Kody Hamminga

Transmisja danych

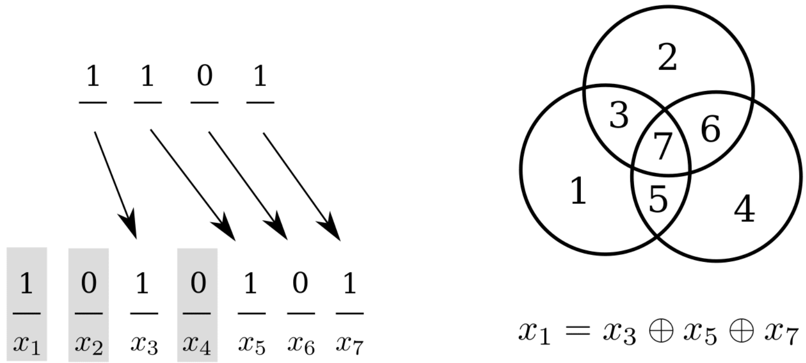
Opracowanie: Tomasz Mąka <tmaka@zut.edu.pl>

1. Wprowadzenie

Kody Hamminga stanowią zbiór liniowych kodów blokowych (n, k), gdzie n jest całkowitą długością bloku, a parametr k określa liczbę bitów informacyjnych. Zakładając, że m określa liczbę bitów parzystości $(m \geqslant 3)$ zachodzą następujące związki [1]: $m = n - k$, $n = 2^m - 1$ oraz $k = 2^m - m - 1$. Bity parzystości wyznaczane są na podstawie bitów informacyjnych za pomocą operacji dodawania modulo 2. Zdolność korekcyjna kodów Hamminga wynosi 1 bit, natomiast detekcyjna wynosi 2 bity [2].

2. Ćwiczenia

1. Zaimplementować koder oraz dekoder kodu Hamminga (7,4) według schematów przedstawionych na rysunkach 1 oraz 2, gdzie operator $\oplus$ jest dodawaniem modulo 2. Z wykorzystaniem opracowanych implementacja należy zilustrować proces kodowania i dekodowania. W przypadku dekodowania należy przedstawić 2 przypadki: (I) kiedy słowo zakodowane jest bez zmian wprowadzane na wejście dekodera oraz (II) kiedy jeden losowo wybrany bit jest negowany w słowie zakodowanym i dekoder realizuje procedurę korekty słowa wejściowego.



$$x_1 = x_3 \oplus x_5 \oplus x_7$$
$$x_2 = x_3 \oplus x_6 \oplus x_7$$
$$x_4 = x_5 \oplus x_6 \oplus x_7$$

Rysunek 1. Proces kodowania z użyciem kodu Hamminga (7,4)

Słowo odebrane: $\underset{x_1}{1}\ \underset{x_2}{0}\ \underset{x_3}{1}\ \underset{x_4}{0}\ \boxed{\underset{x_5}{0}}\ \underset{x_6}{0}\ \underset{x_7}{1}$

$$S = \overline{x_1} \cdot 2^0 + \overline{x_2} \cdot 2^1 + \overline{x_4} \cdot 2^2 = 5$$

$$\overline{x_1} = x_1 \oplus x_1' \qquad x_1' = x_3 \oplus x_5 \oplus x_7$$
$$\overline{x_2} = x_2 \oplus x_2' \qquad x_2' = x_3 \oplus x_6 \oplus x_7$$
$$\overline{x_4} = x_4 \oplus x_4' \qquad x_4' = x_5 \oplus x_6 \oplus x_7$$

Rysunek 2. Ilustracja procesu detekcji i korekcji z użyciem kodu Hamminga (7,4)

2. Zaimplementować koder oraz dekoder kodu Hamminga (15,11) z wykorzystaniem rachunku macierzowego z operacją dodawania modulo 2. W tym przypadku zakładamy, że struktura słowa kodowego $(n = 15,\, k = 11,\, m = 4)$ jest przedstawiona na rysunku 3.

$$\underbrace{\boxed{x_1\ x_2\ x_4\ x_8}}_{m}\underbrace{\boxed{x_3\ x_5\ x_6\ x_7\ x_9\ x_{10}\ x_{11}\ x_{12}\ x_{13}\ x_{14}\ x_{15}}}_{k}$$

Rysunek 3. Struktura słowa kodowego kodu (15,11).

Procedura kodowania sprowadza się do realizacji następującej operacji macierzowej:

$$\mathbf{c} = \mathbf{b}\mathbf{G},$$

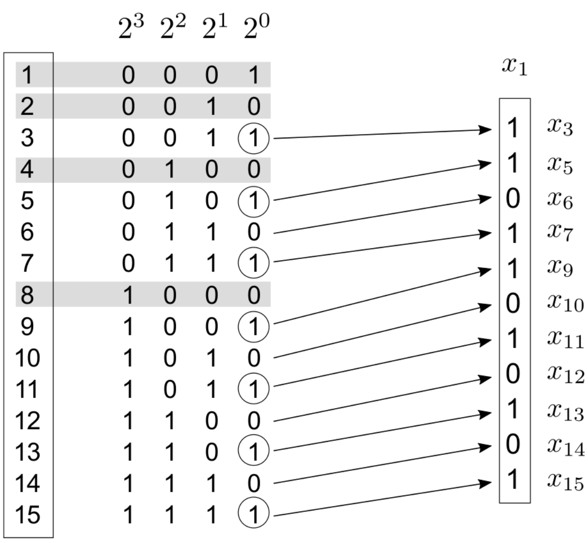
gdzie: $\mathbf{b}$ jest wektorem zawierającym bity wiadomości, $\mathbf{c}$ jest wektorem słowa kodowego, natomiast $\mathbf{G}$ jest macierzą generującą.

Macierz generującą wyznacza się w następujący sposób:

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{P} & \mathbf{I}_k \end{array}\right],$$

gdzie: $\mathbf{I}_k$ jest macierzą jednostkową, a $\mathbf{P}$ jest macierzą określającą bity parzystości, w której kolumny reprezentują kolejne bity parzystości, natomiast wiersze bity wiadomości. Sposób określania postaci pierwszej kolumny tej macierzy dla kodu (15,11) przedstawiono na rysunku 4.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_8 \end{array} \\ \mathbf{P} = & \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{array}{c} x_3 \\ x_5 \\ x_6 \\ \vdots \end{array} \end{array}$$



Rysunek 4. Przykład tworzenia pierwszej kolumny macierzy $\mathbf{P}$ dla kodu Hamminga (15,11).

Procedura dekodowania realizowana jest przy pomocy następującej zależności:

$$\mathbf{s} = \mathbf{c}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$$

gdzie: s jest wektorem syndromu, natomiast $\mathbf{H}$ jest macierzą kontroli parzystości.

Macierz kontroli parzystości wyznacza się w następująco:

$$\mathbf{H} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{I_{n-k}} & \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \end{array}\right].$$

Syndrom S wyznaczony na podstawie wektora $\mathbf{s} = [\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_4}, \overline{x_8}]$ (analogicznie jak w ćwiczeniu 1) określa indeks bitu na którym wystąpił błąd zgodnie ze strukturą słowa kodowego przedstawionego na rysunku 3.

Ilustrację procesu kodowania i dekodowania należy wykonać tak samo jak w ćwiczeniu 1.

3. Uwagi

— Do operacji macierzowych można wykorzystać własną implementację lub gotową bibliotekę (zalecane). Np. w przypadku języka Python można użyć biblioteki *Numpy*, w przypadku języka C++ biblioteki *Eigen*, itd.
— W pliku tekstowym (*wnioski.txt*) należy opisać obserwacje i wnioski wynikające z przeprowadzonych eksperymentów.
— Wszystkie pliki uzyskane w trakcie ćwiczenia należy umieścić w repozytorium GIT w katalogu *lab-6*.

Literatura

[1] S. Haykin, *Systemy telekomunikacyjne - tom 2*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 1998
[2] W. Kwiatkowski, *Wprowadzenie do kodowania*, BEL Studio Sp. z o.o., Warszawa 2010