Les arbres-B

Géraldine Del Mondo, Nicolas Delestre

Basé sur le cours de M. Michel Mainguenaud - Dpt ASI

Plan...

Architecture des Systèmes d'Information

Contexte

L'arbre-B (où *B-Tree* en anglais) est un SDD utilisée dans les domaines des :

- systèmes de gestion de fichiers : ReiserFS (version modifiée des arbres-B) ou Btrfs (*B-Tree file system*)
- bases de données : gestion des index

L'arbre-B reprend le concept d'ABR équilibré mais en stockant dans un nœud k valeurs (nommées clés dans le contexte des arbres-B) et en référençant $k+1$ sous arbres :

- « minimise la taille de l'arbre et réduit le nombre d'opérations d'équilibrage » (Wikipédia)
- utile pour un stockage sur une unité de masse

Architecture des Systèmes d'Information

Arbre-B

Définition ARBRE-B

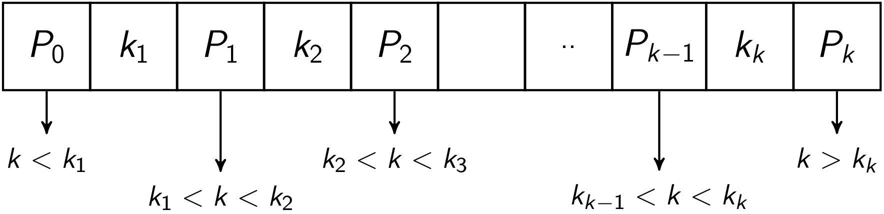
Un arbre-B d'ordre m est un arbre tel que :

1. Chaque nœud contient k clées triées avec : $m \leq k \leq 2m$ (nœud non racine) et $1 \leq k \leq 2m$ (nœud racine).
2. Chaque chemin de la racine à une feuille est de même longueur à 1 près
3. Un nœud est :
   - Soit terminal (feuille)
   - Soit possède $(k+1)$ fils tels que les clés du ième fils ont des valeurs comprises entre les valeurs du $(i-1)$ème et $i$ème clés du père

Structure d'un nœud

Définition NŒUD

- k clés triées
- $k+1$ pointeurs tels que :
  - Tous sont différents de NIL si le nœud n'est pas une feuille
  - Tous à NIL si le nœud est une feuille



Capacité

- **Nombre de clés**

  Arbre-B d'ordre m et de hauteur h :

$\rightarrow$ Nombre de clé(s) minimal $= 2 * (m+1)^h - 1$

$\rightarrow$ Nombre de clés maximal $= (2 * m + 1)^{h+1} - 1$

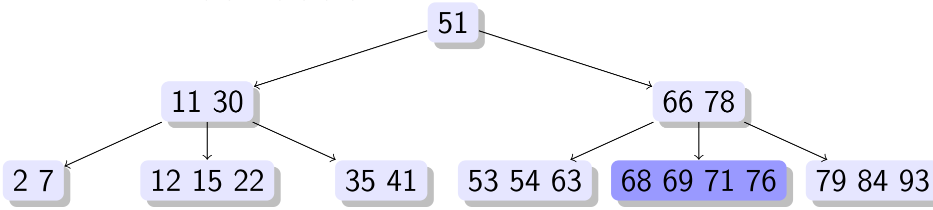
EXEMPLE : $m = 100$, $h = 2$: Nombre de clés maximal $=$ 8 000 000

- **Stockage sur disque**

$\rightarrow$ Un noeud $=$ Un bloc (ensemble de secteurs)

Exemple

EXEMPLE : Arbre-B d'ordre 2



- Chaque nœud, sauf la racine contient k clés avec $2 \leq k \leq 4$
- La racine contient k clé(s) avec $1 \leq k \leq 4$

Conception

Conception détaillée

Type ArbreB = ^Noeud

Type Noeud = **Structure**

  nbCles : **NaturelNonNul**

  cles : **Tableau[**1..MAX**]** **de** Valeur

  sousArbres : **Tableau[**0..MAX**]** **de** ArbreB

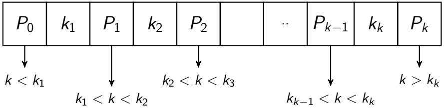
finstructure

... tel que le type `Valeur` possède un ordre total

Information

Contrairement au premier cours sur les SDD, nous utiliserons ici aucune fonction/procédure d'encapsulation

Recherche d'un élément de clé c 1 / 3



Principe

À partir de la racine, pour chaque nœud examiné :

- La clé C est présente (recherche qui peut être dichotomique) $\rightarrow$ succès
- $C < k_1 \rightarrow$ recherche dans le sous-arbre le plus à gauche (via le pointeur P_0)
- $C > k_k \rightarrow$ recherche dans le sous-arbre le plus à droite (via le pointeur P_k)
- $k_i < C < k_{i+1}$ (recherche qui peut être dichotomique) $\rightarrow$ recherche dans le sous-arbre (via le pointeur P_i)
- Si l'arbre est vide (pointeur vaut NIL) $\rightarrow$ échec

Recherche d'un élément de clé c 2 / 3

```
fonction estPresent (a : ArbreB, c : Valeur) : Booleen
debut
    si a=NIL alors
        retourner FAUX
    sinon
        si c<a^.cles[1] alors
            retourner estPresent(a^.sousArbres[0],c)
        sinon
            si c>a^.cles[a^.nbCles] alors
                retourner estPresent(a^.sousArbres[a^.nbCles],c)
            sinon
                rechercherDansNoeud(a^,c,res,ssArbre)
                si res alors
                    retourner VRAI
                sinon
                    retourner estPresent(ssArbre,c)
                finsi
            finsi
        finsi
    finsi
fin
```

Recherche d'un élément de clé c 3 / 3

```
procédure rechercherDansNoeud (E n : Noeud, c : Valeur, S estPresent : Booleen, sousArbre : ArbreB)
    Déclaration  g,d,m : NaturelNonNul
debut
    g ← 1
    d ← n.nbCles
    tant que g≠d faire
        m ← (g+d) div 2
        si n.cles[m]≥c alors
            d ← m
        sinon
            g ← m+1
        finsi
    fintantque
    si n.cles[g]=c alors
        estPresent ← VRAI
        sousArbre ← NIL
    sinon
        estPresent ← FAUX
        sousArbre ← n.sousArbres[g-1]
    finsi
fin
```

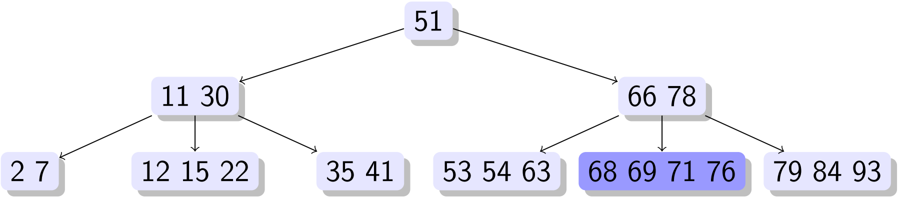
Insertion dans un arbre-B d'ordre m

Principe

1. L'insertion se fait récursivement au niveau des feuilles
2. Si un nœud a alors plus $2m+1$ clés, il y a éclatement du nœud et remontée (grâce à la récursivité) de la clé médiane au niveau du père
3. Il y a augmentation de la hauteur de l'arbre lorsque la racine se retrouve avec $2m+1$ clés
   $\hookrightarrow$ l'augmentation de la hauteur de l'arbre se fait donc au niveau de la racine !

Exemple : cas d'un nœud plein 1 / 2

EXEMPLE : Insertion de **75** ?



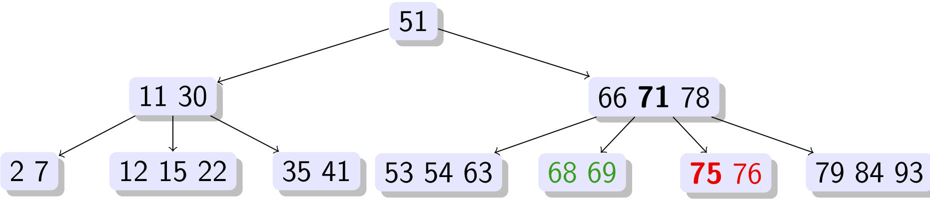
Rappel : ici nombre de clés par nœud ≤ 4

Méthode

1. Eclatement du nœud en deux :
   - Les (deux) plus petites clés restent dans le nœud
   - Les (deux) plus grandes clés sont insérées dans un nouveau nœud
2. Remontée de la clé médiane dans le nœud père (e.g. ici **71**)

Exemple : cas d'un nœud plein 2 / 2

Exemple : Insertion de **75** ?



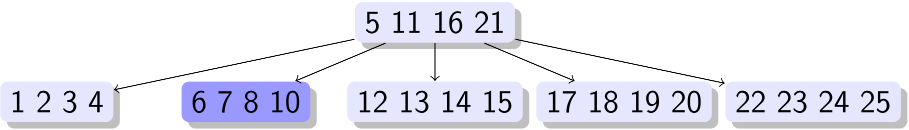
Rappel : ici nombre de clés par nœud ≤ 4

Méthode

1. Eclatement du nœud en deux :
   - Les (deux) plus petites clés restent dans le nœud
   - Les (deux) plus grandes clés sont insérées dans un nouveau nœud
2. Remontée de la clé médiane dans le nœud père (e.g. ici **71**)

Exemple : cas de l'augmentation de la hauteur 1 / 2

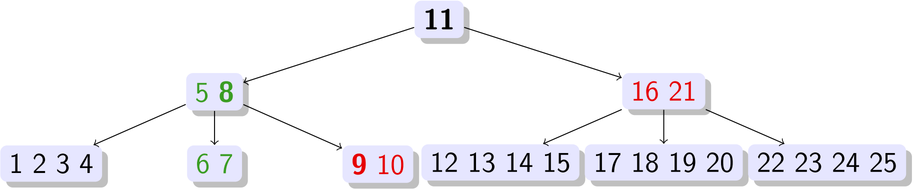
Arbre-B d'ordre 2 :



- Insertion clé **9** $\rightarrow$ Eclatement + remontée de la clé **8** au nœud père
- Remontée de la clé **8** au nœud père $\rightarrow$ Eclatement + création nouvelle racine (e.g. ici **11**)

Exemple : cas de l'augmentation de la hauteur 2 / 2

Arbre-B d'ordre 2 :



- Insertion clé **9** → Eclatement + remontée de la clé **8** au nœud père
- Remontée de la clé **8** au nœud père → Eclatement + création nouvelle racine (e.g. ici **11**)

↪ **Augmentation d'une unité de la hauteur**

Prérequis

On suppose posséder les fonctions/procédures suivantes :

- **fonction** creerFeuille **(**c :**Tableau[**1..MAX**] de** Valeur, nb : **NaturelNonNul) :** ArbreB
- **fonction** estUneFeuille **(**a : ArbreB**) : Booleen**
- **fonction** eclatement **(**a : ArbreB, ordre : **NaturelNonNul) :** ArbreB
  ⌊**précondition(s)** a^.nbCles>2*ordre
- **fonction** positionInsertion **(**a : ArbreB, c : Valeur**) : NaturelNonNul**
- **procédure** insererUneCleDansNoeud **(E/S** n : Noeud, **E** c : Valeur, pos : **NaturelNonNul)**
- **procédure** insererUnArbreDansNoeud **(E/S** n : Noeud, **E** a : ArbreB, pos : **NaturelNonNul)**

procédure inserer **(E/S** a : ArbreB, **E** c : Valeur, ordre : **NaturelNonNul)**
debut
  a ← insertion(a,c,ordre)
fin

Algorithme 2 / 2

```
fonction insertion (a : ArbreB, c : Valeur, ordre : NaturelNonNul) : ArbreB
    Déclaration   tab : Tableau[1..MAX] de Valeur
debut
    si a = NIL alors
        tab[1] ← c
        retourner creerFeuille(tab,1)
    sinon
        pos ← positionInsertion(a,c)
        si estUneFeuille(a) alors
            insererUneCleDansNoeud(a^,c,pos)
            si a^.nbCles≤2*ordre alors
                retourner a
            sinon
                retourner eclatement(a, ordre)
            finsi
        sinon
            ssArbre ← a^.sousArbres[pos]
            temp ← insertion(ssArbre,c,ordre)
            si ssArbre = temp alors
                retourner a
            sinon
                insererUnArbreDansNoeud(a^,temp,pos)
                si a^.nbCles≤2*ordre alors
                    retourner a
                sinon
                    retourner eclatement(a, ordre)
                finsi
            finsi
        finsi
    finsi
fin
```

Supression dans un arbre-B d'ordre m

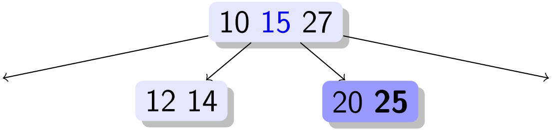
Principe

1. La suppression se fait toujours au niveau des feuilles
   ↪ Si la clé à supprimer n'est pas dans une feuille, alors la remplacer par la plus grande valeur des plus petites (ou plus petite valeur des plus grandes) et supprimer cette dernière
2. Si la suppression de la clé d'une feuille (récursivement d'un nœud) amène à avoir moins de m clés :
   1. Combinaison avec un nœud voisin (avant ou après)
   2. Descente de la clé associant ces deux nœuds (éclatement du nœud si nécessaire)

   ↪ la récursivité de ce principe peut ammener à diminuer la hauteur de l'arbre (par le haut)

Exemple : cas simple 1 / 2

Arbre-B d'ordre 2 :



Rappel : ici nombre de clés par nœud non racine > 1

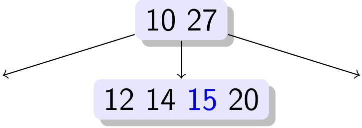
↪ EXEMPLE : Suppression de la clé **25** ?

Méthode

1. Combinaison avec un nœud voisin
2. Descente de la clé (ici 15)
3. Suppression du nœud

Exemple : cas simple 2 / 2

Arbre-B d'ordre 2 :



Rappel : ici nombre de clés par nœud non racine > 1

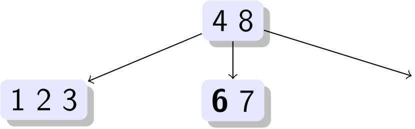
↪ EXEMPLE : Suppression de la clé **25** ?

Méthode

1. Combinaison avec un nœud voisin ([12 14] et 20)
2. Descente de la clé médiane (ici 15)
3. Suppression du nœud

Exemple : cas avec éclatement 1 / 2

Arbre-B d'ordre 2 :



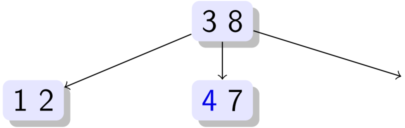
Rappel : ici nombre de clés par nœud non racine < 5 et > 1

↪ Exemple : Suppression de la clé **6** ?

- Suppression clé **6** → Combinaison [1 2 3] et 7 + descente de la clé 4 au nœud fils
- Descente de la clé 4 au nœud fils → Redistribution + remontée de clé médiane (e.g. ici **3**)

Exemple : cas avec éclatement 2 / 2

Arbre-B d'ordre 2 :



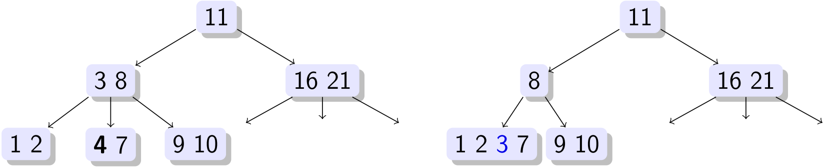
Rappel : ici nombre de clés par nœud non racine < 5

$\hookrightarrow$ EXEMPLE : Suppression de la clé **6** ?

- Suppression clé **6** $\rightarrow$ Combinaison [1 2 3] et 7 + descente de la clé 4 au nœud fils
- Descente de la clé 4 au nœud fils $\rightarrow$ Redistribution + remontée de clé médiane (e.g. ici **3**)

Exemple : cas avec un nombre de clé inférieur à m 1 / 2

Arbre-B d'ordre 2 :

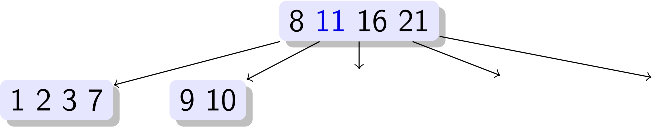


↪ Exemple : Suppression de la clé **4** ?

- Combinaison ([1 2] et 7) + descente de la clé 3

Exemple : cas avec un nombre de clé inférieur à m 2 / 2

Arbre-B d'ordre 2 :



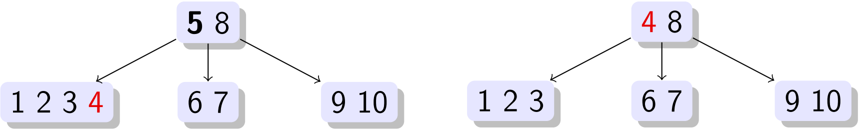
↪ Exemple : Suppression de la clé **4** ?

- Combinaison + descente de la clé 3
- Combinaison (8 et [16 21]) + descente de la clé 11

↪ **Diminution d'une unité de la hauteur**

Exemple : cas suppression non feuille

Arbre-B d'ordre 2 :



↪ Exemple : Suppression de la clé **5** ?

Méthode

1. Recherche d'une clé adjacente A à la clé à supprimer → on choisit la plus grande du sous arbre gauche
2. Remplacement de la clé à supprimer par A
3. Suppression de la clé A du sous arbre gauche

Prérequis

On suppose posséder les fonctions/procédures suivantes :

- **fonction** plusGrandeValeur **(**a : ArbreB**) :** Valeur
  précondition(s) non a $\neq$ **NIL**
- **fonction** positionCleDansNoeudRacine **(**a : ArbreB, c : Valeur**) : Entier**
  précondition(s) non a $\neq$ **NIL**
- **procédure** supprimerCleDansNoeudFeuille **(E/S** n : Noeud, **E** c : Valeur**)**
- **procédure** copierValeurs **(S** tDest ; **Tableau[**1..MAX**] de** Valeur, **E** tSource : **Tableau[**1..MAX**] de** Valeur, indiceDebutDest, indiceDebutSource, nb : **NaturelNonNul)**
- **fonction** positionSsArbrePouvantContenirValeur **(**a : Arbre, c : Valeur**) : Naturel**
- **procédure** decalerVersGaucheClesEtSsArbres **(E/S** n : Noeud, **E** aPartirDe : **NaturelNonNul**, nbCran : **NaturelNonNul)**

procédure supprimer **(E/S** a : ArbreB, **E** c : Valeur, ordre : **NaturelNonNul)**
debut
  a ← suppression(a,c,ordre,**NIL**,**NIL**,*uneCle*)
fin

Cas simples

```
fonction suppression (a : ArbreB, c : Valeur, ordre : NaturelNonNul, frereG, frereD : ArbreB, clePere : Valeur) :
ArbreB
    Déclaration   ...
debut
    si a = NIL alors
        retourner a
    sinon
        pos ← positionCleDansNoeudRacine(a,c)
        si estUneFeuille(a) alors
            si pos = -1 alors
                retourner a
            sinon
                si frereG = NIL et frereD = NIL et a^.nbCles=1 alors
                    desallouer(a)
                sinon
                    Cas n° 1 : une feuille qui n'est pas la racine
                finsi
            finsi
        sinon
            si pos = -1 alors
                posSsArbre ← positionSsArbrePouvantContenirValeur(a,c)
            sinon
                cleRemplacement ← plusGrandeValeur(a^.sousArbres[pos-1])
                a^.valeurs[pos] ← cleRemplacement
                c ← cleRemplacement
                posSsArbre ← pos-1
            finsi
            Cas n° 2 : supprimer c dans le sous-arbre
        finsi
    finsi
fin
```

Cas n°1 : une feuille qui n'est pas la racine

```
supprimerCleDansNoeudFeuille(a^,c)
si a^.nbCles≥ordre ou (frereG = NIL et frereD = NIL) alors
    retourner a
sinon
    si frereG ≠ NIL alors
        copierValeurs(tab,frereG^.valeurs,1,1,frereG^.nbCles)
        tab[frereG^.nbCles+1] ← clePere
        copierValeurs(tab,a^.valeurs,frereG^.nbCles+2,1,a^.nbCles)
        nb ← 1+a^.nbCles+frereG^.nbCles
        desallouer(frereG)
    sinon
        copierValeurs(tab,a^.valeurs,1,1,a^.nbCles)
        tab[a^.nbCles+1] ← clePere
        copierValeurs(tab,frereD^.valeurs,a^.nbCles+2,1,frereD^.nbCles)
        nb ← 1+a^.nbCles+frereD^.nbCles
        desallouer(frereD)
    finsi
    res ← creerFeuille(tab,nb)
    desallouer(a)
    si nb>2*ordre alors
        retourner eclatement(res, ordre)
    finsi
    retourner res
finsi
```

Cas n°2 : supprimer *v* dans le sous-arbre

frereG ← **NIL**
frereD ← **NIL**
si posSsArbre>0 **alors**
    frereG ← a^.sousArbres[posSsArbre-1]
finsi
si posSsArbre<a^.nbCles **alors**
    frereD ← a^.sousArbres[posSsArbre+1]
finsi
res ← suppression(a^.sousArbres[posSsArbre],c,ordre,frereG,frereD, a^.valeurs[
posSsArbre])
si res^.nbCles=1 **alors**
    a^.valeurs[posSsArbre] ← res^.valeurs[1]
    a^.sousArbres[posSsArbre-1] ← res^.sousArbres[0]
    a^.sousArbres[posSsArbre] ← res^.sousArbres[1]
sinon
    decalerVersGaucheClesEtSsArbres(a^,posSsArbre),1
    a^.sousArbres[posSsArbre] ← res
finsi