Derivadas por definición.

Podemos definir una derivada como:

$$\boxed{y' = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Ahora bien, si llamamos $h = x - a$, entonces $x = h + a$, por lo que:

$$\boxed{y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(h + a) - f(a)}{h}}$$

Hay más formas de expresar una derivada. Por ejemplo, si fuese el punto a quien se aproximase a x, entonces en la ecuación anterior tendremos que $x = a$, por lo que $h = a - x$:

$$y' = \lim_{x \to a} \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \longrightarrow y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Y si en lugar de llamar h a la diferencia de $a - x$, la llamamos, como en nuestro ejemplo, Δx

$$\boxed{\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}}$$

Esta última expresión es la que utilizaremos para, a continuación, proceder a demostrar las reglas para obtener las derivadas de algunas funciones.

Pero hemos dicho que una derivada nos da la pendiente de la recta tangente a una función en un punto. ¿Cómo se puede hallar, pues, dicha recta? Muy simple, veamos.

Supongamos que nos dan la función $f(x) = x^3$ y nos piden calcular la ecuación de la recta tangente en el punto $(1,1)$ (véase figura 1).
En primer lugar, para calcular la ecuación de la recta necesitamos su pendiente. Como hemos explicado, la pendiente de
la recta tangente a un punto de una función se le llama derivada, por tanto hemos de derivar la función $f(x)$.
¿Cómo derivar dicha función? Lo más sencillo es aplicar la regla de la derivada de una potencia, pero puesto que no tenemos por qué saber aplicar esta regla, lo haremos mediante la definición de derivada.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ahora puesto que nuestra función es $f(x) = x^3$, sustituimos en la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

Operando el binomio:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x}$$

Simplificamos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x}$$

Sacamos factor común en el numerador a Δx

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot \left(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2\right)}{\Delta x}$$

Ahora simplificamos Δx, puesto que multiplica tanto en el numerador como en el denominador:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2\right) = 3x^2$$

Y ya tenemos que $f'(x) = 3x^2$. Con este método podemos calcular cualquier derivada, pero puesto que es un método largo y peregrino, hay una regla para cada tipo de derivada, las cuales están demostradas a partir de la definición de límite. Al final de este artículo puedes encontrar la lista de todas las demostraciones.

Bien, como nos piden la pendiente de la recta tangente en el punto $(1,1)$, vemos que $f'(1) = 3$. Esto quiere decir que la pendiente de nuestra recta es tres: $m = 3$

Y ahora queda un cálculo sencillo. ¿Cómo hallar la ecuación de la recta conociendo la pendiente y un punto por donde pasa?
La forma más sencilla es utilizar la ecuación de la recta punto pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Siendo (x_0, y_0) un punto por donde pasa la recta (en nuestro caso, el punto de tangencia). Sustituyendo los valores que tenemos en la ecuación de la recta:

$$y - 1 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 3 + 1 \Rightarrow y = 3x - 2$$

Y ya hemos calculado la ecuación de la recta tangente a la función $y = x^3$ en el punto $(1,1)$.
Compruébese en la primera imagen cómo nos coinciden los resultados.

Para cada tipo de función, existe una regla para derivarla. Esto hace muy cómodo el proceso de derivar, ya que en lugar de tener que aplicar la definición podemos resolverlas aplicando la regla adecuada a cada una. Por supuesto, estas reglas se demuestran a partir de la definición y podrás encontrar todas las demostraciones al final de este artículo. A continuación expondré un par de tablas con las reglas de derivación. La primera, para funciones elementales. La segunda, para funciones compuestas. La tabla de las funciones elementales funcionará como "chuletilla" en caso de que se quiera consultar para agilizar un proceso. Aunque para ser correctos, en caso de que tengamos una función compuesta hemos de aplicar la regla de la cadena, por ello adjunto también una tabla de las funciones compuestas.

REGLAS DE DERIVACIÓN DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

FUNCIÓN	FUNCIÓN DERIVADA	EJEMPLO
Constante		
$y = k$	$y' = 0$	$y = 5 \quad \Rightarrow \quad y' = 0$
Identidad		
$y = x$	$y' = 1$	$y = x \quad \Rightarrow \quad y' = 1$
Funciones potenciales		
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	$y = x^5 \quad \Rightarrow \quad y' = 5x^4$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[5]{x} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$
Funciones exponenciales		
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^x \quad \Rightarrow \quad y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$y = 2^x \quad \Rightarrow \quad y' = 2^x \cdot \ln 2$

Funciones logarítmicas		
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$y = \log_2 x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x \cdot \ln 2}$
Funciones trigonométricas		
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sin x \quad \Rightarrow \quad y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \cos x \quad \Rightarrow \quad y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$y' = 1 + \tan^2 x$	$y = \tan x \quad \Rightarrow \quad y' = 1 + \tan^2 x$
$y = \csc x$	$y' = -\csc x \cdot \cot x$	$y = \csc x \quad \Rightarrow \quad y' = -\csc x \cdot \cot x$
$y = \sec x$	$y' = \sec x \cdot \tan x$	$y = \sec x \quad \Rightarrow \quad y' = \sec x \cdot \tan x$
$y = \cot x$	$y' = -\csc^2 x$	$y = \cot x \quad \Rightarrow \quad y' = -\csc^2 x$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arctan x$	$y' = \frac{1}{1-x^2}$	$y = \arctan x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{1-x^2}$

REGLAS DE DERIVACIÓN DE LAS FUNCIONES COMPUESTAS

FUNCIÓN	FUNCIÓN DERIVADA	EJEMPLO
Constante		
$y = k$	$y' = 0$	$y = 5 \quad \Rightarrow \quad y' = 0$
Identidad		
$y = x$	$y' = 1$	$y = x \quad \Rightarrow \quad y' = 1$
Funciones potenciales		
$y = u^n$	$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	$y = (x^2+3x+1)^5 \quad \Rightarrow \quad y' = 5(x^2+3x+1)^4 \cdot (2x+3)$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \cdot u'$	$y = \sqrt[5]{3x^2-1} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{6x}{5\sqrt[5]{(3x^2-1)^4}}$
Funciones exponenciales		
$y = e^u$	$y' = e^u \cdot u'$	$y = e^{-x^5+4x^3} \quad \Rightarrow \quad y' = e^{-x^5+4x^3} \cdot (12x^2 - 5x^4)$
$y = a^u$	$y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	$y = 2^{x^2-1} \quad \Rightarrow \quad y' = 2^{x^2-1} \cdot \ln 2 \cdot 2x$
Funciones logarítmicas		
$y = \ln u$	$y' = \frac{1}{u} \cdot u'$	$y = \ln(-x+5) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-1}{-x+5}$

$y=\log_a u$	$y'=\dfrac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$	$y=\log_2(x^{10}+1) \quad\Rightarrow\quad y'=\dfrac{10x^9}{(x^{10}+1)\cdot\ln 2}$
Funciones trigonométricas		
$y=\sin u$	$y'=\cos u\cdot u'$	$y=\sin(e^x) \quad\Rightarrow\quad y'=\cos(e^x)\cdot e^x$
$y=\cos u$	$y'=-\sin u\cdot u'$	$y=\cos(x^2) \quad\Rightarrow\quad y'=-\sin(x^2)\cdot 2x$
$y=\tan u$	$y'=(1+\tan^2 u)\cdot u'$	$y=\tan(4x) \quad\Rightarrow\quad y'=4\cdot[1+\tan^2(4x)]$
$y=\csc u$	$y'=-\csc u\cdot\cot u\cdot u'$	$y=\csc(\ln x) \quad\Rightarrow\quad y'=-\csc(\ln x)\cdot\cot(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}$
$y=\sec u$	$y'=\sec u\cdot\tan u\cdot u'$	$y=\sec(\sin x) \quad\Rightarrow\quad y'=\sec(\sin x)\cdot\tan(\sin x)\cdot\cos x$
$y=\cot u$	$y'=-\csc^2 u\cdot u'$	$y=\cot(\cos x) \quad\Rightarrow\quad y'=\csc^2(\cos x)\cdot\sin x$
$y=\arcsin u$	$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$	$y=\arcsin(9x) \quad\Rightarrow\quad y'=\dfrac{9}{\sqrt{1-(9x)^2}}$
$y=\arccos u$	$y'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$	$y=\arccos(\log_2 x) \quad\Rightarrow\quad y'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-(\log_2 x)^2}}\cdot\dfrac{1}{x\cdot\ln 2}$
$y=\arctan u$	$y'=\dfrac{1}{1-u^2}\cdot u'$	$y=\arctan(2^x) \quad\Rightarrow\quad y'=\dfrac{2^x\cdot\ln 2}{1-(2^x)^2}$
Derivada de sumas, restas, productos y cocientes de funciones		
$y=u+v$	$y'=u'+v'$	$y=2x^2+\sin x \quad\Rightarrow\quad y'=4x+\cos x$
$y=u-v$	$y'=u'-v'$	$y=\ln x-e^x \quad\Rightarrow\quad y'=\dfrac{1}{x}-e^x$
$y=u\cdot v$	$y'=u'\cdot v+u\cdot v'$	$y=3^x\cdot\cos x \quad\Rightarrow\quad y'=\cos x\cdot 3^x\cdot\ln 3-3^x\cdot\sin x$
$y=\dfrac{u}{v}$	$y'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$	$y=\dfrac{x^2}{\ln x} \quad\Rightarrow\quad y'=\dfrac{x\cdot(2\cdot\ln x-1)}{\ln^2 x}$
Composición de funciones (regla de la cadena)		
$y=u(v)$	$y'=u'(v)\cdot v'$	$y=\ln(\cot x) \quad\Rightarrow\quad y'=\dfrac{-1}{\cot x}\cdot\csc^2 x$
Derivación logarítmica (una función elevada a otra función)		
$y=u^v$	$y'=u^{v-1}\cdot(v'\cdot u\cdot\ln v+v\cdot u')$	$y=x^x \quad\Rightarrow\quad y'=x^x(\ln x+1)$

Demostración de la derivada de una constante y de la función identidad

Saludos de nuevo Usuarios de la Web. En este artículo vamos a demostrar la expresión de la derivada de una constante.

Sabemos que la derivada de una constante es 0. Es decir:

$$\boxed{\boxed{\text{Si } f(x) = K \Longrightarrow f'(x) = 0 \quad K \in \mathbb{R}}}$$

Procedamos a demostrarlo:

En esta demostración usaremos la definición de derivada, la cual sabemos:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Sustituyamos $f(x) = K$ en la definición de derivada, tenemos que:

El primer término $f(x + \Delta x)$ es igual a K, ya que, al ser una constante, en cualquier punto del eje X su imagen siempre va a valer lo mismo.

El segundo término $f(x)$, evidentemente, también vale K. Por tanto:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{f(x + \Delta x)}^{K} - \overbrace{f(x)}^{K}}{\Delta x}$$

Es decir:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{K - K}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Queda demostrado entonces que:

$$\boxed{\boxed{\text{Si } f(x) = K \Longrightarrow f'(x) = 0 \quad K \in \mathbb{R}}}$$

Procedamos a demostrar la derivada de la variable independiente x. Sabemos que la derivada de x es 1. Matemáticamente hablando:

$$\boxed{\boxed{\text{Si } f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1}}$$

En principio podría tomarse como la derivada de una potencia, ya que:

$$f(x) = x = x^1$$

Aplicando la derivada de una potencia :

$$f'(x) = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

Pero vamos a demostrarlo por medio del límite. Demuestro la derivada de este caso en concreto de una potencial debido a que es muy frecuente su uso y jamás se emplea la fórmula de la potencia de forma directa.

El resultado de $f(x)$ coincide con lo que hay dentro del paréntesis. Por lo tanto, podemos decir que:

$$f(x+\Delta x) = x + \Delta x$$

Sustituiremos $f(x) = x$ en (2), es decir, en la definición de derivada. Por tanto:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Queda demostrado así que:

$$\boxed{\boxed{\text{Si } f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1}}$$

Demostración de la derivada de la suma

Vamos a proceder con la demostración de la derivada de la suma. Imagino que sabrán que la derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas de cada término.

$$\boxed{\boxed{\text{Si } y = f(x) \pm g(x) \Longrightarrow y'(x) = f'(x) \pm g'(x)}}$$

A continuación escribiremos a la suma de las funciones como la función suma:

$$f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

Por tanto la función suma es:

$$y = (f+g)(x)$$

Ahora copiamos la fórmula de definición de derivada, que dice así:

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Si sustituimos (3) en (4), nos queda:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f+g)(x+\Delta x) - (f+g)(x)}{\Delta x}$$

Ahora volveremos a convertir la función suma en la suma de las funciones por separado:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - [f(x) + g(x)]}{\Delta x}$$

Operando:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x}$$

Reagrupando:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)] + [g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

Reescribiendo:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]$$

Ahora vemos a aplicar una propiedad de los límites. Dice que el límite de una suma es igual a la suma de los límites de cada término, es decir:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Como podemos observar, en esta ecuación, la primera parte es igual que la definición de derivada, y la segunda también salvo que en vez de con f con g :

$$y' = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}_{f'(x)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}_{g'(x)}$$

$$y' = f'(x) + g'(x)$$

La demostración de la resta es igual salvo que cambiando algunos signos. Por tanto queda demostrado que:

$$\boxed{\text{Si } y = f(x) \pm g(x) \Longrightarrow y'(x) = f'(x) \pm g'(x)}$$

Quizá sea conveniente añadir en caso de tener más de dos sumandos:

$$\text{Si} y = f(x) \pm g(x) \pm h(x) \Longrightarrow y' = f'(x) + g'(x) + h'(x)$$

¿Por qué? Miren:

$$y = f(x) \pm g(x) \pm h(x) = f(x) \pm [g(x) \pm h(x)] \Rightarrow y' = f'(x) \pm [g(x) \pm h(x)]' =$$
$$= f'(x) \pm g'(x) \pm h'(x)$$

Demostración de la derivada del producto

La derivada del producto de dos funciones es igual al primer factor por la derivada del segundo más el segundo factor por la derivada del primero. Es decir:

$$\boxed{\text{Si } \; y = f(x) \cdot g(x) \Longrightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Procedamos a demostrarlo:

En primer lugar, vamos a considerar que:

$$y = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$$

Ahora copiaremos la definición de derivada, que dice así:

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Si sustituimos nuestra función (2) en la definición de derivada, nos queda esto:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+\Delta x) - (f \cdot g)(x)}{\Delta x}$$

Ahora vamos a volver a convertir la operación producto en el producto de las funciones por separado, es decir:

$$y = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Por tanto:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}$$

Ahora vamos a hacer una cosa curiosa. Vamos a sumar en el numerador:

$$f(x) \cdot g(x+\Delta x)$$

Pero para no alterar la expresión, vamos a sumarla a cada uno de los miembros:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x}$$

Organizando:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x+\Delta x)] + [f(x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)]}{\Delta x}$$

Sacando factor común:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) \cdot [f(x+\Delta x) - f(x)] + f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

Reescribiendo:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\left[\frac{g(x+\Delta x) \cdot [f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} \right] + \left[\frac{f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \right] \right)$$

Recordemos que el límite de una suma es la suma de los límites de los términos, por tanto:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{g(x+\Delta x) \cdot [f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \right]$$

Recordemos también que el límite de un producto es igual al producto de los límites de los factores. Nos queda así:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} f(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Ahora fíjense bien. Si en este trozo: ($y' = \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x)$) sustituyo el Δx por 0, nos queda que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) = g(x)$$

Esto: ($\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$) es la definición de derivada, es decir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Esto: ($\lim_{\Delta x \to 0} f(x)$) se queda igual, ya que no hay ningún Δx que sustituir.

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x)$$

Y esto: ($\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$) es la definición de derivada salvo que con una g en lugar de con f, siendo:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = g'(x)$$

Es decir:

$$y' = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x)}_{g(x)} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}_{f'(x)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} f(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}_{g'(x)}$$

Queda demostrado que:

$$\boxed{\text{Si } \; y = f(x) \cdot g(x) \Longrightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Demostración de la derivada del cociente

La derivada del cociente de dos funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador menos la derivada del denominador por el numerador, divididas por el cuadrado del denominador. Es decir:

$$\boxed{\text{Si } y = \frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}}$$

Primero lo demostraremos empleando la derivada de una potencia y la derivada de un producto:

Recordemos:

Derivada de una potencia

$\text{Si } y = [f(x)]^n \Longrightarrow y' = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$

Derivada de un producto

$\text{Si } y = f(x) \cdot g(x) \Longrightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Comencemos con la demostración de la derivada del cociente por este método:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = f(x) \cdot [g(x)]^{-1}$$

Aplicamos la fórmula de la derivada del producto:

$$y' = f'(x) \cdot [g(x)]^{-1} + f(x) \cdot \left([g(x)]^{-1}\right)'$$

Aplicamos la fórmula de la derivada de una potencia:

$$y' = f'(x) \cdot [g(x)]^{-1} + f(x) \cdot [-g(x)]^{-2} \cdot g'(x)$$

Operamos:

$$y' = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Restamos las fracciones:

$$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Por este método queda demostrada la ecuación (1). Vamos por el segundo método, un tanto más formal. Para este utilizaremos el concepto de límite, cuyos teoremas principales podemos encontrarlos en este blog , y la definición de derivada.

Recordemos que podemos definir a la derivada de la siguiente manera:

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Procedamos a demostrar la fórmula de la derivada del cociente mediante la definición de derivada. Al cociente de funciones lo escribiremos como la función cociente:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

Si sustituimos esta función en la definición de derivada, nos queda:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x + \Delta x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{\Delta x}$$

Ahora volvemos a descomponer nuestra función cociente en el cociente de funciones, de tal modo que:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

Simplificamos:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x) \cdot \Delta x} - \frac{f(x)}{g(x) \cdot \Delta x}\right]$$

Ahora, al término $f(x + \Delta x)$ vamos a restarle $f(x)$. El problema es que al hacer esto modificaríamos la expresión, por tanto también vamos a sumárselo:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x) + f(x)}{g(x+\Delta x)\cdot \Delta x} - \frac{f(x)}{g(x)\cdot \Delta x}\right]$$

Ahora separaré los términos convenientemente, sin modificar la expresión:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{g(x+\Delta x)\cdot \Delta x} + \frac{f(x)}{g(x+\Delta x)\cdot \Delta x} - \frac{f(x)}{g(x)\cdot \Delta x}\right]$$

Opero convenientemente:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\left[\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]}{g(x+\Delta x)} + \frac{f(x)}{g(x+\Delta x)\cdot \Delta x} - \frac{f(x)}{g(x)\cdot \Delta x}\right]$$

Ahora restamos las fracciones:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\left[\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]}{g(x+\Delta x)} + \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+\Delta x)}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)\cdot \Delta x}\right]$$

Sacamos factor común al $f(x)$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\left[\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]}{g(x+\Delta x)} + \frac{f(x)\left[g(x) - g(x+\Delta x)\right]}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)\cdot \Delta x}\right]$$

Ahora vamos a multiplicar a la segunda fracción por (-1). Para no alterar la expresión, multiplicaremos numerador y denominador:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\left[\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]}{g(x+\Delta x)} + \frac{-f(x)\left[g(x) - g(x+\Delta x)\right]}{-g(x)\cdot g(x+\Delta x)\cdot \Delta x}\right]$$

Reescribiendo:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\left[\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)\left[g(x+\Delta x) - g(x)\right]}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)\cdot \Delta x}\right]$$

Ahora vuelvo a separar los términos convenientemente, sin modificar la expresión, de modo:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]}{g(x+\Delta x)} - \left[\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] \cdot \frac{f(x)}{g(x+\Delta x) \cdot g(x)} \right]$$

Ahora, conociendo los teoremas fundamentales de los límites, desarrollaremos la expresión:

$$y' = \frac{\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]}{\lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x)} - \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] \cdot \frac{\lim_{\Delta x \to 0} f(x)}{\lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} g(x)}$$

Vamos a analizar detalladamente esta última expresión.

Sabemos que $\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$ es igual que la definición de derivada, por tanto:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] = f'(x)$$

Si sustituimos Δx por 0 en la expresión: $\lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x)$, obtenemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) = g(x)$$

También sabemos que $\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]$ es igual que la definición de derivada, salvo que con una g en lugar de con una f, por tanto:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] = g'(x)$$

En la expresión $\lim_{\Delta x \to 0} f(x)$, como no hay ningún Δx que sustituir, se queda:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x)$$

Podemos decir lo mismo de $\lim_{\Delta x \to 0} g(x)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} g(x) = g(x)$$

Si sustituimos (21) , (22) , (23) , (24) y (25) en (20) , quedaría:

$$y' = \frac{f'(x)}{g(x)} - g'(x) \cdot \frac{f(x)}{g(x) \cdot g(x)}$$

Reescribiendo:

$$y' = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$$

Simplificando:

$$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$$

Por tanto, ha quedado demostrado (por dos métodos) que:

$$\boxed{\text{Si } y = \frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}}$$

Demostración de la derivada de la potencia y la raíz

Como ya dijimos anteriormente, la definición de derivada es:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Vamos a calcular la derivada de la función: $y(x) = x^n$

Aplicando la definición anterior, tenemos que:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

El desarrollo de la serie $(x + \Delta x)^n$ es similar al de $(a + b)^n$ donde:

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1!} \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots$$

Por tanto:

$$(x + \Delta x)^n = x^n + \frac{n}{1!} \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \cdots$$

Llevando esta expresión a la definición de derivada, obtenemos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[x^n + \frac{n}{1!} \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \cdots\right] - x^n}{\Delta x}$$

Ahora bien, cuando Δx es prácticamente cero, podemos considerar como nulos todos los términos, etcétera, con lo que se obtiene:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{n \cdot x^{x-1} \cdot \Delta x}{\Delta x} = n \cdot x^{n-1}$$

Es decir:

$$\boxed{\text{Si } f(x) = x^n \text{ , entonces } f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$$

¿Qué ocurriría si en lugar de una potencia nos pidiesen la derivada de una raíz? ¡Muy sencillo!

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

No parece tan sencillo, ¿cómo llegar a esta expresión?

$$y = \sqrt[n]{x} = x^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Ahora hacemos la derivada de la potencia:

$$y = \frac{1}{n} \cdot x^{\left(\frac{1}{n} - 1\right)} = \frac{1}{n} \cdot x^{\left(\frac{1-n}{n}\right)} = \frac{1}{n} \cdot x^{\left[(n-1)^{\left(\frac{-1}{n}\right)}\right]} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Demostración de la derivada de una función exponencial

Sabemos que la derivada de una función exponencial es igual a dicha función por el logaritmo natural de de la base por la derivada del exponente de la función. Para el caso en el que el exponente sea x, como la derivada de x es 1, al multiplicarlo por este, el término no se altera, por tanto decimos que:

$$\boxed{\text{Si } f(x) = a^x \Longrightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a}$$

Procedamos a demostrar la siguiente afirmación:

Recordemos la definición de derivada:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

En primer lugar procedamos a sustituir $f(x) = a^x$ en la definición de derivada, por tanto:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x}$$

Desarrollando:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \cdot a^{\Delta x} - a^x}{\Delta x}$$

Sacando factor común (a^x):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x}$$

Bien, ahora vamos a suponer la siguiente igualdad:

$$a^{\Delta x} - 1 = t \;\Rightarrow\; a^{\Delta x} = t + 1$$

Aplicaremos el logaritmo neperiano en ambos miembros de esta última expresión, por tanto:

$$\ln a^{\Delta x} = \ln\left(t + 1\right)$$

Conociendo la propiedad de los logaritmos que dice que:

El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base.
Matemáticamente hablando lo podemos expresar como:

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

Por tanto, desarrollando la ecuación (7)

$$\Delta x \cdot \ln a = \ln(t+1)$$

Despejamos Δx

$$\Delta x = \frac{\ln(t+1)}{\ln a}$$

Cuando Δx tiende a 0, t también tiende a 0.

$$\Delta x \to 0 \implies t \to a^0 - 1 = 0 \implies t \to 0$$

Si sustituimos (6) (10) y (11) en (5):

$$f'(x) = a^x \cdot \lim_{t \to 0} \frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln a}}$$

Simplificando:

$$f'(x) = a^x \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{t} \cdot \ln(t+1)} = a^x \cdot \ln a \cdot \lim_{t \to 0} \frac{1}{\frac{1}{t} \cdot \ln(t+1)}$$

Aplicando la propiedad de los logaritmos (8):

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a \cdot \lim_{t \to 0} \frac{1}{\ln(t+1)^{1/t}}$$

Utilizando las propiedades de los límites:

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a \cdot \frac{1}{\ln \lim_{t \to 0} (t+1)^{1/t}}$$

ATENCIÓN: Recordemos que "e" se puede definir como:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

O bien, mediante esta otra expresión:

$$e = \lim_{n \to 0} (1+n)^{1/n}$$

Si se fijan, en (15) tenemos una expresión igual que (17)

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a \cdot \frac{1}{\ln \underbrace{\lim_{t \to 0} (t+1)^{1/t}}_{e}}$$

Por tanto:

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a \cdot \frac{1}{1} = a^x \cdot \ln a$$

Por tanto, queda demostrado que:

$$\boxed{\text{Si } f(x) = a^x \Longrightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a}$$

Ah, se me olvidaba. Hay un caso particular, el cual la base es el número e. En este caso se aplicaría la misma fórmula [$f'(x) = a^x \cdot \ln a$], pero como el logaritmo neperiano de e es 1, quedaría:

$$f'(x) = e^x \cdot \ln e = e^x \cdot 1 = e^x$$

Demostración de la derivada de la función logarítmica

La derivada de la función logarítmica. Para ello utilizaremos la definición de derivada, como sabemos:

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

La derivada del logaritmo dice:

$$\boxed{\text{Si } f(x) = \log_a u \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a} \cdot u'}$$

Siendo u una función. Para simplificar los cálculos, pondremos que $u = x$, así no es necesario estar multiplicando por u' puesto que la derivada de la variable independiente x es 1: Tenemos que:

$$\text{Si } f(x) = \log_a x \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Bien, comencemos. Si $f(x) = \log_a x$, sustituyendo en la definición de derivada nos queda:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a (x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x}$$

Una de las propiedades de los logaritmos dice:

El logaritmo de un cociente es igual a él logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador. Matemáticamente:

$$\log_a \left(\frac{P}{Q} \right) = \log_a P - \log_a Q$$

Si aplicamos esta regla a la inversa en (3):

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right)}{\Delta x}$$

Ahora, si hacemos que: sustituyéndolo en la ecuación (4) nos queda:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\Delta x}$$

Si multiplicamos el denominador por $\frac{x}{x}$ no modificamos la expresión puesto que estamos multiplicando por 1:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{x \cdot \Delta x}{x}}$$

Reescribiendo:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \cdot \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]$$

Una de las propiedades de los límites, las cuales podemos encontrar en este blog, dice que:

$$\lim_{x \to c} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \to c} f(x)$$

Aplicando eso en (7):

$$y' = \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{x}{\Delta x} \cdot \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]$$

Otra de las propiedades del logaritmo es la del cambio de base. Dice así:

El logaritmo en base a de un número se puede obtener a partir de logaritmos en otra base. Matemáticamente:

$$\log_a P = \frac{\log_b P}{\log_b a}$$

Si hacemos un cambio de base en (8) cambiando la base a por e, tenemos:

$$y' = \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\frac{x}{\Delta x} \cdot \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\ln a}\right]$$

Otra de las propiedades de los logaritmos es la del logaritmo de una potencia:

El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base de la potencia. Matemáticamente:

$$\log_a (P)^n = n \cdot \log_a P$$

Aplicando esa propiedad a la inversa en (9):

$$y' = \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}}{\ln a}\right]$$

Ahora, aplicaremos el límite de un cociente:

$$y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{\lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}}{\ln a}$$

$$y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \ln \left[1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{\Delta x}\right)} \right]^{\frac{x}{\Delta x}}}{\ln a}$$

Ahora, aplicamos la propiedad del límite del logaritmo:

$$\lim_{x \to c} \log_a P = \log_a \lim_{x \to c} P$$

Aplicamos esta propiedad en (12):

$$y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left[1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{\Delta x}\right)} \right]^{\frac{x}{\Delta x}}}{\ln a}$$

Con la definición del número e tenemos:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \to 0} \left[1 + \frac{1}{\left(\frac{h}{n}\right)} \right]^{\left(\frac{h}{n}\right)} \quad \text{ya que:} \quad \lim_{n \to 0} \frac{h}{n} = \infty$$

¡Y eso es precisamente lo que tenemos en (13)!

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{\Delta x}\right)} \right]^{\frac{x}{\Delta x}} = e$$

Sustituyendo (14) en (13):

$$y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln e}{\ln a}$$

Y como $\ln e = 1$, entonces queda demostrado que:

$$\boxed{\text{Si } f(x) = \log_a x \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}}$$

Que generalizando para el logaritmo de una función u, con la regla de la cadena nos queda:

$$\boxed{\boxed{\text{Si } f(x) = \log_a u \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a} \cdot u'}}$$

Nótese que en el caso de que nos pidan la derivada de $f(x) = \ln x$, nos sale:

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln e} = \frac{1}{x}$$

Derivadas Funciones Trigonométricas I

Tomaremos los Teoremas e Identidades Trigonométricas necesarias para realizar las demostraciones, sin entrar en muchos detalles para no desviarnos mucho del objetivo principal. Dejaremos pendientes para otra ocasión (o si alguien se anima antes) la demostraciones de dichos teoremas.

I-Teorema Principal sobre límites

Sean n un entero positivo, k una constante y f y g que tengan límites en c. Entonces:

1- $\lim_{x \to c} k = k$

2- $\lim_{x \to c} x = c$

3- $\lim_{x \to c} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \to c} f(x)$

4- $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$

5- $\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$

6- $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$

7- $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$ Con tal que $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$

8- $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$ siempre que $\lim_{x \to c} f(x) > 0$

II-Teorema de Sustitución

Si f es una función polinomio o una función racional, entonces

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Con tal que f (c) esté definida. En el caso de una función racional, esto significa que el valor del denominar en c no sea cero.

III-Límites Trigonométricos especiales

1- $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

2- $\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$

Luego de este breve repaso sobre límites procederemos a enunciar el concepto de derivada que ya ha sido demostrado en este blog.

IV La derivada de una función f es otra función f ' (léase "f prima") cuyo valor en cualquier número c es:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Siempre que este límite exista y no sea ∞ o $-\infty$

Las fórmulas trigonométricas para la suma de ángulos, también nos serán útiles, V Fórmulas suma de ángulos. (Identidades trigonométricas).

$$\sin(x+h) = \sin x \cdot \cos h + \sin h \cdot \cos x$$

$\cos(x+h) = \cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h$

Luego de este necesario preámbulo, empecemos con la demostración de la derivada de la función trigonométrica SENO:

Retomando los incisos IV y II llegamos a:

$$f'(\sin x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

Utilizando el apartado V sustituimos las fórmulas sumas de ángulos

$$f'(\sin x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h}$$

Sacando Factor común $\sin x$

$$f'(\sin x) = \lim_{h \to 0} \frac{-\sin x(1 - \cos h) + \cos x \cdot \sin h}{h}$$

Reescribiendo,

$$f'(\sin x) = \lim_{h \to 0} \left(-\sin x \cdot \frac{1 - \cos h}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h}\right)$$

Ahora aplicando el teorema I-3

$$f'(\sin x) = \left(-\sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos h}{h}\right) + \left(\cos x \cdot \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \frac{\sin h}{h}\right)$$

Revisando III sobre los límites trigonométricos especiales

$$f'(\sin x) = \overbrace{(-\sin x) \cdot 0}^{0} + (\cos x) \cdot 1$$

$$\boxed{f'(\sin x) = \cos x}$$

Seguimos con la demostración de la derivada de la función trigonométrica COSENO:

Volviendo a los incisos IV y II tenemos:

$$f'(\cos x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$$

Utilizando el apartado V sustituimos las fórmulas sumas de ángulos

$$f'(\cos x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h}$$

Factor común $\cos x$

$$f'(\cos x) = \lim_{h \to 0} \frac{-\cos x(1 - \cos h) - \sin x \cdot \sin h}{h}$$

Reescribiendo,

$$f'(\cos x) = \lim_{h \to 0} \left(-\cos x \cdot \frac{1 - \cos h}{h} - \sin x \cdot \frac{\sin h}{h} \right)$$

Nueva vez, aplicando el teorema I-3

$$f'(\cos x) = \left(-\cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos h}{h} \right) - \left(\sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \right)$$

Revisando III,

$$f'(\cos x) = \overbrace{(-\cos x) \cdot 0}^{0} - (\sin x) \cdot 1$$

$$\boxed{f'(\cos x) = -\sin x}$$

Y así llegamos a la conclusión general de que

$$\boxed{\boxed{f'(\sin u) = u' \cos u}} \qquad \boxed{\boxed{f'(\cos u) = -u' \sin u}}$$

Derivadas Funciones Trigonométricas II

En esta ocasión trabajaremos con las derivadas de las funciones TANGENTE y COTANGENTE.

Primero recordemos algunas identidades trigonométricas:

a) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

b) $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

c) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

d) $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

e) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

f) $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

g) $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

h) $\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$

i) $\cot(a + b) = \dfrac{1 - \tan a \cdot \tan b}{\tan a + \tan b}$

Visto esto, empezaremos demostrando la derivada de la TANGENTE:

Comencemos planteándonos la definición de límite para esta función:

$$f'(\tan x) = \lim_{h \to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h}$$

Desarrollamos la Tangente del ángulo doble (inciso h)

$$f'(\tan x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\tan x + \tan h}{1 - \tan x \cdot \tan h} - \tan x}{h}$$

Separemos en dos fracciones el término $\left(\frac{\tan x + \tan h}{1 - \tan x \cdot \tan h}\right)$

$$f'(\tan x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\tan x}{1-\tan x \cdot \tan h} + \frac{\tan h}{1-\tan x \cdot \tan h} - \tan x}{h}$$

Tomando factor común $(-\tan x)$

$$f'(\tan x) = \lim_{h \to 0} \frac{-\tan x \left(-\frac{1}{1-\tan x \cdot \tan h} + 1\right) + \frac{\tan h}{1-\tan x \cdot \tan h}}{h}$$

Adicionemos las fracciones $\left(-\frac{1}{1-\tan x \cdot \tan h} + 1\right)$

Se convierte en:

$$f'(\tan x) = \lim_{h \to 0} \frac{-\tan x \left(\frac{-\tan x \cdot \tan h}{1-\tan x \cdot \tan h}\right) + \frac{\tan h}{1-\tan x \cdot \tan h}}{h}$$

Sabiendo que $\frac{a/b}{c/d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

$$f'(\tan x) = \lim_{h \to 0} \left(-\tan x \left(\frac{-\tan x \cdot \tan h}{h(1 - \tan x \cdot \tan h)}\right) + \frac{\tan h}{h(1 - \tan x \cdot \tan h)}\right)$$

Reescribamos esto para manipularlo mejor:

$$f'(\tan x) = \lim_{x \to 0} \left(\tan^2 x \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{1}{\cos h} \cdot \frac{1}{1 - \tan x \tan h} + \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{1}{\cos h} \cdot \frac{1}{1 - \tan x \tan h}\right)$$

Aplicando las propiedades de los límites:

$$f'(\tan x) = \tan^2 x \cdot \overbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}}^{1} \cdot \overbrace{\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos h}}^{1} \cdot \overbrace{\lim_{h\to 0}\frac{1}{1-\tan x\tan h}}^{1} + \ldots$$

$$\ldots \overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin h}{h}}^{1} \cdot \overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos h}}^{1} \cdot \overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\tan x\tan h}}^{1}$$

Esto se reduce a:

$$f'(\tan x) = \tan^2 x \cdot (1) \cdot (1) \cdot (1) + (1) \cdot (1) \cdot (1)$$

$$f'(\tan x) = \tan^2 x + 1$$

Sustituyendo la identidad del inciso f):

$$\boxed{f'(\tan x) = \sec^2 x}$$

Prosigamos con la demostración de la derivada de la COTANGENTE:

La definición de límite para esta función es:

$$f'(\cot x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cot(x+h) - \cot x}{h}$$

Desarrollamos la cotangente del ángulo doble (inciso i)

$$f'(\cot x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1-\tan x\cdot\tan h}{\tan x+\tan h} - \cot x}{h}$$

Hagamos dos fracciones del término $\left(\dfrac{1-\tan x\cdot\tan h}{\tan x+\tan h}\right)$

$$f'(\cot x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\tan x+\tan h} - \frac{\tan x\cdot\tan h}{\tan x+\tan h} - \cot x}{h}$$

Reordenando:

$$f'(\cot x) = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{\tan x+\tan h} - \cot x\right) - \frac{\tan x\cdot\tan h}{\tan x+\tan h}}{h}$$

Sumando las fracciones $\left(\frac{1}{\tan x+\tan h} - \cot x\right)$

Nos queda:

$$f'(\cot x) = \lim_{h\to 0}\frac{-\frac{\cot x\cdot\tan x}{\tan x+\tan h} - \frac{\tan x\cdot\tan h}{\tan x+\tan h}}{h}$$

Acomodamos:

$$f'(\cot x) = \lim_{h\to 0}\left(-\frac{\cot x\cdot\tan x}{h(\tan x+\tan h)} - \frac{\tan x\cdot\tan h}{h(\tan x+\tan h)}\right)$$

Reescribamos:

$$f'(\cot x) = \lim_{h\to 0}\left(-\cot x\frac{\sin h}{h}\frac{1}{\cos h}\frac{1}{\tan x + \tan h} - \tan x\frac{\sin h}{h}\frac{1}{\cos h}\frac{1}{\tan x + \tan h}\right)$$

Propiedades de los límites:

$$f'(\cot x) = -\cot x \cdot \overbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}}^{1} \cdot \overbrace{\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos h}}^{1} \cdot \overbrace{\lim_{h\to 0}\frac{1}{\tan x + \tan h}}^{\frac{1}{\tan x}} - \ldots$$

$$\ldots \tan x \cdot \overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin h}{h}}^{1} \cdot \overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos h}}^{1} \cdot \overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\tan x + \tan h}}^{\frac{1}{\tan x}}$$

Nos queda:

$$f'(\cot x) = -\cot x \cdot (1) \cdot (1) \cdot \frac{1}{\tan x} - \tan x \cdot (1) \cdot (1) \cdot \frac{1}{\tan x}$$

$$f'(\cot x) = -\cot^2 x - 1$$

$$f'(\cot x) = -\left(\cot^2 x + 1\right)$$

Sustituyendo la identidad del inciso g):

$$\boxed{f'(\cot x) = -\csc^2 x}$$

Aun no terminamos...Podemos demostrar estas derivadas de manera más sencilla. Para ello utilizaremos la regla de la derivada de un cociente, Del cual tomaremos prestado esto:

$$\boxed{\boxed{\text{Si } y = \frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow y' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2}}}$$

Comencemos con la Tangente:

$$f'(\tan x) = f'\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot -\sin x}{\cos^2 x}$$

Operacionando:

$$f'(\tan x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

Retomando la identidad del inciso e) y c)

$$f'(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\boxed{f'(\tan x) = \sec^2 x}$$

Ahora tomemos la Cotangente:

$$f'(\cot x) = f'\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

Simplifiquemos,

$$f'(\cot x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

Por conveniencia:

$$f'(\cot x) = \frac{-\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}{\sin^2 x}$$

$$f'(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\boxed{f'(\cot x) = -\csc^2 x}$$

EN GENERAL:

$$\boxed{\boxed{f'(\tan u) = u' \sec^2 u}} \qquad \boxed{\boxed{f'(\cot u) = -u' \csc^2 u}}$$

Derivadas Funciones Trigonométricas III

Tomemos la función SECANTE y hagamos su derivada, planteándonos el concepto de límite para dicha función:

$$f'(\sec x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h}$$

Lo que equivale a,

$$f'(\sec x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}}{h}$$

Desarrollando el ángulo doble (como se explica en los blogs anteriores)

$$f'(\sec x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{\cos x \cos h - \sin x \sin h} - \frac{1}{\cos x}}{h}$$

Haciendo la sustracción de las fracciones $\left(\frac{1}{\cos x \cos h - \sin x \sin h} - \frac{1}{\cos x}\right)$

$$f'(\sec x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\cos x - \cos x \cos h + \sin x \sin h}{\cos x \left(\cos x \cos h - \sin x \sin h\right)}}{h}$$

Hagamos factor común ($\cos x$)

$$f'(\sec x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\cos x(1 - \cos h) + \sin x \sin h}{\cos x \left(\cos x \cos h - \sin x \sin h\right)}}{h}$$

Separando en dos fracciones:

$$f'(\sec x) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{\cos x(1-\cos h)}{\cos x\,(\cos x \cos h - \sin x \sin h)} + \dfrac{\sin x \sin h}{\cos x\,(\cos x \cos h - \sin x \sin h)}}{h}$$

Sabemos qué $\dfrac{a/b}{c/d} = \dfrac{a \cdot d}{c \cdot b}$, entonces

$$f'(\sec x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\cancel{\cos} x(1-\cos h)}{h \cdot \cancel{\cos} x \cdot (\cos x \cos h - \sin x \sin h)} + \frac{\sin x \sin h}{h \cdot \cos x\,(\cos x \cos h - \sin x \sin h)} \right)$$

Habiendo simplificado, reescribimos,

$$f'(\sec x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{\cos x \cos h - \sin x \sin h} \frac{1-\cos h}{h} + \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x \cos h - \sin x \sin h} \right)$$

Aplicando propiedades de los límites,

$$f'(\sec x) = \overbrace{\lim_{h \to 0} \frac{1}{\cos x \cos h - \sin x \sin h}}^{\frac{1}{\cos x}} \cdot \overbrace{\lim_{h \to 0} \frac{1-\cos h}{h}}^{0} \ldots$$

$$\ldots + \overbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}}^{1} \cdot \tan x \cdot \overbrace{\lim_{h \to 0} \frac{1}{\cos x \cos h - \sin x \sin h}}^{\frac{1}{\cos x}}$$

Nos queda,

$$f'(\sec x) = \overbrace{\frac{1}{\cos x} \cdot 0}^{0} + 1 \cdot \tan x \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$\boxed{f'(\sec x) = \tan x \sec x}$$

Ahora derivemos la función COSECANTE, tomemos el concepto de límite para dicha función:

$$f'(\csc x) = \lim_{h \to 0} \frac{\csc(x+h) - \csc x}{h}$$

Equivalente a,

$$f'(\csc x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{\sin(x+h)} - \frac{1}{\sin x}}{h}$$

Expandiendo el ángulo doble,

$$f'(\csc x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{\sin x \cos h + \sin h \cos x} - \dfrac{1}{\sin x}}{h}$$

Encontremos la resta de $\left(\dfrac{1}{\sin x \cos h + \sin h \cos x} - \dfrac{1}{\sin x} \right)$

$$f'(\csc x) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{\sin x - \sin x \cos h - \sin h \cos x}{\sin x\,(\sin \cos h + \sin h \cos x)}}{h}$$

Saquemos factor común ($\sin x$)

$$f'(\csc x) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{\sin x(1 - \cos h) - \sin h \cos x}{\sin x\,(\sin x \cos h + \sin h \cos x)}}{h}$$

Separando las fracciones:

$$f'(\csc x) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{\sin x(1 - \cos h)}{\sin x\,(\sin x \cos h + \sin h \cos x)} - \dfrac{\sin h \cos x}{\sin x\,(\sin x \cos h + \sin h \cos x)}}{h}$$

Reorganicemos y simplifiquemos,

$$f'(\csc x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\cancel{\sin} x(1 - \cos h)}{h \cdot \cancel{\sin} x \cdot (\sin x \cos h + \sin h \cos x)} - \frac{\sin h \cos x}{h \cdot \sin x\,(\sin x \cos h + \sin h \cos x)} \right)$$

Reescribimos,

$$f'(\csc x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{\sin x \cos h + \sin h \cos x} \frac{1 - \cos h}{h} - \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x \cos h + \sin h \cos x} \right)$$

Aplicando propiedades de los límites,

$$f'(\csc x) = \overbrace{\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sin x \cos h + \sin h \cos x}}^{\frac{1}{\sin x}} \cdot \overbrace{\lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos h}{h}}^{0} \ldots$$

$$\ldots - \overbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}}^{1} \cdot \cot x \cdot \overbrace{\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sin x \cos h + \sin h \cos x}}^{\frac{1}{\sin x}}$$

Nos queda,

$$f'(\csc x) = \overbrace{\frac{1}{\sin x} \cdot 0}^{0} - 1 \cdot \cot x \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$\boxed{f'(\csc x) = -\cot x \csc x}$$

Si se leyeron el blog anterior, entonces sabrán que aun no terminamos...Ahora demostraremos estas derivadas utilizando la regla de la derivada de un cociente, demostrada en este blog. De donde:

$$\boxed{\boxed{\text{Si } y = \frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}}}$$

Vamos en orden, primero la SECANTE:

$$f'(\sec x) = f'\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{\overbrace{0 \cdot \cos x}^{0} - (1 \cdot -\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$f'(\sec x) = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

Igual a:

$$\boxed{f'(\sec x) = \tan x \sec x}$$

Ahora hagamos la Cosecante:

$$f'(\csc x) = f'\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{\overbrace{0 \cdot \sin x}^{0} - 1 \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

Simplifiquemos,

$$f'(\csc x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$f'(\csc x) = -\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$\boxed{f'(\csc x) = -\cot x \csc x}$$

EN GENERAL:

$$\boxed{\boxed{f'(\sec u) = u' \tan u \sec u}} \qquad \boxed{\boxed{f'(\csc u) = -u' \cot u \csc u}}$$

Regla de Derivación en Cadena y Derivadas Trigonométricas Inversas Básicas

Como se ha visto la definición de derivada viene dada en dos formas equivalentes $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ o $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

sea una función $u = g(x)$ y otra función $y = f(u)$, se desea obtener la variación que tiene la función $f(u(x))$ con respecto a la variable independiente x sea $\Delta x = x - a$ el incremento respectivo en $g(x)$ (es decir u) será $\Delta u = g(x) - g(a)$, por otro lado, para un incremento $\Delta u = u - b$ se tiene el correspondiente incremento $\Delta f(u) = f(u) - f(b)$, como es de sospechar, $b = g(a)$ donde a es un número arbitrario del dominio de $g(x)$ la Derivada de $f(u(x))$ con respecto a x se computa calculado la fracción $\lim_{x \to 0} \frac{\Delta f(u(x))}{\Delta x}$ que haciendo un pequeño truco ad hoc , multiplicamos por la fracción $\frac{\Delta u}{\Delta u}$ (que equivale a multiplicar por 1) y reordenamos términos, teniendo pues que $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(u(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(u(x))}{\Delta x} \frac{\Delta u}{\Delta u} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(u(x))}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x}$

Dado que se trata de un producto de límites, es posible sepáralo así

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(u(x))}{\Delta u} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x}$$

Aquí es claro que cuando $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta u = g(x) - g(a) \to 0$ aplicando un cambio en el límite anterior:

$$\left(\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta f(u(x))}{\Delta u}\right)\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}\right) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Con lo que se prueba la validez de la regla de derivación en cadena.

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas básicas
Las demostraciones de estas derivadas se hace a través de un esquema bien definido, característica útil a la hora de tener que deducirlas si no se cuenta con buena memoria o con una tabla, pero como dijo Richard Feynman, mucho más importante que saber cómo probar un enunciado, es importante saber que existe una prueba de que el mismo es cierto.(a propósito de las muchas maneras que hay para probar las identidades en matemáticas)

Preliminares
En post anteriores se han demostrados las derivadas trigonométricas básicas para el seno, coseno y tangente los cuales corresponden a

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x....(1)}$$
$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x....(2)}$$
$$\boxed{(\tan x)' = (\sec x)^2....(3)}$$

Cuya demostración puede ser consultada en los enlaces
Demostraciones Trigonométricas I
Demostraciones Trigonométricas II

Además de ello se usarán las identidades trigonométricas conocidas

$$\boxed{(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1....(4)}$$
$$\boxed{(\sec x)^2 = 1 + (\tan x)^2....(5)}$$

Convención: en el desarrollo de las funciones trigonométricas inversas es común encontrar las definiciones siguientes $w = \sin x \Rightarrow \sin^{-1} w = x$ y $v = \cos t \Rightarrow \cos^{-1} t = x$, con sus respectivas restricciones en el dominio y rango (a saber, que $-1 \leqslant w, v \leqslant 1; \frac{-\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}; 0 \leqslant t \leqslant \pi$) en lo personal considero que esta manera de representar las funciones trigonométricas inversas puede inducir a funciones y errores algebraicos con los exponentes. Por lo tanto la convención utilizada será

$$\boxed{w = \sin x \Rightarrow \arcsin w = x} \text{ Y } \boxed{v = \cos t \Rightarrow \arccos v = t}$$

Derivada función seno inverso
Partiendo de la definición funcional del seno sea $w = \sin u$ de modo que $\arcsin w = u....(6)$
tomando derivada con respecto a u en (6), y tomando en cuenta que w es una función implícita de u por lo tanto, la regla de derivación en cadena aplica sobre ella

$$(\arcsin w)'w' = 1 \Rightarrow (\arcsin w)' = \frac{1}{w'}$$

ahora, de (1), además de ello, a partir de (4), es sabido que, luego

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} \arcsin w = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}....(7)}$$

Derivada función coseno inverso
el resultado se obtiene de manera totalmente análoga al caso anterior, sea $q = \cos p$ de modo que $\arccos q = p....(8)$
tomando derivada con respecto a p en (8), y tomando en cuenta que q es una función implícita de p por lo tanto, la regla de derivación en cadena aplica sobre ella

$$(\arccos q)'q' = 1 \Rightarrow (\arccos q)' = \frac{1}{q'}$$

ahora, de (2), además de ello, a partir de (4), es sabido que, luego

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} \arccos q = -\frac{1}{\sqrt{1-q^2}}....(9)}$$

Derivada función tangente inverso
el resultado se obtiene de manera totalmente análoga a los casos anteriores tal como se mencionó más arriba, sea $g = \tan f$ de modo que $\arctan g = f....(10)$
tomando derivada con respecto a f en (10), y tomando en cuenta que g es una función implícita de f por lo tanto, la regla de derivación en cadena aplica sobre ella

$$(\arctan g)'g' = 1 \Rightarrow (\arctan g)' = \frac{1}{g'}$$

ahora, de (3), además de ello, a partir de (5), es sabido que, luego

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g} \arctan g = \frac{1}{1+g^2}....(11)}$$

Las ecuaciones (7) (9) y (11) corresponden a las primeras 3 derivadas básicas para las funciones trigonométricas inversas
Con eso finaliza mi aporte de hoy al proyecto de derivadas del club de demostraciones.

Demostración de la derivada de una función elevada a otra función

Una función del tipo:

$$y = f(x)^{g(x)}$$

No es una función potencial, puesto que el exponente no es constante. Tampoco es una función exponencial, puesto que la base no es constante, luego no podremos basarnos en las reglas de derivación de estas funciones.
En primer lugar, hagámoslo con una función particular, cuando $f(x) = g(x) = x$

$$y = x^x$$

El primer paso que haremos será tomar logaritmos neperianos a ambos miembros (por esta razón, a este método también se le conoce como derivación logarítmica):

$$\ln y = \ln x^x$$

Por las propiedades de los logaritmos tenemos que:

$$\ln y = x \ln x$$

Ahora si hacemos la derivada en ambos miembros tenemos:

$$(\ln y)' = (x \ln x)'$$

Con las reglas anteriormente demostradas de la derivada de la función logarítmica y de la derivada del producto :

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1$$

Despejando:

$$y' = y \cdot (\ln x + 1)$$

Pero como $y = x^x$:

$$\boxed{y' = x^x \cdot (\ln x + 1)}$$

Ya hemos justificado de dónde sale esa fórmula, pero, ¿qué ocurre si $f(x) \neq x \neq g(x)$?

A continuación, vamos a demostrar una expresión general para derivar (1) por el mismo método anterior.

$$y = f(x)^{g(x)}$$

Tomamos neperianos en ambos miembros:

$$\ln y = g(x) \cdot \ln [f(x)]$$

A continuación derivamos:

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \cdot \ln [f(x)] + \frac{g(x) \cdot f'(x)}{f(x)}$$

Hacemos común denominador:

$$\frac{y'}{y} = \frac{g'(x) \cdot \ln[f(x)] \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x)}{f(x)}$$

Despejamos y' recordando que $y = f(x)^{g(x)}$:

$$y' = \frac{f(x)^{g(x)}}{f(x)} \cdot [g'(x) \cdot \ln[f(x)] \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x)]$$

Operando:

$$y' = f(x)^{g(x)-1} \cdot [g'(x) \cdot \ln[f(x)] \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x)]$$

Luego queda demostrado que:

$$\boxed{\text{Si} \quad y = f(x)^{g(x)} \quad \Longrightarrow \quad y' = f(x)^{g(x)-1} \cdot [g'(x) \cdot \ln[f(x)] \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x)]}$$