FECHA: 12/5

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

EXAMEN: 1° PARCIAL

NOMBRE Y APELLIDO: ..... CURSO: Z1112

E-MAIL: ...

1	2	3	4	5	NOTA
M	X	B^-	B	X	2 (Dos)

Condición mínima de aprobación (4 puntos): 50% del examen resuelto correctamente.

1)Dada la función $f:\Re \to \Re \,/\, f(x)=\begin{cases} e^x-ax+b & ,si\ x\le 0 \\ 2x-1 & ,si\ x>0 \end{cases}$, Hallar los valores de a y b $\varepsilon\Re$ para que la función sea derivable en $x=0$. Puede utilizar la regla del L'Hopital. Justifique su respuesta.

2)Hallar los valores de a y $b \varepsilon \Re$ para que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+bx}{x-1}=2$. Justifique su respuesta.

3)Sea la función $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+2}$. Determinar las ecuaciones de las asíntotas lineales al gráfico de $f(x)$. Justifique su respuesta.

4)Encontrar los intervalos de concavidad y puntos de inflexión, si los hubiere, de la función $f(x)=\dfrac{-x^2}{x+3}$. Justifique su respuesta.

5)Hallar el o los puntos de la gráfica de la función $f(x)=x^2-4$, más cercanos al punto $P=(0;-2)$. Justifique su respuesta.

1) $f(0) = e^0 - a \cdot 0 + b = 1+b$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+} \frac{(2x-1)-(1+b)}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{2x-1-1-b}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{2x-2-b}{x} =$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{2x-(2+b)}{x} = \lim_{x\to0^+} \cancel{\frac{2x}{x}} - \underbrace{\frac{(2+b)}{x}}_{\to\infty} = -\infty \Rightarrow \nexists f'(0^+)$$ para que $\exists f'(0^+)$

debe ser $b+2=0 \Rightarrow \boxed{b=-2} \Rightarrow f'(0^+) = \lim_{x\to0^+} \cancel{\frac{2x}{x}} = 2$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^-} \frac{(e^x-ax+b)-(1+b)}{x-0} = \lim_{x\to0^-} \frac{e^x-ax+\cancel{b}-1-\cancel{b}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to0^-} \frac{e^x-1}{x} - \lim_{x\to0^-} \cancel{\frac{ax}{x}} = \lim_{x\to0^-} \frac{e^x-1}{x} - a =$$

$z = e^x - 1 \Rightarrow e^x = 1+z \Rightarrow \ln e^x = \ln(1+z) \Rightarrow x = \ln(1+z)$

si $x\to0^- \Rightarrow z\to0^-$

$$= \lim_{z\to0^-} \frac{z}{\ln(1+z)} - a = \lim_{z\to0^-} \frac{1}{\frac{1}{z}\ln(1+z)} - a = \lim_{z\to0^-} \frac{1}{\ln(1+z)^{1/z}} - a =$$

$$= \frac{1}{\ln\Big[\underbrace{\lim_{z\to0^-}(1+z)^{\frac{1}{z}}}_{\to e}\Big]} - a = \frac{1}{\underbrace{\ln e}_{=1}} - a = 1-a$$; debe ser $1-a = 2 \Rightarrow$ $\boxed{a=-1}$

2) $$\lim_{x\to1} \frac{ax^2+bx}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{\overbrace{x(ax+b)}^{\to a+b}}{\underbrace{x-1}_{\to0}} = \infty$$ para que sea finito debe ser el numerador un infinitésimo del mismo orden $\Rightarrow \lim_{x\to1} x(ax+b) = a+b = 0 \Rightarrow a=-b$

$$\lim_{x\to1} \frac{x(-bx+b)}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{-bx\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = -b = 2 \Rightarrow \boxed{b=-2} \Rightarrow a = -(-2) = \boxed{2}$$

3) $f(x) = \frac{x^2-x}{x+2}$; $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$\lim_{x\to-2} \frac{\overbrace{x^2-x}^{\to2}}{\underbrace{x+2}_{\to0}} = \infty \Rightarrow \boxed{x=-2 \text{ A.V.}}$$

$$\underset{\frac{\infty}{\infty}}{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x}{x+2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}}{\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\overbrace{\frac{1}{x^2}}^{\to0}}{\underbrace{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}_{\to0}} = \infty \Rightarrow \boxed{\nexists \text{ A.H}}$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-x}{x+2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x}{x^2+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{x}{x^2}}{1+\frac{2x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to0}}{1+\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to0}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{\substack{x\to\infty \\ +\infty-\infty}} \frac{x^2-x}{x+2} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}-x-\cancel{x^2}-2x}{x+2} = \lim_{\substack{x\to\infty \\ \frac{\infty}{\infty}}} -\frac{3x}{x+2} = \lim_{x\to\infty} -\frac{3}{1+\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}} = -3$$

$$\boxed{y = x-3 \quad A.O.}$$

4) $f(x) = \frac{-x^2}{x+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x(x+3)+x^2}{(x+3)^2} = \frac{-2x^2-6x+x^2}{(x+3)^2} = \frac{-x^2-6x}{(x+3)^2}$

$$f''(x) = \frac{(-2x-6)(x+3)^{\cancel{2}} - (-x^2-6x)2\cancel{(x+3)}}{(x+3)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{-\cancel{2x^2}-\cancel{6x}-6x-18+\cancel{2x^2}+\cancel{12x}}{(x+3)^3} = \frac{-18}{(x+3)^3}$$

$f''(x) > 0$ si $x+3<0 \Rightarrow x<-3$ $\quad f''>0 \quad f''<0$ (en -3)

$f''(x) < 0$ si $x+3>0 \Rightarrow x>-3$

$\boxed{\begin{array}{l} (-\infty, -3) \ f''>0 \Rightarrow \cup \\ (-3, +\infty) \ f''<0 \Rightarrow \cap \end{array}}$

$\nexists f''(x) = 0 \Rightarrow \boxed{\nexists \text{ ptos. inflexión}}$

5) $d = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$; $x_0 = 0$; $y_0 = -2$ $\Rightarrow d = \sqrt{x^2+(y+2)^2}$; $y = x^2-4 \Rightarrow x^2 = y+4$

$d = \sqrt{y+4+y^2+4y+4} = \sqrt{y^2+5y+8}$

$d'(y) = \frac{2y+5}{2\sqrt{y^2+5y+8}}$; $d'(y) = 0$ si $2y+5=0$, $y = -\frac{5}{2}$ y $y^2+5y+8 \neq 0$: $\frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 8 \neq 0$.

$$d''(y) = \frac{1}{2}\left[\frac{2\sqrt{y^2+5y+8} - (2y+5)\frac{(2y+5)}{2\sqrt{y^2+5y+8}}}{\left(\sqrt{y^2+5y+8}\right)^2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2\left(\sqrt{y^2+5y+8}\right)^2 - (2y+5)^2}{(y^2+5y+8)\sqrt{y^2+5y+8}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2y^2+10y+16-4y^2-20y-25}{\sqrt{(y^2+5y+8)^3}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{-4y^2-10y-9}{\sqrt{(y^2+5y+8)^3}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{4y^2+10y+9}{\sqrt{(y^2+5y+8)^3}}\right]$$

$$d''(-5/2) = -\frac{1}{2}\left[\frac{4\frac{25}{4} - 10\frac{5}{2} + 9}{\sqrt{\left(\frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 8\right)^3}}\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{25-25+9}{\sqrt{\left(\frac{25-50+32}{4}\right)^3}}\right] = -\frac{1}{2}\,\frac{9}{\sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^3}} < 0 \Rightarrow \text{mín.}$$

$y = -\frac{5}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{5}{2}+4} = \pm\sqrt{\frac{-5+8}{2}} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \boxed{\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}; -\tfrac{5}{2}\right) \text{ y } \left(-\sqrt{\tfrac{3}{2}}; -\tfrac{5}{2}\right)}$