriques parfaitement collés. Avec la nomenclature utilisée ici et un système d'axe centré, ce déplacement transversal s'écrit,

$$w(x, y) = \frac{4 \dot{M}}{\rho^{pl} L_z^{pl} (L_x^{pl})^2 (L_y^{pl})^2} \times \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{\left( (m L_y^{pl})^2 + (n L_x^{pl})^2 \right) \gamma_m \gamma_n}{m n \left( (\omega_{mn})^2 - \omega^2 \right)} \sin \left( \frac{m \pi (2x + L_x^{pl})}{2 L_x^{pl}} \right) \sin \left( \frac{n \pi (2y + L_y^{pl})}{2 L_y^{pl}} \right) \quad (5.15)$$

où

$$\begin{aligned}\gamma_m &= \cos\left(\frac{m\pi(2x_a - L_x^a + L_x^{pl})}{2L_x^{pl}}\right) - \cos\left(\frac{m\pi(2x_a + L_x^a + L_x^{pl})}{2L_x^{pl}}\right) \\ \gamma_n &= \cos\left(\frac{n\pi(2y_a - L_y^a + L_y^{pl})}{2L_y^{pl}}\right) - \cos\left(\frac{n\pi(2y_a + L_y^a + L_y^{pl})}{2L_y^{pl}}\right).\end{aligned}\quad (5.16)$$

La constante  $\dot{M}$  de l'équation (5.15) dépend des caractéristiques mécaniques et piézoélectriques de l'actionneur ainsi que des dimensions de ce dernier. L'expression de cette constante est obtenue suite à une analyse statique des efforts, équilibre des forces et moments autour du plan neutre. En fonction de l'hypothèse faite sur la distribution des contraintes dans les éléments piézoélectriques, il est possible d'obtenir différentes expressions pour  $\dot{M}$ .

[CRAWLEY *et coll.* 1987] ont posé une distribution de contraintes constante dans l'épaisseur des éléments piézoélectriques. [DIMITRIADIS *et coll.* 1991] ont supposé la pente des contraintes des éléments piézoélectriques égale à la pente des contraintes de la plaque. Cette hypothèse implique que les éléments piézoélectriques et la plaque ont le même module de Young. [KIM *et coll.* 1991] posent la pente des contraintes dans les éléments piézoélectriques dépendante du module de Young de ces derniers. Il faut noter que la différence entre les valeurs de  $\dot{M}$  calculées avec ces trois modèles est négligeable pour un rapport  $2L_z^{pz}/L_z^{pl} < 0.5$ . Cependant cette différence devient importante lorsque les épaisseurs des éléments piézoélectriques sont du même ordre que celle de la plaque,  $2L_z^{pz}/L_z^{pl} > 0.5$ .

La constante  $\dot{M}$  utilisée pour obtenir les résultats de la comparaison provient du modèle de [KIM *et coll.* 1991], car l'hypothèse utilisée pour la distribution des contraintes dans un élément piézoélectrique de ce modèle correspond à celle du modèle présenté ici. Avec la nomenclature utilisée ici, l'expression de la constante est,

$$\dot{M} = \frac{(L_z^{pz} + L_z^{pl})Y^{pz}Y^{pl}(L_z^{pl})^3 d_{zx} \Delta\phi_a}{Y^{pl}(L_z^{pl})^3 (1 - \nu^{pz}) + 2(1 - \nu^{pl})Y^{pz}L_z^{pz} \left( 3(L_z^{pl})^2 + 4(L_z^{pz})^2 + 6L_z^{pz}L_z^{pl} \right)} \quad (5.17)$$

#### 5.4.2 Comparaisons entre le modèle statique de [KIM *et coll.* 1991] et P.A.E.P

La vitesse quadratique et le déplacement volumique du modèle de [KIM *et coll.* 1991] sont obtenus en remplaçant l'équation (5.15) dans les équations (5.11) et (5.13) respectivement. Les caractéristiques de la plaque simplement appuyée ainsi que des actionneurs sont données au tableau 5.1.

TABLEAU 5.1 CARACTÉRISTIQUES PHYSIQUES DES ACTIONNEURS ET DE LA PLAQUE SIMPLEMENT APPUYÉE

	Actionneur primaire	Actionneur secondaire	Plaque
Longueur $L_x$ (mm)	38.1	38.1	480
Largeur $L_y$ (mm)	31.8	31.8	420
Épaisseur $L_z$ (mm)	0.254	0.254	3.22
Density $\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	7750	7750	2700
Module de Young $Y$ (N/m <sup>2</sup> )	(63×10 <sup>9</sup> , 0)	(63×10 <sup>9</sup> , 0)	(66.5×10 <sup>9</sup> , 33×10 <sup>7</sup> )
Coefficient de Poisson $\nu$	0.33	0.33	0.33
$e_{zx}$ (N/(V· m))	14.0	14.0	————
$d_{zx}$ (m/V)	210×10 <sup>-12</sup>	210×10 <sup>-12</sup>	————
Position $x_a$ (mm)	-69.0	-39.5	————
Position $y_a$ (mm)	86.1	-35.6	————

Les vitesses quadratiques obtenues avec les deux modèles théoriques sont présentées à la figure 5.2. Cette figure montre que les résultats sont identiques pour cet indicateur de vibrations. Contrairement au cas de la poutre, il est évident que l'ajout de masse et de raideur des actionneurs n'ont pas d'influence sur les fréquences de résonances de la plaque. Ce qui est tout à fait normal, puisque le rapport des masses est 0.016 et celui de surface est 0.1 entre actionneur et structure pour la poutre. Tandis que dans le cas de la plaque ces mêmes rapports sont approximativement 0.0014 et 0.006 respectivement.

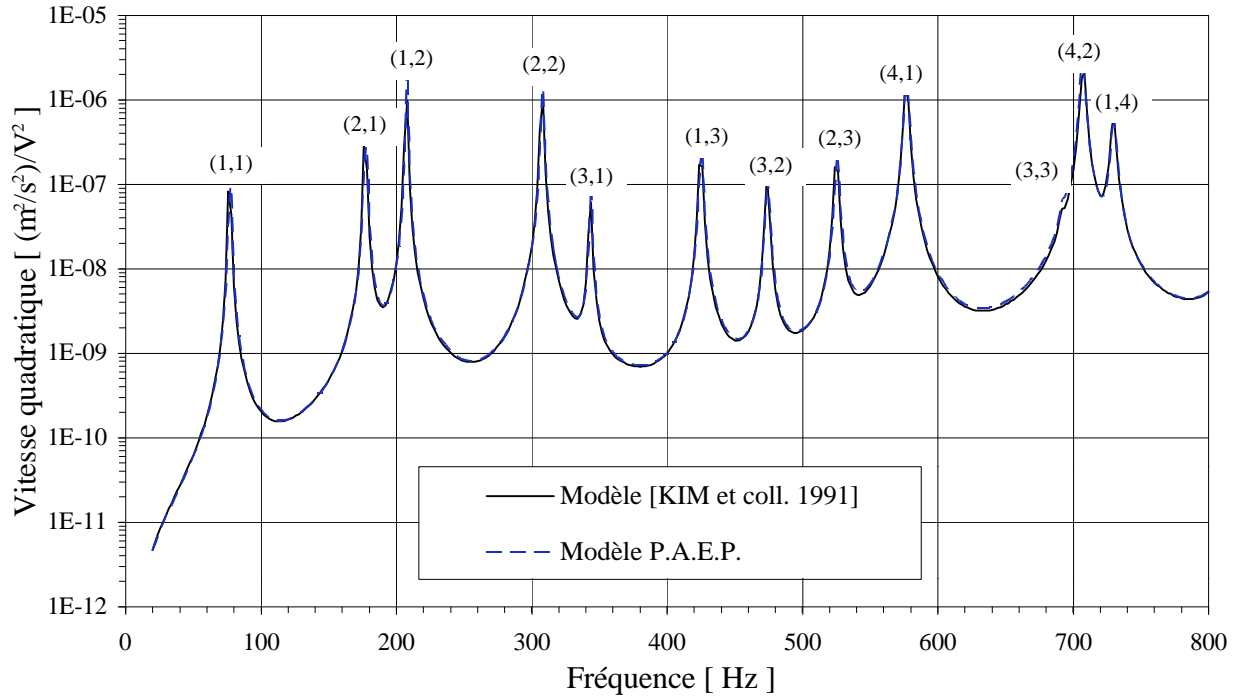


Figure 5.2: Vitesses quadratiques pour les deux modèles théoriques lorsque l'actionneur primaire induit les vibrations.

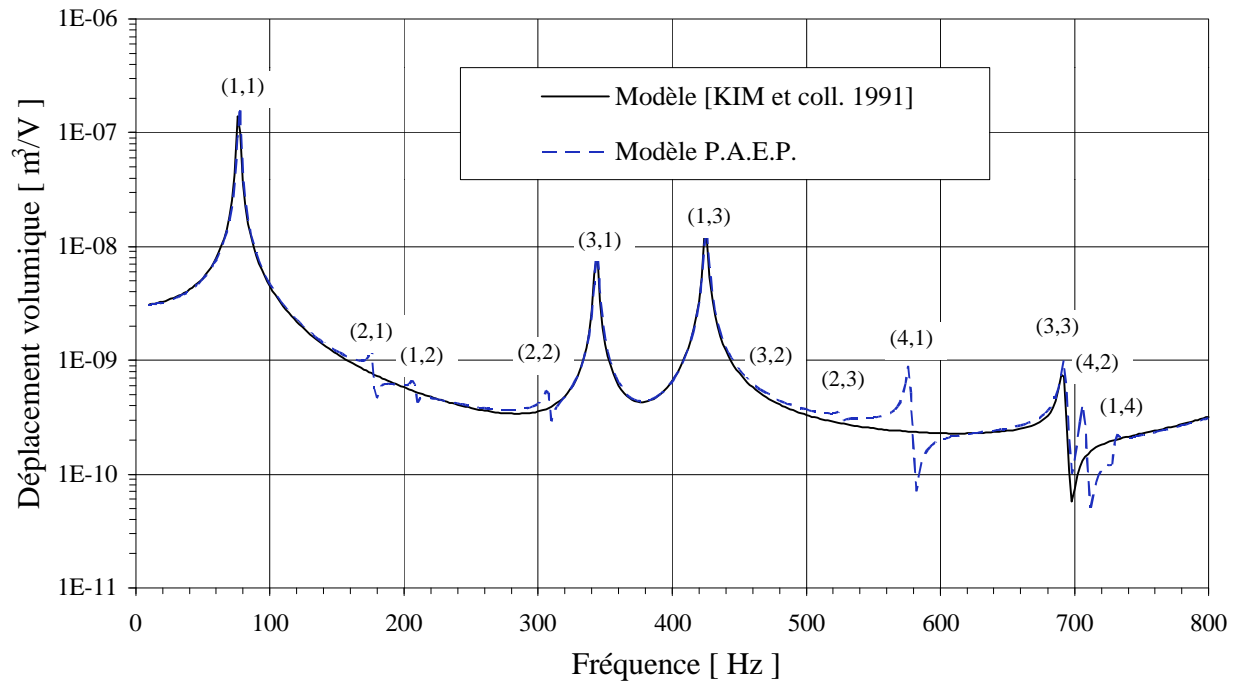


Figure 5.3: Déplacements volumiques pour les deux modèles théoriques lorsque l'actionneur primaire induit les vibrations.

La figure 5.3 présente les courbes de déplacement volumique pour chacun des modèles. Cet indicateur de vibrations est beaucoup plus sensible aux petites imperfections du comportement vibratoire de la plaque que la vitesse quadratique. La figure 5.3 montre que les effets dus aux ajouts de masses et de raideurs des actionneurs sont très faibles mais suffisant pour faire apparaître des petits pics vis-à-vis les modes qui ont l'ordre  $m$  ou  $n$  pair. Le modèle de [KIM *et coll.* 1991] ne voit pas les modes qui ont un ordre  $m$  ou  $n$  pair, tandis que le modèle P.A.E.P. voit un peu ces modes. En fonctions des caractéristiques des actionneurs (dimension, position etc.) certains modes sont plus affectés que d'autres. Par exemple, dans le cas présent, le (3,2) n'est pratiquement pas affecté tandis que le (4,1) et (4,2) sont beaucoup plus modifiés par la présence des actionneurs.

En résumé, les figures 5.2 et 5.3 valident théoriquement les résultats du modèle P.A.E.P. et montrent que les ajouts de masse et de raideur des actionneurs n'ont pas d'influences sur les valeurs propres de la plaque. Par contre, les déformées propres de cette dernière sont légèrement modifiées.

## **5.5 Validations expérimentales du modèle P.A.E.P.**

Puisque que le modèle P.A.E.P. permet d'étudier n'importe quelles conditions limites, deux types de conditions limites avec des plaques de dimension différentes sont testés expérimentalement. La première plaque est simplement appuyée sur les quatre côtés, tandis que la deuxième est encastree sur les quatre côtés.

### **5.5.1 Plaque simplement appuyée**

Les caractéristiques de la plaque simplement appuyée utilisée sont données au tableau 5.1. Le tableau 5.2 donne les valeurs propres théoriques et expérimentales pour cette plaque. Les résultats

théoriques sont très bon car les différences entre ces valeurs théoriques et les valeurs expérimentales sont inférieures à 1% pour les 12 premiers modes.

TABLEAU 5.2 VALEURS PROPRES THÉORIQUE ET EXPÉRIMENTALES DE LA PLAQUE SIMPLEMENT APPUYÉE

# du mode	Ordre (m,n)	Modèle P.A.E.P. (Hz)	Expériences (Hz)	Différence relative
1	(1,1)	77.5	78.0	0.64%
2	(2,1)	177.4	178.8	0.78%
3	(1,2)	208.0	209.7	0.81%
4	(2,2)	307.9	307.6	0.10%
5	(3,1)	343.9	345.2	0.38%
6	(1,3)	425.5	424.8	0.16%
7	(3,2)	474.3	472.2	0.44%
8	(2,3)	525.3	522.8	0.48%
9	(4,1)	577.0	576.6	0.07%
10	(3,3)	691.6	685.0	0.96%
11	(4,2)	707.3	703.0	0.61%
12	(1,4)	730.0	737.0	0.95%

La figure 5.4 montre le montage expérimental de la plaque simplement appuyée. La plaque est fixée avec neuf vis de chaque côté, à des lamelles de 0.5mm d'épaisseur. Les neuf vis assurent que la plaque est simplement appuyée pour les modes d'ordre 4 et moins, puisqu'il y a au minimum 5 vis par longueur d'onde pour ces modes. La plaque est fixée à des lamelles qui permettent un certain déplacement dans le plan de la plaque, offre très peu de résistance aux rotations des bords tout en bloquant le déplacement transversal de ces bords. Le type de déplacement que les lamelles permettent est montré schématiquement au bas de la figure 5.4. Il est important que les lamelles permettent un petit déplacement dans le plan de la plaque lors des mouvements de cette dernière, pour assurer que le plan neutre de la plaque ne subisse aucune déformation.

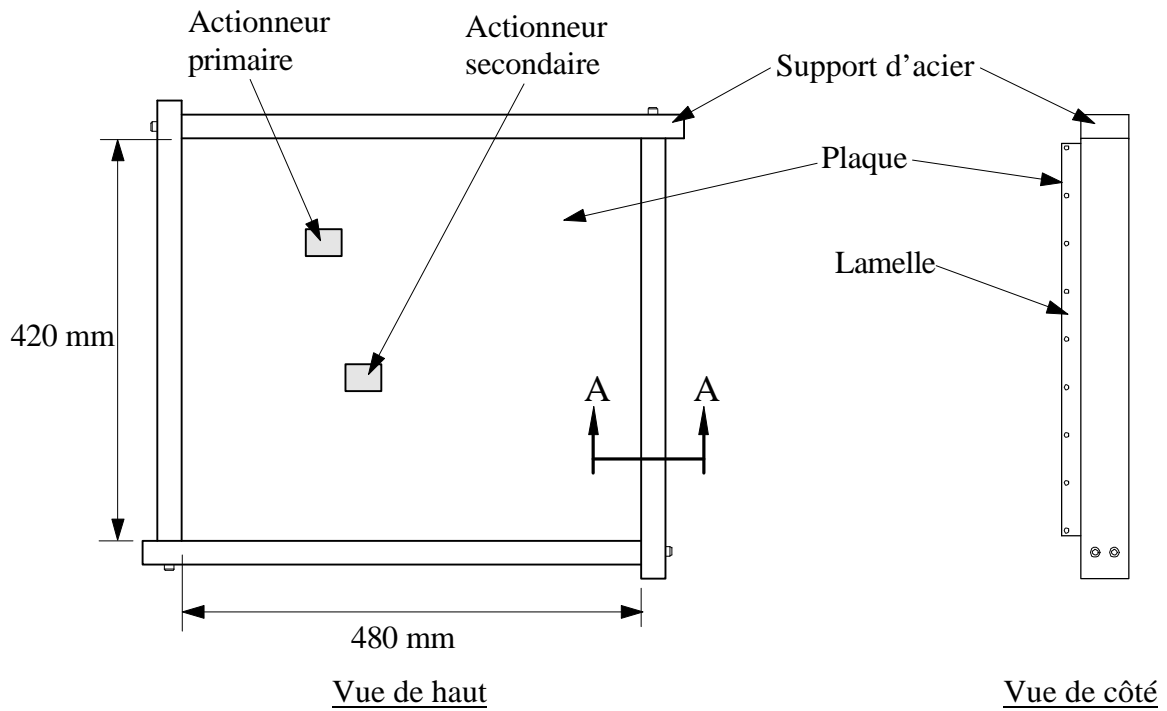


Figure 5.4: Schéma du montage expérimental de la plaque simplement appuyée et du type de mouvement que permettent les lamelles servant de conditions limites.

Les figures 5.5 et 5.6 présentent respectivement les vitesses quadratiques et les déplacements volumiques théorique et expérimentale de la plaque simplement appuyée.

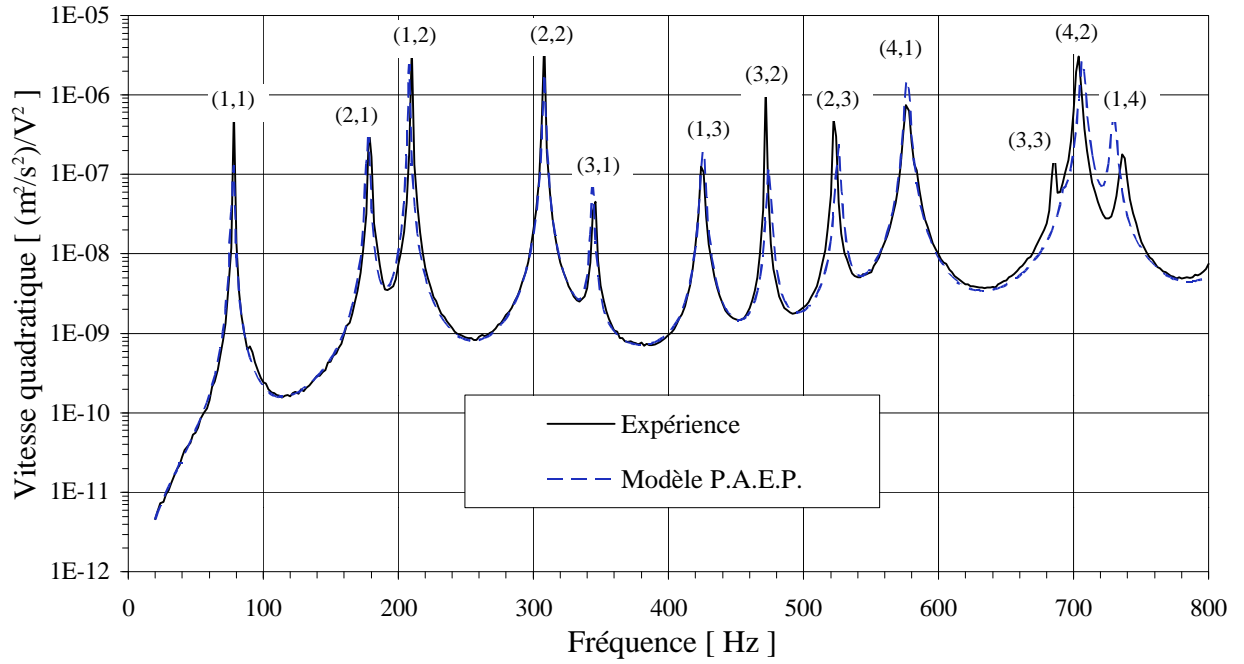


Figure 5.5: Vitesses quadratiques lorsque l'actionneur primaire induit les vibrations, plaque appuyée.

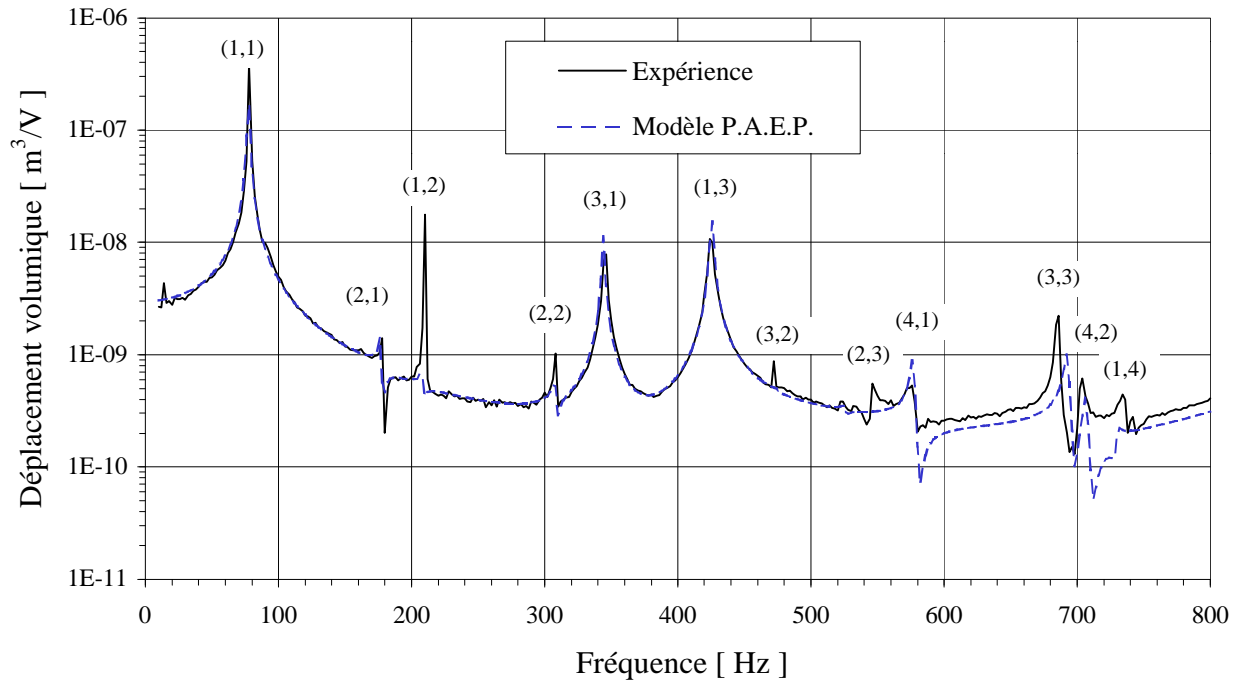


Figure 5.6: Déplacements volumiques lorsque l'actionneur primaire induit les vibrations, plaque appuyée.



Les résultats théoriques correspondent très bien à ceux obtenus expérimentalement. La figure 5.6 montre que les modes qui ont un ordre pair apparaissent dans la fonction de transfert expérimentale. Ces résultats confirment ce qui a été noté à la section précédente. Les fréquences propres de la plaque ne sont pas affectées par la présence des actionneurs, par contre les fonctions propres le sont légèrement.

### 5.5.2 Plaque encastree

Les caractéristiques de la plaque et des actionneurs utilisés sont données au tableau 5.3. Le tableau 5.4 présente les valeurs propres théoriques et expérimentales. Les différences relatives sont généralement faibles. Cependant, pour certains modes ces différences atteignent des valeurs qui tournent autour de 2%. De plus, le mode (3,1) précède le (2,2) théoriquement alors qu'expérimentalement c'est l'inverse qui se produit. Ces différences entre les résultats théoriques et expérimentaux sont beaucoup plus importantes que celles obtenues avec la plaque simplement appuyée. Cela est attribué au fait que l'encastrement expérimental ne respecte pas les conditions limites théoriques aussi efficacement que dans le cas de la plaque simplement appuyée.

TABLEAU 5.3 CARACTÉRISTIQUES PHYSIQUES DES ACTIONNEURS ET DE LA PLAQUE ENCASTRÉE

	Actionneur primaire	Actionneur secondaire	Plaque
Longueur $L_x$ (mm)	38.1	38.1	500
Largeur $L_y$ (mm)	31.8	31.8	398
Épaisseur $L_z$ (mm)	0.254	0.254	3.15
Densité $\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	7750	7750	2700
Module de Young $Y$ (N/m <sup>2</sup> )	(63×10 <sup>9</sup> , 0)	(63×10 <sup>9</sup> , 0)	(64.5×10 <sup>9</sup> , 32×10 <sup>7</sup> )
Coefficient de Poisson $\nu$	0.33	0.33	0.33
$e_{zx}$ (N/(V· m))	14.0	14.0	————
$d_{zx}$ (m/V)	210×10 <sup>-12</sup>	210×10 <sup>-12</sup>	————
Position $x_a$ (mm)	-90.0	-60.0	————
Position $y_a$ (mm)	100.0	-50.0	————

TABLEAU 5.4 VALEURS PROPRES THÉORIQUES ET EXPÉRIMENTALES DE LA PLAQUE ENCASTRÉE

# du mode	Ordre (m,n)	Modèle P.A.E.P. (Hz)	Expériences (Hz)	Différence relative
1	(1,1)	140.4	138.4	1.45%
2	(2,1)	246.1	246.1	0.00%
3	(1,2)	322.8	320.4	0.75%
4	(2,2)	419.8	421.2	0.33%
5	(3,1)	418.6	426.1	1.76%
6	(3,2)	584.4	590.5	1.03%
7	(1,3)	602.0	602.1	0.02%
8	(4,1)	652.1	664.9	1.93%
9	(2,3)	695.4	700.1	0.67%

La figure 5.7 présente le schéma du montage expérimental de la plaque encastrée. Cette figure montre que la plaque est mise en serre entre des barres d'acier et un support fait d'une poutre raidie qui a un profil en C. Ce montage bloque de façon très efficace les déplacements transversaux et les rotations des bords de la plaque. Malheureusement, ce montage ne permet aucun déplacement dans le plan de la plaque. Cela implique que le plan neutre de la plaque peut subir certaines déformations lors des déplacements transversaux de cette dernière. Or, dans les hypothèses théoriques, le plan neutre de la plaque ne subit aucune déformation. Ce problème n'existe pas pour le montage de la plaque simplement appuyée car les lamelles de support permettent un léger déplacement dans le plan de la plaque. Cela assure que le plan neutre de la plaque appuyée ne subit aucune déformation.

La figure 5.8 donne les vitesses quadratiques, expérimentale et théorique, de la plaque encastrée. À l'exception de la bande de fréquence 500Hz à 700Hz, les résultats concordent très bien. Les différences entre ces courbes sont une fois plus attribuées à l'encastrement expérimental qui n'est pas parfait. Le même type de différence est obtenue entre 350Hz et 500Hz pour les déplacements volumiques présentés à la figure 5.9. De plus, comme pour la plaque simplement appuyée, la figure 5.9 montre que l'ajout de masse et de raideur des actionneurs influence les déformées propres des modes qui ont un ordre pair. Ces modes apparaissent de façon plus ou moins importante sur les courbes de déplacement volumique.

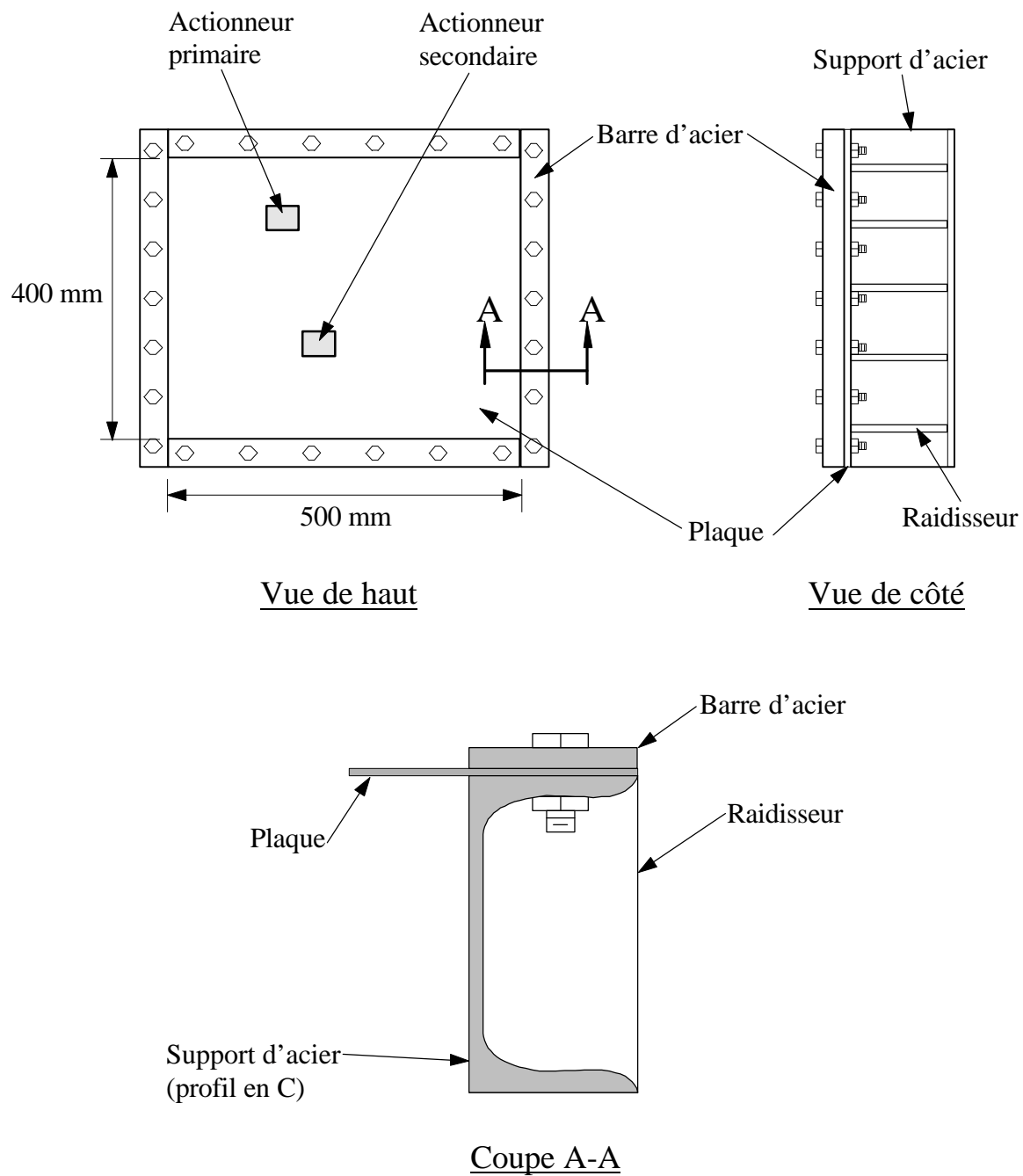


Figure 5.7: Schéma du montage expérimental de la plaque encastrée.

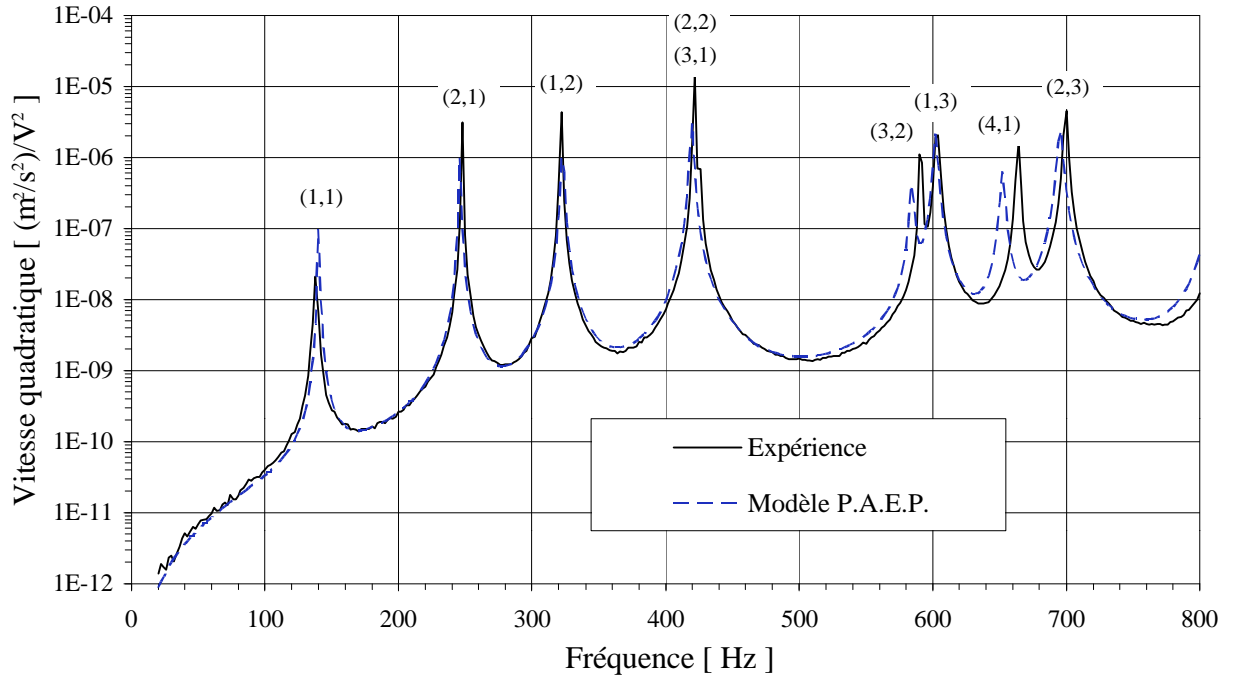


Figure 5.8: Vitesses quadratiques lorsque l'actionneur primaire induit les vibrations, plaque encastree.

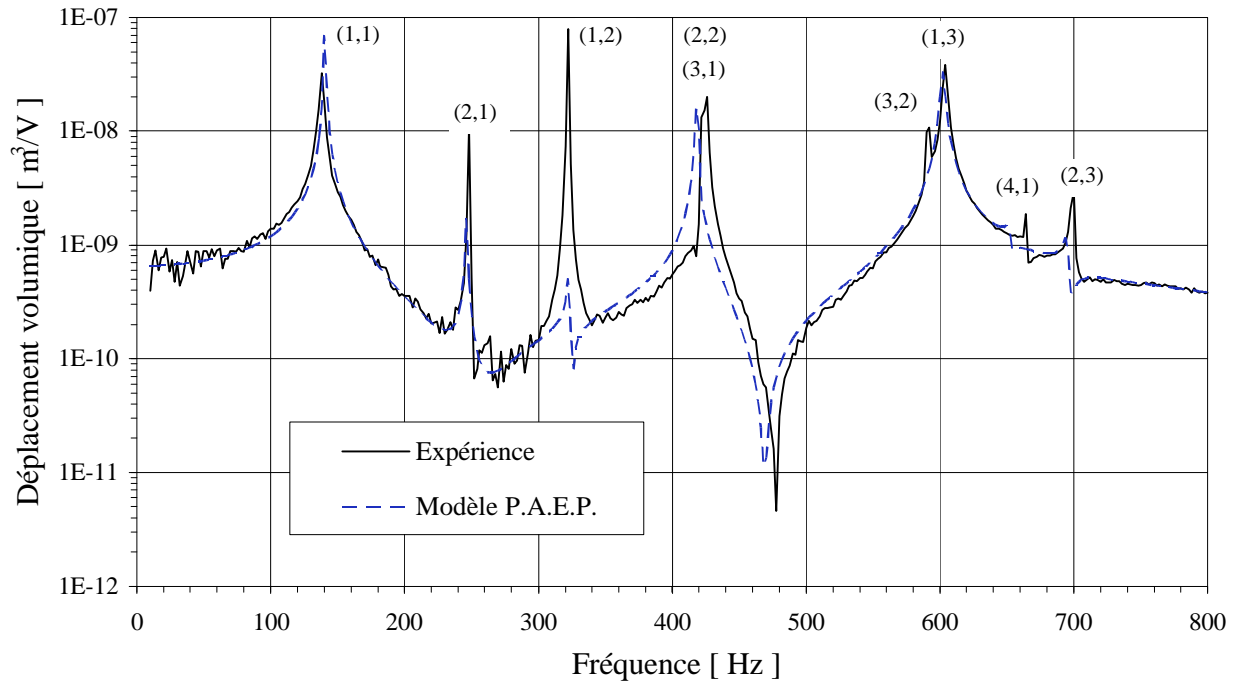


Figure 5.9: Déplacements volumiques lorsque l'actionneur primaire induit les vibrations, plaque encastree.

## 5.6 Conclusions

Dans ce chapitre, l'approche variationnelle est utilisée pour développer un modèle dynamique de plaque mince en flexion pure, actionnée par des éléments piézoélectriques. Ce modèle se nomme P.A.E.P.. Seulement les matrices de masse et de raideur ainsi que le vecteur de forces des éléments piézoélectriques sont présentés ici. Les matrices et vecteurs des autres éléments (plaque, conditions limites, etc.) proviennent des travaux de [BERRY 1991]. La réponse transversale de la plaque est approchée à l'aide de la méthode de Rayleigh-Ritz. Ce modèle permet l'étude de la réponse dynamique d'une plaque mince ayant des conditions limites quelconques tout en tenant compte des effets dynamiques des actionneurs piézoélectriques.

La validation théorique est faite en comparant les résultats pour une plaque simplement appuyée sur les quatre côtés obtenus avec P.A.E.P. à ceux du modèle statique de [KIM *et coll.* 1991]. Les vitesses quadratiques obtenues avec ces deux modèles sont identiques. Cela implique que les effets dynamiques, ajout de masse et de raideur des actionneurs, n'apparaissent pas sur un indicateur global tel que la vitesse quadratique. Contrairement au cas de la poutre, l'ajout de masse des éléments piézoélectriques n'influence pas les valeurs propres de la plaque. Cette observation était prévisible puisque le rapport entre la masse des transducteurs piézoélectriques et la masse de la poutre est environ dix fois plus grand que le rapport entre la masse des transducteurs piézoélectriques et la masse de la plaque.

Les modes qui ont un ordre pair apparaissent dans la fonction de transfert de déplacement volumique du modèle P.A.E.P. alors qu'ils sont absents dans celle du modèle de [KIM *et coll.* 1991]. Cette comparaison entre les déplacements volumiques des deux modèles montre que l'ajout de masse et de raideur des actionneurs modifie légèrement les déformées propres de la plaque. Comme pour la poutre, ces modifications sont mineures et leurs importances dépendent de l'application pratique qui est considérée.

Une validation expérimentale suit la validation théorique. Cette validation expérimentale est faite pour deux plaques différentes. La première plaque considérée a les conditions limites simplement appuyées sur les quatre côtés. La deuxième est encastree sur les quatre côtés.

Les résultats expérimentaux pour la plaque appuyée concordent très bien avec les résultats théoriques obtenus avec P.A.E.P.. Les différences relatives entre les valeurs propres théoriques et expérimentales sont inférieures à 1% pour les douze premiers modes de cette plaque. Les résultats obtenus pour les vitesses quadratiques expérimentales et théoriques sont presque identiques. Le point important à noter sur les résultats expérimentaux est l'apparition des modes qui ont un ordre pair sur la fonction de transfert expérimentale du déplacement volumique. Cela valide le modèle P.A.E.P. qui a montré que la présence des actionneurs sur la plaque modifient les déformées propres.

Les résultats expérimentaux et théoriques pour la plaque encastree se comparent relativement bien. Il y a certaines différences entre ces résultats, la principale étant que le mode (3,1) apparaît avant le mode (2,2) dans les résultats théoriques alors que c'est l'inverse qui se produit expérimentalement. Ces différences sont attribuées aux conditions limites expérimentales qui ne respectent pas parfaitement les hypothèses théoriques pour un encastrement. Les hypothèses théoriques supposent aucune restriction dans le plan de la plaque. Or, la plaque expérimentale est prise en serre, ce qui bloque tout déplacement dans le plan de la plaque. Il faut souligner que les résultats expérimentaux de la plaque encastree, comme pour la plaque appuyée, montrent l'apparition des modes qui ont un ordre pair sur la fonction de transfert du déplacement volumique.

# Chapitre 6

## CAPTEUR PVDF DE DÉPLACEMENT VOLUMIQUE D'UNE PLAQUE

### 6.1 Introduction

Ce chapitre présente une méthode qui permet d'obtenir un capteur de déplacement volumique pour une plaque. Cette méthode n'est pas une extension directe de celle qui est présentée pour les poutres au chapitre 3. [CLARK *et coll.* 1993] et [JOHNSON *et coll.* 1993] ont utilisé des méthodes similaires à celle du chapitre 3. Le capteur PVDF qu'ils ont obtenu avec ce type de méthode doit couvrir toute la plaque et sa forme dépend de la position  $x$  et  $y$  simultanément. Cela implique que l'épaisseur du film PVDF doit varier. La figure 6.1 montre schématiquement la forme d'un capteur de déplacement volumique pour une plaque simplement appuyée lorsqu'une méthode qui est l'extension de celle présentée au chapitre 3 est utilisée.

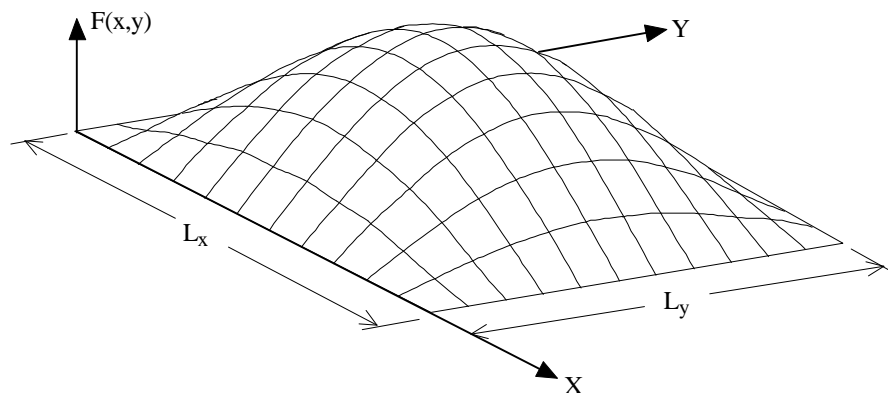


Figure 6.1: Schéma d'un capteur de déplacement volumique pour plaque simplement appuyée.

À l'heure actuelle, un capteur comme celui montré à la figure 6.1 ne peut être implanté expérimentalement car il est impossible de tailler ou produire un PVDF avec une épaisseur

variable. De plus, généralement il y a des actionneurs sur la plaque. Il faudrait donc que ce capteur soit fixé par-dessus ces actionneurs. Cela générerait des problèmes mécaniques et électriques (encombrement mécanique, isolation électrique entre les actionneurs et le capteur, champs électromagnétiques des actionneurs affecteraient le capteur, etc.). Pour ces raisons, une nouvelle approche qui utilise plusieurs bandes de PVDF a été développée. Le capteur de déplacement volumique pour plaque présenté dans ce chapitre est constitué de plusieurs bandes PVDF positionnées parallèlement aux axes  $x$  et  $y$ .

Les formes des bandes PVDF du capteur de déplacement volumique dépendent principalement des formes des modes propres. La connaissance des déformées propres des modes est donc très importante. Le modèle P.A.E.P. développé au chapitre 5 est complet et fonctionne bien. Globalement les résultats théoriques (vitesse quadratique, déplacement volumique, déplacement transversal avant et après contrôle, etc.) obtenus avec le modèle P.E.A.P. (voir chapitre 5 et 7) correspondent très bien avec ceux mesurés expérimentalement. Cependant, comme les résultats du chapitre 5 pour la plaque encastree ont montré, il arrive qu'ils y aient certaines différences entre les résultats théoriques et expérimentaux. Ces différences sont attribuées aux conditions expérimentales (conditions limites, imperfections dans la plaque etc.) qui ne correspondent pas parfaitement aux hypothèses théoriques. Pour la plaque encastree utilisée au chapitre 5 ces différences sont; le mode (3,1) précède le mode (2,2) dans les résultats théoriques alors que c'est l'inverse expérimentalement, la réponse du mode (2,1) est faible par rapport à celle mesurée expérimentalement. Dépendant de la plaque, les différences entre les résultats théoriques et expérimentaux sont plus ou moins importantes. Afin d'obtenir la meilleure représentation possible des caractéristiques dynamiques de la plaque, cela pour n'importe quelle plaque, il est donc préférable de mesurer expérimentalement les déformées propres des modes de la plaque plutôt que d'utiliser celles données par le modèle P.A.E.P. pour déterminer les formes des bandes PVDF.

L'utilisation de déformées propres mesurées expérimentalement pour déterminer les formes des bandes PVDF permet d'obtenir une méthode très générale qui tient compte des caractéristiques de la plaque, des conditions limites, des imperfections dans la plaque, des ajouts de masse et/ou de raideurs etc.



## 6.2 Développement théorique

### 6.2.1 Déplacement transversal de la plaque

Le déplacement transversal d'une plaque peut s'écrire en utilisant une seule sommation de contributions modales, ce qui donne,

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^I \hat{W}_i \hat{\Psi}_i(x, y) = \langle \hat{W}_i \rangle \{ \hat{\Psi}_i(x, y) \} \quad (6.1)$$

Dans cette équation,  $\hat{W}_i$  est l'amplitude modale et  $\hat{\Psi}_i(x, y)$  est la fonction propre. "I" est le nombre total de modes considérés dans la réponse. Les fonctions propres sont déterminées à partir des mesures expérimentales des formes des modes propres.

### 6.2.2 Coefficients de fonctions propres déterminés à partir de mesures expérimentales

Les formes des modes propres sont déterminées en effectuant une analyse modale. L'analyse modale expérimentale est faite avec un vibromètre laser pour les mesures vibratoires et le logiciel STAR SYSTEMS V5.0 pour le traitement des données. Un total de 144 points (12 points dans chaque direction) de mesures est utilisé. La configuration de ces points de mesures est montrée à la figure 6.2.

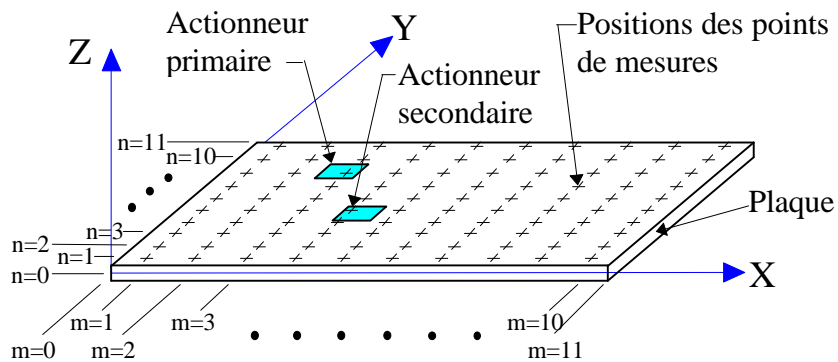


Figure 6.2: Schéma des positions des points de mesures expérimentaux.

Les fonctions propres utilisées ont la forme polynomiale suivante,

$$\hat{\Psi}_i(x, y) = \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{q=0}^{Q-1} A_{i,pq} \left( \frac{x}{L_x^{pl}} \right)^p \left( \frac{y}{L_y^{pl}} \right)^q \quad (6.2)$$

De telles fonctions propres sont très générales et peuvent être utilisées pour des plaques ayant des conditions limites quelconques. Les variables “P” et “Q” sont les nombres totaux de termes des polynômes dans les directions x et y respectivement. Il faut noter que ces fonctions propres sont pour un système d'axe dont l'origine coïncide avec le coin inférieur gauche de la plaque. La raison pour laquelle un système d'axe non centré est utilisé dans ce chapitre est donnée à la section 6.2.4.

Les coefficients inconnus  $A_{i,pq}$  de la  $i^{\text{ème}}$  fonction propre sont déterminés en solutionnant le système d'équations suivant,

$$\left[ \Phi_{mnpq} \right] \left\{ A_{i,pq} \right\} = \left\{ w_{i,mn} \right\}. \quad (6.3)$$

Ce système d'équations a une solution unique lorsque le produit des nombres de termes “P×Q” est égal au produit du nombre total de points de mesures “M×N”. Le vecteur  $\{w_{i,mn}\}$  de cette équation contient 144 éléments puisque le nombre total de points de mesures dans chacune des directions est 12 (M=N=12). Pour un mode donné i, chacun des éléments du vecteur  $\{w_{i,mn}\}$  est le déplacement transversal d'un point de mesure obtenu suite à l'analyse modale faite avec le logiciel STAR SYSTEMS. Les coefficients de la matrice de l'équation (6.3) sont déterminés avec

$$\Phi_{mnpq} = \left( \frac{x_m}{L_x^{pl}} \right)^p \left( \frac{y_n}{L_y^{pl}} \right)^q, \quad (6.4)$$

où  $x_m$  et  $y_n$  sont les positions du  $mn^{\text{ème}}$  point de mesure.

Il est possible d'utiliser des polynômes ayant des nombres de termes “P” et “Q” relativement faibles pour reconstruire les premiers modes de la plaque. De plus, des instabilités numériques apparaissent lorsque les nombres de termes “P” et “Q” sont suffisamment grands (P×Q = M×N) pour que le système d'équation (6.3) ait une solution unique. Pour ces deux raisons, les valeurs “P” et “Q” utilisées sont faibles. Dans ce cas, le produit “P×Q” est inférieur au nombre total de points de mesures et conséquemment, le système d'équation (6.3) est sur déterminé.

La méthode du moindre carré est utilisée pour obtenir un système d'équations qui a une solution unique. L'équation (6.3) devient,

$$\left[ \Phi_{mnpq} \right]^T \left[ \Phi_{mnpq} \right] \left\{ A_{i,pq} \right\} = \left[ \Phi_{mnpq} \right]^T \left\{ w_{i,mn} \right\}. \quad (6.5)$$

L'exposant "T" indique la transposée de la matrice. La solution de l'équation (6.5) donne les coefficients inconnus  $A_{i,pq}$  de la  $i^{\text{ème}}$  fonction propre. Un critère doit être utilisé pour évaluer la précision de la fonction propre avec ces coefficients  $A_{i,pq}$ . Le critère suggéré par [GERALD *et coll.*, 1989] est d'accroître progressivement le nombre de termes du polynôme jusqu'à ce qu'il y ait une réduction importante de la variance de l'erreur. Cette variance de l'erreur est définie comme étant,

$$\chi_i^2 = \frac{\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \hat{\Psi}_i(x_m, y_n) - w_{i,mn} \right)^2}{(M \cdot N) - (P \cdot Q)}. \quad (6.6)$$

Le calcul de la variance de l'erreur pour des valeurs "P" et "Q" données se fait à l'aide du processus suivant:

- I) Il faut poser les nombres de termes "P" et "Q" puis solutionner l'équation (6.5) (pour le premier calcul, P=Q=3 est utilisé).
- II) Connaissant les coefficients  $A_{i,pq}$ , il est possible d'évaluer la fonction propre donnée par l'équation (6.2) aux points de mesures.
- III) Cela permet d'évaluer la variance de l'erreur avec l'équation (6.6).

La méthode pour évaluer la réduction de la variance de l'erreur en fonction du nombre de termes "P" et "Q" consiste à répéter le processus ci-dessus mais en augmentant de 1 le nombre de termes "P" et/ou "Q". La nouvelle valeur de la variance ainsi calculée est comparée à la première. S'il y a peu de différence entre ces deux valeurs de variance, il faut recommencer le processus en ajoutant 1 à "P" et/ou "Q". Les valeurs de "P" et "Q" sont considérées bonnes lorsqu'il y a approximativement un ordre de grandeur de différence entre la nouvelle valeur de la variance et la précédente. Typiquement pour les dix premiers modes d'une plaque encastree ou simplement appuyée, les valeurs de "P" et "Q" varient entre 4 et 7 dépendant du mode.

### 6.2.3 Déplacement volumique

Pour le système d'axes utilisés dans ce chapitre, le déplacement volumique de la plaque se calcul avec l'équation suivante,

$$D = \int_0^{L_y^{pl}} \int_0^{L_x^{pl}} w(x,y) dx dy \quad . \quad (6.7)$$

En insérant les équations (6.1) et (6.2) dans cette dernière, puis en effectuant la double intégration, le déplacement volumique écrit sous forme matricielle est,

$$D = L_x^{pl} L_y^{pl} \langle \hat{W}_i \rangle [A_{i,pq}] \{D_{pq}\} \quad . \quad (6.8)$$

Chaque ligne “i” de la matrice  $[A_{i,pq}]$  contient les coefficients des fonctions propres. Les termes du vecteur colonne  $\{D_{pq}\}$  sont donnés par

$$D_{pq} = \frac{1}{(p+1) \cdot (q+1)} \quad . \quad (6.9)$$

### 6.2.4 Réponse d'une bande PVDF de forme quelconque

[LEE *et coll.*, 1990] ont présenté l'équation générale qui permet le calcul de la charge d'un capteur PVDF de forme quelconque collé parfaitement à une plaque. La réponse de ce capteur est proportionnelle à l'intégration des déformations situées sous le capteur et est donnée par,

$$q = -\frac{L_z^{pl} + L_z^c}{2} \int_0^{L_y^{pl}} \int_0^{L_x^{pl}} \left[ e_{zx} \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + e_{zy} \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} + 2e_{zxy} \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} \right] \cdot F(x,y) \cdot dx dy \quad . \quad (6.10)$$

Il est posé que la polarisation des films PVDF utilisés ici est orthogonale, donc  $e_{zxy}=0$ . La fonction  $F(x,y)$  représente la sensibilité du film PVDF en tout point  $x$  et  $y$ . La méthode facile pour contrôler cette sensibilité du film PVDF en tout point de la plaque est de découper ce dernier. La configuration typique des bandes de films PVDF considérée ici est montrée schématiquement à la figure 6.3.

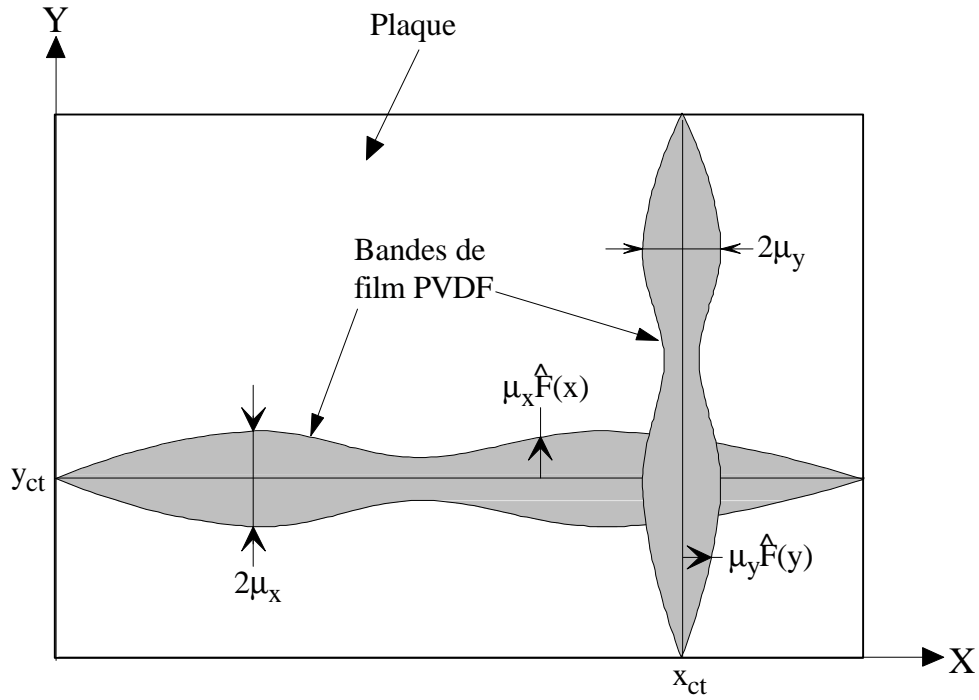


Figure 6.3: Configuration typique des bandes PVDF.

Le but de cette section est de trouver les équations qui donnent les charges des différentes bandes PVDF montrées à la figure 6.3. L'axe de symétrie de la bande parallèle à la direction  $x$  est positionné à  $y_{ct}$ . La largeur maximum admissible de cette bande est  $2\mu_x$ . La largeur en tout point le long de  $x$  est donnée par  $2\mu_x \hat{F}(x)$ .  $\hat{F}(x)$  est une fonction normalisée variant entre -1.0 et 1.0. L'axe longitudinal d'une bande coïncide avec la direction du coefficient maximum de contrainte/charge  $e_{zx}$ . La forme polynomiale suivante est posé pour la fonction  $\hat{F}(x)$ ,

$$\hat{F}(x) = \sum_{r=0}^{R-1} \hat{\alpha}_r \left( \frac{x}{L_x^{pl}} \right)^r. \quad (6.11)$$

En utilisant toutes les hypothèses ci-dessus la charge de cette bande PVDF parallèle à l'axe  $x$  est donnée par,

$$q_x = -\frac{L_z^{pl} + L_z^c}{2} \int_0^{L_x^{pl}} \int_{y_{ct}-\mu_x \hat{F}(x)}^{y_{ct}+\mu_x \hat{F}(x)} \left[ e_{zx} \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + e_{zy} \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \right] dy dx. \quad (6.12)$$

En introduisant les équations (6.1) et (6.2) dans (6.12) puis en effectuant l'intégration le long de y, la charge de la bande parallèle à l'axe x devient,

$$q_x = -\frac{L_z^{pl} + L_z^c}{2} \sum_{i=1}^I \hat{W}_i \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{q=0}^{Q-1} A_{i,pq} \int_0^{L_x^{pl}} \left\{ \frac{e_{zx} p(p-1) L_y^{pl}}{(q+1)(L_x^{pl})^2} \left( \frac{x}{L_x^{pl}} \right)^{p-2} \cdot \left( \frac{y_{ct}}{L_y^{pl}} \right)^{q+1} \right. \\ \left[ \left( 1 + \frac{\mu_x \hat{F}(x)}{y_{ct}} \right)^{q+1} - \left( 1 - \frac{\mu_x \hat{F}(x)}{y_{ct}} \right)^{q+1} \right] + \frac{e_{zy} q}{L_y^{pl}} \left( \frac{x}{L_x^{pl}} \right)^p \cdot \left( \frac{y_{ct}}{L_y^{pl}} \right)^{q-1} \\ \left. \left[ \left( 1 + \frac{\mu_x \hat{F}(x)}{y_{ct}} \right)^{q-1} - \left( 1 - \frac{\mu_x \hat{F}(x)}{y_{ct}} \right)^{q-1} \right] \right\} dx \quad (6.13)$$

Avant d'effectuer l'intégration le long de x, il est nécessaire d'introduire des approximations afin de pouvoir mettre en évidence les coefficients inconnus  $\hat{\alpha}_r$  de la forme  $\hat{F}(x)$ . Ces approximations consistent à imposer la largeur maximum  $2\mu_x$  de la bande PVDF suffisamment petite, c'est-à-dire que  $|\mu_x \hat{F}(x)/y_{ct}| \ll 1.0$ , pour qu'il soit possible d'écrire,

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{\mu_x \hat{F}(x)}{y_{ct}} \right)^{q+1} &\approx 1 + \frac{(q+1)\mu_x \hat{F}(x)}{y_{ct}} + \frac{q(q+1)}{2} \left( \frac{\mu_x \hat{F}(x)}{y_{ct}} \right)^2 \\ \left( 1 - \frac{\mu_x \hat{F}(x)}{y_{ct}} \right)^{q+1} &\approx 1 - \frac{(q+1)\mu_x \hat{F}(x)}{y_{ct}} + \frac{q(q+1)}{2} \left( \frac{\mu_x \hat{F}(x)}{y_{ct}} \right)^2 \\ \left( 1 + \frac{\mu_x \hat{F}(x)}{y_{ct}} \right)^{q-1} &\approx 1 + \frac{(q-1)\mu_x \hat{F}(x)}{y_{ct}} + \frac{(q-1)(q-2)}{2} \left( \frac{\mu_x \hat{F}(x)}{y_{ct}} \right)^2 \\ \left( 1 - \frac{\mu_x \hat{F}(x)}{y_{ct}} \right)^{q-1} &\approx 1 - \frac{(q-1)\mu_x \hat{F}(x)}{y_{ct}} + \frac{(q-1)(q-2)}{2} \left( \frac{\mu_x \hat{F}(x)}{y_{ct}} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Il faut noter que les positions *physiques*  $y_{ct}$  admissibles par ces approximations dépendent de la position de l'origine du système d'axes utilisés. Des approximations similaires à celles faites à l'équation (6.14) peuvent être faites dans le cas où l'origine du système d'axes est centrée sur la plaque. Cependant les approximations nécessaires pour un tel système d'axes centré obligeraient un positionnement des bandes PVDF loin du centre de la plaque, car les positions *physiques* près du centre de la plaque ( $y_{ct} \approx 0$ ) ne seraient pas des positions admissibles dans ce cas. Avec un

système d'axes dont l'origine coïncide avec le coin de la plaque, tel que celui utilisé dans ce chapitre, les approximations faites à l'équation (6.14) sont valides pour des positions *physiques* qui se situent près du centre ( $y_{ct} \approx L_y^{pl}/2$ ) de la plaque. Il est très intéressant de pouvoir considérer ces positions centrales, car pour des plaques dont les conditions limites sont identiques sur les quatre côtés, les déformations maximums des modes ayant un comportement monopolaire se situent près du centre de la plaque. Or, ce sont ces modes qu'il faut détecter et pondérer avec le capteur de déplacement volumique. Donc, l'origine du système d'axes est positionnée au coin de la plaque dans ce chapitre afin de pouvoir utiliser les approximations de l'équation (6.14) sans compromettre les positions près du centre de la plaque.

En remplaçant les approximations données en (6.14) dans l'équation (6.13), la charge de la bande PVDF parallèle à l'axe x écrit sous forme matricielle est,

$$q_x = -\frac{L_z^{pl} + L_z^c}{2} \langle \hat{W}_i \rangle [A_{i,pq}] [T1_{pq,r}] \{ \hat{\alpha}_r \} . \quad (6.15)$$

Le vecteur colonne  $\{ \hat{\alpha}_r \}$  contient les coefficients inconnus de la forme  $\hat{F}(x)$ . Les termes de la matrice  $[T1_{pq,r}]$  sont déterminés avec

$$T1_{pq,r} = \frac{2\mu_x e_{zx} p(p-1)}{L_x^{pl} (p+r-1)} \left( \frac{y_{ct}}{L_y^{pl}} \right)^q + \frac{2\mu_x L_x^{pl} e_{zy} q(q-1)}{(L_y^{pl})^2 (p+r+1)} \left( \frac{y_{ct}}{L_y^{pl}} \right)^{q-2} . \quad (6.16)$$

La bande de film PVDF parallèle à l'axe y est considéré avoir l'axe de symétrie situé à  $x_{ct}$  avec une largeur maximale de  $2\mu_y$  et la forme  $\hat{F}(y)$  prescrite par

$$\hat{F}(y) = \sum_{s=0}^{S-1} \hat{\beta}_s \left( \frac{y}{L_y^{pl}} \right)^s . \quad (6.17)$$

En utilisant une démarche tout à fait analogue à celle utilisée pour la bande de PVDF parallèle à x, la charge de la bande de PVDF parallèle à y après avoir effectué la première intégration le long de l'axe x s'écrit,

$$\begin{aligned}
q_y = & -\frac{L_z^{pl} + L_z^c}{2} \sum_{i=1}^I \hat{W}_i \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{q=0}^{Q-1} A_{i,pq} \int_0^{L_y^{pl}} \left\{ \frac{e_{zx} q(q-1) L_x^{pl}}{(p+1)(L_y^{pl})^2} \left( \frac{y}{L_y^{pl}} \right)^{q-2} \cdot \left( \frac{x_{ct}}{L_x^{pl}} \right)^{p+1} \right. \\
& \left[ \left( 1 + \frac{\mu_y \hat{F}(y)}{x_{ct}} \right)^{p+1} - \left( 1 - \frac{\mu_y \hat{F}(y)}{x_{ct}} \right)^{p+1} \right] + \frac{e_{zy} p}{L_x^{pl}} \left( \frac{y}{L_y^{pl}} \right)^q \cdot \left( \frac{x_{ct}}{L_x^{pl}} \right)^{p-1} \\
& \left. \left[ \left( 1 + \frac{\mu_y \hat{F}(y)}{x_{ct}} \right)^{p-1} - \left( 1 - \frac{\mu_y \hat{F}(y)}{x_{ct}} \right)^{p-1} \right] \right\} dy \quad (6.18)
\end{aligned}$$

En utilisant des approximations similaires à celles données en (6.14), puis en effectuant l'intégration le long de l'axe y, cette dernière équation prend la forme matricielle suivante,

$$q_y = -\frac{L_z^{pl} + L_z^c}{2} \langle \hat{W}_i \rangle [A_{i,pq}] [T2_{pq,s}] \{\hat{\beta}_s\}. \quad (6.19)$$

Les termes de la matrice  $[T2_{pq,s}]$  sont obtenus avec

$$T2_{pq,s} = \frac{2\mu_y e_{zx} q(q-1)}{L_y^{pl} (q+s-1)} \left( \frac{x_{ct}}{L_x^{pl}} \right)^p + \frac{2\mu_y L_y^{pl} e_{zy} p(p-1)}{(L_x^{pl})^2 (q+s+1)} \left( \frac{x_{ct}}{L_x^{pl}} \right)^{p-2}. \quad (6.20)$$

### 6.2.5 Formes des bandes de PVDF pour obtenir un capteur de déplacement volumique

Le capteur de déplacement volumique est composé de plusieurs bandes de films PVDF. Le signal proprement dit du capteur de déplacement volumique est la somme de tous les signaux des bandes qui le composent. Il faut donc que la somme des charges des bandes de PVDF soit proportionnelle au déplacement volumique de la plaque. Lorsqu'il y a une bande de films PVDF dans chacune des directions, alors la charge totale est,

$$q_{tot} = q_x + q_y \equiv D. \quad (6.21)$$

En insérant les équations (6.13), (6.19) et (6.8) dans l'équation (6.21) puis en identifiant ligne par ligne, il vient



$$-\frac{L_z^{pl} + L_z^c}{2} \left\{ [A_{i,pq}] [T1_{pq,r}] \{\hat{\alpha}_r\} + [A_{i,pq}] [T2_{pq,s}] \{\hat{\beta}_s\} \right\} = L_x^{pl} L_y^{pl} [A_{i,pq}] \{D_{pq}\}. \quad (6.22)$$

L'équation (6.22) forme un système de “T” équations linéaires qu'il faut solutionner pour “R+S” coefficients inconnus,  $\hat{\alpha}_r$  et  $\hat{\beta}_s$ . Ce système d'équations a une solution unique seulement si “R+S=I”, où “I” est le nombre total de modes considérés pour le capteur de déplacement volumique. Il est important de noter que le capteur de déplacement volumique obtenu avec l'équation (6.22) est indépendant de la fréquence et des caractéristiques de l'excitation (amplitude, position etc.).

La condition de solution unique mentionnée ci-dessus relie le nombre de modes considérés aux ordres des polynômes utilisés pour les formes des bandes. Il faut noter que la complexité d'une bande PVDF (plusieurs changements de polarité) augmente avec l'ordre du polynôme utilisé, ce qui implique des difficultés d'implantation expérimentale. Lorsque le nombre de modes “I” est important, il est intéressant de considérer le rajout d'une ou de plusieurs bandes dans une ou les deux directions afin de garder l'ordre des polynômes de chacune des bandes faibles. L'équation (6.22) peut aisément être reconstruite de façon à pouvoir considérer plusieurs bandes de films PVDF dans chacune des directions.

### 6.3 Capteur de déplacement volumique pour plaque

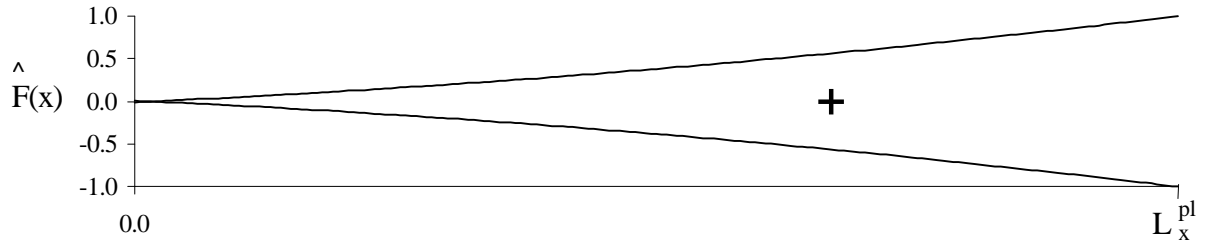
La solution de l'équation (6.22) donne les coefficients des formes des bandes de PVDF qui composent le capteur de déplacement volumique. Cette équation peut être solutionnée pour n'importe quelles positions  $x_{ct}$  et  $y_{ct}$  des bandes PVDF. Malheureusement, pour plusieurs positions sur la plaque, le capteur obtenu ne sera pas un bon capteur de déplacement volumique. Cela est dû aux approximations utilisées à l'équation (6.14). Ces approximations sont purement géométriques, ce qui signifie qu'elles tiennent compte seulement de l'opération de filtrage qu'un capteur étendu effectue et ignorent totalement l'opération d'intégration faite par ces derniers. Ce qui revient à dire que les approximations de l'équation (6.14) ne tiennent pas compte de la distribution des

déformations sur la plaque. Donc, une petite erreur d'approximation sur la forme du capteur pondérée par une grande distribution de déformation peut générer une erreur importante dans le signal de ce capteur. Dans ce cas, le signal du capteur n'est pas du tout proportionnel au déplacement volumique de la plaque.

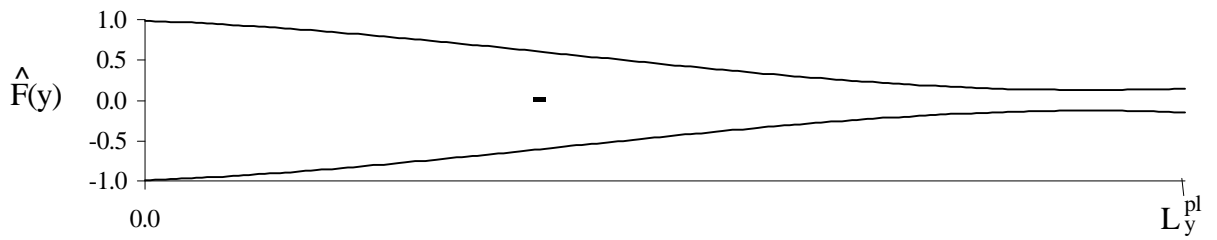
L'observation mentionnée au paragraphe précédent implique que la solution de l'équation (6.22) ne garantit pas que le capteur obtenu est un capteur de déplacement volumique. Il faut donc vérifier théoriquement le signal du capteur PVDF une fois les coefficients des formes  $\hat{\alpha}_r$  et  $\hat{\beta}_s$  déterminés. Cette vérification se fait en calculant la charge des bandes PVDF avec les équations (6.13) et (6.18). Les intégrations de ces deux équations sont faites numériquement, ce qui permet d'avoir une valeur théorique de la charge des bandes qui ne dépend pas des approximations utilisées pour bâtir le système d'équations (6.22). La somme de ces charges ainsi calculées donne le signal du capteur de déplacement volumique. Ce signal est ensuite comparé au déplacement volumique mesuré de la plaque. Les positions “ $x_{ct}$ ” et “ $y_{ct}$ ” utilisées sont bonnes si le signal reconstruit numériquement correspond bien au déplacement volumique. Si le signal reconstruit ne correspond pas au déplacement volumique, il faut recommencer avec d'autres valeurs “ $x_{ct}$ ” et “ $y_{ct}$ ”.

La plaque encastree décrite au tableau 5.3 est utilisée pour obtenir les résultats présentés dans ce chapitre. Les sept premiers modes de cette plaque sont utilisés pour trouver les formes des bandes PVDF. Les figures 6.4 et 6.5 donnent les formes des bandes PVDF ainsi que le signal reconstruit numériquement du capteur (somme des équations (6.13) et (6.18)) et le déplacement volumique mesuré de la plaque pour différentes positions “ $x_{ct}$ ” et “ $y_{ct}$ ”. L'actionneur secondaire introduit les vibrations pour ces résultats.

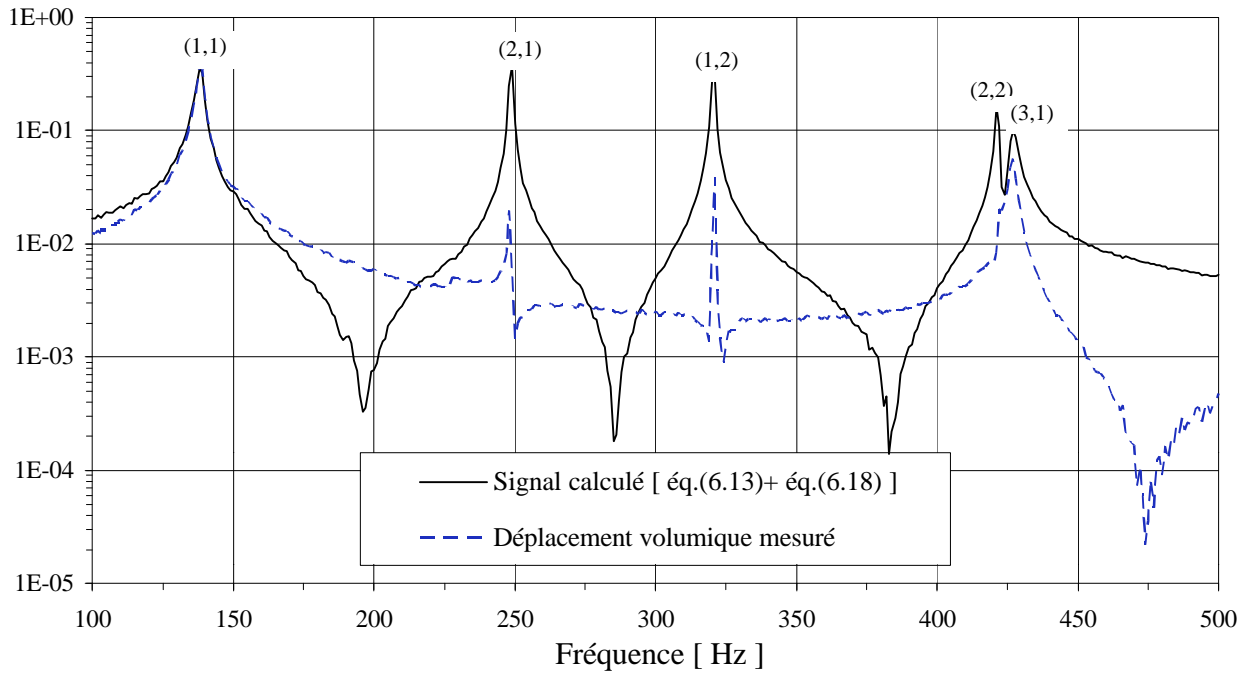
La figure 6.4 présente les résultats pour les positions de bandes “ $x_{ct}=0.24m$ ” et “ $y_{ct}=0.18m$ ”. Le signal reconstruit numériquement pour ces positions, voir figure 6.4(c), ne correspond pas du tout au déplacement volumique de la plaque. Ces positions sont un exemple où la solution de l'équation (6.22) ne donne pas un capteur de déplacement volumique.



(a) Forme de la bande parallèle à l'axe x

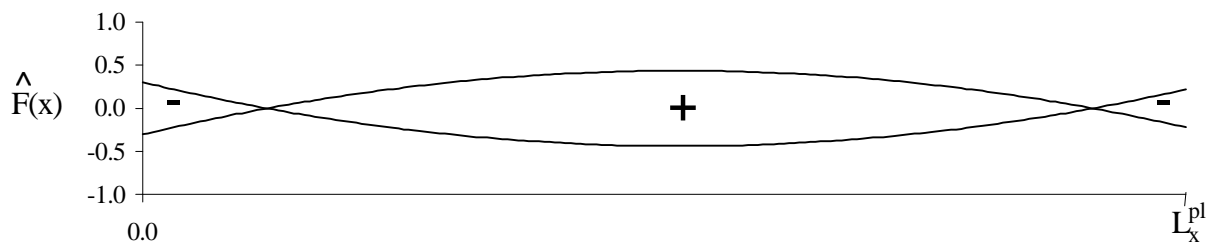


(b) Forme de la bande parallèle à l'axe y

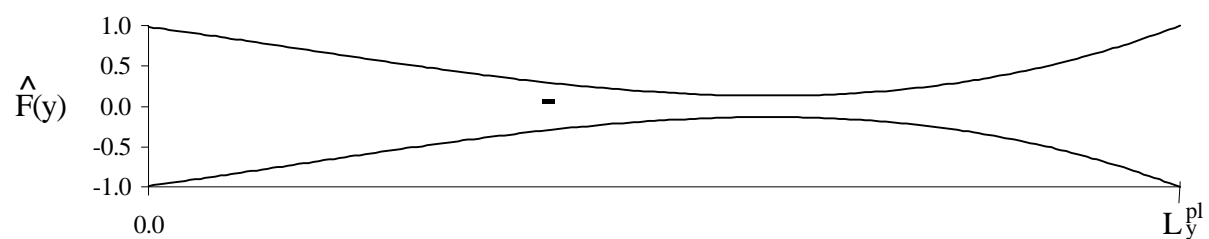


(c) Comparaison entre le signal calculé et le déplacement volumique

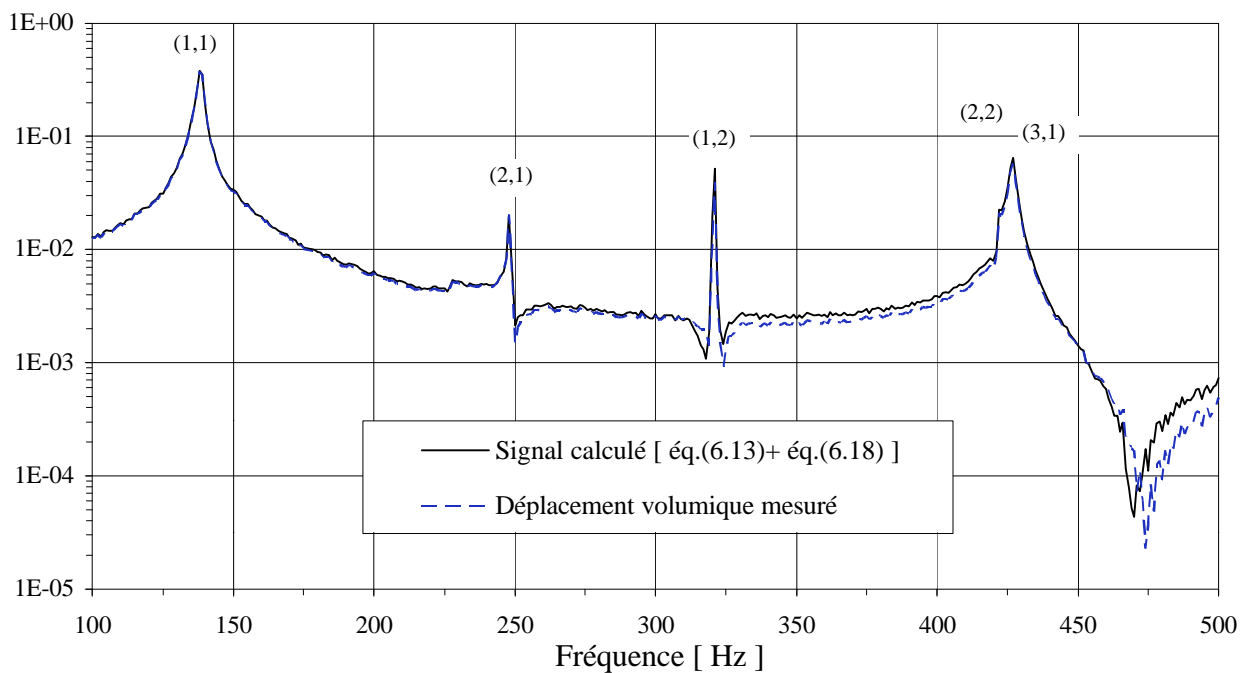
Figure 6.4: Formes des bandes PVDF et comparaison entre le signal du capteur et le déplacement volumique de la plaque, cas  $x_{ct}=0.24$  et  $y_{ct}=0.18m$ .



(a) Forme de la bande parallèle à l'axe x



(b) Forme de la bande parallèle à l'axe y



(c) Comparaison entre le signal calculé et le déplacement volumique

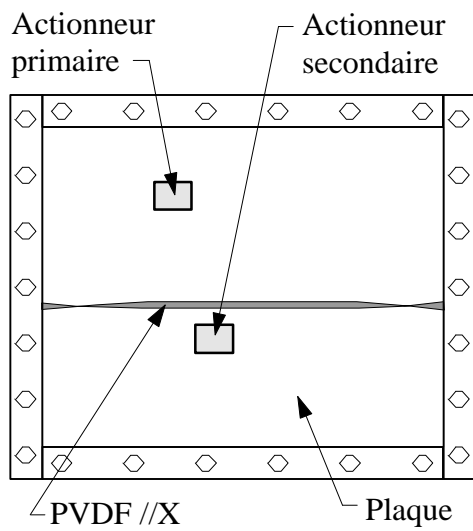
Figure 6.5: Formes des bandes PVDF et comparaison entre le signal du capteur et le déplacement volumique de la plaque, cas  $x_{ct}=0.259$  et  $y_{ct}=0.176m$ .

La figure 6.5 présente les résultats pour les positions “ $x_{ct}=0.259m$ ” et “ $y_{ct}=0.176m$ ”. La figure 6.5(c) montre clairement que la solution de l'équation (6.22) donne bel et bien un capteur de déplacement volumique pour ces positions de bandes PVDF.

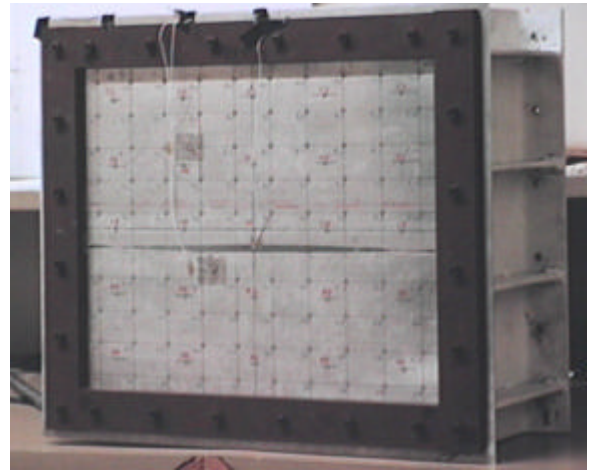
Il faut remarquer que les formes des bandes PVDF présentées à la figure 6.5 sont globalement symétriques par rapport à leurs centres. Intuitivement, ces types de formes symétriques étaient attendus car les formes des modes que ce capteur doit détecter pour cette plaque encastrée sont symétriques par rapport au centre de la plaque. Il s'avère que la forme des bandes obtenues est un très bon indicateur de la validité du capteur de déplacement volumique. Effectivement, toutes positions “ $x_{ct}$ ” et “ $y_{ct}$ ” qui donnent des formes symétriques sont des positions où le signal reconstruit numériquement correspond bien au déplacement volumique de la plaque. Les autres positions où les formes des bandes sont quelconques, comme pour le cas montré à la figure 6.4, sont des positions où le signal du capteur n'est pas proportionnel au déplacement volumique.

#### **6.4 Implantation expérimentale du capteur de déplacement volumique**

Un capteur de déplacement volumique pour plaque composé de deux bandes de films PVDF est testé expérimentalement. Les bandes de films PVDF montrées à la figure 6.5 sont posées sur la plaque encastrée du tableau 5.3. Des photos qui montrent le devant et l'arrière de cette plaque sont présentées à la figure 6.6. La bande PVDF parallèle à l'axe des  $x$  est sur le devant de la plaque tandis que la bande parallèle à l'axe  $y$  est à l'arrière de cette dernière. Ces bandes n'ont pas été posées sur la même face de la plaque afin d'éviter tout croisement qui pourrait générer une interférence mécanique ou électrique entre ces deux bandes. La largeur maximum admissible de ces bandes est fixé à 1 cm. ( $\mu_x = \mu_y = 1.0cm$ ). Les films PVDF ont les mêmes caractéristiques piézoélectriques que ceux utilisés pour la poutre, voir tableau 3.4. Les éléments piézoélectriques céramiques (PZT) qui composent les actionneurs (primaire et secondaire) se voient très bien sur ces photos. Les différents points de mesures des vitesses transversales utilisés pour le vibromètre laser sont visibles sur la photo du devant de la plaque.

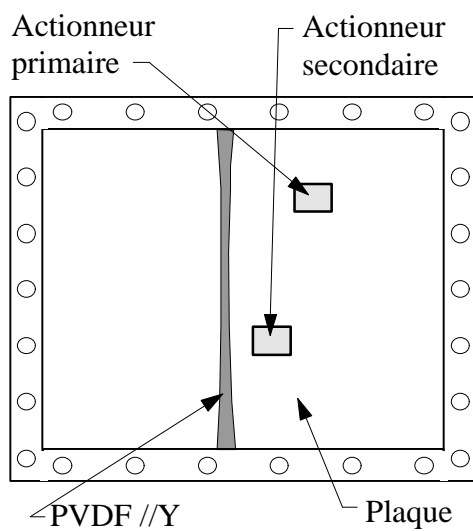


schéma



photo

(a) Devant de la plaque



schéma



photo

(b) Arrière de la plaque

Figure 6.6: Schémas et photos du montage expérimental de la plaque encadrée.

La figure 6.7 compare la mesure expérimentale du déplacement volumique faite avec le vibromètre laser au signal mesuré du capteur PVDF lorsque l'actionneur primaire induit les vibrations dans la plaque. Globalement, les résultats concordent bien jusqu'au cinquième mode (mode (3,1)).

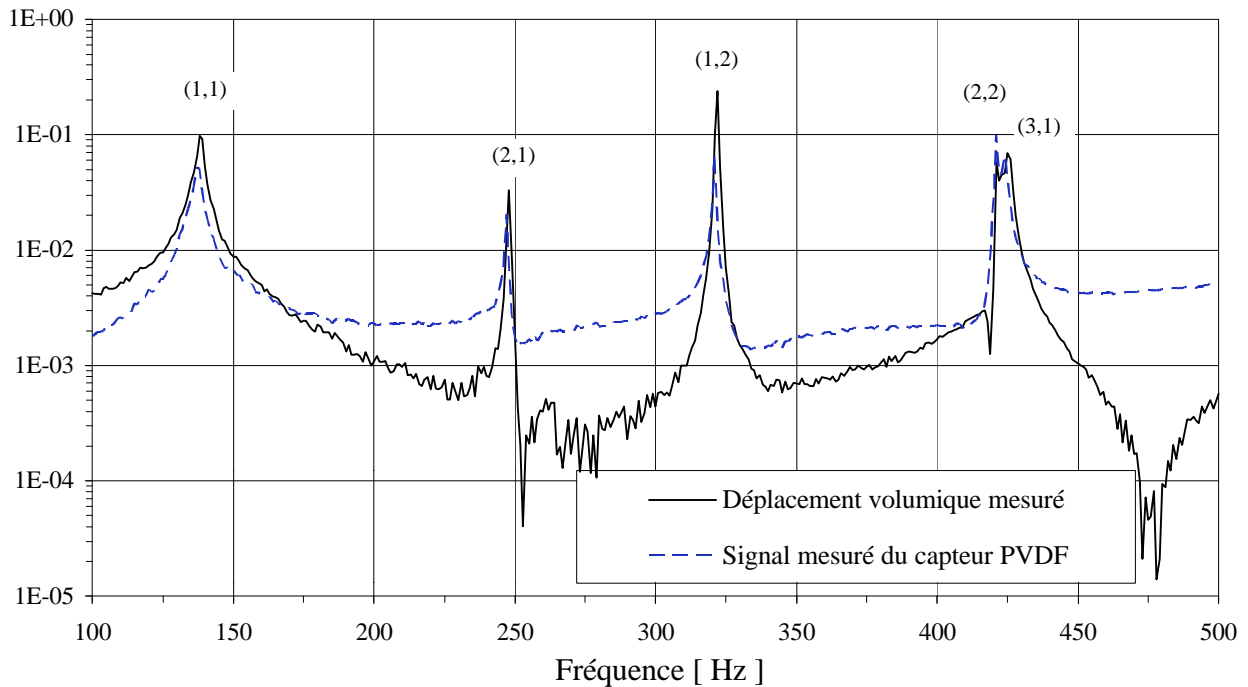


Figure 6.7: Mesures expérimentales du déplacement volumique de la plaque et du signal du capteur PVDF lorsque l'actionneur **primaire** induit les vibrations.

La figure 6.7 montre qu'il y a des différences d'amplitudes hors résonances. Ces différences semblent provenir du fait que le signal du capteur PVDF atteint un seuil minimum. Ce seuil minimum est de l'ordre de  $2.5 \times 10^{-3}$  sur cette figure et est relativement constant dans la bande de fréquences 175Hz à 425 Hz. Il est fort probable que ce seuil minimum du signal soit dû aux détections des modes supérieurs par les bandes PVDF. Les modes de la plaque supérieurs à "T" ne sont pas considérés dans le développement du capteur de déplacement volumique et ces derniers ne peuvent être complètement filtrés par les bandes PVDF. Les contributions de ces modes supérieurs à la déformation de la surface de la plaque introduisent donc une erreur dans le signal.

Contrairement au cas des poutres, les bandes PVDF posées sur des plaques ne peuvent pas totalement filtrer les modes d'ordre supérieur. Dans le cas des plaques, les bandes PVDF ont des longueurs qui correspondent aux dimensions de la plaque, par contre leurs largeurs sont beaucoup plus petites que ces dimensions de plaque. Une bande de films PVDF qui a une petite largeur par rapport à celle de la plaque est plus sensible aux déformations introduites par les modes d'ordre supérieur. Cela est dû aux rayons de courbure des modes d'ordre supérieur qui sont beaucoup plus faibles que ceux des modes d'ordre inférieur. Un exemple est présenté à la figure 6.8 qui montre schématiquement les déformées de la section  $y=L_y^{pl}/2$  d'une plaque pour le mode (1,1) et (5,1). Le rayon de courbure de chacun de ces modes est indiquée sur cette figure. La déformation à la surface supérieure de la plaque est inversement proportionnelle à ces rayons de courbure. La section d'une bande PVDF qui a une largeur  $2\mu_y\hat{F}(y)$ , voir la figure 6.8, est beaucoup plus sensible à la déformée modale du mode (5,1) qui a un petit rayon courbure comparativement à celui du mode (1,1). En fonction de sa largeur et de sa position " $x_{ct}$ " ou " $y_{ct}$ ", une bande PVDF détecte plus ou moins certains des modes d'ordre supérieur, ce qui introduit une erreur plus ou moins importante dans le signal de la bande.

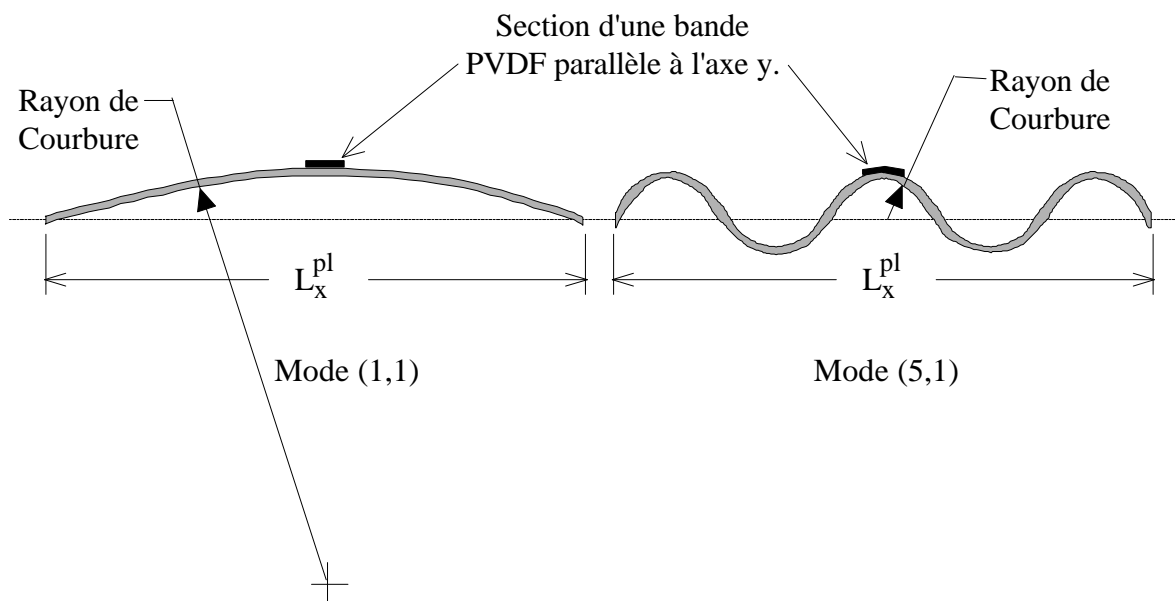


Figure 6.8: Schémas des déformées modales de la section  $y=L_y^{pl}/2$  pour le mode (1,1) et (5,1).



À l'heure actuelle, il n'est malheureusement pas possible de faire une étude systématique qui permettrait de quantifier l'influence des modes d'ordre supérieur sur les signaux des bandes PVDF. La limite ne provient pas de la méthode développée mais plutôt des polynômes utilisés pour les fonctions propres. Ces polynômes ont été choisis pour leur facilité de manipulation mathématique et la possibilité de considérer n'importe quelles conditions limites, mais ils ont le net désavantage d'être très mal conditionnés. Ce mauvais conditionnement génère des instabilités numériques lorsque des modes supérieurs au dixième mode de la plaque désirent être approchés. Ce type de polynôme limite donc l'approche développée à approximativement dix modes. Il est possible de contourner ce problème si d'autres types de polynômes mieux conditionnés sont utilisés. Un exemple est le polynôme de Legendre écrit sous la forme de Rodrigues. Les travaux de [BARDELL 1989 et 1991] ont montré qu'il est possible de construire une famille de fonctions essais avec ces polynômes qui sont bien conditionnés, ce qui permettrait de considérer beaucoup plus de modes de la plaque.

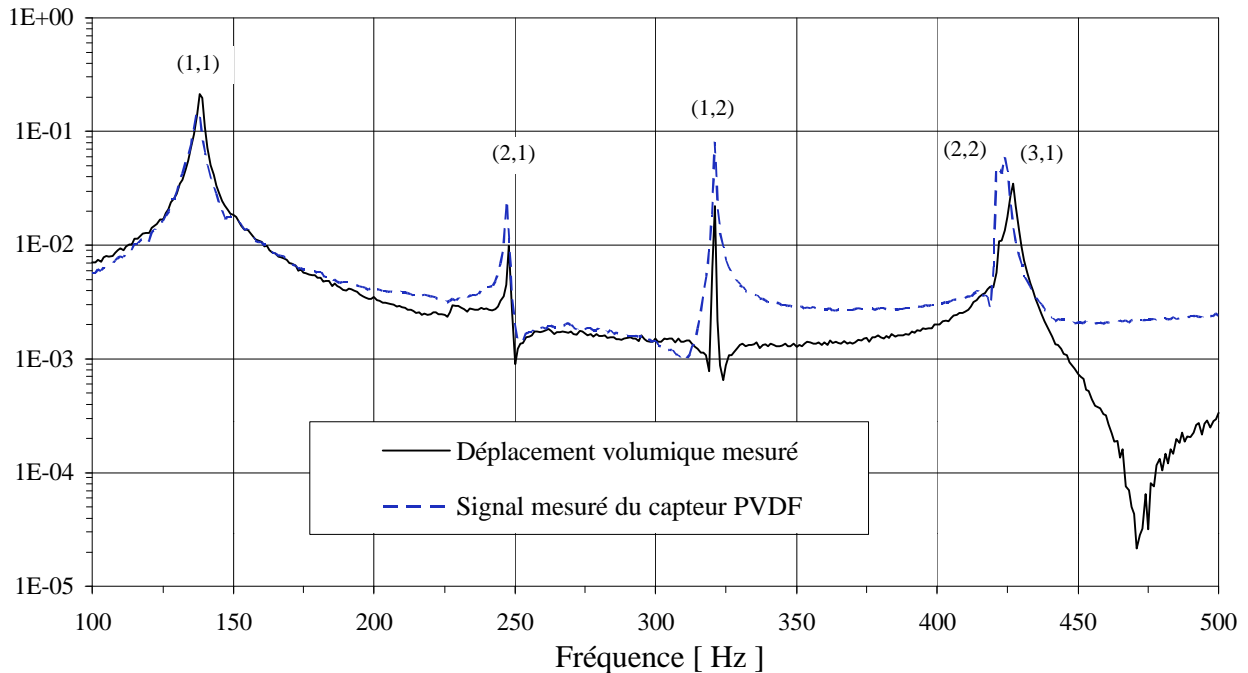


Figure 6.9: Mesures expérimentales du déplacement volumique de la plaque et du signal du capteur PVDF lorsque l'actionneur **secondaire** induit les vibrations.

La figure 6.9 présente les résultats lorsque l'actionneur secondaire introduit les vibrations dans la plaque. Le signal du capteur PVDF concorde très bien au déplacement volumique dans ce cas. Ces résultats sont meilleurs que ceux obtenus avec l'actionneur primaire. Cela est dû au fait que l'actionneur secondaire est positionné près du centre de la plaque ce qui lui permet d'actionner efficacement les modes de bas ordre, particulièrement le mode (1,1). Puisque les premiers modes de la plaque sont très bien actionnés, l'erreur induite par les modes d'ordre supérieur est proportionnellement moins importante que dans le cas où l'actionneur primaire induit les vibrations.

## 6.5 Conclusions

Ce chapitre présente une méthode qui permet de concevoir un capteur de déplacement volumique pour une plaque constitué de films piézoélectriques PVDF. Ce capteur de déplacement volumique est fait de plusieurs bandes de films PVDF posées parallèlement aux axes principaux de la plaque. Les déformées modales (fonctions propres) de la plaque sont utilisées pour déterminer les formes à donner aux différentes bandes PVDF. Les formes de ces bandes permettent de filtrer les déformations de la plaque afin que le signal total des bandes soit proportionnel au déplacement volumique.

Les déformées propres de la plaque sont obtenues à l'aide d'une analyse modale expérimentale. L'utilisation de mesures expérimentales rend la méthode pour obtenir un capteur de déplacement volumique applicable à n'importe quelles plaques minces. Les mesures expérimentales tiennent compte de toutes les imperfections dans la plaque, des conditions limites ainsi que de tous les ajouts de masse et de raideur qu'il y a sur la plaque.

Une implantation expérimentale est faite pour la plaque encastree du tableau 5.3. Les sept premiers modes de cette plaque sont utilisés pour former les deux bandes de films PVDF qui composent le capteur dans ce cas. Il est montré que ce n'est pas n'importe quelles positions " $x_{ct}$ " et

“ $y_{ct}$ ” des bandes qui vont donner un bon capteur de déplacement volumique. Pour chaque position considérée le signal du capteur obtenu doit être réévalué numériquement puis comparé au déplacement volumique mesuré. Les positions qui donnent un signal proportionnel au déplacement volumique sont des bonnes positions. Il est observé pour cette plaque encastrée que les bonnes positions donnent des bandes de films PVDF symétriques.

Le signal obtenu expérimentalement avec ce capteur constitué de films PVDF concorde bien avec le déplacement volumique mesuré avec un vibromètre laser. Ces résultats démontrent clairement qu'il est possible de faire un capteur de déplacement volumique avec des transducteurs étendus, tels que les films piézoélectriques PVDF.

Il y a des différences hors résonances entre le signal du capteur PVDF et le déplacement volumique. Ces différences sont attribuées aux modes d'ordres supérieurs qui ne peuvent pas être complètement filtrés par les bandes de films PVDF. Cependant, les résultats obtenus avec l'actionneur secondaire qui réussit à bien exciter les modes de bas ordres ont montré que les effets de ces modes d'ordres supérieurs sont faibles dans la bande de fréquence considérée.

L'utilisation de ce capteur de déplacement volumique dans un système de contrôle actif expérimental est présentée au chapitre suivant.

# Chapitre 7

## CONTRÔLE ACTIF DU DÉPLACEMENT VOLUMIQUE D'UNE PLAQUE

### 7.1 Introduction

Un capteur de déplacement volumique pour une plaque a été mis au point au chapitre précédent. L'application de ce type de capteur dans un système de contrôle actif est le but du présent chapitre. Dans un premier temps, une étude théorique de l'efficacité du contrôle de déplacement volumique de plaque est faite à l'aide du modèle P.A.E.P. développé au chapitre 5. Dans un deuxième temps, l'implantation expérimentale d'un système de contrôle actif dont le signal d'erreur provient directement du capteur de déplacement volumique présenté au chapitre 6 est effectuée. Des comparaisons entre les résultats théoriques et expérimentaux des champs de déplacement et de pressions pour huit fréquences démontrent que le capteur expérimental fonctionne bien et que le contrôle du déplacement volumique réduit de façon très efficace la puissance rayonnée en basse fréquence.

### 7.2 Indicateurs vibroacoustiques

Comme pour la poutre, les différents indicateurs acoustiques suivants sont utilisés pour quantifier les résultats; déplacement volumique, vitesse quadratique, puissance rayonnée et coefficient de rayonnement. Le système de coordonnées sphérique montré à la figure 4.1 est également utilisé ici. La vitesse quadratique et le déplacement volumique pour une plaque sont définis au chapitre 5 à la section 5.3. Une fois que la puissance rayonnée et la vitesse quadratique sont connues, le

coefficient de rayonnement est obtenu avec la même équation que celle pour la poutre, soit l'équation (4.14).

La puissance rayonnée pourrait être calculée avec une approche qui serait l'extension directe de ce qui est présenté à la section 4.2.1. Une telle approche nécessiterait une intégration numérique avec laquelle des temps de calcul importants sont associés. [BERRY 1991] a mis au point une approche qui permet le calcul de la puissance rayonnée à partir de l'information de champ pariétal. Le calcul de la puissance rayonnée est plus rapide avec cette approche. En utilisant la nomenclature de la présente thèse, l'équation de la puissance rayonnée de [BERRY 1991] s'écrit,

$$\Pi = \frac{\rho_0 c_0 \omega^2 (L_x^{pl})^2}{16 \pi R^2} \sum_{i=0}^{I-1} (-1)^i \frac{(k_0 L_x^{pl}/2)^{2(i+1)}}{(2i+1)!} \langle C_{mn} \rangle [J_{mnpq}^i] \{C_{pq}^*\} \quad (7.1)$$

Les équations pour déterminer les termes de la matrice  $[J_{mnpq}^i]$  sont données à l'annexe C de la thèse de [BERRY 1991]. Le nombre total de termes de la série de Taylor utilisés pour obtenir les résultats présentés dans ce chapitre est  $I=12$ .

### 7.3 Contrôle optimal du déplacement volumique d'une plaque

Le contrôle optimal permet de déterminer le voltage qu'il faut imposer aux bornes de l'actionneur secondaire (contrôle) pour que le déplacement volumique soit minimisé. La démarche pour obtenir ce voltage de contrôle est similaire à celle présentée à la section 4.3. Le déplacement transversal de la plaque, lorsqu'il y a du voltage aux bornes de l'actionneur primaire et secondaire, s'écrit à l'aide du théorème de superposition comme suit,

$$w(x, y) = \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{q=0}^{Q-1} (\Delta \phi^{a1} \epsilon_{pq}^{a1} + \Delta \phi^{a2} \epsilon_{pq}^{a2}) \left( \frac{2x}{L_x^{pl}} \right)^p \left( \frac{2y}{L_y^{pl}} \right)^q. \quad (7.2)$$

Les termes  $\epsilon_{pq}$  de cette équation représentent les coefficients de polynôme lorsqu'il y a un volt aux bornes de l'actionneur. Les termes  $\Delta \phi$  représentent des pondérations de ces coefficients de polynôme qui permettent de considérer n'importe quels voltages.

Le voltage de l'actionneur secondaire qui minimise le déplacement volumique d'une plaque s'obtient en posant la condition suivante,

$$0 = \int_{-L_x^{pl}/2}^{L_x^{pl}/2} \int_{-L_y^{pl}/2}^{L_y^{pl}/2} \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{q=0}^{Q-1} (\Delta\phi^{a1} \epsilon_{pq}^{a1} + \Delta\phi^{a2} \epsilon_{pq}^{a2}) \left( \frac{2x}{L_x^{pl}} \right)^p \left( \frac{2y}{L_y^{pl}} \right)^q dy dx \quad (7.3)$$

d'où

$$\Delta\phi^{a2} = -\Delta\phi^{a1} \frac{\sum_{p=0}^{P-1} \sum_{q=0}^{Q-1} \epsilon_{pq}^{a1} \left( \frac{1 - (-1)^{p+1}}{p+1} \right) \left( \frac{1 - (-1)^{q+1}}{q+1} \right)}{\sum_{p=0}^{P-1} \sum_{q=0}^{Q-1} \epsilon_{pq}^{a2} \left( \frac{1 - (-1)^{p+1}}{p+1} \right) \left( \frac{1 - (-1)^{q+1}}{q+1} \right)} \quad (7.4)$$

#### 7.4 Simulations de contrôle optimal du déplacement volumique d'une plaque

Les simulations du contrôle actif de déplacement volumique sont faites pour deux plaques ayant des conditions limites différentes. La première est la plaque encastree sur les quatre côtés du tableau 5.3. La deuxième est une plaque qui a toutes les caractéristiques de celles du tableau 5.3, à l'exception des conditions limites qui sont encastrees sur deux côtés adjacents et libres sur les deux autres.

Les résultats de simulations pour un contrôle optimal du déplacement transversal du point central de la plaque encastree sur les quatre côtés sont également présentés. La comparaison entre ces résultats et ceux obtenus pour le contrôle du déplacement volumique montre qu'il est plus avantageux de contrôler une information étendue pour obtenir des réductions intéressantes du rayonnement acoustique.

#### 7.4.1 Plaque encastree-encastree-encastree-encastree

Les résultats des différents indicateurs vibroacoustiques pour la plaque encastree sur les quatre cotes sont presentes aux figures 7.1 à 7.5. La figure 7.1 montre les coefficients de rayonnement modaux. Sur cette figure, les modes ayant un comportement multipolaire croisent ceux qui ont un comportement monopolaire pres de la frequence sans unite 2.5. Cette frequence sans unite 2.5 est un bon indicateur de la limite en frequence pour laquelle le controle du deplacement volumique est tres efficace pour une plaque mince encastree sur les quatre cotes.

Cette frequence sans unite 2.5 correspond approximativement à 270Hz pour la plaque considerée ici. Cette frequence de 270Hz est du même ordre de grandeur que la frequence où le coefficient de rayonnement avant controle croise le coefficient de rayonnement apres controle (200Hz), voir figure 7.3. Sous cette frequence, le controle du deplacement volumique est excellent pour reduire la puissance rayonnée (figure 7.2). La capacite de la plaque de rayonner, qui est representée par le coefficient de rayonnement, est reduite de façon drastique. Effectivement, la pente du coefficient de rayonnement passe d'une pente typique d'un monopole (6dB/oct.) à celle d'un dipole (12dB/oct). De plus, il y a également une réduction importante du niveau vibratoire à la resonance. La combinaison de ces deux phénomènes donne de très bonnes réductions de la puissance rayonnée. La figure 7.2 montre que les réductions de puissance rayonnée sont de l'ordre de 20 dB hors resonance, au dessous de 200Hz, et de 50dB à la resonance du mode (1,1). Au dessus de la frequence 200Hz, les réductions de la puissance rayonnée correspondent aux réductions du niveau vibratoire, voir figure 7.4.

Il faut également noter à la figure 7.2 qu'il y a une légère augmentation de la puissance rayonnée pres de 460Hz. Comme il est possible de voir à la figure 7.5 cette frequence de 460Hz correspond à une anti-resonance du deplacement volumique de l'actionneur secondaire (controle). L'augmentation de la puissance rayonnée à cette frequence correspond donc à un manque d'autorité de l'actionneur secondaire. L'augmentation est faible, car l'actionneur primaire a également une anti-resonance à cette frequence.

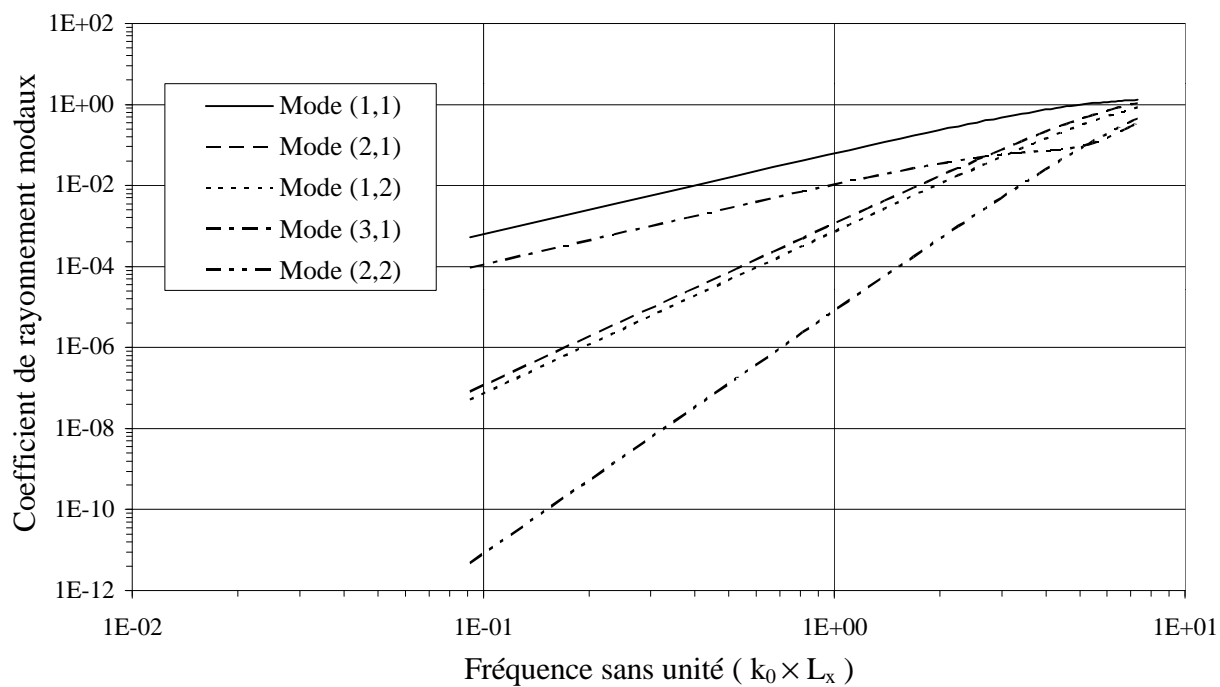


Figure 7.1: Coefficients de rayonnement modaux, plaque encastree-encastree-encastree-encastree

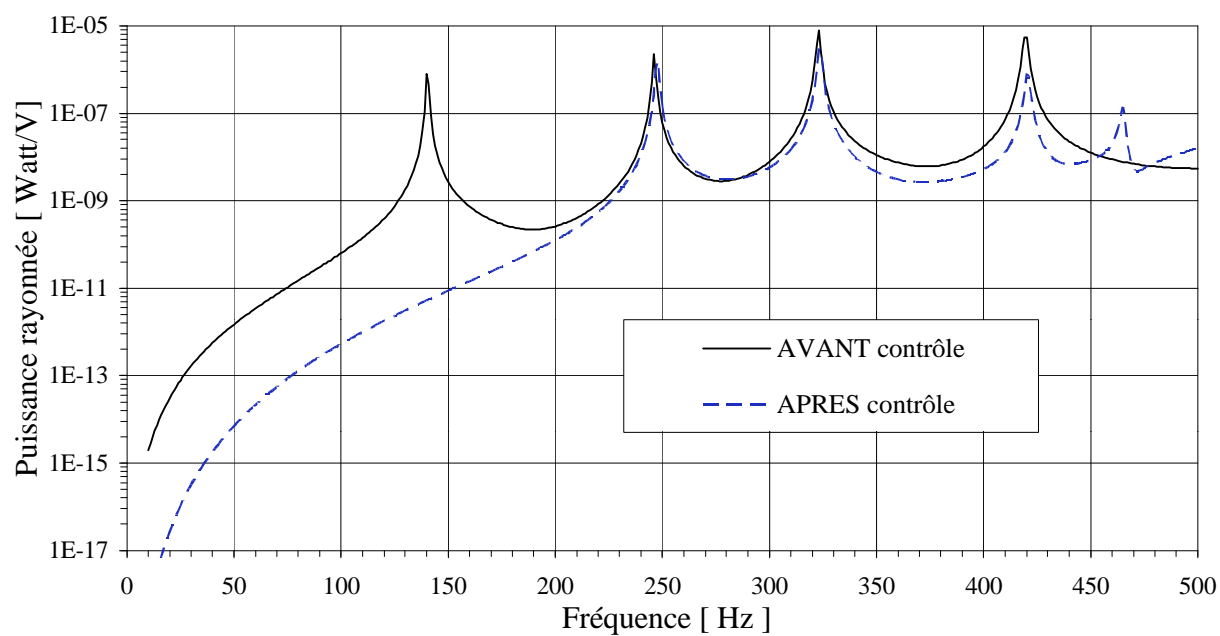


Figure 7.2: Puissances rayonnées avant et après contrôle, plaque encastree-encastree-encastree-encastree



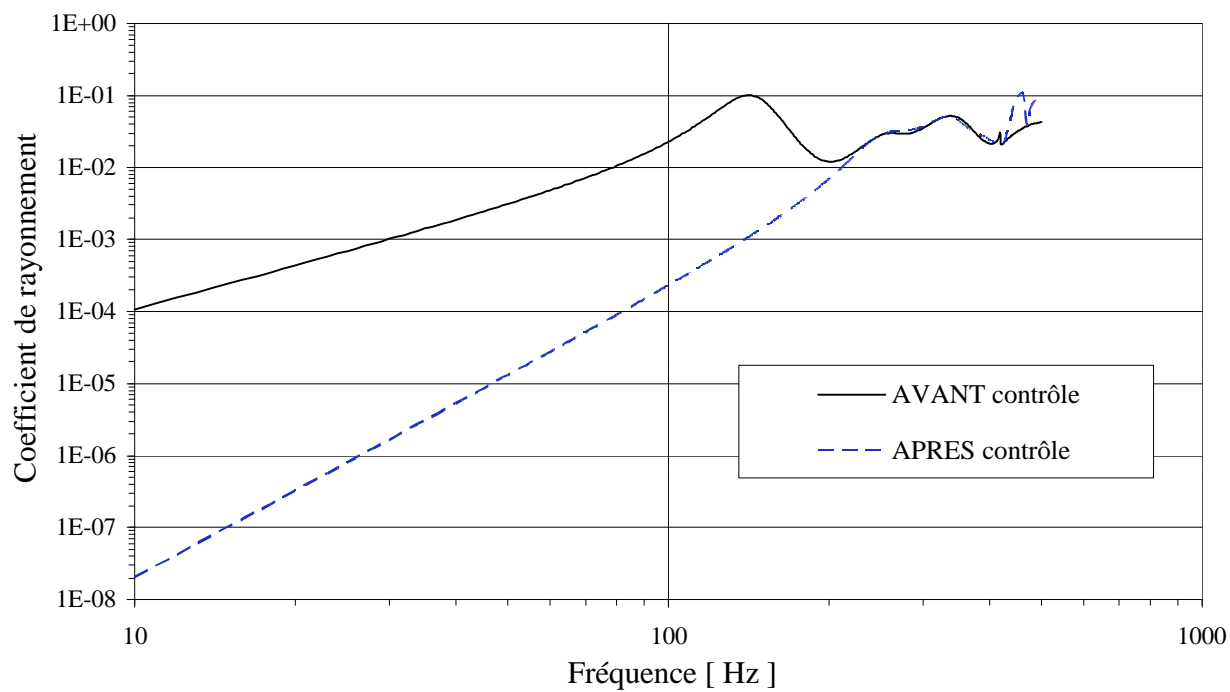


Figure 7.3: Coefficients de rayonnement avant et après contrôle, plaque encastree-encastree-encastree-encastree

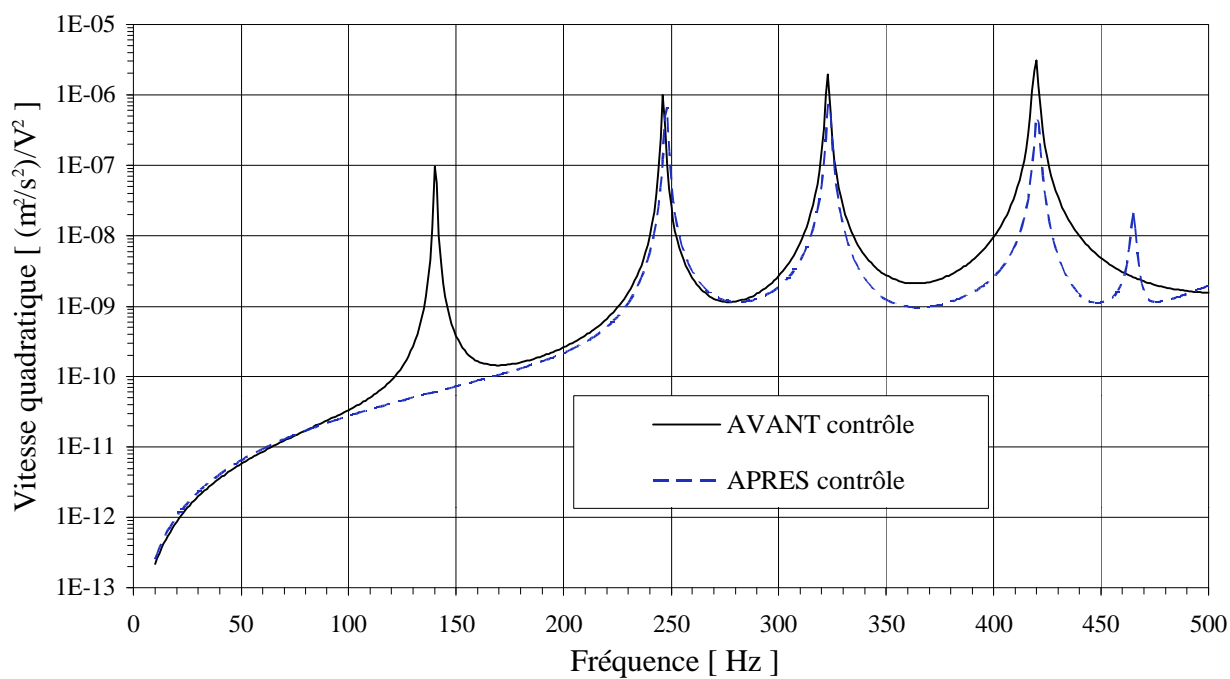


Figure 7.4: Vitesses quadratiques avant et après contrôle, plaque encastree-encastree-encastree-encastree

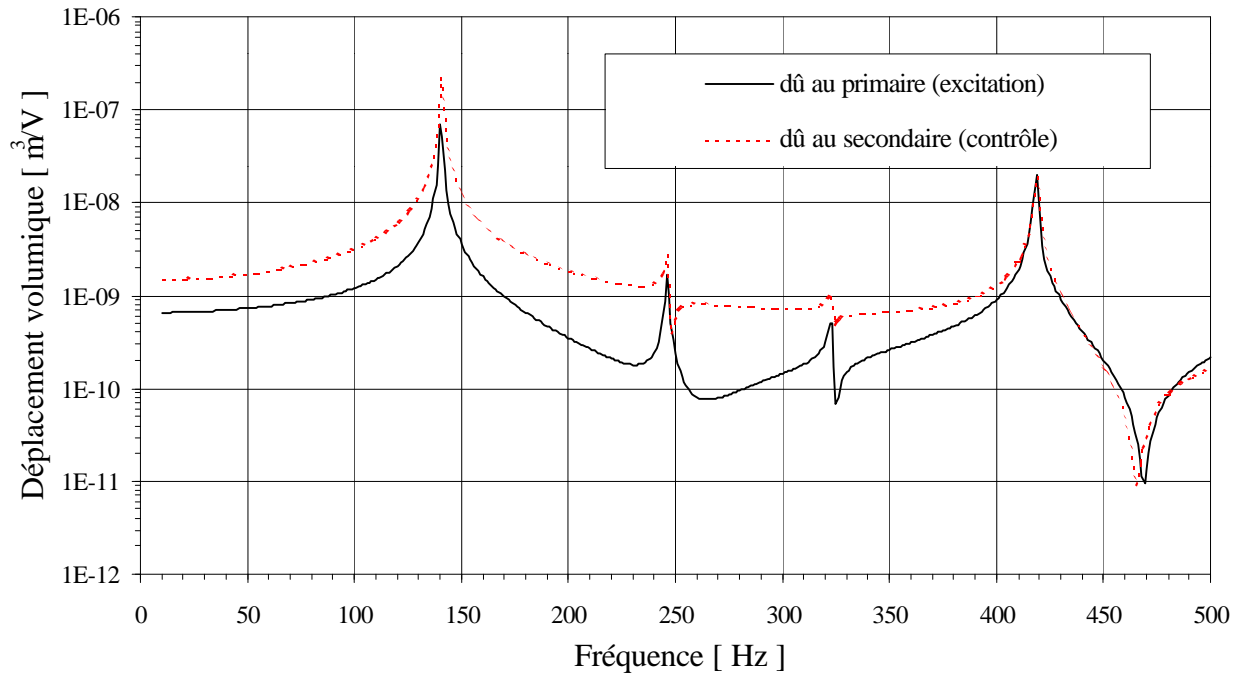


Figure 7.5: Déplacements volumiques, plaque encastree-encastree-encastree-encastree

#### 7.4.2 Plaque encastree-encastree-libre-libre

Les figures 7.6 à 7.10 présentent les résultats pour la plaque encastree sur deux côtés adjacents et libre sur les deux autres. Il est intéressant d'étudier ces conditions limites, car dans ce cas tout les modes de la plaque participe au déplacement volumique de cette dernière. Les coefficients de rayonnement modaux, présentés à la figure 7.6, montre que les cinq premiers modes ont une pente typique d'un monopole. Pour ces conditions limites, les coefficients de rayonnement modaux se croisent près de la fréquence sans unité 5.0, ce qui correspond à 550Hz pour la plaque considérée ici. Cette valeur de fréquence 550Hz indique que le contrôle du déplacement volumique est efficace sur une bande de fréquence deux fois plus large pour ces conditions limites comparativement aux conditions limites encastree sur les quatre côtés. Cela est dû au fait que le contrôle s'attaque à tous les modes de la plaque et non pas à un sur trois ou quatre comme dans le cas de la plaque encastree sur les quatre côtés.

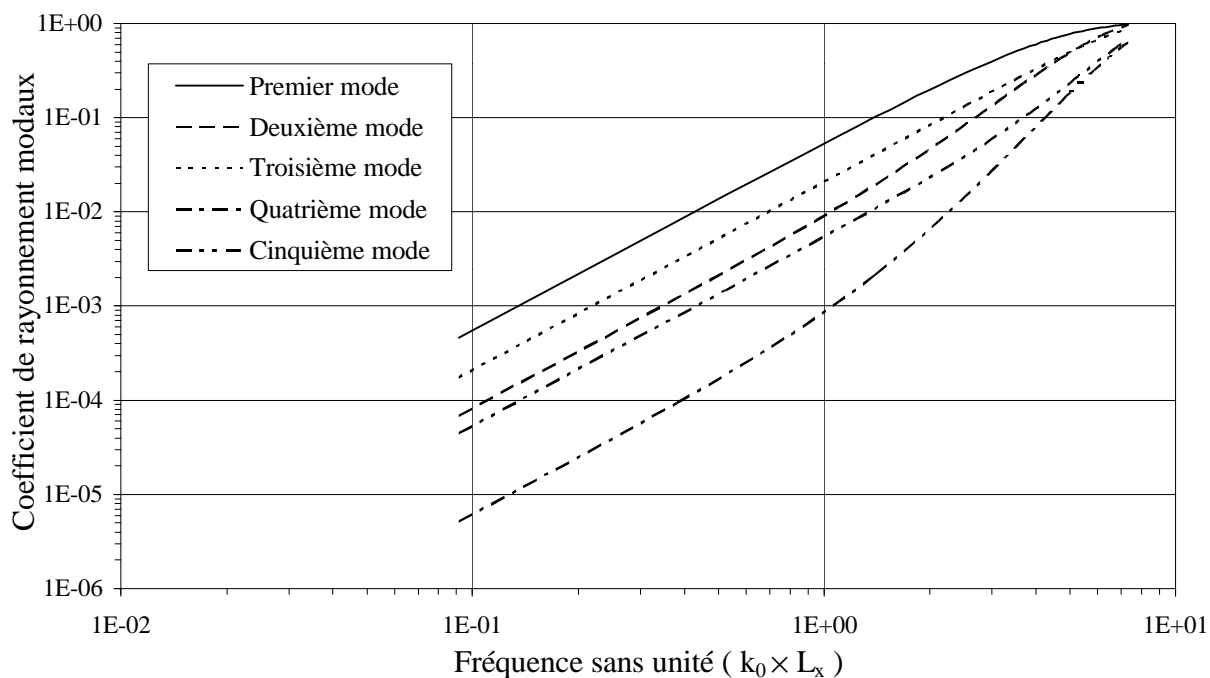


Figure 7.6: Coefficients de rayonnement modaux, plaque encastree-encastree-libre-libre

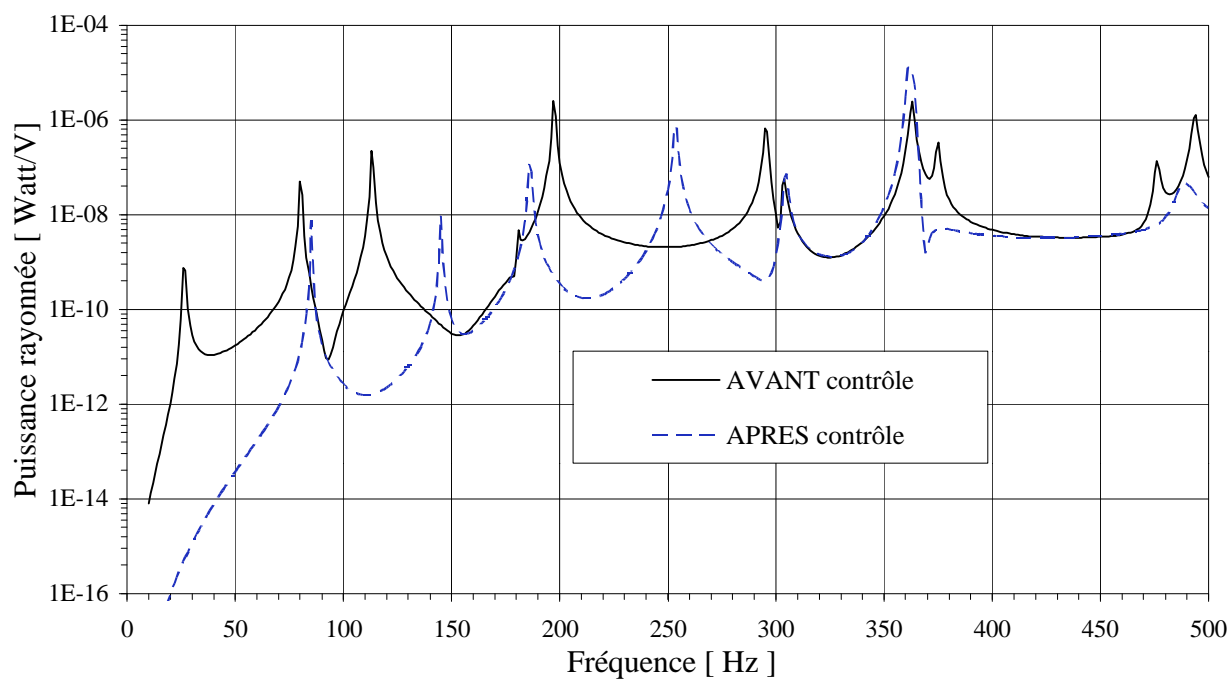


Figure 7.7: Puissances rayonnées avant et après contrôle, plaque encastree-encastree-libre-libre

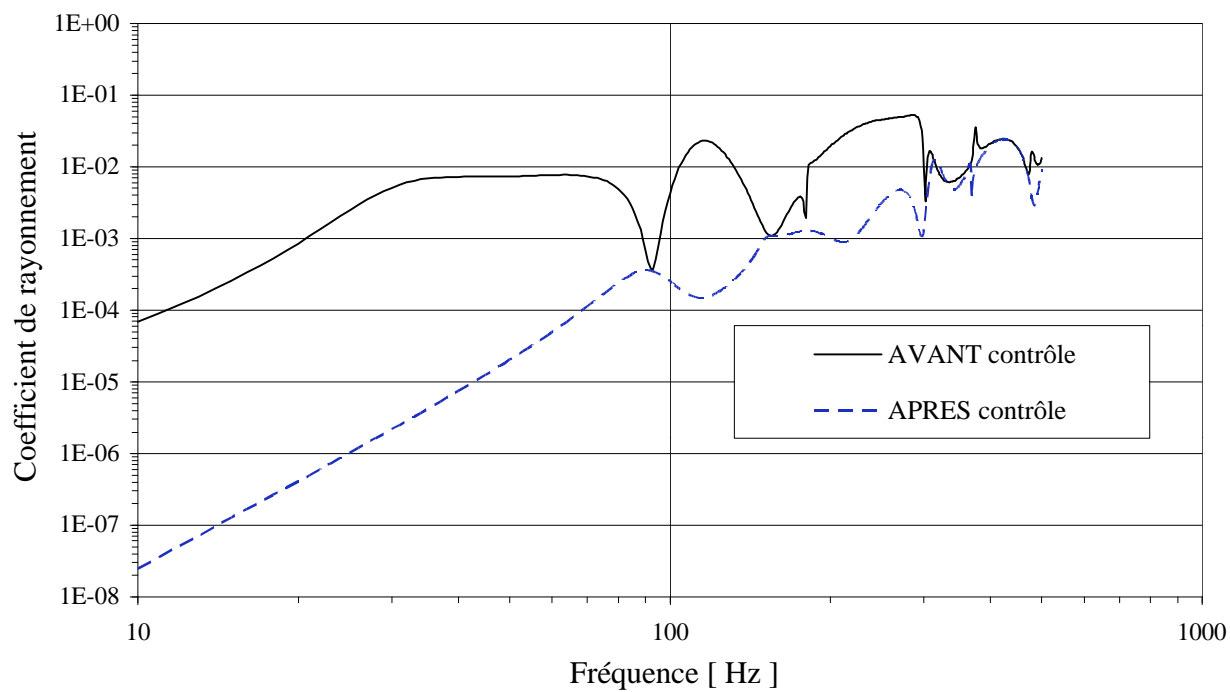


Figure 7.8: Coefficients de rayonnement avant et après contrôle, plaque encastree-encastree-libre-libre

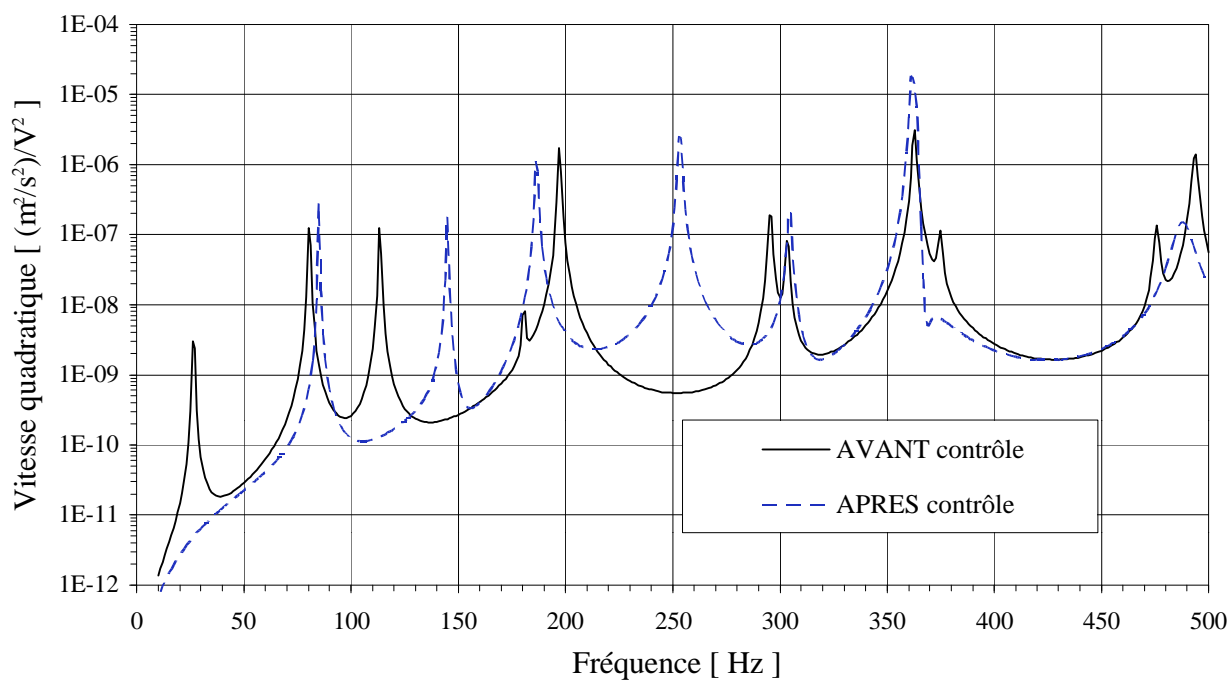


Figure 7.9: Vitesses quadratiques avant et après contrôle, plaque encastree-encastree-libre-libre

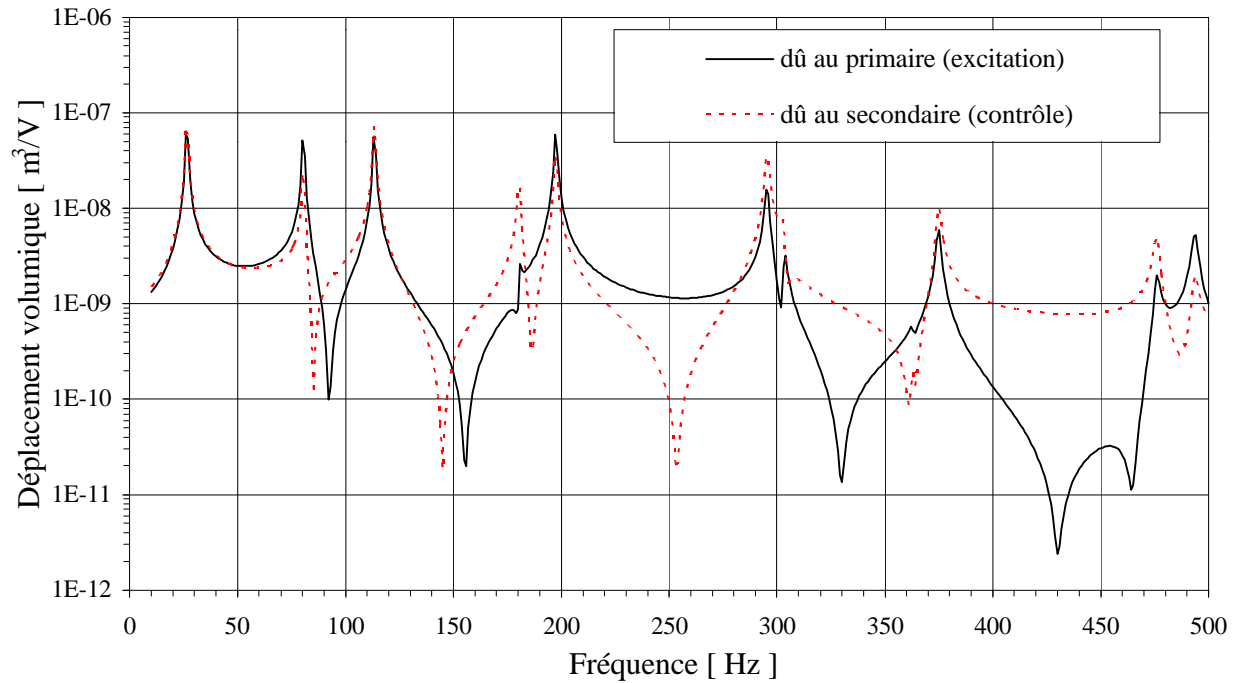


Figure 7.10: Déplacements volumiques, plaque encastrée-encastrée-libre-libre

Les figures 7.7 et 7.9 montrent qu'il y a des régénérations de puissance rayonnée et de vitesse quadratique à plusieurs endroits dans la bande de fréquence considérée. Chacune de ces régénérations est due à un manque d'autorité de l'actionneur secondaire (contrôle) et non à une limite de la stratégie de contrôle.

La figure 7.10 qui donne la capacité de chacun des actionneurs d'introduire du déplacement volumique. Cette figure montre clairement que les fréquences où il y a des régénérations de puissance rayonnée et de vitesse quadratique correspondent aux fréquences d'antirésonances de l'actionneur secondaire. Ces antirésonances dépendent de la position et dimension de l'actionneur secondaire. Une optimisation de la position et des caractéristiques (dimensions  $L_x$ ,  $L_y$  et  $L_z$ ) de cet actionneur secondaire permettrait de minimiser le nombre d'antirésonances de ce dernier dans la bande de fréquence considérée. Ce qui minimiserait le nombre de régénérations de la puissance rayonnée.

### 7.4.3 Comparaison avec un contrôle vibratoire

La comparaison entre les résultats obtenus avec le contrôle du déplacement volumique à ceux obtenus avec le contrôle du déplacement transversal d'un point donne une évaluation de la performance relative entre ces deux stratégies de contrôle. Comme pour la poutre, pour que la comparaison soit valide, il faut qu'il y ait une seule information ponctuelle qui provienne d'un seul capteur. Le contrôle du déplacement transversal d'un point de la plaque est la fonction coût la plus simple à implanter.

L'équation du voltage pour un contrôle optimal du déplacement transversal d'un point de la plaque s'obtient avec un développement similaire à celui de la section 7.3. Cette équation s'écrit,

$$\Delta\phi^{a2} = -\Delta\phi^{a1} \frac{\sum_{p=0}^{P-1} \sum_{q=0}^{Q-1} \epsilon_{pq}^{a1} \left( \frac{2x_{acc}}{L_x^{pl}} \right)^p \left( \frac{2y_{acc}}{L_y^{pl}} \right)^q}{\sum_{p=0}^{P-1} \sum_{q=0}^{Q-1} \epsilon_{pq}^{a2} \left( \frac{2x_{acc}}{L_x^{pl}} \right)^p \left( \frac{2y_{acc}}{L_y^{pl}} \right)^q} \quad (7.5)$$

où  $x_{acc}$  et  $y_{acc}$  donne la position de l'accéléromètre qui sert de capteur d'erreur dans ce cas.

Les résultats de contrôle du déplacement transversal du point central de la plaque encastree sur les quatre côtés sont présentés aux figures 7.11 à 7.14. La figure 7.12 montre que le contrôle du déplacement transversal du point central de cette plaque encastree a peu d'influence sur le coefficient de rayonnement. Puisque le coefficient de rayonnement est peu affecté, les réductions de la puissance rayonnée hors résonances sont faibles et la réduction à la résonance du mode (1,1) est égale au niveau du pic de ce mode. Ces réductions de puissance rayonnée sont moins importantes que celles obtenues avec le contrôle du déplacement volumique.

Il y a des régénérations importantes de puissance rayonnée et de vitesse quadratique près du troisième mode (mode (1,2)) de la plaque. Ces régénérations sont dues à un manque d'autorité de l'actionneur secondaire (contrôle) qui est beaucoup plus près de la ligne modale de ce mode que l'actionneur primaire.

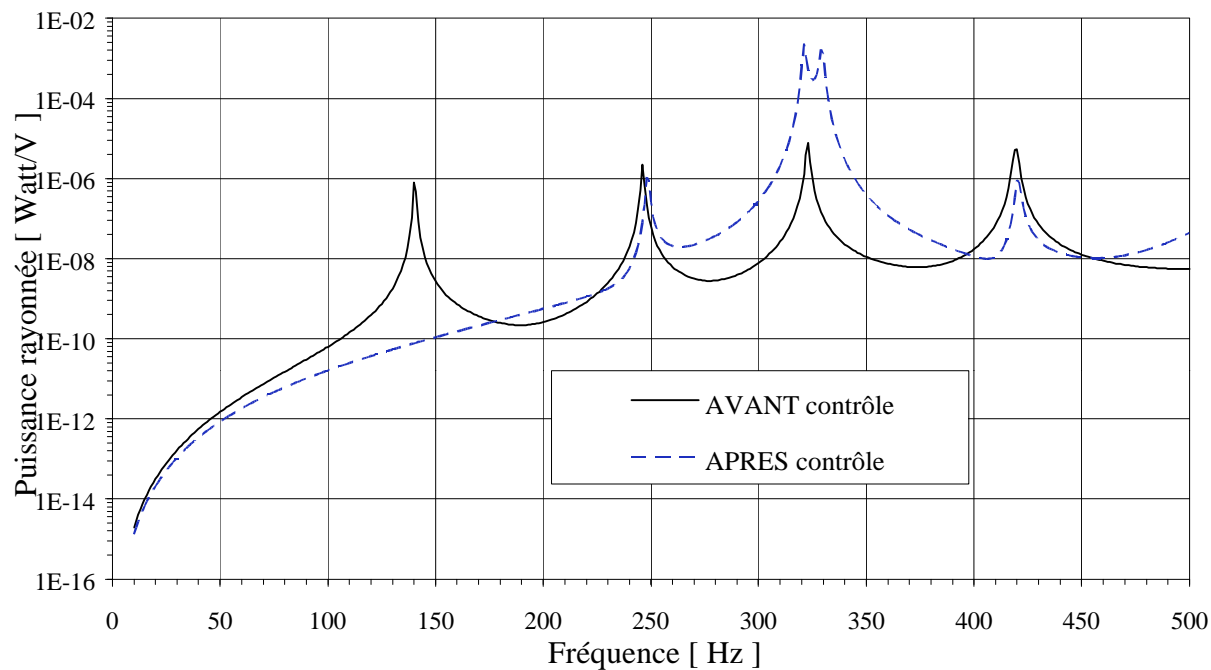


Figure 7.11: Puissances rayonnées avant et après contrôle du déplacement transversal du point central de la plaque encastree-encastree-encastree-encastree

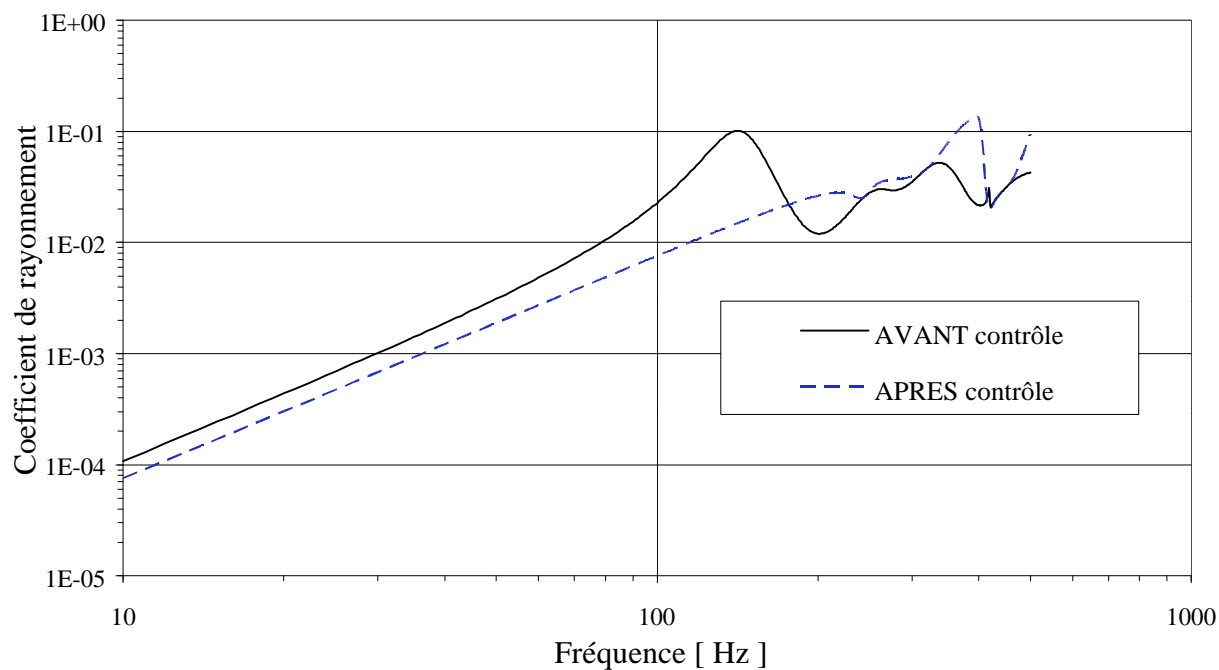


Figure 7.12: Coefficients de rayonnement avant et après contrôle du déplacement transversal du point central de la plaque encastree-encastree-encastree-encastree

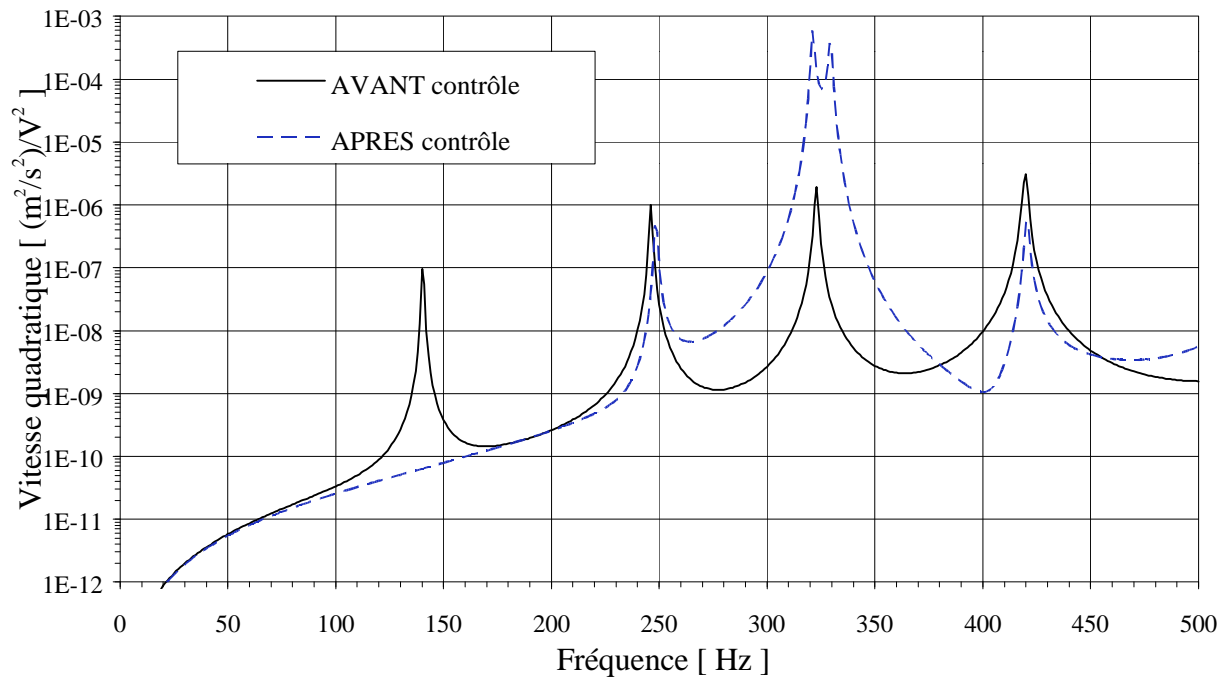


Figure 7.13: Vitesses quadratiques avant et après contrôle du déplacement transversal du point central de la plaque encastrée-encastrée-encastrée-encastrée

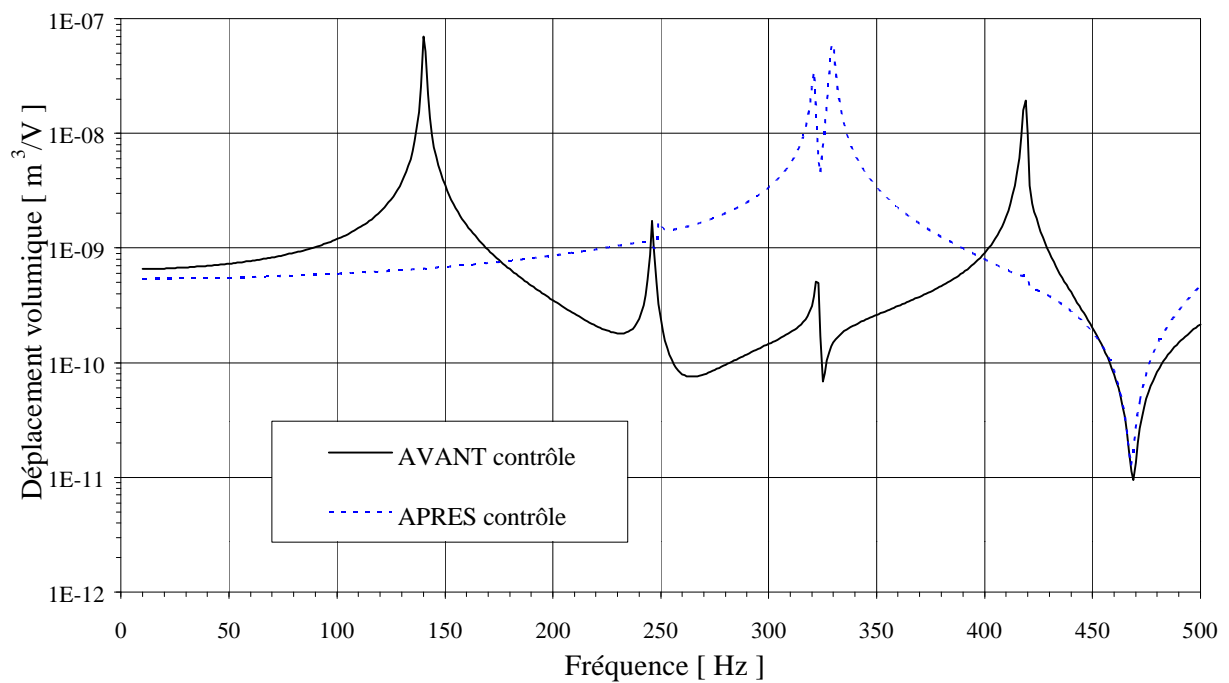


Figure 7.14: Déplacements volumiques avant et après contrôle du déplacement transversal du point central de la plaque encastrée-encastrée-encastrée-encastrée



## 7.5 Validation expérimentale du contrôle actif de déplacement volumique d'une plaque

L'implantation expérimentale est faite pour la plaque encastrée sur les quatre côtés (tableau 5.3) avec le capteur de déplacement volumique développé au chapitre 6. Des schémas et photos de cette plaque avec tous les actionneurs et capteurs sont montrées à la figure 6.6. Une fois de plus, il faut souligner l'excellent travail au niveau électronique et algorithme qui a été fait par Bruno Paillard et Martin Bouchard du département de génie électrique.

Le système de contrôle actif utilisé est le même que pour la poutre. Le schéma de ce système est présenté à la figure 7.15. Des mesures avant et après contrôle sont faits pour huit fréquences. Les fréquences expérimentales sont; 125Hz, 139Hz, 165Hz, 246Hz, 275Hz, 320Hz, 375Hz et 425Hz. Pour chacune de ces fréquences, neuf mesures de pression avant et après contrôle sont faites ainsi que des mesures du champ de déplacement de la plaque. Les résultats expérimentaux pour ces fréquences sont présentés aux figures 7.24 à 7.31.

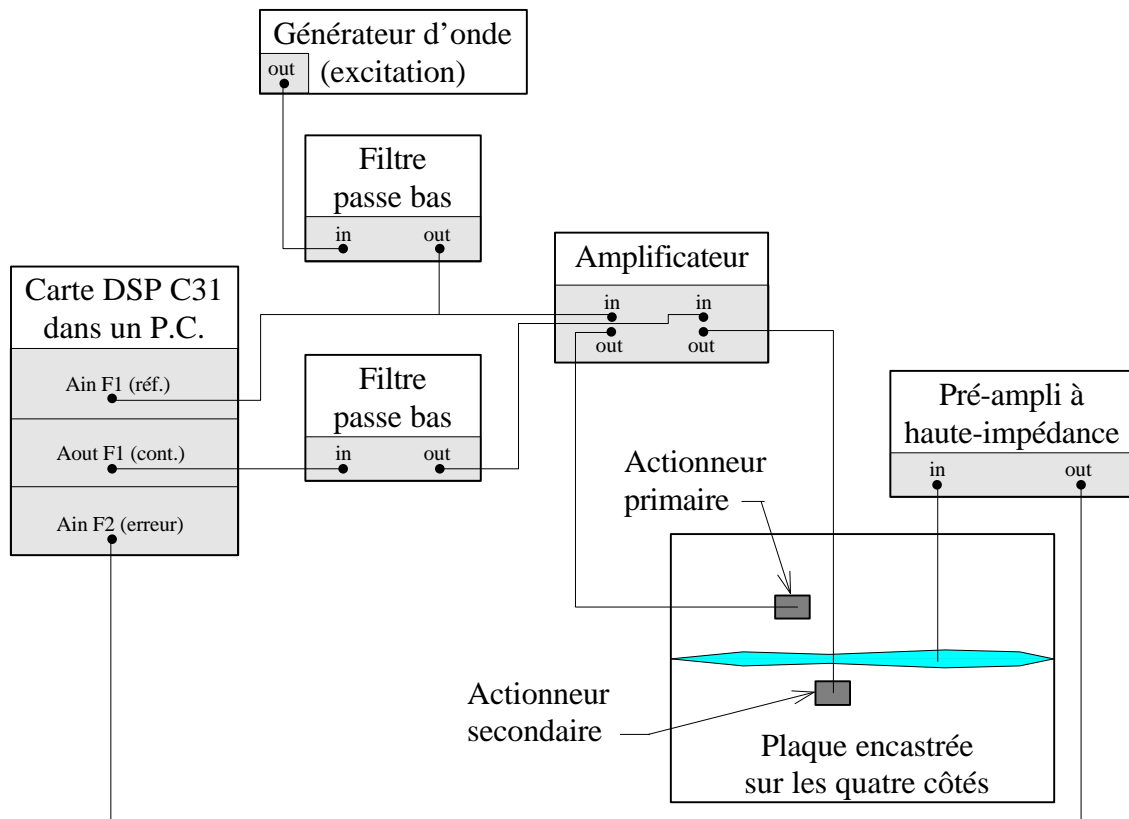


Figure 7.15: Schéma du montage expérimental du système de contrôle actif pour plaque.

Les résultats théoriques sont obtenus avec le modèle P.A.E.P.. Les figures 7.16 à 7.23 présentent ces résultats théoriques pour les fréquences qui correspondent aux fréquences utilisées pour les mesures expérimentales. Il faut noter que les fréquences utilisées pour obtenir les résultats théoriques hors résonances sont les mêmes que celles mesurées expérimentalement, mais que les fréquences de résonances des modes (1,1), (1,2) et (3,1) sont légèrement différentes. Ces différences sont dues au fait que les résultats théoriques de valeur propres ne concordent pas parfaitement à ceux mesurés expérimentalement, voir tableau 5.4. Les huit fréquences utilisées pour obtenir les résultats théoriques sont donc; 125Hz, 140Hz, 165Hz, 246Hz, 275Hz, 322Hz, 375Hz et 419Hz.

Les déformées expérimentales de la plaque, les calculs de la vitesse quadratique et du déplacement volumique avant et après contrôle sont déterminés à partir des mesures vibratoires faites avec le vibromètre laser. Des mesures de pression dans un demi-plan de la plaque (plan  $x=0$ ,  $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ) sont également effectués avant et après contrôle. Il faut souligner que ces mesures de pressions ne peuvent pas être comparées directement aux valeurs théoriques car la plaque expérimentale n'a pas de baffle. Ces mesures de pression sont faites dans le but d'obtenir les tendances de la réduction dans le champ lointain de la plaque. Afin d'avoir un indicateur acoustique global dans le demi-plan de mesure des niveaux pression, une pseudo-puissance acoustique est définie comme étant,

$$\Pi = \frac{R^2}{\rho_0 c_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |p(R, \theta)|^2 |\sin(\theta)| d\theta \quad . \quad (7.6)$$

Les neuf mesures de pression sont faites à différents angles  $\theta_i$  donnés, donc la version discrétisée de l'équation précédente s'écrit,

$$\Pi = \frac{\pi R^2}{I \rho_0 c_0} \sum_{i=1}^I |p(R, \theta_i)|^2 |\sin(\theta_i)|. \quad (7.7)$$

Cette pseudo-puissance est calculé puis normalisée pour chacune des fréquences de mesures.

En général, les résultats théoriques et expérimentaux concordent bien. La comparaison entre les champs de déplacement prédit par le modèle P.A.E.P. et ceux mesurés expérimentalement permet

de conclure que le capteur expérimental de déplacement volumique fonctionne très bien et que les résultats obtenus étaient ceux escomptés.

Les distributions de pression théoriques dans le plan de mesure après contrôle montrent que la plaque est forcée d'agir comme un dipôle. Ce comportement dipolaire n'apparaît pas dans les distributions de pressions expérimentales probablement dus au fait qu'il n'y avait pas de baffle. Les réductions dans le champ de pression prédites par le modèle sont du même ordre de grandeur que celles mesurées expérimentalement à l'exception des résultats obtenus pour les fréquences 275Hz, 375Hz et 425Hz. Globalement, les résultats démontrent que la stratégie de contrôle du déplacement volumique, avec un capteur constitué de films PVDF, est efficace.

Une analyse plus détaillée des résultats obtenus pour chacune des fréquences est présentée ci-dessous:

- *Fréquence 125Hz*

Cette fréquence se situe sous le premier mode de la plaque. Les résultats théoriques et expérimentaux montrent clairement que la déformée de la plaque avant contrôle est de type monopolaire et quelle devient multipolaire après contrôle. À cette fréquence, l'atténuation de la pseudo-puissance rayonnée dans le plan de mesure est bonne, 24.4dB théoriquement et 15.8dB expérimentalement. Cette atténuation est principalement due à la réduction du coefficient de rayonnement, puisque les réductions de vitesse quadratique sont faibles (5.5dB théorique et 7.7 dB expérimentale).

- *Fréquence 139Hz, mode (1,1)*

La fréquence de résonance théorique pour ce mode est 140Hz. Les résultats théoriques et expérimentaux de déplacement transversaux concordent très bien à cette fréquence. Une fois de plus, ces résultats de déplacement transversaux montrent que la déformée avant contrôle est de type monopolaire et quelle devient dipolaire après contrôle. L'atténuation de la pseudo-puissance rayonnée dans le plan est très importante à cette fréquence (36dB théorique et 41.5dB expérimentale). Une telle atténuation est possible car il y a une importante réduction du coefficient de rayonnement et du niveau vibratoire à cette fréquence.

- *Fréquence 165Hz*

Cette fréquence se situe entre le premier et le deuxième mode de cette plaque. Les déformées théoriques et expérimentales concordent bien. La déformée avant contrôle a déjà une tendance à être multipolaire (dipolaire). L'application du contrôle à cette fréquence force la déformée à devenir complètement multipolaire. L'atténuation de la pseudo-puissance à cette fréquence est faible (12.6dB théorique et 6.8dB expérimentale). Cette atténuation de la pseudo-puissance est principalement attribuable à la restructuration de la déformée, car les niveaux vibratoires maxima avant et après contrôle sont du même ordre de grandeur. Cela se voit également dans les réductions de la vitesse quadratique qui sont très faibles (1.5dB théorique et 1.1dB expérimentale).

- *Fréquence 246Hz, mode (2,1) et fréquence 320Hz, mode (1,2)*

La fréquence de résonance théorique pour le mode (1,2) est 322Hz. Les résultats théoriques et expérimentaux des déformées pour ces deux modes sont pratiquement dipolaire avant contrôle et demeure dipolaire après contrôle. Les atténuations de la pseudo-puissance rayonnée dans le plan de mesures sont principalement proportionnelles aux réductions du niveau vibratoire de ces deux modes. Les atténuations prédites par le modèle pour ces modes sont faibles comparativement à celle obtenues expérimentalement. Cela est dû au fait que le modèle P.A.E.P. sous évalue le déplacement volumique de ces modes, voir la figure 5.9.

- *Fréquence 275Hz et fréquence 375Hz*

Ces deux fréquences sont hors résonances. Les résultats théoriques et expérimentaux de déformées concordent assez bien. Les atténuations théoriques de la pseudo-puissance rayonnée sont faibles, par contre expérimentalement c'est plutôt des petites augmentations de la pseudo-puissance rayonnée qui ont été mesurées. Ces différences sont attribuées au capteur expérimental qui n'est pas vraiment proportionnel au déplacement volumique à ces fréquences. La figure 6.7 montre que les différences entre le signal du capteur et le déplacement volumique mesuré de la plaque sont importantes près de ces fréquences.

- *Fréquence 425Hz, mode (3,1)*

La fréquence de résonance théorique est 419Hz pour ce mode. Les résultats théoriques montre bien une déformée multipolaire (quadripolaire) après contrôle. Ces résultats théoriques diffèrent de ceux obtenus expérimentalement. Deux raisons expliquent ces différences. La première est que le capteur implanté expérimentalement a été conçu en considérant les sept premiers modes de la plaque. Or, le mode (3,1) est le cinquième mode, ce qui implique que ce mode est légèrement au dessus de la limite en fréquence pour laquelle ce capteur peut être considéré valide. La deuxième raison est que le mode (3,1) est très près du (2,2) et que théoriquement le (3,1) précèdent le (2,2) alors qu'expérimentalement c'est l'inverse qui se produit.

	Avant contrôle (dB)	Après contrôle (dB)	Différences(dB)
Vitesse quadratique	-97.9	-103.4	5.5
Débit volumique	-170.6	$-\infty$	—
Puissance normalisée dans le plan $x=0$	27.5	3.1	24.4

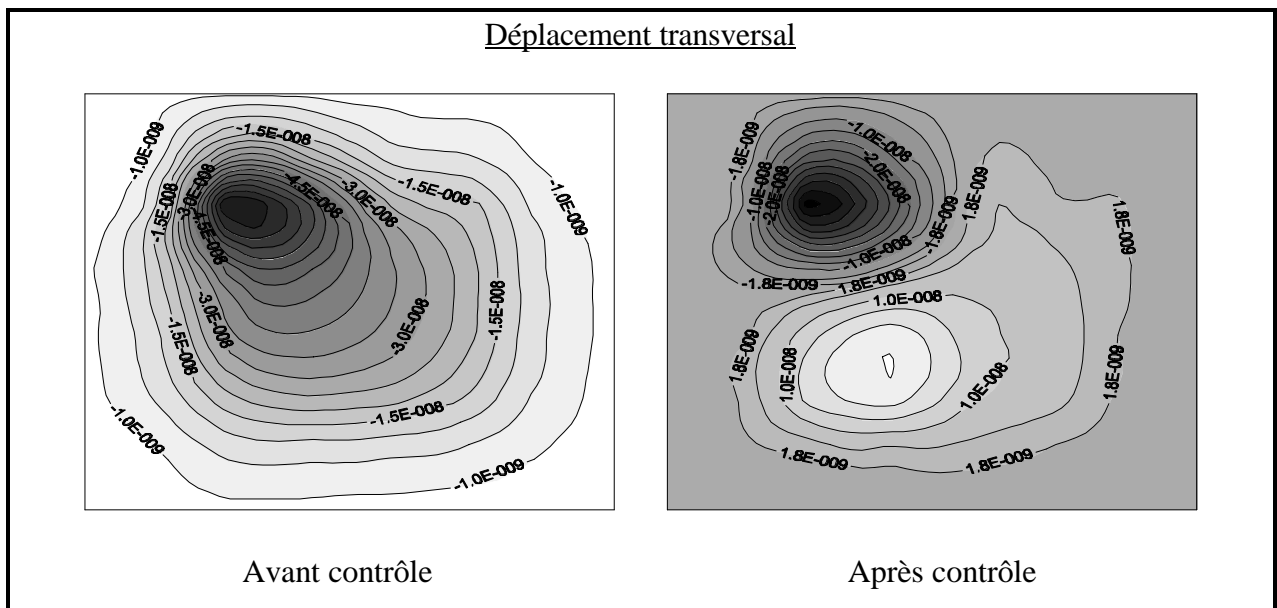
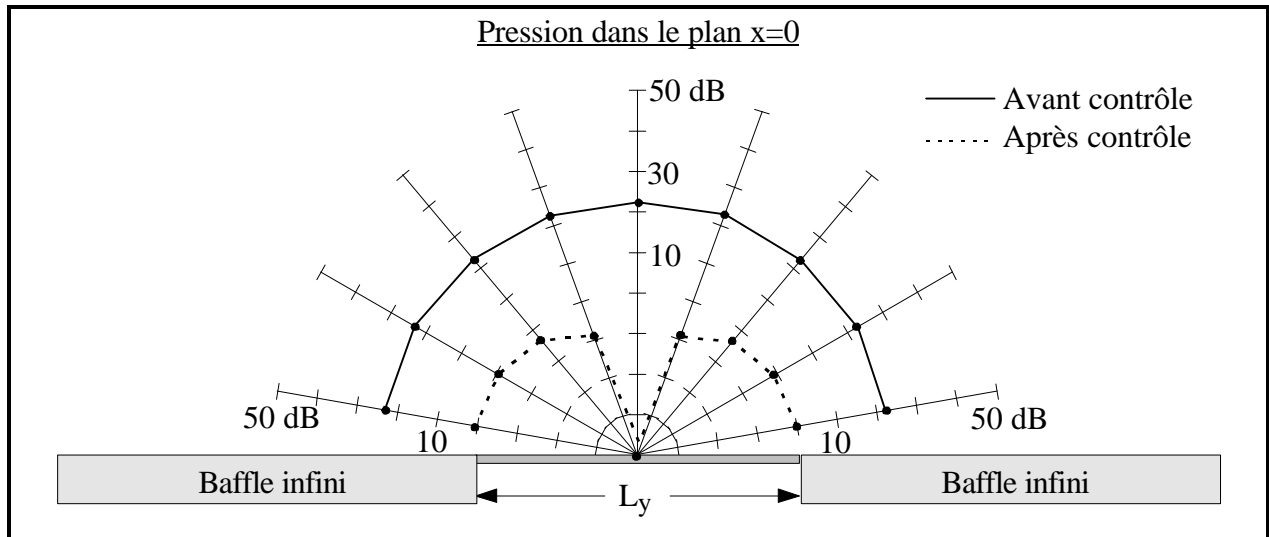


Figure 7.16: Résultats théoriques à la fréquence **125 Hz**

	Avant contrôle (dB)	Après contrôle (dB)	Différences(dB)
Vitesse quadratique	-84.4	-102.1	17.7
Débit volumique	-157.6	$-\infty$	—
Puissance normalisée dans le plan $x=0$	42.6	6.6	36

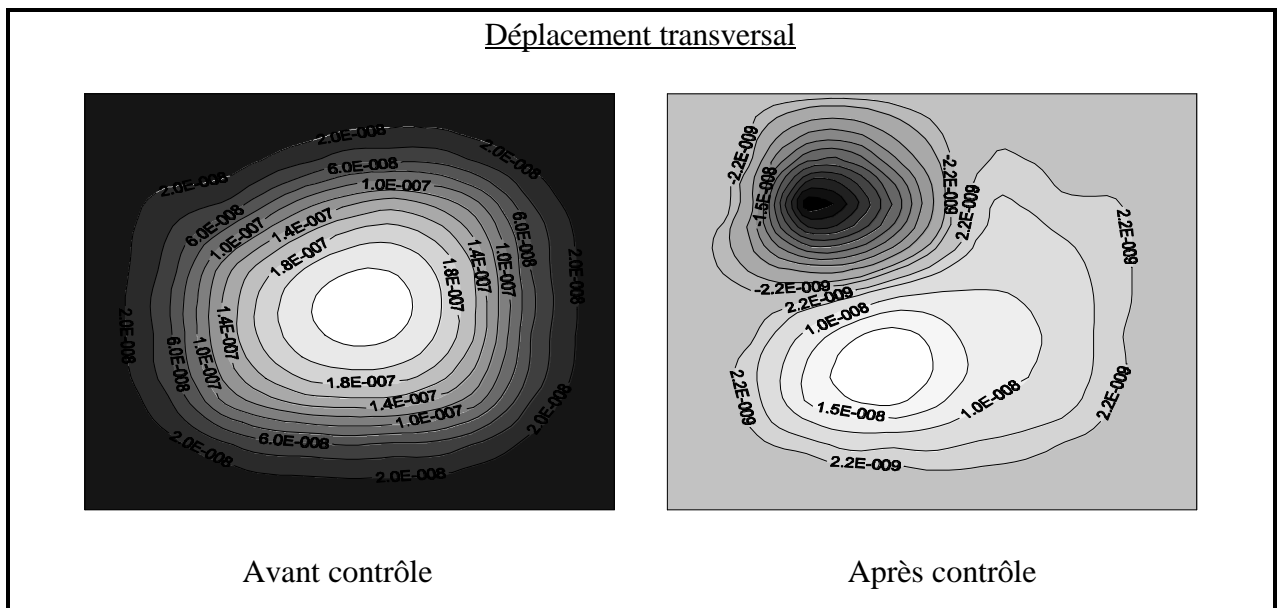
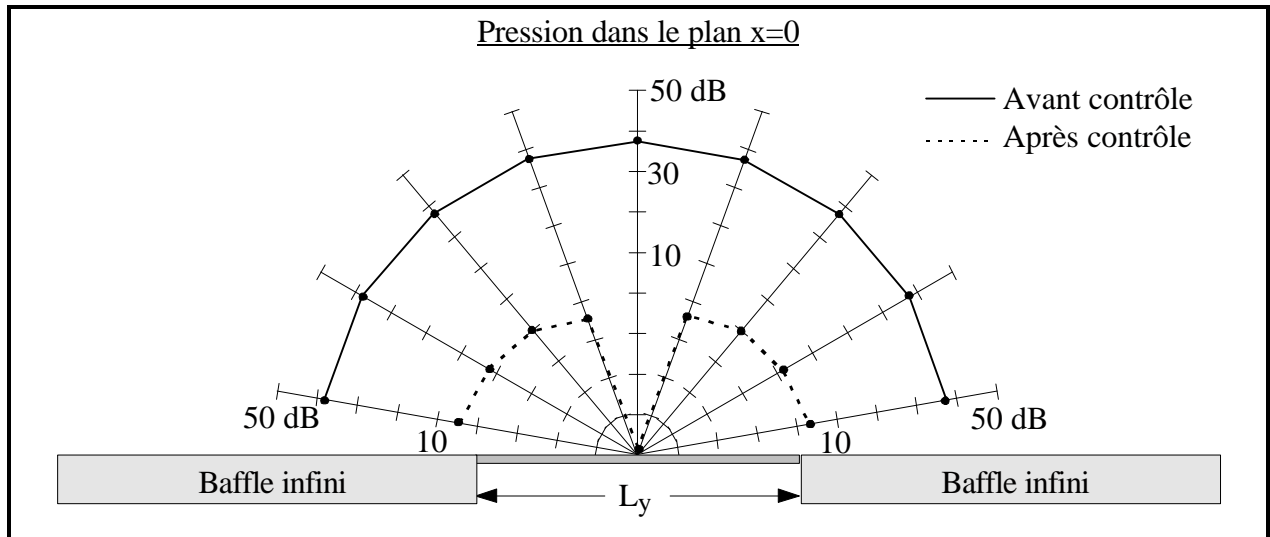


Figure 7.17: Résultats théoriques à la fréquence **140 Hz**

	Avant contrôle (dB)	Après contrôle (dB)	Différences(dB)
Vitesse quadratique	-98.6	-100.1	1.5
Débit volumique	-179.3	$-\infty$	—
Puissance normalisée dans le plan $x=0$	23.8	11.2	12.6

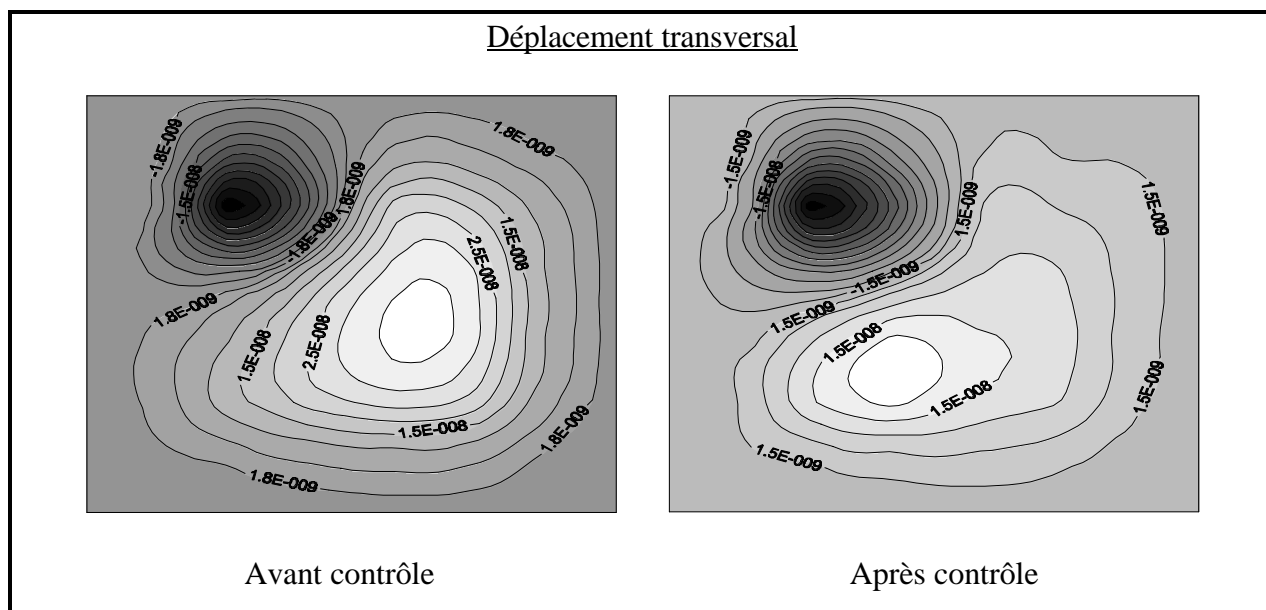
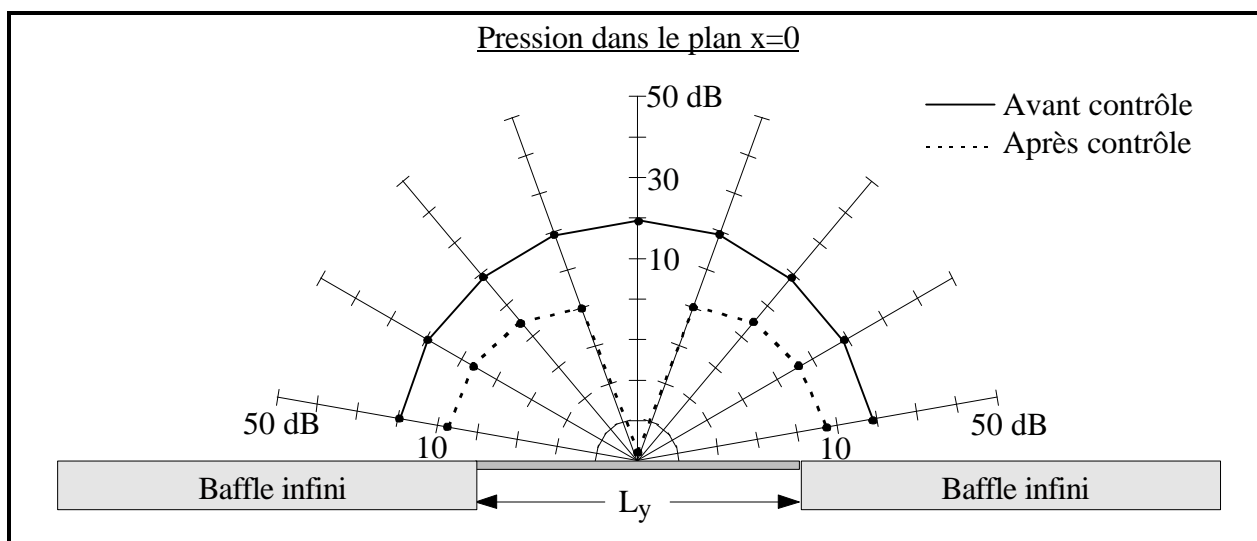


Figure 7.18: Résultats théoriques à la fréquence **165 Hz**



	Avant contrôle (dB)	Après contrôle (dB)	Différences(dB)
Vitesse quadratique	-66.2	-73.1	6.9
Débit volumique	-181.0	$-\infty$	—
Puissance normalisée dans le plan $y=0$	58.0	51.1	6.9

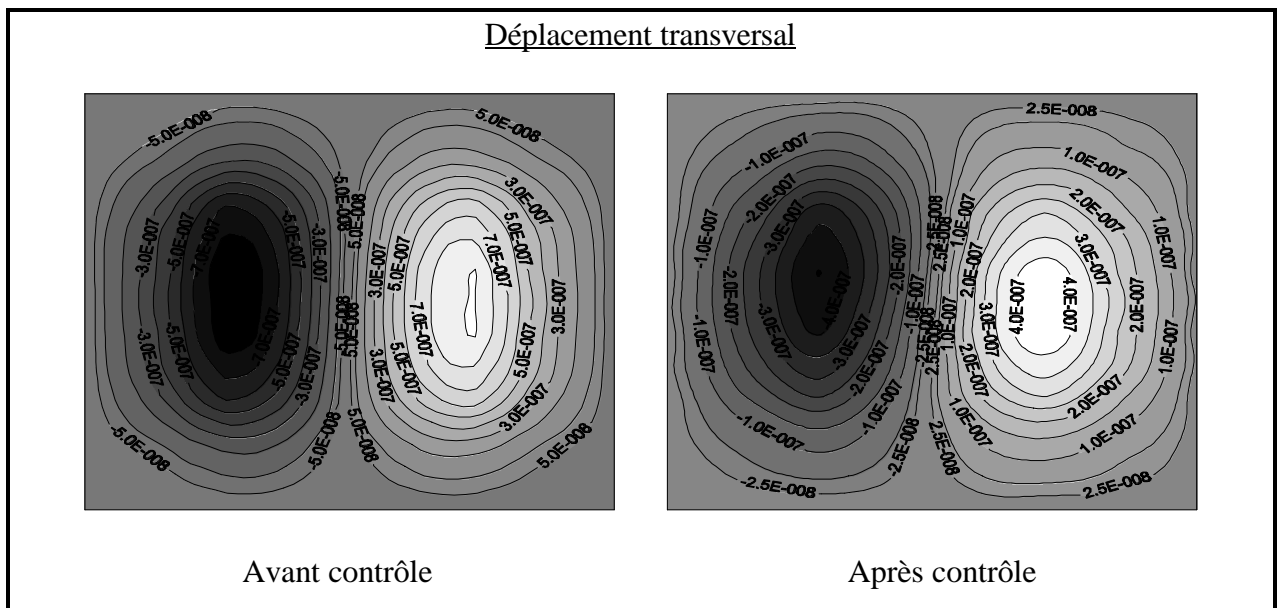
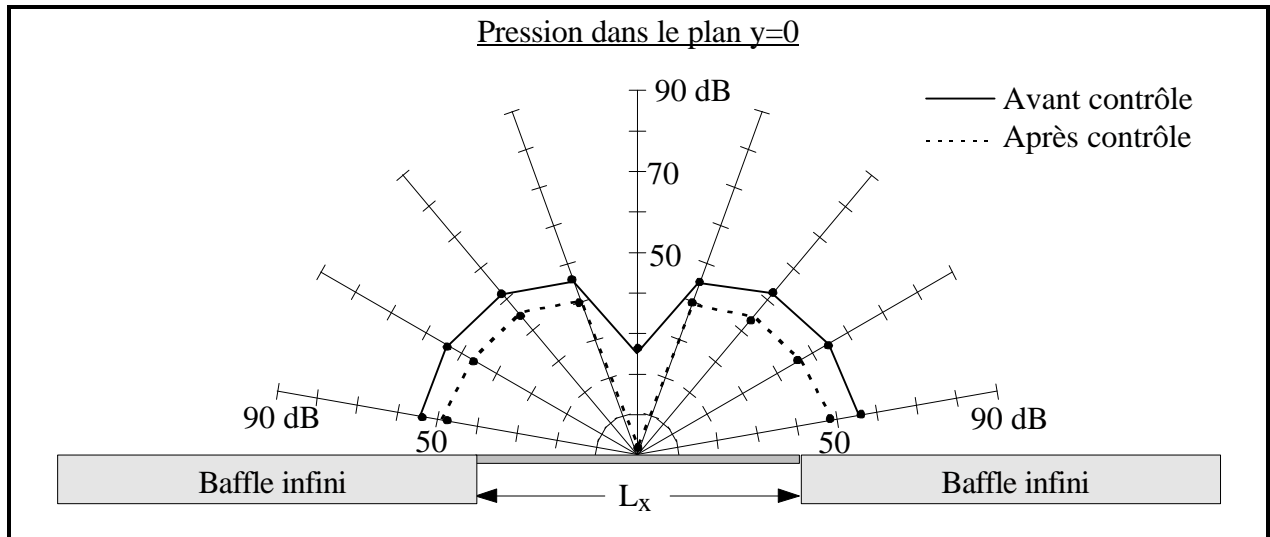


Figure 7.19: Résultats théoriques à la fréquence **246 Hz**



	Avant contrôle (dB)	Après contrôle (dB)	Différences(dB)
Vitesse quadratique	-59.9	-66.4	6.5
Débit volumique	-185.5	$-\infty$	—
Puissance normalisée dans le plan $x=0$	67.1	60.5	6.6

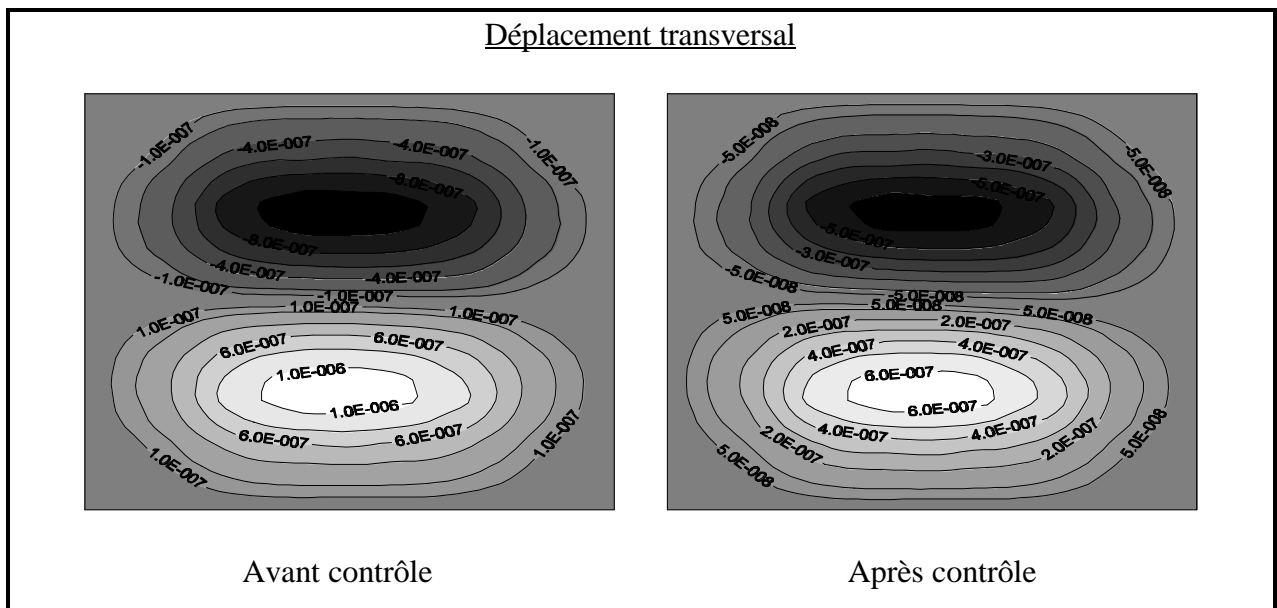
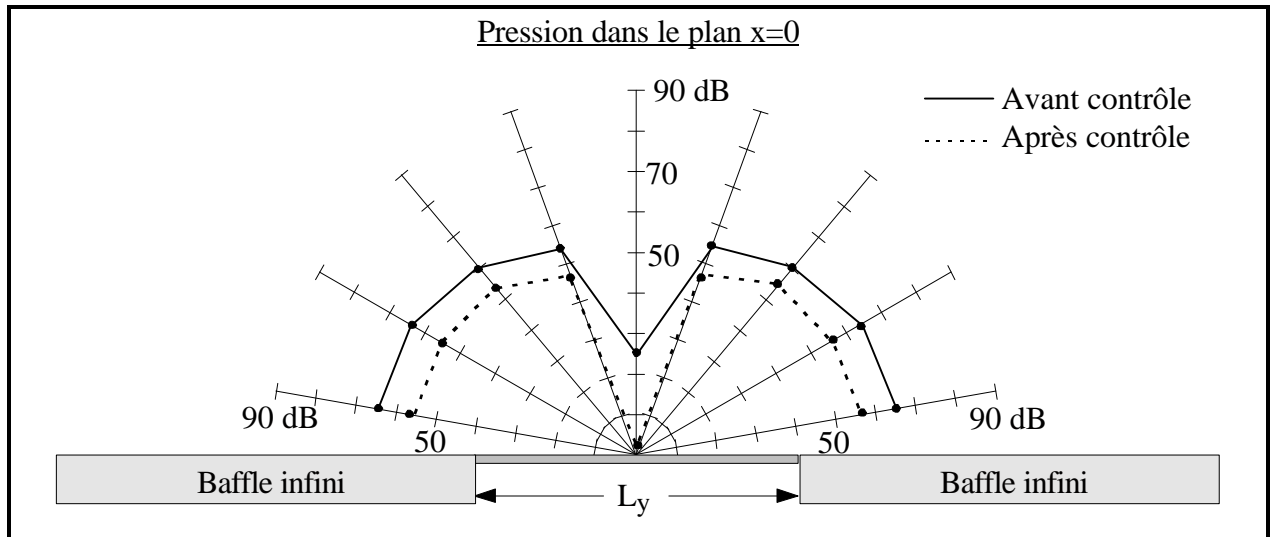


Figure 7.21: Résultats théoriques à la fréquence **322 Hz**

	Avant contrôle (dB)	Après contrôle (dB)	Différences(dB)
Vitesse quadratique	-85.6	-89.4	3.8
Débit volumique	-186.6	$-\infty$	—
Puissance normalisée dans le plan $x=0$	36.7	25.4	11.3

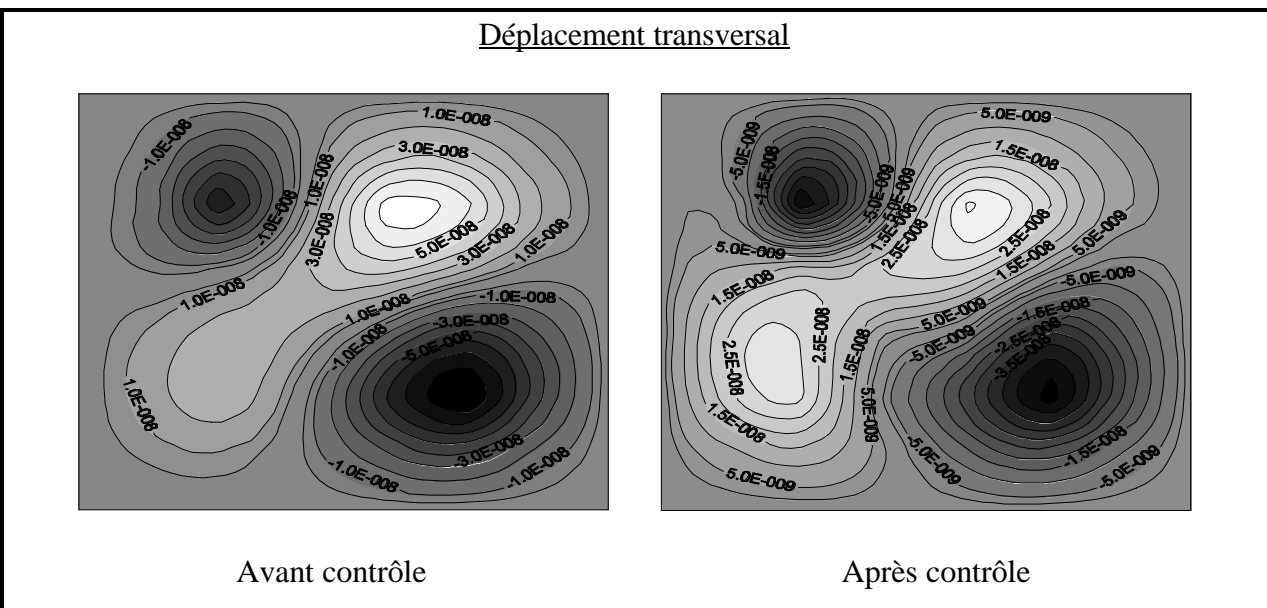
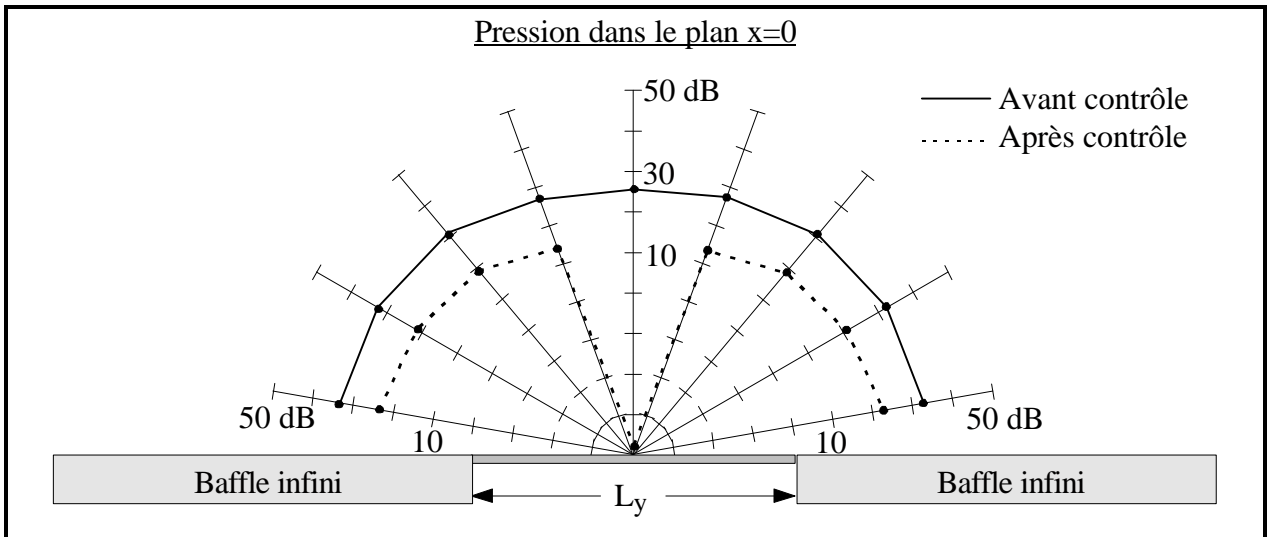


Figure 7.22: Résultats théoriques à la fréquence **375 Hz**

	Avant contrôle (dB)	Après contrôle (dB)	Différences(dB)
Vitesse quadratique	-56.2	-66.8	10.6
Débit volumique	-154.0	$-\infty$	—
Puissance normalisée dans le plan $x=0$	64.3	20.8	43.5

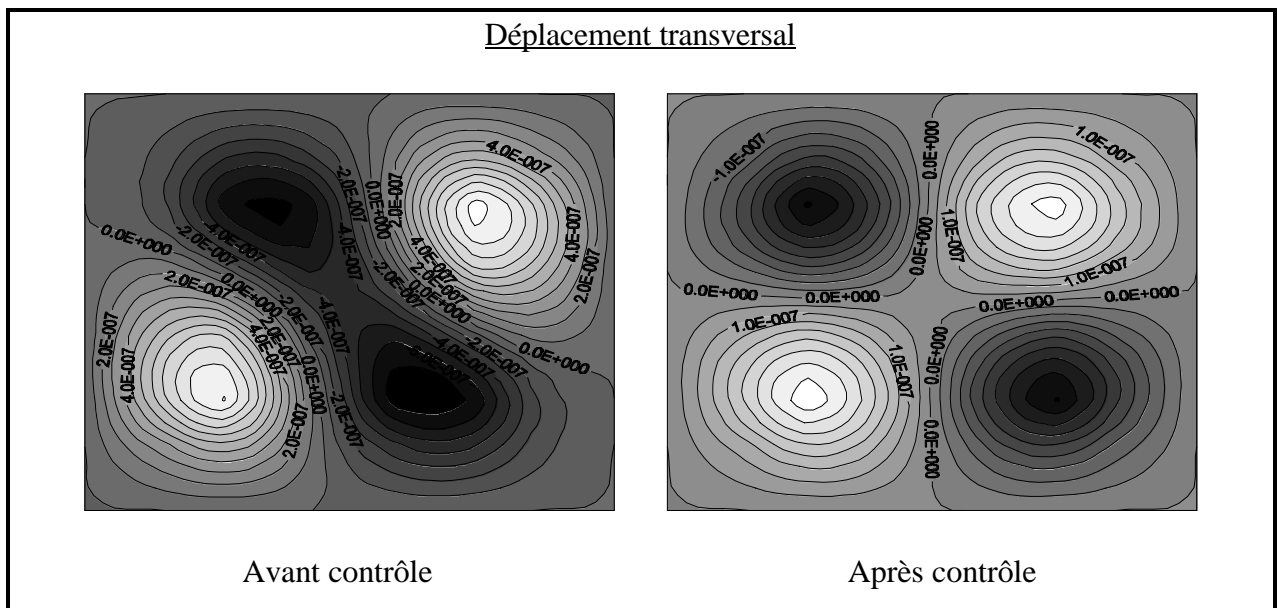
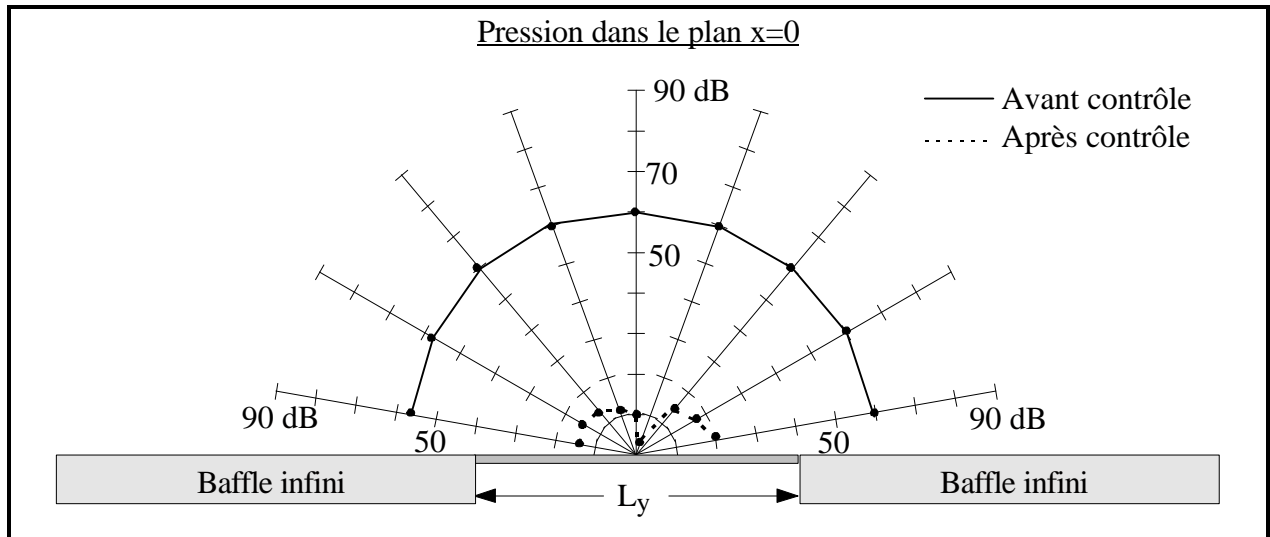


Figure 7.23: Résultats théoriques à la fréquence **419 Hz**

	Avant contrôle (dB)	Après contrôle (dB)	Différences(dB)
Identif. branche de contrôle	0	-28.8	28.8
Contrôleur (Signal PVDF)	0	-31.3	31.3
Vitesse quadratique	-95.6	-103.3	7.7
Débit volumique	-168.0	-187.7	19.7
Puissance normalisée dans le plan $x=0$	39.4	23.6	15.8

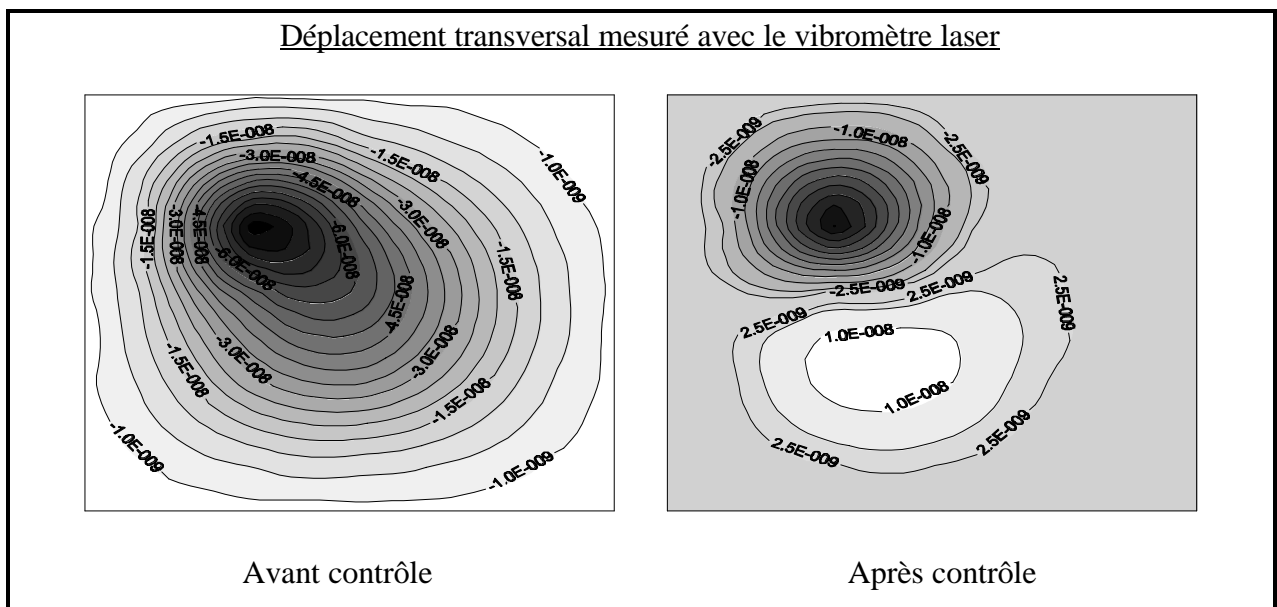
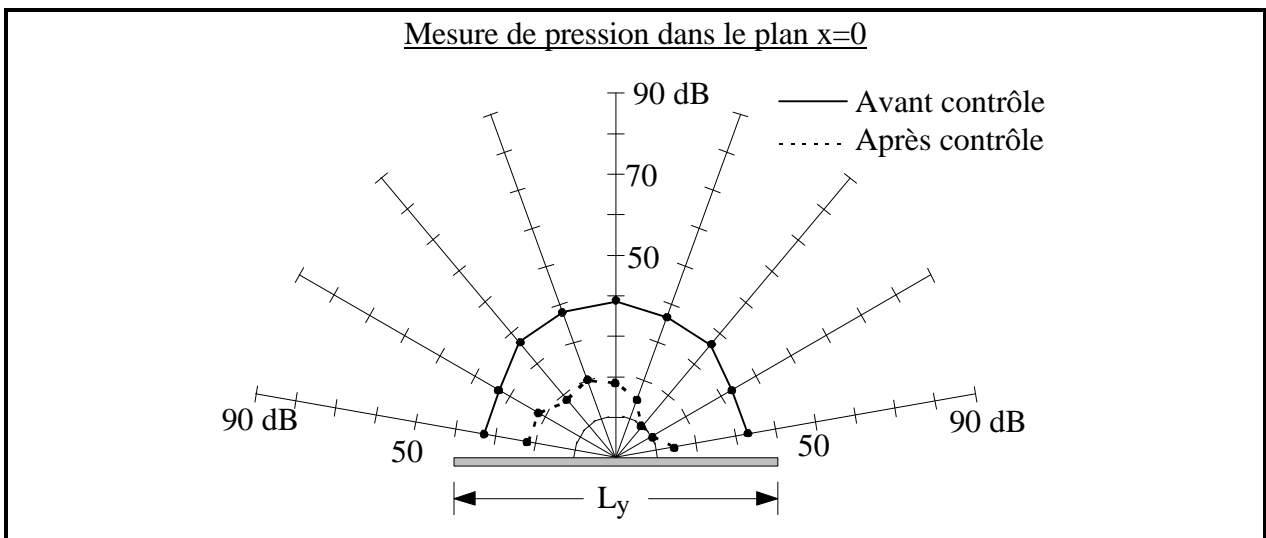


Figure 7.24: Résultats expérimentaux à la fréquence **125 Hz**

	Avant contrôle (dB)	Après contrôle (dB)	Différences(dB)
Identif. branche de contrôle	0	-36.0	36.0
Contrôleur (Signal PVDF)	0	-48.8	48.8
Vitesse quadratique	-84.7	-101.7	17.0
Débit volumique	-157.7	-189.9	32.2
Puissance normalisée dans le plan $x=0$	66.3	24.8	41.5

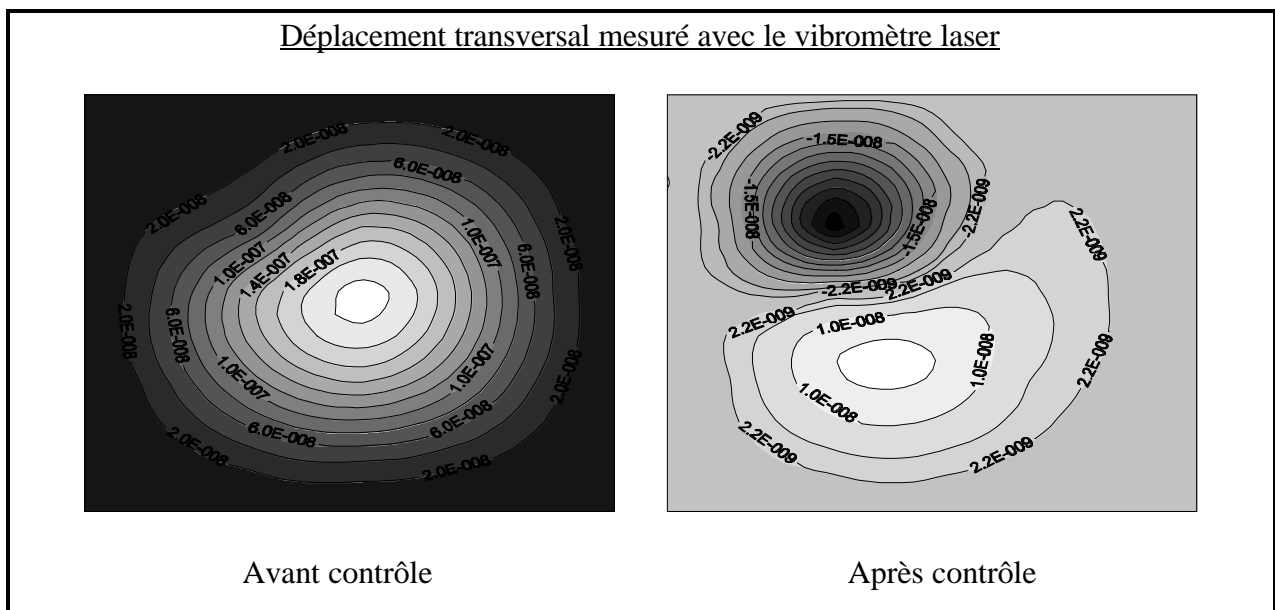
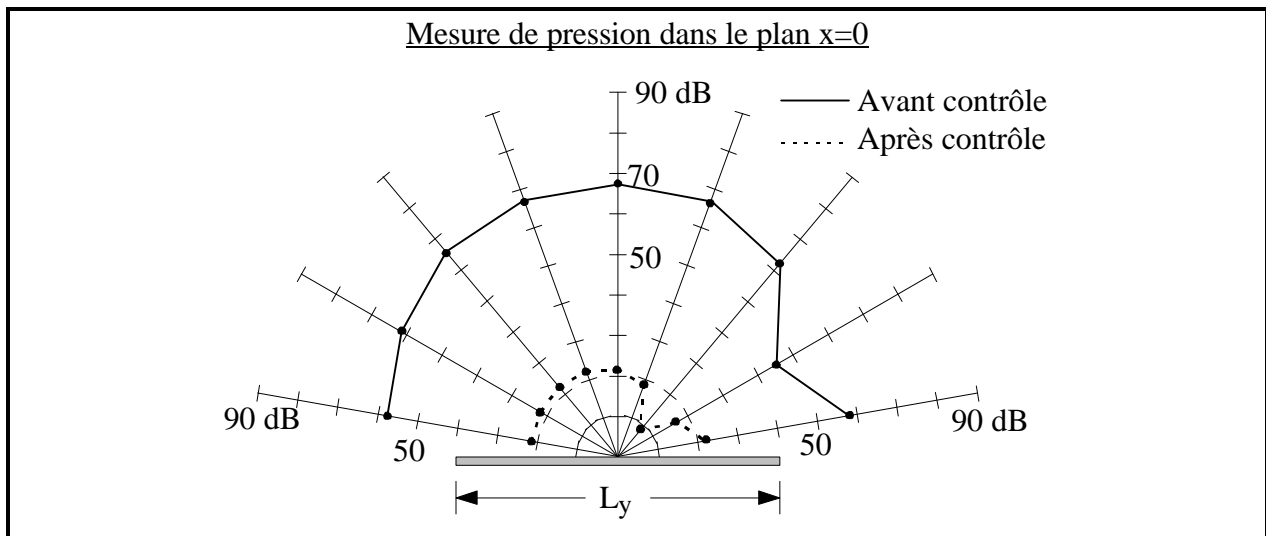


Figure 7.25: Résultats expérimentaux à la fréquence **139 Hz**

	Avant contrôle (dB)	Après contrôle (dB)	Différences(dB)
Identif. branche de contrôle	0	-27.1	27.1
Contrôleur (Signal PVDF)	0	-24.9	24.9
Vitesse quadratique	-98.7	-99.8	1.1
Débit volumique	-180.7	-186.1	5.4
Puissance normalisée dans le plan $x=0$	45.9	39.1	6.8

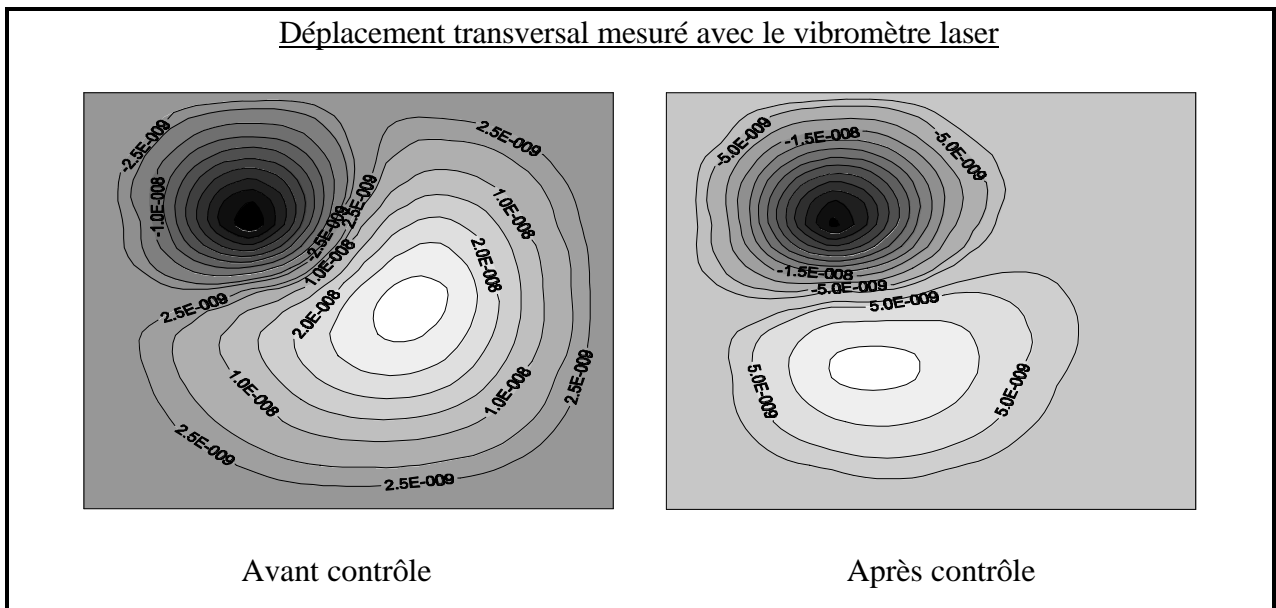
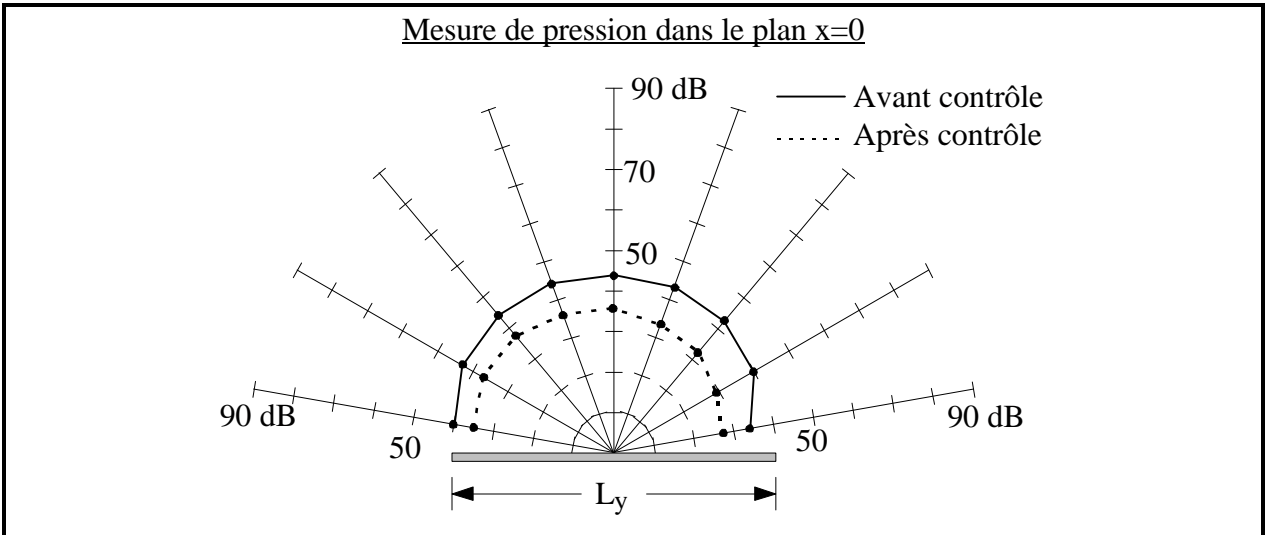


Figure 7.26: Résultats expérimentaux à la fréquence **165 Hz**



	Avant contrôle (dB)	Après contrôle (dB)	Différences(dB)
Identif. branche de contrôle	0	-25.5	25.5
Contrôleur (Signal PVDF)	0	-30.2	30.2
Vitesse quadratique	-62.3	-85.2	22.9
Débit volumique	-176.8	-182.5	5.7
Puissance normalisée dans le plan $y=0$	73.3	48.0	25.3

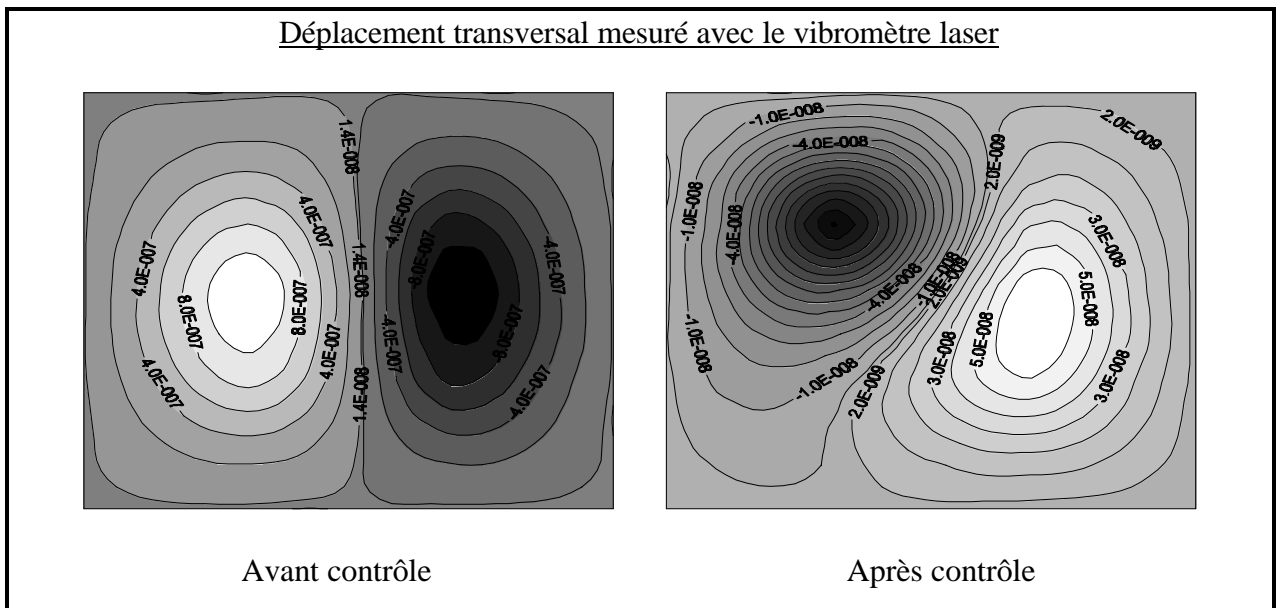
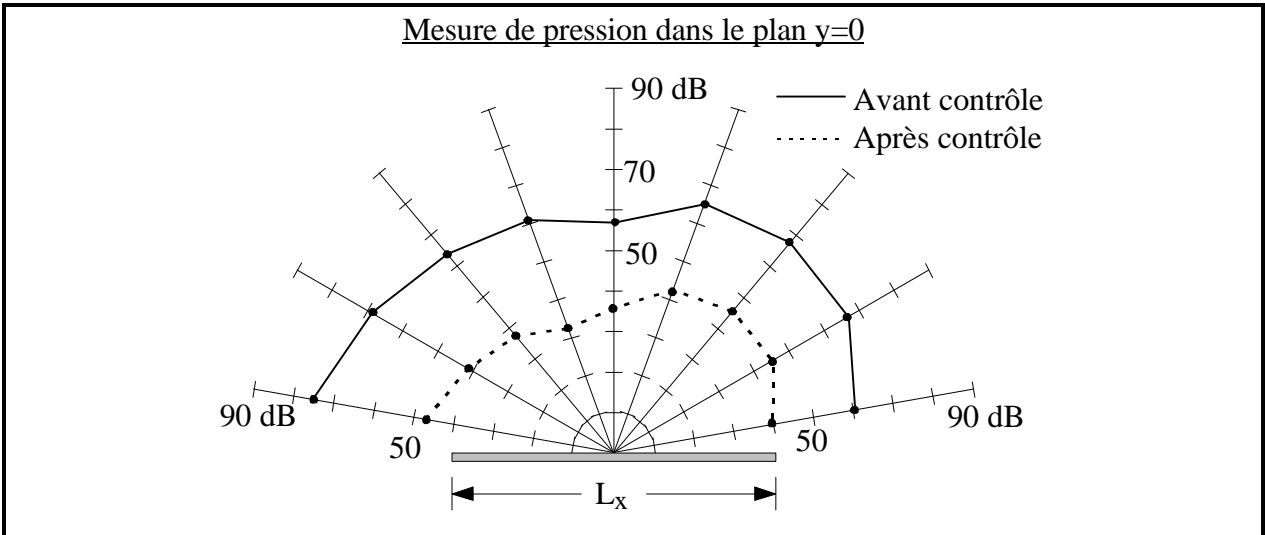


Figure 7.27: Résultats expérimentaux à la fréquence **246 Hz**

	Avant contrôle (dB)	Après contrôle (dB)	Différences(dB)
Identif. branche de contrôle	0	-28.0	28.0
Contrôleur (Signal PVDF)	0	-14.2	14.2
Vitesse quadratique	-89.7	-87.9	-2.3
Débit volumique	-198.4	-182.3	-16.1
Puissance normalisée dans le plan $x=0$	51.5	56.6	-5.1

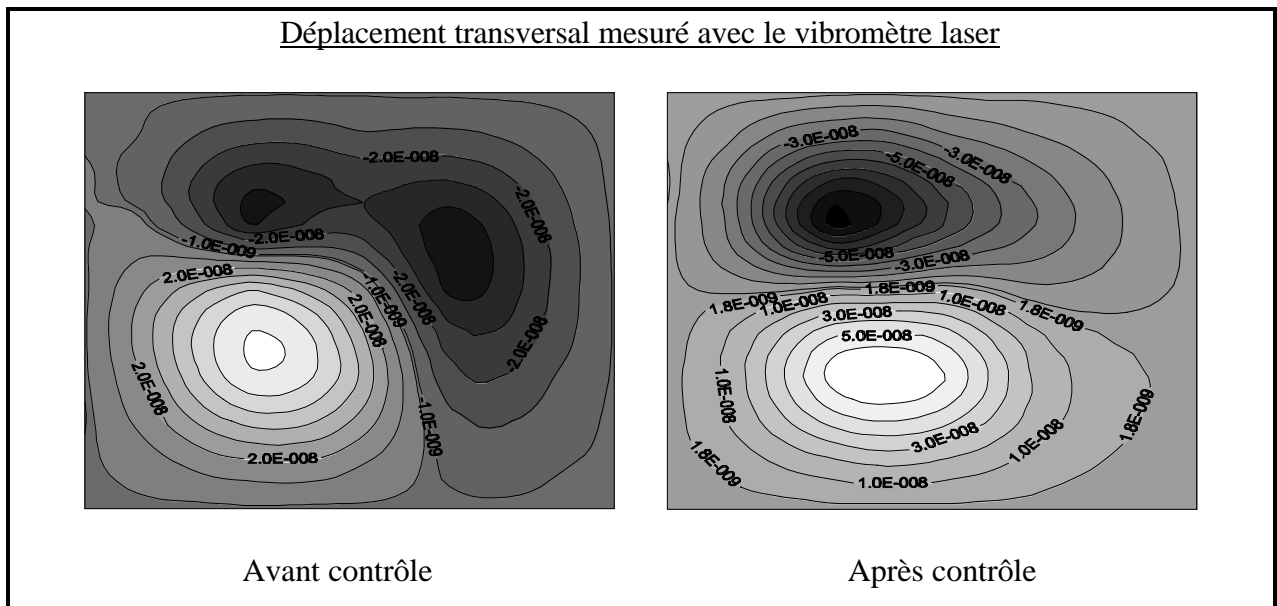
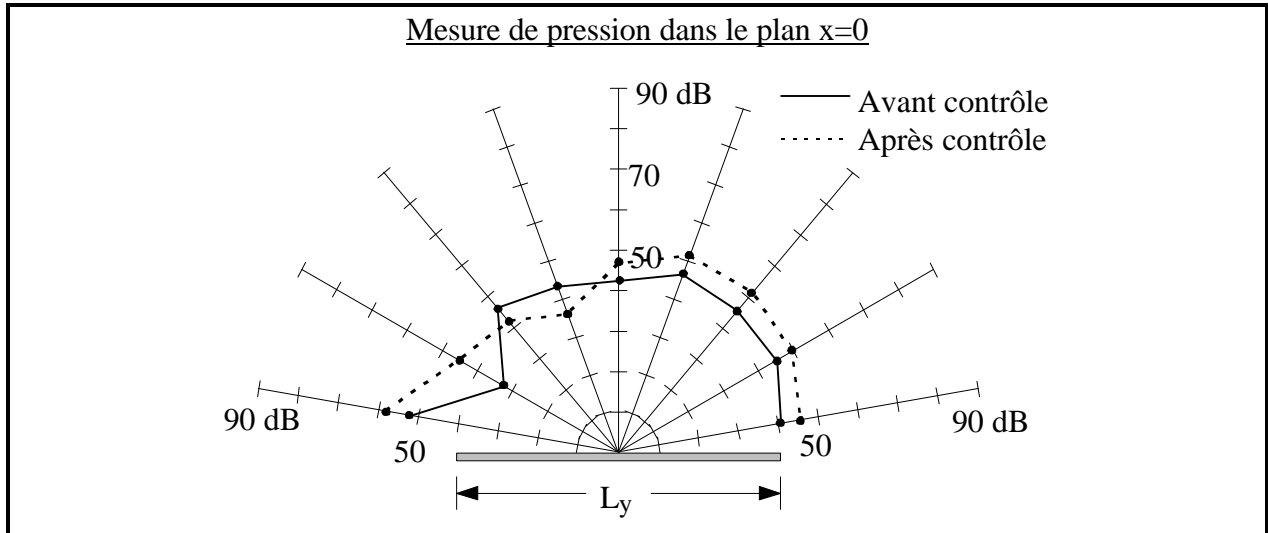


Figure 7.28: Résultats expérimentaux à la fréquence **275 Hz**



	Avant contrôle (dB)	Après contrôle (dB)	Différences(dB)
Identif. branche de contrôle	0	-20.0	20.0
Contrôleur (Signal PVDF)	0	-14.7	14.7
Vitesse quadratique	-86.9	-84.4	-2.5
Débit volumique	-188.8	-182.2	-6.6
Puissance normalisée dans le plan $x=0$	49.0	52.1	-3.1

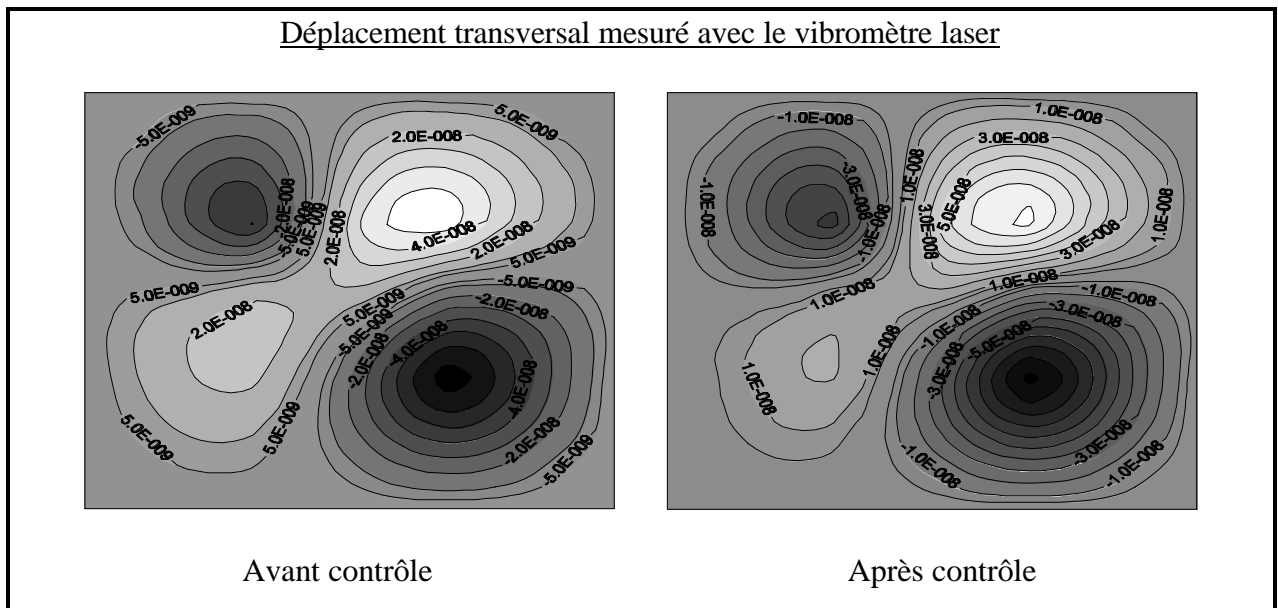
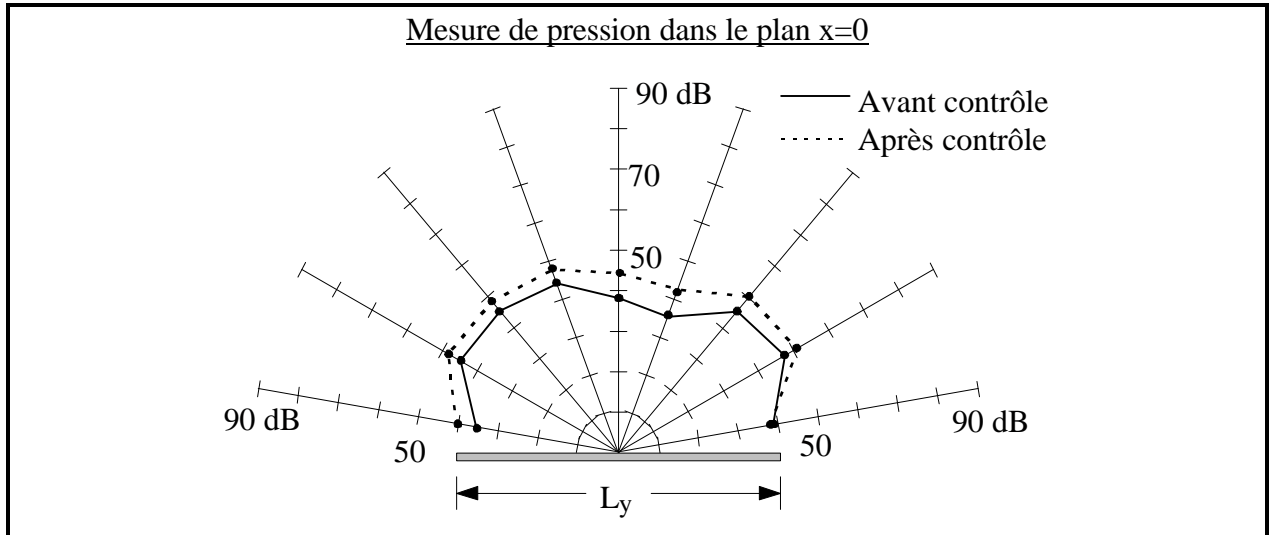


Figure 7.30: Résultats expérimentaux à la fréquence **375 Hz**

	Avant contrôle (dB)	Après contrôle (dB)	Différences(dB)
Identif. branche de contrôle	0	-19.6	19.6
Contrôleur (Signal PVDF)	0	-46.3	46.3
Vitesse quadratique	-62.5	-77.5	15.0
Débit volumique	-153.5	-171.5	18.0
Puissance normalisée dans le plan $x=0$	83.2	67.3	15.9

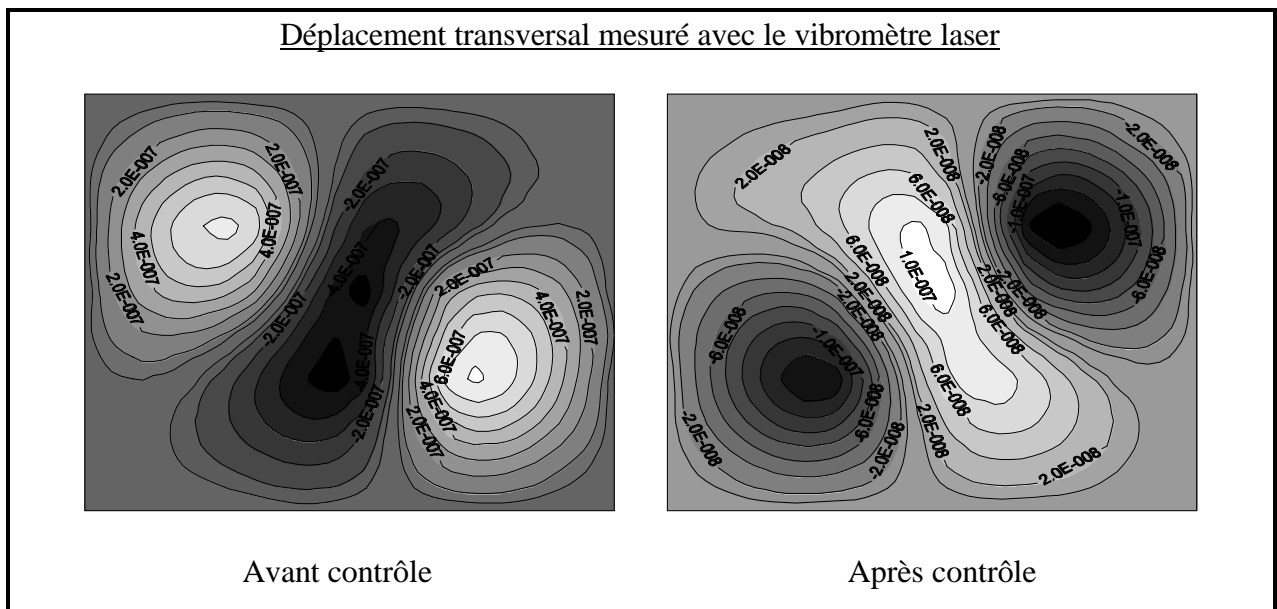
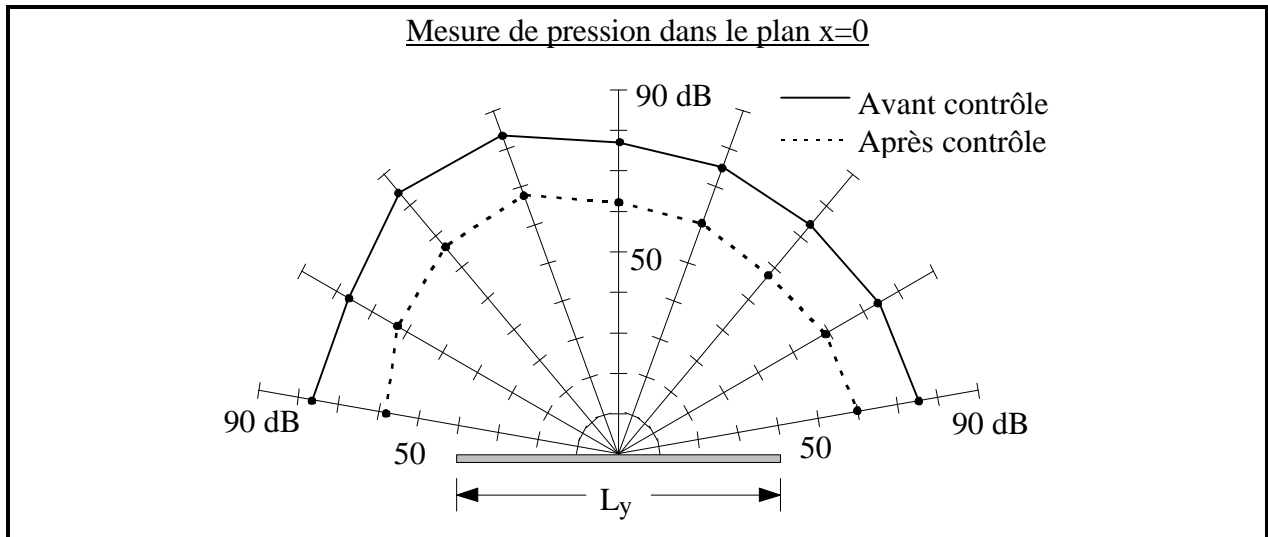


Figure 7.31: Résultats expérimentaux à la fréquence **425 Hz**

## 7.6 Conclusions

Ce chapitre présente des résultats théoriques et expérimentaux de contrôle actif du déplacement volumique de plaque. Ces résultats sont obtenus pour la plaque encastrée sur les quatre côtés. Globalement, les résultats théoriques et expérimentaux concordent bien et montrent que le contrôle du déplacement volumique permet d'obtenir des réductions importantes de puissance rayonnée en basses fréquences.

Les simulations de contrôle optimal du déplacement volumique montrent que la bande de fréquence pour laquelle cette stratégie de contrôle est efficace dépend du déplacement volumique de la structure avant contrôle. La limite en fréquence sans unité d'une plaque encastrée sur les quatre côtés est environ 2.5. Cette limite de 2.5 correspond approximativement à 270Hz pour la plaque utilisée ici. Une plaque encastrée sur deux côtés adjacents et libres sur les deux autres a une limite en fréquence sans unité de 5.0, ce qui correspond à 550Hz pour une plaque ayant les mêmes dimensions que la plaque encastrée sur les quatre côtés. La largeur de la bande de fréquences pour laquelle le contrôle du déplacement volumique est très efficace dépend du comportement volumique de la plaque avant contrôle. Cette même observation a été notée précédemment pour les poutres.

Des simulations de contrôle optimal du déplacement transversal d'un point montrent que cette stratégie de contrôle est moins performante pour réduire la puissance rayonnée de la plaque encastrée sur les quatre côtés. La limite de performance de cette stratégie de contrôle provient du fait qu'il s'agit d'un contrôle vibratoire pur. Cela implique que cette stratégie de contrôle a peu d'effet sur le coefficient de rayonnement.

La validation expérimentale du contrôle actif de déplacement volumique est faite à l'aide de mesures avant et après contrôle des déformées de la plaque et du champ de pression dans un demi-plan. Les différentes mesures sont faites pour huit fréquences, quatre correspondent à des fréquences de résonances et les quatre autres sont hors résonances. Les résultats théoriques correspondants aux mesures expérimentales sont présentés et comparés. En général, les déformées

théoriques et expérimentales concordent très bien. Ces résultats confirment que le capteur implanté expérimentalement fonctionne bien.

Il n'est pas possible de comparer directement les champs de pression dans le plan de mesures à ceux obtenus théoriquement car la plaque expérimentale n'a pas de baffle. Aucun baffle n'a été posé autour de cette plaque, étant donné que le but principal de ces mesures était de voir quel niveau d'atténuation il est possible d'obtenir pour des conditions plus près de la réalité que celle du baffle infini. En dépit du fait que la plaque expérimentale n'a pas de baffle, les réductions de puissance dans le plan prédites par le modèle P.A.E.P. sont en général du même ordre de grandeur que celles qui ont été mesurées expérimentalement.

Les réductions de la puissance rayonnée obtenues expérimentalement montrent que la stratégie de contrôle du déplacement volumique est très efficace en basses fréquences.

## CONCLUSIONS GÉNÉRALES

Les travaux présentés dans cette thèse sont axés sur l'emploi de transducteurs étendus de type piézoélectriques dans un système de contrôle actif du rayonnement acoustique. Le but d'utiliser les transducteurs piézoélectriques comme actionneurs et capteurs est de pouvoir les coller ou même les intégrer à la structure de façon à obtenir une structure *intelligente*. Une telle structure peut alors être mise dans n'importe quel environnement sans que ces caractéristiques ou performances soient affectées. Une autre raison pour laquelle les transducteurs piézoélectriques sont intéressants est qu'ils sont des transducteurs étendus qui offrent la possibilité de faire du filtrage spatial des déformations.

Les structures considérées ici sont les poutres et les plaques minces. La fonction coût retenue (valeur à minimiser) est le déplacement volumique de ces structures minces.

Jusqu'à maintenant, il n'existait pas de capteur vibratoire qui donne directement le déplacement volumique d'une structure plane avec conditions limites quelconques, ajouts de masses et de raideurs, etc. La contribution scientifique la plus importante des travaux exposés dans la présente thèse a été de mettre au point de tels capteurs de déplacement volumique (fait avec des films PVDF) pour les poutres et les plaques. Avec un capteur de déplacement volumique constitué de films PVDF, il y a un seul signal d'erreur. Le contrôleur du système de contrôle actif peut



directement minimiser ce signal d'erreur. Le contrôleur dans ce cas a une seule entrée, ce qui minimise les coûts et facilite la mise en oeuvre en pratique.

**Originalités scientifiques** Les travaux présentés dans la thèse ont mené aux originalités scientifiques suivantes:

- Le développement de capteurs de déplacement volumique pour plaque fait avec des bandes de PVDF formées.
- Tous les capteurs de déplacement volumique obtenus sont indépendants de la fréquence et des caractéristiques de l'excitation.
- *La méthodologie employée pour former les bandes de films PVDF du capteur de déplacement volumique pour plaque est basée sur une analyse modale expérimentale.* Cette analyse modale expérimentale permet de tenir compte de toutes les caractéristiques mécaniques (incluant les ajouts de masses et de raideurs, les imperfections de la structure et des conditions limites, etc.) d'une structure "réelle". De plus, cette analyse modale expérimentale offre une certaine robustesse à l'approche qui permettra de transférer cette méthodologie en industrie aisément.
- Les modélisations de l'excitation et la détection des vibrations obtenues avec des transducteurs piézoélectriques sont faites avec l'approche variationnelle. *Cette approche variationnelle permet d'obtenir des modèles dynamiques qui tiennent compte des effets de l'ajout de masse et de raideur des transducteurs piézoélectriques sur la réponse de la structure.* Les résultats obtenus pour les poutres montrent que ces effets sont suffisamment importants pour modifier légèrement les valeurs et déformées propres. Pour les plaques, seulement les déformées propres sont affectées. *Les influences des transducteurs piézoélectriques sur la réponse dynamique d'une structure ne semblent pas avoir été modélisées ou observées précédemment.*

- Le modèle pour les poutres (A.C.P.A.) permet de quantifier l'influence des déformations axiales sur la réponse d'un capteur formé fait en film PVDF lorsqu'une excitation asymétrique est utilisée.
- Les implantations théoriques et expérimentales des capteurs de déplacement volumique dans des systèmes de contrôle actif du rayonnement acoustique de structure prouvent qu'il est possible d'utiliser de tels capteurs étendus. Les résultats de ces implantations montrent la grande efficacité de la stratégie de contrôle (contrôle du déplacement volumique) en basses fréquences.

**Perspectives** Les travaux présentés ici sont une première ébauche sur les possibilités d'utilisation de transducteurs étendus piézoélectriques sur des structures planes. Ils restent plusieurs points à approfondir et développer. Quelques-uns de ces points sont les suivants:

- Optimiser les caractéristiques (le nombre, les positions et les dimensions) des actionneurs de contrôle afin de minimiser ou même éliminer les régénérations de puissance rayonnée qui sont associées à des manques d'autorités de ces actionneurs de contrôle.
- La solution du système d'équation (6.22) ne garantit pas que les formes obtenues vont donner un capteur de déplacement volumique. Cela est dû aux approximations utilisées en (6.14) qui sont des approximations géométriques. Il faudrait ajouter une condition ou restriction supplémentaire qui permettrait d'obtenir directement de bonnes positions  $x_{ct}$  et  $y_{ct}$ . En d'autres mots, il faut systématiser la méthode pour obtenir des positions de bandes valables. Ce point sera d'autant plus important lorsque les nombres de modes et de bandes PVDF seront grands.
- Éventuellement il faudrait refaire le développement présenté au chapitre 6 pour obtenir un capteur de déplacement volumique pour plaque en utilisant d'autres fonctions essais. Les fonctions essais utilisées ici limitent l'approche

développée aux dix premiers modes de la plaque dus à des problèmes numériques. Un plus grand nombre de modes pourrait être considéré avec des fonctions essais mieux conditionnées, ce qui permettrait d'étudier les deux points suivants:

- i) L'influence des modes de grands ordres sur la réponse des bandes PVDF qui composent le capteur de déplacement volumique.
  - ii) Connaissant l'influence des modes de grands ordres, il faudrait utiliser cette information pour minimiser la contribution de ces modes dans la réponse des bandes PVDF.
- Travailler sur d'autres fonctions coûts qui minimiseraient la puissance rayonnée en basses ou moyennes fréquences. Les méthodologies employées pour former les capteurs de déplacement volumique sont générales et peuvent aisément être utilisées pour d'autres fonctions coûts. Par exemple, il est très facile de faire un capteur PVDF dont le signal serait proportionnel à celui d'un accéléromètre.
  - Étendre les approches à d'autres types de structures, de géométrie cylindrique par exemple.
  - Faire des études paramétriques sur les erreurs de positionnement et de forme des bandes PVDF.
  - Appliquer l'approche à un problème concret, soit commercial ou industriel.

## Annexe A

### Expressions des termes pour calculer les différentes matrices du modèle de poutre A.C.P.A.

Les termes des différentes matrices de masse sont calculés avec,

$$\begin{aligned} [M_{mn}^1] = & \frac{\rho^{pt} L_x^{pt} L_y^{pt} L_z^{pt}}{2(m+n+1)} [1 - (-1)^{m+n+1}] + \frac{\rho^a L_z^a L_x^{pt} L_y^{pt}}{2(m+n+1)} \left[ \left( \frac{2x^a + L_x^a}{L_x^{pt}} \right)^{m+n+1} - \left( \frac{2x^a - L_x^a}{L_x^{pt}} \right)^{m+n+1} \right] \\ & + \frac{\rho^c L_z^c L_x^{pt} L_y^{pt}}{2(m+n+1)} \left[ \left( \frac{2x^c + L_x^c}{L_x^{pt}} \right)^{m+n+1} - \left( \frac{2x^c - L_x^c}{L_x^{pt}} \right)^{m+n+1} \right] \end{aligned} \quad (A.1)$$

$$\begin{aligned} [M_{mn}^2] = [M_{nm}^{2T}] = & \frac{\rho^c L_z^c L_y^{pt} (L_z^c + L_z^{pt}) n}{2(m+n)} \left[ \left( \frac{2x^c + L_x^c}{L_x^{pt}} \right)^{m+n} - \left( \frac{2x^c - L_x^c}{L_x^{pt}} \right)^{m+n} \right] \\ & - \frac{\rho^a L_z^a L_y^{pt} (L_z^a + L_z^{pt}) n}{2(m+n)} \left[ \left( \frac{2x^a + L_x^a}{L_x^{pt}} \right)^{m+n} - \left( \frac{2x^a - L_x^a}{L_x^{pt}} \right)^{m+n} \right] \end{aligned} \quad (A.2)$$

$$\begin{aligned}
\left[ M_{mn}^3 \right] = & \frac{\rho^{pt} \left( L_z^{pt} \right)^3 L_y^{pt} mn}{6 L_x^{pt} (m+n-1)} \left[ 1 - (-1)^{m+n-1} \right] + \frac{\rho^{pt} L_x^{pt} L_y^{pt} L_z^{pt}}{2(m+n+1)} \left[ 1 - (-1)^{m+n+1} \right] \\
& + \frac{\rho^c L_z^c L_y^{pt} L_x^{pt}}{2(m+n+1)} \left[ \left( \frac{2x^c + L_x^c}{L_x^{pt}} \right)^{m+n+1} - \left( \frac{2x^c - L_x^c}{L_x^{pt}} \right)^{m+n+1} \right] \\
& + \frac{\rho^a L_z^a L_y^{pt} L_x^{pt}}{2(m+n+1)} \left[ \left( \frac{2x^a + L_x^a}{L_x^{pt}} \right)^{m+n+1} - \left( \frac{2x^a - L_x^a}{L_x^{pt}} \right)^{m+n+1} \right] \\
& + \frac{2\rho^c L_y^{pt} mn}{L_x^{pt} (m+n-1)} \left( \frac{\left( L_z^c \right)^3}{12} + L_z^c \left[ \frac{L_z^{pt} + L_z^c}{2} \right]^2 \right) \left[ \left( \frac{2x^c + L_x^c}{L_x^{pt}} \right)^{m+n-1} - \left( \frac{2x^c - L_x^c}{L_x^{pt}} \right)^{m+n-1} \right] \\
& + \frac{2\rho^a L_y^{pt} mn}{L_x^{pt} (m+n-1)} \left( \frac{\left( L_z^a \right)^3}{12} + L_z^a \left[ \frac{L_z^{pt} + L_z^a}{2} \right]^2 \right) \left[ \left( \frac{2x^a + L_x^a}{L_x^{pt}} \right)^{m+n-1} - \left( \frac{2x^a - L_x^a}{L_x^{pt}} \right)^{m+n-1} \right]
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Les termes des différentes matrices de rigidité sont calculés avec,

$$\begin{aligned}
\left[ K_{mn}^1 \right] = & \frac{2 Y^{pt} L_z^{pt} L_y^{pt} mn}{L_x^{pt} (m+n-1)} \left[ 1 - (-1)^{m+n-1} \right] + K_{H1} \left( \frac{2x_1}{L_x^{pt}} \right)^{m+n} + K_{H2} \left( \frac{2x_2}{L_x^{pt}} \right)^{m+n} \\
& + \frac{2 Y_x^c L_z^c L_y^{pt} mn}{L_x^{pt} (m+n-1)} \left[ \left( \frac{2x^c + L_x^c}{L_x^{pt}} \right)^{m+n-1} - \left( \frac{2x^c - L_x^c}{L_x^{pt}} \right)^{m+n-1} \right] \\
& + \frac{2 Y_x^a L_z^a L_y^{pt} mn}{L_x^{pt} (m+n-1)} \left[ \left( \frac{2x^a + L_x^a}{L_x^{pt}} \right)^{m+n-1} - \left( \frac{2x^a - L_x^a}{L_x^{pt}} \right)^{m+n-1} \right]
\end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
\left[ K_{mn}^2 \right] = \left[ K_{nm}^{2T} \right] = & \frac{2 Y_x^c L_z^c L_y^{pt} (L_z^{pt} + L_z^c) m n (n-1)}{\left( L_x^{pt} \right)^2 (m+n-2)} \left[ \left( \frac{2x^c + L_x^c}{L_x^{pt}} \right)^{m+n-2} - \left( \frac{2x^c - L_x^c}{L_x^{pt}} \right)^{m+n-2} \right] \\
& - \frac{2 Y_x^a L_z^a L_y^{pt} (L_z^{pt} + L_z^a) m n (n-1)}{\left( L_x^{pt} \right)^2 (m+n-2)} \left[ \left( \frac{2x^a + L_x^a}{L_x^{pt}} \right)^{m+n-2} - \left( \frac{2x^a - L_x^a}{L_x^{pt}} \right)^{m+n-2} \right]
\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
\left[ K_{mn}^3 \right] = & \frac{8 Y_x^a L_y^{pt} m n (m-1)(n-1)}{\left( L_x^{pt} \right)^3 (m+n-3)} \left( \frac{\left( L_z^a \right)^3}{12} + L_z^a \left[ \frac{L_z^{pt} + L_z^a}{2} \right]^2 \right) \\
& \bullet \left[ \left( \frac{2x^a + L_x^a}{L_x^{pt}} \right)^{m+n-3} - \left( \frac{2x^a - L_x^a}{L_x^{pt}} \right)^{m+n-3} \right] \\
& + \frac{8 Y_x^c L_y^{pt} m n (m-1)(n-1)}{\left( L_x^{pt} \right)^3 (m+n-3)} \left( \frac{\left( L_z^c \right)^3}{12} + L_z^c \left[ \frac{L_z^{pt} + L_z^c}{2} \right]^2 \right) \\
& \bullet \left[ \left( \frac{2x^c + L_x^c}{L_x^{pt}} \right)^{m+n-3} - \left( \frac{2x^c - L_x^c}{L_x^{pt}} \right)^{m+n-3} \right] \\
& + \frac{2 Y^{pt} \left( L_z^{pt} \right)^3 L_y^{pt} m n (m-1)(n-1)}{3 \left( L_x^{pt} \right)^3 (m+n-3)} \left[ 1 - (-1)^{m+n-3} \right] \\
& + K_{v1} \left( \frac{2x_1}{L_x^{pt}} \right)^{m+n} + K_{v2} \left( \frac{2x_2}{L_x^{pt}} \right)^{m+n} + \frac{4 K_{T1} m n}{\left( L_z^{pt} \right)^2} \left( \frac{2x_1}{L_x^{pt}} \right)^{m+n-2} + \frac{4 K_{T2} m n}{\left( L_z^{pt} \right)^2} \left( \frac{2x_2}{L_x^{pt}} \right)^{m+n-2}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Les termes des vecteurs de forces électriques sont calculés avec,

$$\left\{F_m^{ax}\right\} = L_y^{pt} e_{zx}^a \Delta\phi^a \left[ \left( \frac{2x^a + L_x^a}{L_x^{pt}} \right)^m - \left( \frac{2x^a - L_x^a}{L_x^{pt}} \right)^m \right] \quad (A.7)$$

$$\left\{F_n^{tr}\right\} = - \frac{L_y^{pt} e_{zx}^a \Delta\phi^a (L_z^{pt} + L_z^a) n}{L_x^{pt}} \left[ \left( \frac{2x^a + L_x^a}{L_x^{pt}} \right)^{n-1} - \left( \frac{2x^a - L_x^a}{L_x^{pt}} \right)^{n-1} \right] \quad (A.8)$$

## Annexe B

### Expressions des termes pour calculer les différentes matrices des actionneurs piézoélectriques du modèle de plaque P.A.E.P.

Par définition, un actionneur piézoélectrique est composé de deux éléments piézoélectriques identiques qui sont colocalisés sur chacune des surfaces de la plaque avec un déphasage de 180° entre leurs voltages.

Les termes de la matrice de masse d'un actionneur piézoélectrique sont calculés avec,

$$\begin{aligned} \left[ M_{mnpq}^a \right] = & \frac{\rho^a L_z^a L_x^{pl} L_y^{pl}}{2(m+p+1)(n+q+1)} \left[ \left( \frac{2x^a + L_x^a}{L_x^{pl}} \right)^{m+p+1} - \left( \frac{2x^a - L_x^a}{L_x^{pl}} \right)^{m+p+1} \right] \\ & \cdot \left[ \left( \frac{2y^a + L_y^a}{L_y^{pl}} \right)^{n+q+1} - \left( \frac{2y^a - L_y^a}{L_y^{pl}} \right)^{n+q+1} \right] \end{aligned} \quad (B.1)$$

Les termes de la matrice de rigidité d'un actionneur piézoélectrique sont calculés avec,



$$\begin{aligned}
\left[ K_{mnpq}^a \right] = & 2 L_z^a \left( \frac{(L_z^a)^2}{3} + [L_z^{pl} + L_z^a]^2 \right) \\
& \bullet \left\{ \frac{Y_{xx}^a L_y^{pl}}{(L_x^{pl})^3 (m+p-3)(n+q+1)} \left[ \left( \frac{2x^a + L_x^a}{L_x^{pl}} \right)^{m+p-3} - \left( \frac{2x^a - L_x^a}{L_x^{pl}} \right)^{m+p-3} \right] \right. \\
& \quad \bullet \left[ \left( \frac{2y^a + L_y^a}{L_y^{pl}} \right)^{n+q+1} - \left( \frac{2y^a - L_y^a}{L_y^{pl}} \right)^{n+q+1} \right] \\
& \quad + \frac{Y_{yy}^a L_x^{pl}}{(L_y^{pl})^3 (n+q-3)(m+p+1)} \left[ \left( \frac{2x^a + L_x^a}{L_x^{pl}} \right)^{m+p+1} - \left( \frac{2x^a - L_x^a}{L_x^{pl}} \right)^{m+p+1} \right] \\
& \quad \bullet \left[ \left( \frac{2y^a + L_y^a}{L_y^{pl}} \right)^{n+q-3} - \left( \frac{2y^a - L_y^a}{L_y^{pl}} \right)^{n+q-3} \right] \\
& \quad + \frac{4 Y_{xyxy}^a m n p q}{L_x^{pl} L_y^{pl} (n+q-1)(m+p-1)} \left[ \left( \frac{2x^a + L_x^a}{L_x^{pl}} \right)^{m+p-1} - \left( \frac{2x^a - L_x^a}{L_x^{pl}} \right)^{m+p-1} \right] \\
& \quad \bullet \left[ \left( \frac{2y^a + L_y^a}{L_y^{pl}} \right)^{n+q-1} - \left( \frac{2y^a - L_y^a}{L_y^{pl}} \right)^{n+q-1} \right] \\
& \quad + \frac{Y_{xy}^a}{L_x^{pl} L_y^{pl}} \left\{ \frac{m(m-1)q(q-1)}{(n+q-1)(m+p-1)} \left[ \left( \frac{2x^a + L_x^a}{L_x^{pl}} \right)^{m+p-1} - \left( \frac{2x^a - L_x^a}{L_x^{pl}} \right)^{m+p-1} \right] \right. \\
& \quad \bullet \left[ \left( \frac{2y^a + L_y^a}{L_y^{pl}} \right)^{n+q-1} - \left( \frac{2y^a - L_y^a}{L_y^{pl}} \right)^{n+q-1} \right] \\
& \quad \left. + \frac{n(n-1)p(p-1)}{(n+q-1)(m+p-1)} \left[ \left( \frac{2x^a + L_x^a}{L_x^{pl}} \right)^{m+p-1} - \left( \frac{2x^a - L_x^a}{L_x^{pl}} \right)^{m+p-1} \right] \right. \\
& \quad \bullet \left[ \left( \frac{2y^a + L_y^a}{L_y^{pl}} \right)^{n+q-1} - \left( \frac{2y^a - L_y^a}{L_y^{pl}} \right)^{n+q-1} \right] \left. \right\} \left. \right\}
\end{aligned}
\tag{B.2}$$

Les termes du vecteur de forces électriques d'un actionneur piézoélectrique sont calculés avec,

$$\begin{aligned}
 \left\{ F_{mn}^a \right\} = & -\Delta \varphi^a \left( L_z^{pl} + L_z^a \right) \\
 & \bullet \left\{ \frac{L_y^{pl} e_{zx}^a m}{L_x^{pl} (n+1)} \left[ \left( \frac{2x^a + L_x^a}{L_x^{pl}} \right)^{m-1} - \left( \frac{2x^a - L_x^a}{L_x^{pl}} \right)^{m-1} \right] \left[ \left( \frac{2y^a + L_y^a}{L_y^{pl}} \right)^{n+1} - \left( \frac{2y^a - L_y^a}{L_y^{pl}} \right)^{n+1} \right] \right. \\
 & \left. + \frac{L_x^{pl} e_{zy}^a n}{L_y^{pl} (m+1)} \left[ \left( \frac{2x^a + L_x^a}{L_x^{pl}} \right)^{m+1} - \left( \frac{2x^a - L_x^a}{L_x^{pl}} \right)^{m+1} \right] \left[ \left( \frac{2y^a + L_y^a}{L_y^{pl}} \right)^{n-1} - \left( \frac{2y^a - L_y^a}{L_y^{pl}} \right)^{n-1} \right] \right\}
 \end{aligned}
 \tag{B.3}$$

# Bibliographie

ANSI/IEEE Standard 176 (1978) *Piezoelectricity*, New York, 55p.

BARDELL, N.S. (1989) *The application of symbolic computing to the hierarchical finite element method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 28, p. 1181-1204.

BARDELL, N.S. (1991) *Free vibration analysis of a flat plate using the hierarchical finite element method*, Journal of Sound and Vibration, vol 151, n°2, p. 263-289.

BAUMANN, W.T., SAUNDERS, W.R., ROBERTSHAW, H.H. (December 1991) *Active suppression of acoustic radiation from impulsively excited structures*, J. Acoust. Soc. Am., vol 90, n°6, p. 3202-3208.

BAZ, A., POH, S. (1988) *Performance of an active control system with piezoelectric actuators*, Journal of Sound and Vibration, vol 126, n°2, p. 327-343.

BAZ, A., RO, J. (1995) *Optimum design and control of active constrained layer damping*, Special 50<sup>th</sup> Anniversary Design Issue (Transactions of the ASME), vol 117, p. 135-144.

BERRY, A. (1991) *Vibrations et rayonnement acoustique de structures planes complexes immergées dans un fluide léger ou dans un fluide lourd*, thèse de doctorat (Ph.D.), Université de Sherbrooke, 212 pages.

BERRY, A., GUIGOU, C., CHARETTE, F. (Mai 1994) *Contrôle actif du bruit par minimisation du débit volumique de structures: analyse et expériences*, Journal de physique IV, Colloque C5, Supplément au Journal de physique III, 17-21 mai 1994, France, vol 4, p. 203-206.

BURKE, S.E., HUBBARD, J.E. (1988) *Distributed actuator control design for flexible beam*, Automatica, vol 24, n°5, p. 619-627.

BURKE, S.E., HUBBARD, J.E. (August 1991) *Distributed transducer vibration control of thin plate*, J. Acoust. Soc. Am., vol 90, n°2, p. 937-944.

- CHARETTE, F., PLANTIER G., GUIGOU, C., BERRY, A. (1993), *Asymmetric piezoelectric actuation and sensing of a beam*, Proc. Second Conference on Recent Advances in Active Control of Sound and Vibration, April 28-30 1993, Blacksburg, Virginia, USA., p. 204-215
- CHARETTE, F., GUIGOU, C., BERRY, A., PLANTIER G. (1994), *Asymmetric actuation and sensing of a beam using piezoelectric materials*, J. Acoust. Soc. Am., vol 96, n°4, p. 2272-2283.
- CHARETTE, F., GUIGOU, C., BERRY, A. (July 1995) *Development of volume velocity sensors for plates using PVDF film*, Active 95, July 6-8 1995, Newport Beach, California, USA.
- CHARETTE, F., BERRY, A., GUIGOU, C. (October 1995) *Active control of plate volume displacement: Simulation and Experimental results*, Proceedings of the Canadian Acoustic Society, October 25-27 1995, Québec city, Québec, Canada.
- CLARK, R.L., FULLER, C.R., WICKS, A.L. (July 1991) *Characterization of multiple piezoelectric actuators for structural excitation*, J. Acoust. Soc. Am., vol 90, n°1, p. 346-357.
- CLARK, R.L., FULLER, C.R. (1991a) *Active structural acoustic control with adaptive structures including wavenumber considerations*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, vol 2, p. 431-452.
- CLARK, R.L., FULLER, C.R.. (June 1992) *Experiments on active control of structurally radiated sound using multiple piezoceramic actuators*, J. Acoust. Soc. Am., vol 91, n°6, p. 3313-3320.
- CLARK, R.L., FULLER, C.R.. (June 1992a) *Modal sensing of efficient acoustic radiators with polyvinylidene fluoride distributed sensors in active structural acoustic control approaches*, J. Acoust. Soc. Am., vol 91, n°6, p. 3321-3329.
- CLARK, R.L., BURDISO, R.A., FULLER, C.R. (1993) *Design approaches for shaping polyvinylidene fluoride sensors in active structural acoustic control (ASAC)*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, vol 4, p. 354-365.
- CLARK, R.L., FLEMMING, M.R., FULLER, C.R. (1993a) *Piezoelectric actuators for distributed vibration excitation of thin plates: A comparison between theory and experiment*, Journal of Vibration and Acoustics, vol 115, p. 332-339.
- CRAWLEY, E.F., DE LUIS, J. (1987) *Use of piezoelectric actuators as element of intelligent structures.*, AIAA Journal, vol 25, n°10, p. 1373-1385.
- CRAWLEY, E.F., ANDERSON, E.H. (January 1990) *Detailed model of piezoceramic actuation of beams*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, vol 1, p. 4-25.

- CUNEFARE, K.A. (November 1991) *The minimum multimodal radiation efficiency of baffled finite beams*, J. Acoust. Soc. Am., vol 90, n°5, p. 2521-2529.
- DEFFAYET, C., NELSON, P.A. (December 1988) *Active control of low-frequency harmonic sound radiated by a finite panel*, J. Acoust. Soc. Am., vol 84, n°6, p. 2192-2199.
- DIMITRIADIS, E.K., FULLER, C.R., ROGERS, C.A. (January 1991) *Piezoelectric actuators for distributed vibration excitation of thin plate*, Journal of Vibration and Acoustics, Vol 113 pages 100-107.
- ELLIOTT, S.J., JOHNSON, M.E. (October 1993) *Radiation modes and the active control of sound power*, J. Acoust. Soc. Am., vol 94, n°4, p. 2194-2204.
- FULLER, C.R. (1987), *Apparatus and method for global noise reduction*, US Patent No. 4,715,599.
- FULLER, C.R. (1990) *Active control of sound transmission/radiation from elastic plates by vibrational inputs: I. Analysis*, Journal of Sound and Vibration, vol 136, n°1, p. 1-15.
- FULLER, C.R., GIBBS, G.P., SILCOX, R.J. (1990a) *Simultaneous active control of flexural and extensional waves in beams*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, vol 1, n°2, p. 235-247.
- FULLER, C.R., BURDISSO, R.A. (1991) *A wave number domain approach to the active control of structure-borne sound*, Journal of Sound and Vibration, vol 148, n°2, p. 355-360.
- FULLER, C.R., HANSEN, C.H., SNYDER, S.D. (1991a) *Active control of sound radiation from a vibrating rectangular panel by sound sources and vibration inputs: an experimental comparison*, Journal of Sound and Vibration, vol 145, n°2, p. 195-215.
- FULLER, C.R., HANSEN, C.H., SNYDER, S.D. (1991b) *Experiments on active control of sound radiation from a panel using a piezoceramic actuator*, Journal of Sound and Vibration, vol 150, n°2, p. 179-190.
- FULLER, C.R., SILCOX, R.J. (January 1992) *Active structural acoustic control*, J. Acoust. Soc. Am., vol 91, n°1, p. 519.
- FULLER, C.R., BURDISSO, R.A. (1994) *Design of active control systems using eigenanalysis*, Third International Congress on Air- and Structure-Borne Sound and Vibration, June 13-15 1994, Montréal, Canada, p. 1341-1358.
- FULLER, C.R., ELLIOTT, S.J., NELSON, P.A. (1995), *Active control of vibration*, sous presse.

- GERALD, C.F., WHEATLY, P.O. (1989), *Applied numerical analysis*, The Addison-Wesley Publishing Company, 680 p.
- GANDHI, M.V., THOMPSON, B.S. (1992), *Smart materials and structures*, Chapman & Hall, 309 p.
- GIBBS, G.P., FULLER, C.R. (December 1992), *Excitation of thin beams using asymmetric piezoelectric actuators*, J. Acoust. Soc. Am., vol 92, n°6, pages 3221-3227.
- GU, Y., CLARK, R.L., FULLER, C.R., ZANDER, A.C. (July 1994) *Experiments on active control of plate vibration using piezoelectric actuators and polyvinylidene fluoride (PVDF) modal sensors*, Journal of Vibration and Acoustics, Vol 116 pages 303-308.
- GUIGOU, C., BERRY, A., CHARETTE, F., NICOLAS, J. (1994) *Active control of finite beam volume velocity using shaped PVDF sensor*, accepté pour publication au journal Acta Acustica.
- GUIGOU, C., CHARETTE, F., BERRY, A. (1994a) *Active control of sound by minimization of volume velocity on finite beam*, Third International Congress on Air- and Structure-Borne Sound and Vibration, June 13-15 1994, Montréal, Canada, p. 1507-1514.
- GUIGOU, C., GENTRY, C.A., PAN, J., FULLER, C.R. (1995) *Active control of sound with foam-PVDF composite material*, Proceedings of Acoustics Week in Canada 1995, October 25-26 1995, Québec city, Canada, p. 105-106.
- JOHNSON, M.E., ELLIOTT, S.J. (1993) *Volume velocity sensors for active control*, Proceedings of the Institute of Acoustics, vol 15, n°3, p. 411-420.
- JOHNSON, M.E., ELLIOTT, S.J. (199?) *Active control of sound power radiation using volume velocity cancellation*, soumis à un journal.
- JUNGER, J.C., FEIT, D. (1972), *Sound, Structures, and Their Interaction*, The MIT Press Cambridge, Massachusetts, 470 p.
- KAM, W.N. (July 1995) *Applications of active control*, Active 95, July 6-8 1995, Newport Beach, California, USA.
- KIM, S.J., JONES, J.D. (December 1991) *Optimal design of piezoactuators for active noise and vibration control*, AIAA Journal, vol 29, n°12, p. 2047-2053.
- KNYASEV, A.S., TARTAKOVSKII, B.D. (1967) *Abatement of radiation from flexure vibrating plates by means of active local dampers*, Soviet physics-acoustics Journal, vol 13, n°1, p. 115-117.

- LANCZOS, C. (1966), *The Variational Principles of Mechanics*, University of Toronto Press, 375p.
- LEE, C.K., MOON, F.C. (June 1990), *Modal sensors / actuators*, Journal of Applied Mechanics, vol 57, p. 434-441.
- LEE, C.K., CHIANG, W.W., O'SULLIVAN, T.C. (July 1991), *Piezoelectric modal sensor / actuators pair for critical active damping vibration control*, J. Acoust. Soc. Am. , vol 90, n°1, p. 374-384.
- LEE, C.K., O'SULLIVAN, T.C. (August 1991a), *Piezoelectric strain rate gages*, J. Acoust. Soc. Am., vol 90, n°2, p. 945-953.
- LESUEUR, C. (1988), *Rayonnement acoustique des structures*, Collection Département Études et Recherches EDF, Eyrolles, 591p.
- LUEG, P. (1936), *Process of silencing sound oscillations*, US Patent No. 2,043,416.
- MAIDANEK, G. (1974) *Vibrational and radiative classification of modes of a baffled finite panel*, Journal of Sound and Vibration, vol 34, p. 447-455.
- NAGHSHINEH, K., KOOPMANN, G.H. (August 1992), *A design method for achieving weak radiator structures using active vibration control*, J. Acoust. Soc. Am., vol 92, n°2, p. 856-870.
- NELSON, P.A., ELLIOTT, S.J. (1992), *Active Control of Sound*, Academic Press, 436p.
- PLANTIER, G., GUIGOU, C., NICOLAS, J., PIAUD, J.B., CHARETTE, F. (1994) *Variational analysis of a thin finite beam excitation with a single asymmetric piezoelectric actuator including bonding layer and dynamical effects*, accepté pour publication au journal Acta Acustica.(publié dans le vol 3, page 135-151, avril 1995)
- POPOV, E. P. (1978), *Mechanics of Materials*, Prentice-Hall Inc, 588p.
- PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S.A., VETTERLING, W.T., FLANNERY, B.P. (1992), *NUMERICAL RECIPES in C, The art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 994p.
- REX, J., ELLIOTT, S.J. (1992) *The QWSIS - A new sensor for structural radiation control*, 1<sup>st</sup> International conference on motion and vibration control, Yokohama, Japan., p.339-343

- SNYDER, S.D., HANSEN, C.H. (1991) *Mechanism of active noise control by vibration sources*, Journal of Sound and Vibration, vol 147, n°3, p. 519-525.
- SNYDER, S.D., HANSEN, C.H., TANAKA, N. (1993) *Shaped vibration sensors for feedforward control of structural radiation*, Proc. Second Conference on Recent Advances in Active Control of Sound and Vibration, April 28-30 1993, Blacksburg, Virginia, USA., p. 177-188
- STEVENS, J.C., AHUJA, K.K. (July 1991) *Recent advances in active noise control*, AIAA Journal, vol 29, n°7, p. 1058-1067.
- TIERSTEN, H. F. (1969), *Linear Piezoelectric Plate Vibrations*, Plenum Press, 211p.
- WALLACE, C.E. (1972), *Radiation resistance of a baffled beam*, J. Acoust. Soc. Am., vol 51, n°3, p. 936-945.
- WALLACE, C.E. (1972a), *Radiation resistance of a rectangular panel*, J. Acoust. Soc. Am., vol 51, n°3, p. 946-952.
- WANG, B.T., FULLER, C.R., DIMITRIADIS, E.K. (November 1991) *Active control of structurally radiated noise using multiple piezoelectric actuators*, AIAA Journal, vol 29, n°11, p. 1802-1809.
- WASHIZU, K. (1975), *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, 412p.
- WRIGHT, M.C., NELSON, P.A. (July 1995) *Algorithm for boundary layer control*, Active 95, July 6-8 1995, Newport Beach, California, USA.