FECHA: 3/7....................... **ANÁLISIS MATEMÁTICO I**

EXAMEN: 1° PARCIAL

NOMBRE Y APELLIDO: .... **CURSO:** 2 1112

E-MAIL: ....

1	2	3	4	5	NOTA
B	B	B	B	B	9 (NUEVE)

Condición mínima de aprobación (4 puntos): 50% del examen resuelto correctamente.

1)Estudiar la continuidad de la función $f(x)$ en $x=0$, clasificando las discontinuidades si las hubiera, sabiendo que $f(x)=\dfrac{e^{-2x}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. Justifique su respuesta.

2)Sea $f:\Re \to \Re \,/\, f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & ,si\ x\neq 0 \\ 0 & ,si\ x=0 \end{cases}$, demuestre por definición que $f(x)$ es derivable en $x=0$. No puede utilizar la regla de L'Hopital. Justifique su respuesta.

3)¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de un rectángulo de área máxima que tiene uno de sus lados sobre el eje x, y el paralelo al anterior tiene sus extremos en puntos equidistantes de la parábola $f(x)=8-2x^2$ en el semiplano superior?. Justifique su respuesta.

4)Hallar el dominio y las asíntotas a la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^2+4}{2x-3}$. Justifique su respuesta.

5)Determine los valores de $a;b\varepsilon\Re$ para que $y=2x+5$ sea tangente al gráfico de la función $f(x)=x^3+4ax^2+bx+4$ en $x=-1$. Justifique su respuesta.

4) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{2x-3}$

Dominio = $2x - 3 \neq 0$

$2x \neq 3$

$x \neq \dfrac{3}{2}$ Dom f = $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

Asíntotas:

Asíntota vertical:

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}} \frac{\overbrace{x^2+4}^{\to \frac{25}{4}}}{\underbrace{2x-3}_{\to 0}} = \infty$$ en $x = \dfrac{3}{2}$ hay una asíntota vertical.

Asíntota Oblicua:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+4}{2x-3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4}{x(2x-3)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4}{2x^2-3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+\overbrace{\frac{4}{x^2}}^{\to 0}}{2-\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}} = \boxed{\frac{1}{2}} \qquad m = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4}{2x-3} - \frac{1}{2}x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4-\left(\frac{1}{2}x(2x-3)\right)}{2x-3} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4-\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)}{2x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+4-\cancel{x^2}+\frac{3}{2}x}{2x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{4+\frac{3}{2}x}{2x-3} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4}{x}+\frac{\frac{3}{2}x}{x}}{\frac{2x}{x}-\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \boxed{\frac{3}{4}} \qquad b = \frac{3}{4}$$

Asíntota oblicua $\boxed{y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}}$

NO

en realidad

Asíntota Horizontal:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4}{2x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{2x}{x^2}-\frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\overbrace{\frac{4}{x^2}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{3}{x^2}}_{\to 0}} = \frac{1}{0} = \infty$$ ⇒ No hay a. horizontal por no ser el resultado del límite un número finito.

$\frac{1}{0} \Rightarrow \frac{0}{1}\ \frac{0}{1}\ \frac{0}{1}$

NO

$0 \neq 0$

5) $a, b \in \mathbb{R}$ / $y=2x+5$ es tg a $f(x)=x^3+4ax^2+bx+4$ en $x=-1$

$f'(x)=3x^2+8ax+b$ Como $y=2x+5$ su pendiente es 2.

$f'(-1)=3x^2+8ax+b=2.$

$f'(-1)=3(-1)^2+8a(-1)+b=2.$

$3-8a+b=2$ (1)

Si ambas rectas se cortan en $x=-1$

$y=2(-1)+5$

$y=-2+5$

$\boxed{y=3}$

$f(-1)=3$

$f(-1)=(-1)^3+4a(-1)^2+b(-1)+4=3.$

$f(-1)=-1+4a-b+4=3.$

$-1+4a-b+4=3$ (2)

de (1) y (2)

$$\begin{cases} 3-8a+b=2 \\ -1+4a-b+4=3 \end{cases}$$

$\rightarrow b=2-3+8a$

$\underline{b=-1+8a.}$

$-1+4a+4-3=b$

$\cancel{-4}+\cancel{4}+4a=b$

$\underline{4a=b}$

$b=b$

$-1+8a=4a$

$-1=4a-8a$

$-1=-4a$

$\frac{-1}{-4}=a$

$\boxed{\frac{1}{4}=a}$ Reemplazando en b

$b=4a$

$b=4\cdot\frac{1}{4}$

$\boxed{b=1}$

NOTA

1) Continuidad en $x=0$ de $f(x)=\frac{e^{-2x}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

Dom $f=\mathbb{R}-\{0\}$

Analizo continuidad:

f continua si $\begin{cases} f(0)=l \\ \lim_{x\to 0} f(x)=l \\ f(0)=\lim_{x\to 0} f(x) \end{cases}$

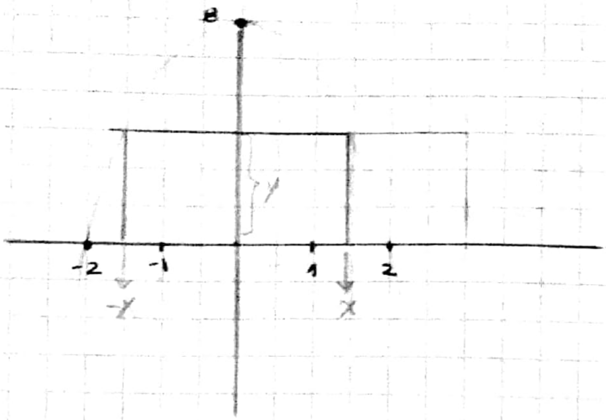
$f(0)=\nexists$ en los $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-2x}}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{e^{-2x}}^{\to 1}}{\underbrace{1+\underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to -\infty}}_{\to 0}} = \frac{1}{1} = \boxed{1} \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-2x}}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-2x}}{\underbrace{1+\underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to 100}}_{\to +\infty}} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0} \end{cases}$$

Como se observa la función $f(x)$ presenta en $x=0$ una discontinuidad no evitable de primera especie con SALTO Finito

NO existe en reales D

3)



$f(x) = -2x^2+8$

$\frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{2 \cdot 2}$

$\frac{0 \pm \sqrt{64}}{-4} = \nearrow \frac{0+8}{-4} = \boxed{-2 = x_1}$

$\searrow \frac{0-8}{-4} = \boxed{2 = x_2}$

$x_v = \frac{-b}{2a} = \boxed{0}$

$f(x_v) = f(0) = -2(0)^2+8 = \boxed{8}$

$A = b\,h \Rightarrow b = 2x,\ h = y$

$y = f(x)$

$y = -2x^2+8$

$A = 2x(-2x^2+8)$

$A = -4x^3+16x$

$A'(x) = -12x^2+16$

$A'(x) = 0.$

$A'(x) = -12x^2+16 = 0$

$-12x^2 = -16$

$x^2 = \frac{-16}{-12}$

$x^2 = \frac{4}{3}$

$|x| = \sqrt{\frac{4}{3}}$

$x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$

$A''(x) = -24x$

$A''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -24\sqrt{\frac{4}{3}} < 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{4}{3}}$ es un máx relativo.

Reemplazo en $f(x)$.

$f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -2\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2+8$

$f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = \boxed{\frac{16}{3}} \Rightarrow$ Primera coordenada de un veince $\boxed{P\left(\sqrt{\frac{4}{3}}; \frac{16}{3}\right)}$

$f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -2\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2+8$

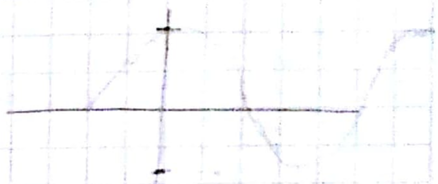
$f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = \boxed{\frac{16}{3}} \Rightarrow$ segunda coordenada $\boxed{P\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}, \frac{16}{3}\right)}$

2)- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x}\right), & \text{si } x \neq 0. \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ c=0}} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \cos\left(\frac{\pi}{h}\right)}{h} = \lim_{z \to -\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{z}\right)^2 \cdot \cos(z)}{\frac{\pi}{z}} \to$$

$$\to \lim_{z \to -\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{z}\right)^{\cancel{2}} \cdot \cos(z)}{\cancel{\frac{\pi}{z}}}$$

$\frac{\pi}{h} = z \Rightarrow h = \frac{\pi}{z} \Rightarrow$ si $h \to 0 \Rightarrow z \to -\infty$



$$\lim_{z \to -\infty} \underbrace{\frac{\pi}{z}}_{\text{infinitesimo}} \cdot \underbrace{\cos(z)}_{\text{acotada}} = \boxed{0} \Rightarrow$$

Por lo tanto f es derivable en $x=0$.

acotada $\Rightarrow -1 \leq \cos(z) \leq 1$

Scanned by CamScanner