Université de Pau et des Pays de l'Adour **Année 2016-2017**
Département de Mathématiques

L2-Info–Calcul scientifique
Série n^o 2

Exercice 1
On souhaite calculer une valeur approchée de l'intégrale sur l'intervalle $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx$$

pour f donnée. Pour cela, on décompose l'intervalle $[a, b]$ en N sous-intervalles de longueur $h = \frac{b-a}{N}$. On note $x_i = a + ih \; i = 0, ..., N$. Sur chaque sous-intervalle de la forme $[x_i, x_{i+1}], \; i = 0, ..., N-1$,on applique alors une formule d'intégration numérique. On veut comparer la formule aux points milieux et celle des trapèzes.

1. Ecrire deux fonctions qui utilisent respectivement la formule aux points milieux et la formule des trapèzes pour approchée l'intégrale ci-dessous.
2. **Application**: Tester avec la fonction $x \to sin(x)$ sur $[0, \pi]$. Pour différentes valeurs de N, comparer les erreurs obtenues avec les deux méthodes. Pour cela, on construira les graphiques des erreurs en fonction de N en échelle log-log.
   Estimer l'ordre de chacune de ces méthodes.
3. Reprendre l'étude pour la formule de Simpson.

Exercice 2

1. Programmer une méthode d'intégration numérique par sous-intervalles basée sur la formule de Boole (formule de Newton-Cote à 5 points) donnée sur [0,1] par :

   $$\begin{aligned} x_0 &= 0, \; x_1 = 0.25, \; x_2 = 0.5, \; x_3 = 0.75, \; x_4 = 1. \\ w_0 &= \frac{7}{90}, \; w_1 = \frac{32}{90}, \; ... \end{aligned}$$

   Vous devrez écrire une fonction prenant la fonction f en argument, les bornes a et b d'intégration ainsi que le nombre de sous-intervalles n.
2. Déterminer le degré d'exactitude ainsi que l'ordre de la méthode.
   Confirmer numériquement cet ordre de convergence avec une fonction f régulière et en prenant 20 sous-intervalles puis 40.

Exercice 3

1. Déterminer la base de Lagrange $\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ associés aux abscisses 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ et 1.

2. Calculer $\int_0^1 l_1(x)dx$ et $\int_0^1 l_2(x)dx$ grâce à la formule de Simpson. En déduire par symétrie, $\int_0^1 l_3(x)dx$ et $\int_0^1 l_4(x)dx$.

3. A l'aide de la question précédente, déterminer une formule d'intégration sur l'intervalle $[0, 1]$ exacte sur $\mathbb{R}_3[X]$ et s'écrivant:

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq \omega_1 f(0) + \omega_2 f(1/3) + \omega_3 f(2/3) + \omega_4 f(1).$$

   Quel est le degré d'exactitude de cette formule? En déduire son ordre théorique.

4. Expliquer la généralisation de la formule ci-dessus à un intervalle quelconque $[\alpha, \beta]$.

5. Ecrire une fonction calculant de manière approchée $\int_a^b f(x)$ où f est une fonction que l'on supposera connue.

6. Vérifier numériquement l'ordre théorique de la méthode.

Exercice 4

1. A l'aide de la formule de Simpson, écrire une fonction qui calcule de manière approchée l'intégrale sur un rectangle $[a, b] \times [c, d]$ d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$. La fonction C++ prendra donc en argument:
   -la fonction f
   - les réels a, b, c, d définissant le rectangle sur lequel la fonction est intégrée
   - le nombre de découpages n et m dans chaque direction.

2. Tester la fonction écrite sur une fonction régulière et déterminer numériquement l'ordre de la formule.