Rapport - EDP

1. Equations aux dérivées partielles elliptiques

1. 2. Partie théorique

Soit $\Omega =]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2$, $\partial\Omega = \partial\Omega_n \cup \partial\Omega_d$.
Etant donné $f \in L^2(\Omega)$, $u_d \in H^1(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega_n)$.
On cherche u solution du problème de Laplace:

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y) & \text{sur } \Omega \\ u(x,y) = u_d(x,y) & \text{sur } \partial\Omega_d \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial n} = g(x,y) & \text{sur } \partial\Omega_n \end{cases}$$

- La formulation variationnelle du problème:

Au sens de distributions, la résolution revient à chercher $u \in H^2(\Omega)$ tq

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y) & \text{dans } L^2(\Omega) \\ \gamma_0(u(x,y)) = u_d(x,y) & \text{dans } H^1(\partial\Omega_d) \\ \gamma_1(u(x,y)) = g(x,y) & \text{dans } L^2(\partial\Omega_n) \end{cases}$$

Soit $w \in L^2(\Omega)$, en multipliant par w et intégrant sur Ω:

$$\int_\Omega -\Delta u w \, dx = \int_\Omega f w \, dx$$

D'après la formule de Green, $\forall w \in H^1(\Omega)$, $u \in H^2(\Omega)$

$$-\int_\Omega \Delta u w \, dx = \int_\Omega \nabla u \nabla w \, dx - \int_{\partial\Omega} \gamma_1(u) \gamma_0(w) \, d\Gamma$$

or $H^1(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$, on cherche donc $u \in H^2(\Omega)$ tq $\forall w \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w \, dx - \int_{\partial\Omega} \gamma_1(u) \gamma_0(w) \, d\Gamma = \int_\Omega f w \, dx$$

Or on a $\partial\Omega = \partial\Omega_n \cup \partial\Omega_d$, en séparant l'intégrale

On obtient

$$(*) \quad \int_\Omega \nabla u \nabla w dx = \int_\Omega f w dx + \int_{\partial\Omega_n} \gamma_1(u)\gamma_0(w) d\Gamma + \int_{\partial\Omega_d} \gamma_1(u)\gamma_0(w) d\Gamma$$

On a $\forall (x,y) \in \partial\Omega_d \quad u(x,y) = u_d(x,y)$

d'ou $\quad u - u_d \in H^1_0(\Omega)$

et $\quad \gamma_0(u-u_d) = 0$ sur $\partial\Omega_d$

On a $\forall (x,y) \in \partial\Omega_n \quad \gamma_1(u(x,y)) = g(x,y) = \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial n}$

En posant $v = u - u_d \in H^1_0(\Omega)$ donc $u = v + u_d$

En prenant $w \in H^1_0(\Omega)$ on a $\gamma_0(w) = 0$ sur $\partial\Omega_d$

D'ou $(*)$ devient

$$\int_\Omega \nabla(v+u_d) \cdot \nabla w \, dx = \int_\Omega f w dx + \int_{\partial\Omega_n} g \gamma_0(w) d\Gamma$$

On cherche donc $u \in H^1(\Omega)$ tq $\forall w \in H^1_0(\Omega)$ et $v \in H^1_0(\Omega)$:

$$\int_\Omega \nabla(v+u_d) \nabla w \, dx = \int_\Omega f w dx + \int_{\partial\Omega_n} g \gamma_0(w) d\Gamma$$

avec $v = u - u_d$

$$\Rightarrow \boxed{\int_\Omega \nabla v \nabla w \, dx = \int_\Omega f w dx + \int_{\partial\Omega_n} g \gamma_0(w) d\Gamma - \int_\Omega \nabla u_d \nabla w dx}$$

- Unicité de la solution du problème

D'après ce qui précède, on obtient la formulation variationnelle suivante du problème :

$$a : H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v, w) \longrightarrow \int_\Omega \nabla v \nabla w \, dx$$

et

$$\ell : H^1_0(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$w \longrightarrow \int_\Omega f w\,dx + \int_{\partial\Omega_n} g\,\gamma_0(w)\,d\Gamma - \int_\Omega \nabla u_d \nabla w\,dx$$

- On a $H^1_0(\Omega)$ muni de $\langle \cdot,\cdot \rangle_{1,\Omega}$ est un Hilbert
- a est une forme bilinéaire par linéarité de la dérivée et de l'intégrale
- Continuité de a

On a $|a(u,v)| = \left|\int_\Omega \nabla u \nabla v\,dx\right| = |\langle u,v\rangle_{1,\Omega}|$

D'après l'inegalité de Cauchy - Schwarz On a

$$|\langle u,v\rangle_{1,\Omega}| \leqslant |u|_{1,\Omega} \cdot |v|_{1,\Omega}$$

D'ou $\forall u,v \in H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$ $\quad |a(u,v)| \leqslant |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega}$

Donc a est continue sur $H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$

- Coersivité de a

On a $\forall u \in H^1_0(\Omega)$ $\quad a(u,u) = \int_\Omega \nabla u \nabla u\,dx = |u|^2_{1,\Omega}$

Donc a est coersive

$\Rightarrow$ D'où a est une forme bilinéaire continue coersive.

- ℓ est une forme linéaire par linéarité de la dérivée et de l'intégrale
- Continuité de ℓ, $\forall w \in H^1_0(\Omega)$

On a $|\ell(w)| = \left|\int_\Omega f w\,dx + \int_{\partial\Omega_n} g\,\gamma_0(w)\,d\Gamma - \int_\Omega \nabla u_d \nabla w\,dx\right|$

$$|\ell(w)| = \left|\langle f,w\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle g,\gamma_0(w)\rangle_{L^2(\partial\Omega_n)} - \langle u_d,w\rangle_{1,\Omega}\right|$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

on a

$$|l(w)| \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega_n)} \|\gamma_0(w)\|_{L^2(\partial\Omega_n)} + |u_d|_{1,\Omega} |w|_{1,\Omega}$$

- Comme Ω est un ouvert fermé, d'après l'inégalité de Poincaré : $\exists C > 0$ tq $\|w\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C |w|_{1,\Omega}$

- γ_0 continue sur $H_0^1(\Omega)$ donc

$\exists M > 0$ tq $\|\gamma_0(w)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant M |w|_{1,\Omega}$

et $\|g\|_{L^2(\partial\Omega_n)} \|\gamma_0(w)\|_{L^2(\partial\Omega_n)} \leqslant \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\gamma_0(w)\|_{L^2(\partial\Omega)}$

D'où $\forall w \in H_0^1(\Omega)$

$$|l(w)| \leqslant \left(C \|f\|_{L^2(\Omega)} + M \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} + |u_d|_{1,\Omega} \right) |w|_{1,\Omega}$$

Donc l est continue sur $H_0^1(\Omega)$

$\Rightarrow$ l est linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$

Donc par application du théorème de Lax-Milgram

on a $\exists! v \in H_0^1(\Omega)$ tq $\forall w \in H_0^1(\Omega)$ $a(v,w) = l(w)$

or u est uniquement définie par v et u_d tq $u = v + u_d$

D'où le problème de départ admet une unique solution u.

- Unicité et existence de la solution discrète du système

Soit n le nombre de degrés de liberté,

η_K les fonctions de base

Les fonctions discrètes exprimées dans la base η_k

$$v_h = \sum_{i=1}^{n} v_i \eta_i \quad \text{et} \quad w_h = \sum_{i=1}^{n} \eta_i w_i$$

- Ainsi la forme variationnelle du problème :

On cherche v_h tq $\forall w_h$

$$a(v_h, w_h) = \ell(w_h)$$

$$a\left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j w_j\right) = \ell\left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i w_i\right)$$

d'où

$$\sum_{i,j \in [\![1,n]\!]^2} v_i w_j \, a(\eta_i, \eta_j) = \sum_{i=1}^{n} w_i \, \ell(\eta_i)$$

Ce qui revient à

$$\forall w_i \text{ tq } i \in [\![1,n]\!] \quad \sum_{i=1}^{n} w_i \left(\ell(\eta_i) - \sum_{j=1}^{n} v_j \, a(\eta_j, \eta_i) \right) = 0$$

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \ell(\eta_i) - \sum_{j=1}^{n} v_j \, a(\eta_j, \eta_i) = 0$

d'où $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \sum_{j=1}^{n} v_j \, a(\eta_j, \eta_i) = \ell(\eta_i)$

en posant $\quad A_{ij} = a(\eta_j, \eta_i) = \int_\Omega \nabla \eta_j \nabla \eta_i = \int_\Omega \nabla \eta_i^T \nabla \eta_j$

et $\quad b_i = \ell(\eta_i) = \int_\Omega f \eta_i \, dx + \int_{\partial \Omega_n} g \, \gamma_0(\eta_i) \, d\Gamma - \int_\Omega \nabla u_d \, \nabla \eta_i \, dx$

or $\quad \nabla u_d = \sum_{k=1}^{n} U_k \cdot \nabla \eta_k$

d'où

$$b_i = \ell(\eta_i) = \int_\Omega f \eta_i \, dx + \int_{\partial \Omega_n} g \eta_i \, d\Gamma - \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{n} U_k \nabla \eta_k \right) \nabla \eta_i \, dx$$

donc $\quad b_i = \int_\Omega f \eta_i \, dx + \int_{\partial \Omega_n} g \eta_i \, d\Gamma - \sum_{k=1}^{n} U_k \int_\Omega \nabla \eta_i^T \nabla \eta_k \, dx$

Et en posant $x = v_j \quad \forall j \in [\![1,n]\!]$

On retrouve donc le système équivalent suivant

$$Ax = b \quad \text{avec} \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$
$$b \in \mathbb{R}^n .$$
$$x = (v_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$$

- En appliquant le théorème de Lax-Milgram dans l'espace engendré par les fonctions de base $\mathrm{Vect}((\eta_k)_k)$.

D'où v_h est unique $\Rightarrow$ u_h est unique

On peut conclure donc

$\boxed{\exists!\, x \text{ tq } Ax = b \text{ puisque } x \text{ est défini par } x = (v_i)_{i\in[\![1,n]\!]}}$

et $\forall i \in [\![1,n]\!]$ les v_i sont uniques car ils correspondent à l'écriture de v_h dans la base des η_k.

- Formules de la matrice de raideur associée à un quadrangle

On a $\nabla\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} y-1 & x-1 \\ 1-y & -x \\ y & x \\ -y & 1-x \end{pmatrix}$

En se basant sur la formule de changement de variables, on trouve l'expression suivante

$\forall (i,j) \in [\![1,4]\!]^2$

$$M_{ij} = \int_{[0,1]}\int_{[0,1]} \nabla\varphi_i^T(u,v) \left(J_\varphi^T J_\varphi\right)^{-1} \nabla\varphi_j(u,v)\ |J\varphi|\ du.dv$$

avec $\quad \left(J_\varphi^T J_\varphi\right)^{-1} = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_2 & N_4 \end{pmatrix}$

- Calcul de $M_{1,1}$

$$\frac{6}{|J\varphi|} . M_{1,1} = \int_{[0,1]}\int_{[0,1]} \nabla\varphi_1^T(x,y) \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_2 & N_4 \end{pmatrix} \nabla\varphi_1\, dx\, dy$$

$$= \int_{[0,1]}\int_{[0,1]} (y-1 \quad x-1) \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_2 & N_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y-1 \\ x-1 \end{pmatrix} dx\, dy$$

$$= \int_{[0,1]}\int_{[0,1]} \left((y-1)N_1 + (x-1)N_2 \quad (y-1)N_2 + (x-1)N_4\right) \begin{pmatrix} y-1 \\ x-1 \end{pmatrix} dx\, dy$$

$$= \int_{[0,1]}\int_{[0,1]} \left((y-1)^2 N_1 + 2(x-1)(y-1)N_2 + (x-1)^2 N_4\right) dx\, dy$$

$$= N_1 \int_{[0,1]}\int_{[0,1]} (y-1)^2 dy\, dx + 2N_2 \int_{[0,1]}(x-1)dx \int_{[0,1]}(y-1)dy + N_4 \int_{[0,1]}\int_{[0,1]}(x-1)^2 dx\, dy$$

avec $\displaystyle\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} (y-1)^2 dx\, dy = 2$

$$\int_{[0,1]} (x-1)\, dx \int_{[0,1]} (y-1)\, dy = \frac{3}{2}$$

$$\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} (x-1)^2\, dx\, dy = 2$$

D'où $\quad \boxed{M_{1,1} = \frac{|J\varphi|}{6}\left(2N_1 + 2N_4 + 3N_2\right)}$

• En se basant sur la symétrie de la matrice M, il suffit de calculer les intégrales suivantes:

$$M_{1,2} = \int_{[0,1]^2} \nabla\varphi_1^T(x,y) \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_2 & N_4 \end{pmatrix} \nabla\varphi_2(x,y)\, dx\, dy = \frac{|J\varphi|}{6}\left(N_4 - 2N_1\right)$$

$$M_{1,3} = \int_{[0,1]^2} \nabla\varphi_1^T(x,y) \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_2 & N_4 \end{pmatrix} \nabla\varphi_3(x,y)\, dx\, dy = \frac{|J\varphi|}{6}\left(-N_1 - N_4 - 3N_2\right)$$

$$M_{1,4} = \int_{[0,1]^2} \nabla\varphi_1^T(x,y) \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_2 & N_4 \end{pmatrix} \nabla\varphi_4(x,y)\, dx\, dy = \frac{|J\varphi|}{6}\left(N_1 - 2N_4\right)$$

$$M_{2,2} = \int_{[0,1]^2} \nabla\varphi_2(x,y)^T \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_2 & N_4 \end{pmatrix} \nabla\varphi_2(x,y)\, dx\, dy = \frac{|J\varphi|}{6}\left(2N_1 + 2N_4 - 3N_2\right)$$

$$M_{3,2} = \int_{[0,1]^2} \nabla\varphi_3(x,y)^T \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_2 & N_4 \end{pmatrix} \nabla\varphi_2(x,y)\, dx\, dy = \frac{|J\varphi|}{6}\left(N_1 - 2N_4\right)$$

$$M_{4,2} = \int_{[0,1]^2} \nabla\varphi_4^T(x,y) \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_2 & N_4 \end{pmatrix} \nabla\varphi_2(x,y)\, dx\, dy = \frac{|J\varphi|}{6}\left(-N_1 - N_4 - 3N_2\right)$$

$$M_{3,3} = \int_{[0,1]^2} \nabla\varphi_3^T(x,y) \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_2 & N_4 \end{pmatrix} \nabla\varphi_3(x,y)\, dx\, dy = \frac{|J\varphi|}{6}\left(2N_1 + 3N_2 + 2N_4\right)$$

$$M_{4,3} = \int_{[0,1]^2} \nabla\varphi_4^T(x,y) \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_2 & N_4 \end{pmatrix} \nabla\varphi_3(x,y)\, dx\, dy = \frac{|J\varphi|}{6}\left(-2N_1 + N_4\right)$$

$$M_{4,4} = \int_{[0,1]^2} \nabla\varphi_4^T(x,y) \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_2 & N_4 \end{pmatrix} \nabla\varphi_4(x,y)\, dx\, dy = \frac{|J\varphi|}{6}\left(2N_1 - 3N_2 + 2N_4\right)$$

• Avec les formules ainsi trouvées, on peut conclure sur la formule de la matrice de raideur associée au quadrangle :

La matrice de raideur est la suivante :

$$M = \frac{|J\varphi|}{6} \begin{pmatrix} 2N_1+2N_4+3N_2 & N_4-2N_1 & -N_1-N_4-3N_2 & N_1-2N_4 \\ N_4-2N_1 & 2N_1+2N_4-3N_2 & N_1-2N_4 & -N_1-N_4-3N_2 \\ -N_1-N_4-3N_2 & N_1-2N_4 & 2N_1+3N_2+2N_4 & -2N_1+N_4 \\ N_1-2N_4 & -N_1-N_4-3N_2 & -2N_1+N_4 & 2N_1-3N_2+2N_4 \end{pmatrix}$$

1.4 Compléments : introduction d'un nouveau terme

$$(P_0) \begin{cases} -\Delta u(x,y) + c_0 u(x,y) = f(x,y) \text{ sur } \Omega \\ u(x,y) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{avec } c_0 > 0$$

* Montrer que la formulation variationnelle de ce problème peut s'écrire :

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ / $\forall w \in H_0^1(\Omega)$, $\int_\Omega \nabla u \nabla w \, dx + c_0 \int_\Omega u w \, dx = \int_\Omega f w \, dx$

* On cherche $u \in H^2(\Omega)$.

$$(P_0) \Rightarrow \begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y) & \text{sur } L^2(\Omega) \\ \gamma_0(u(x,y)) = 0 & \text{sur } H^1(\partial\Omega) \end{cases}$$

* On cherche $u \in H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$.

Soit $w \in L^2(\Omega)$.

$$\int_\Omega (-\Delta u + c_0 \times u) \times w \, dx = \int_\Omega f \times w \, dx$$

* $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. On prend donc $w \in H^1(\Omega)$ pour trouver $u \in H^2(\Omega)$ /

$$\int_\Omega (-\Delta u + c_0 u) w \, dx = \int_\Omega f w \, dx$$

Par application de la formule de Green, on obtient :

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla w + c_0 u w) \, dx = \int_\Omega f w \, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_1(u) \gamma_0(w) \, d\sigma$$

* On cherche $u \in H^1(\Omega)$.

De plus, $\forall (x,y) \in \partial\Omega$, $u(x,y) = 0 \Rightarrow u \in H_0^1(\Omega)$.

On prend $w \in H_0^1(\Omega)$, $\Rightarrow \gamma_0(w) = 0$ sur $\partial\Omega$

D'où, il faut trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ / $\forall w \in H_0^1(\Omega)$,

$$\boxed{\int_\Omega (\nabla u \nabla w + c_0 u w) \, dx = \int_\Omega f w \, dx}$$

- Montrer également que le problème admet une unique solution.

Objectif : On cherche à appliquer LAX-MILGRAM

$a(u,v) = \ell(v)$ Ici, $a(u,w) = \int_\Omega (\nabla u \nabla w + c_0 u w) dx$

$\ell(w) = \int_\Omega f w \, dx$

↳ a est bien bilinéaire
ℓ est bien linéaire.

- Montrons que a est continue.

* $|a(u,w)| \underset{\substack{\text{inégalité}\\ \text{triangulaire}}}{\leq} \left|\int_\Omega \nabla u \nabla w dx\right| + c_0 \left|\int_\Omega u w dx\right|$

$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \times \|w\|_{H_0^1(\Omega)} + \underbrace{c_0 \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}}_{\underset{\text{Poincaré}}{\leq} C^2(\Omega) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}}$

$\leq \left(1 + c_0 C^2(\Omega)\right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \times \|w\|_{H_0^1(\Omega)}$

$\Rightarrow$ a est continue.

- Montrons que a est coercive.

* $a(w,w) = \langle w, w\rangle_{0,1} + c_0 \langle w, w\rangle_{L^2(\Omega)}$

$= \|w\|_{0,1} + \underbrace{c_0 \|w\|_{L^2(\Omega)}}_{\geq 0}$

$\geq \|w\|_{0,1}$

$\Rightarrow$ a est coercive.

- Montrons que ℓ est continue.

↝ Ce calcul a déjà été fait dans la première partie.

* Montrer que la forme variationnelle discrète aboutit au système linéaire d'équations $Ax = b$ avec $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $x, b \in \mathbb{R}^m$ /

$$A_{ij} = \int_\Omega \nabla h_i^T \nabla h_j \, dx + c_0 \int_\Omega h_i h_j \, dx$$

$$b_i = \int_\Omega f h_i \, dx$$

* $v_h = \sum_{i=1}^{m} v_i h_i \qquad w_h = \sum_{i=1}^{m} w_i h_i$

* $a(v_h, w_h) = l(w_h) \iff \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} a(h_i, h_j) v_i w_j = \sum_{j=1}^{m} l(h_j) \times w_j$

a bilinéaire
l linéaire

$$\iff \sum_{j=1}^{m} w_j \left[\left(\sum_{i=1}^{m} a(h_i, h_j) v_i \right) - l(h_j) \right] = 0 \qquad \forall w$$

$$\iff l(h_j) = \sum_{i=1}^{m} a(h_i, h_j) v_i$$

(Les v_i forment une base)

On reconnaît un système $Ax = b$ /

$$A_{ij} = a(h_i, h_j) = \int_\Omega \nabla h_i^T \nabla h_j + c_0 \int_\Omega h_i h_j \, dx$$

$$b_j = l(h_j) = \int_\Omega f h_i \, dx$$