

基于 Kalman 滤波的机动目标跟踪仿真

Simulation of Maneuvering Target Tracking Based on Kalman Filter

专 业： 信息与计算机科学

作 者： 樊安斐

指导老师： 何帆

湖南理工学院数学学院

二〇二一年五月 岳阳

摘 要

本文针对机动目标跟踪问题采用离散线性卡尔曼滤波建立了恒定速度模型(CV)、恒定加速度模型(CA)和恒定转弯率和速度模型(CTRV)。对线性的CA模型和非线性CTRV模型,采用Python语言进行了实例仿真,结果表明本文方法能较好达到机动目标的数据融合和精确跟踪的效果。

关键词: 卡尔曼滤波; 扩展卡尔曼滤波; 目标跟踪; 运动模型

Abstract

In this paper, a constant velocity model (CV), a constant acceleration model (CA) and a constant turn rate and velocity model (CTRV) are established by using discrete linear Kalman filter for maneuvering target tracking. The linear CA model and nonlinear CTRV model are simulated by Python language, and the results show that the proposed method can achieve the data fusion and accurate tracking effect of maneuvering target.

Keywords: Kalman filter; Extended Kalman Filter; Target tracking; Motion model

目 录

摘 要	I
ABSTRACT	II
0 引言	1
1 卡尔曼滤波理论	1
1.1 滤波器和滤波问题	1
1.2 卡尔曼滤波基本思想	2
2 卡尔曼滤波器数学模型	2
2.1 卡尔曼滤波的基本方程	3
2.2 卡尔曼滤波器递推公式	5
2.3 卡尔曼滤波器算法框架	7
3 目标跟踪运动模型	8
3.1 运动模型介绍	9
3.2 线性运动模型	10
3.3 非线性运动模型	11
4 运动目标跟踪仿真	14
4.1 一维 CA 运动源仿真	15
4.2 双雷达 CTRV 运动仿真	18
结束语	22
致谢	23
参考文献	24

0 引言

卡尔曼滤波是信号状态估计、预测和机动目标跟踪领域中应用最广泛、最强大的一种滤波方法，主要用于预估和监测不能直接或准确观测的系统状态，如运动目标状态信息、信号传输的杂波处理、温度计的标定和监测、地震震源的定位、运动轨迹的识别和身份特征模式识别等。

1942年，维纳为解决火控系统的精确跟踪问题，形成了一种新的用于预测随机系统信号的最优估计理论^[1]：维纳滤波。60年代，卡尔曼、布西等在维纳滤波的基础上改进：可以处理多维非平稳随机过程、改用递推算法使得存储和计算量大大减少，通常称这种为卡尔曼滤波^[2]。

在军事方面，对飞机、导弹等机动目标的跟踪和对雷达系统预测的跟踪实现了多机动雷达数据融合的多目标跟踪；在民用方面，应用最广泛的是信号的传输通信、各种定位软件和自动驾驶中，对行人和机车的预测和机车自身系统信息的监测。

本文研究的卡尔曼滤波基本方程，对于基本方程给出一个简单例子。随后本文给出了递推公式，递推公式的作用在于拆分卡尔曼滤波的过程，方便更快速理解标准卡尔曼滤波并编程求解。本文全面的总结了线性和非线性的运动模型。基于标准卡尔曼滤波和扩展卡尔曼滤波处理分别做了 CA 和 CTRV 运动模型的仿真实验，并进行一定的性能分析，为以后的入门研究工作指出一定的快捷方向。

1 卡尔曼滤波理论

1.1 滤波器和滤波问题

传统滤波器主要指电子线路网络中的部分有源、无源电路，其由各种电感、电容、电阻、有源元件、运放器等等电子元器件组成的某种电子网路系统，这种电子网路一般具有滤波选频特性：在容许频率范围内的电信号产生较小的减幅，在阻止频率范围内的电信号产生较大减幅^[3]。现代滤波问题不局限于电子线路领域，其使用一个特定系统，用一种带有选频特性的方法或技术，尽可能地消除噪声信号，同时保留有用信号，能够从包含噪声的数据信息中获得规格的数据信息。

1.2 卡尔曼滤波基本思想

卡尔曼滤波器 (*Kalman Filter, KF*) 的基本特点是利用系统状态方程结合上一步系统状态的最优状态估计, 预测状态转移过程。利用量测系统, 获取当前系统状态的观测信息, 计算估计误差协方差矩阵, 在线性无偏最小方差的估计准则下, 使用两个正态分布的矩阵相乘得到一步先验状态估计和一步先验误差估计, 通过协方差矩阵传递的先验估计误差的测量噪声协方差, 得到了卡尔曼增益的最佳估计最终使最优预估值与信号状态的真实值的误差方差最小。

卡尔曼滤波的核心是滤波增益矩阵, 计算值为预测误差与量测误差的比重, 滤波增益矩阵的作用是决定滤波数学模型是侧重信任估计值还是测量值, 让粗略估计的先验估计值变成最准确的后验估计。

标准卡尔曼滤波器的数学模型要求状态系统是线性的, 又要求系统中的所有噪声呈高斯分布, 因此限制了标准卡尔曼滤波器在现实生活中的应用^[4]。

针对非线性的状态系统, 使用扩展卡尔曼滤波器 (*Extended Kalman Filter, EKF*) 实现应用: 假定卡尔曼滤波的对当前系统状态的估计值非常接近于其真实值。那么系统状态转移的非线性函数在当前点的状态估计值处, 利用泰勒展开到一阶来进行近似而实现线性化^[5]。

2 卡尔曼滤波器数学模型

本节首先给出了给出一个简单的运动目标, 通过对例子推广得到卡尔曼滤波的基本方程: 状态方程和观测方程。

然后使用卡尔曼滤波的基本方程推导系统过程得到卡尔曼滤波器递推公式。

卡尔曼滤波器的数学模型分为预估部分和观测更新部分, 但是需要注意递推公式中的转换过程的滤波增益矩阵参与了预估和更新。

再将卡尔曼滤波器递推公式带入到卡尔曼滤波器算法框架里, 完成本节卡尔曼滤波器的数学模型。并为仿真提供算法框架基础。

2.1 卡尔曼滤波的基本方程

在给出卡尔曼滤波的基本方程前，先考虑一个有位置和速度信息的一维运动目标，该目标的系统状态向量为：

$$x_t = \begin{bmatrix} p_t \\ v_t \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

由运动的性质可以知道：

$$p_t = p_{t-1} + v_{t-1} * \Delta t + u_{t-1} * \frac{\Delta t^2}{2} \quad (2.2)$$

$$v_t = v_{t-1} + u_{t-1} * \Delta t \quad (2.3)$$

上述状态向量结合运动性质可写为：

$$\begin{bmatrix} p_t \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{t-1} \\ v_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} \\ \Delta t \end{bmatrix} u_{t-1} \quad (2.4)$$

令 $A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} \\ \Delta t \end{bmatrix}$ ，可以得到 $x_t = Ax_{t-1} + Bu_{t-1}$ 。

矩阵 A 代表的是系统运动状态的转移方程， B 和 u_{t-1} 共同构成加速度控制。

在观测方面，有某种仪器得到其中一个状态信息 z_k ，观测的维度和系统状态向量维度不一定相同。

如果测量系统只能只测定系统状态向量中位置信息，那么观测表示为： $H = [1]$ 。 z_k 可以包含多项测量的测量值，如果测量同时包含了位置和速度信息，此时的观测矩阵为：

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

那么上述观测的表示为：

$$z_k = Hx_k \quad (2.5)$$

测量还可以包含并非系统状态的位置和速度信息，例如速度变化信息也可以包含，经过一个映射到测量空间即可，因此在下文 CTRV 中可以利用不同的测量数据做传感器数据融合。

大多数系统的传感器都有符合高斯干涉信号振幅分布且功率谱密度均匀的测量噪声称的高斯白噪声。利用概率统计理论中协方差矩阵的数学特性，可以解决噪声的加入和传递。加入系统状态的噪声和观测的噪声，定义一个描述离散时变线性系统，该系统由以下的状态方程和观测方程表示^[6]：

状态方程：

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1} \quad (2.6)$$

该状态方程中的符号含义为表 1 所示。

表1 状态方程符号定义

符号	定义
x_k	系统在第 k 时刻的 n 维状态向量。
A	系统从第 $k-1$ 时刻到第 k 时刻的状态变化 $n*n$ 阶矩阵。
u_{k-1}	可选输入 $k-1$ 时刻控制矩阵。
B	可选输入控制矩阵的增益矩阵
w_{k-1}	在第 $k-1$ 时刻系统的 n 维随机噪声向量

观测方程：

$$z_k = Hx_k + v_k \quad (2.7)$$

该观测方程中的符号含义为表 2 所示。

表2 观测方程符号定义

符号	定义
z_k	系统在第 k 时刻的 m 维观测向量。
H	状态向量 x_k 对观测向量 z_k 的增益转换。 $m*n$ 阶矩阵，通常为常数矩阵。
v_k	在第 k 时刻测量系统的 m 维噪声向量

为简单起见，通常假设 w_{k-1} 为高斯白噪声序列，具有已知的零均值和协方差阵 $p(w) \sim N(0, Q)$ ，一般为常数矩阵 Q_k 。同样假设 v_k 为高斯白噪声序列，具有已知的零均值和协方差阵 $p(v) \sim N(0, R)$ ，通常为常数矩阵 R_k 。

2.2 卡尔曼滤波器递推公式

卡尔曼滤波主要分为状态预测和状态修正两部分。

状态预测部分首先对当前状态进行预测，然后计算预测误差的协方差，再构造对下一次状态的先验估计的滤波增益矩阵。

状态修正时利用滤波增益矩阵把先验估计与新的观测变量相结合，构造后验状态向量修正和反馈更新估计误差方差阵。

设 n 维线性动态系统和 m 维线性观测系统由基本方程 (2.6) ~ (2.7) 描述的离散时变线性系统^[7]：

$$\text{System} = \begin{cases} x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1} \\ z_k = Hx_k + v_k \end{cases} \quad (2.8)$$

将离散时变线性系统方程的状态预测方程部分和状态修正方程部分完整推导可以得到以下递推公式 (2.9) ~ (2.13)。

系统初始化 $k=1$ 时， \hat{x}_0^- 为 z_k 的第一个测量数据。

(1) 状态预测

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1}^- + Bu_{k-1} \quad (2.9)$$

$\hat{x}_k^- \in \mathfrak{R}^n$ 是第 k 步的先验状态估计，需要知道第 $k-1$ 步状态。

(2) 计算预测误差的协方差

设先验估计误差： $e_k^- \equiv x_k - \hat{x}_k^-$ ，则有先验估计误差的协方差为 $P_k^- = E(e_k^- e_k^{-T})$ 。在数理统计中，估计协方差矩阵有以下性质： $\text{cov}(Ax, Bx) = A \text{cov}(x, x) B^T$ ，即 APA^T 。

考虑对于噪声干扰的误差： $P = \text{cov}(x, x) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$ ，该协方差含义为图 1 所示。

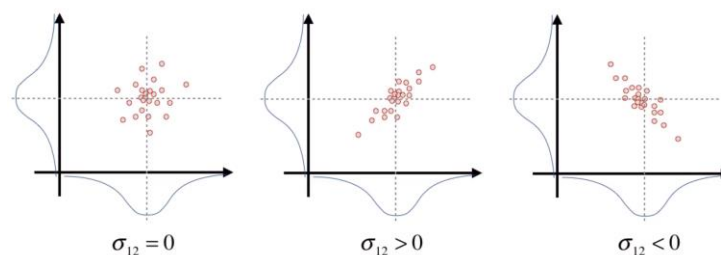


图1 协方差

传递加入噪声得到预测误差协方差

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q \quad (2.10)$$

(3) 滤波增益矩阵

$n \times m$ 阶矩阵 $K \in [0,1]$ 被称为卡尔曼增益或者混合因子。矩阵 K 的构成是模型预测误差与量测误差的比重, 即 $K = P_{error} / (P_{error} + E_{error})$ 。矩阵 K 作用是使后验估计误差的协方差最小。所得滤波增益矩阵为

$$\begin{aligned} K_k &= \frac{P_k^- H^T}{HP_k^- H^T + R} \\ &= P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

可以看出观测噪声协方差 R 越小, 残余的增益越大 K 越大。 R 趋向于零时, 有:

$$\lim_{R_k \rightarrow 0} K_k = H^{-1}$$

另一方面, 先验估计误差协方差 P_k^- 越小, 残余的增益 K 越小, P_k^- 趋向于零时, 有:

$$\lim_{P_k^- \rightarrow 0} K_k = 0$$

增益 K 的另一种解释是随着测量噪声协方差 R 趋向于零, 测量变量 z_k 的权重越来越大, 而 z_k 的预测 $H\hat{x}_k^-$ 的权重越来越小。另一方面, 随着先验估计误差协方差 P_k^- 趋向于零, 测量变量 z_k 权重越来越小, 而 z_k 的预测 $H\hat{x}_k^-$ 的权重越来越大。

(4) 后验状态向量修正

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H\hat{x}_k^-) \quad (2.12)$$

$\hat{x}_k \in \mathfrak{R}^n$ 为已知测量变量 z_k 时, 代表第 k 步的后验状态估计。 $\hat{x}_k = E[x_k]$ 是一个一阶矩, 反应状态分布的均值。

\hat{x}_k 的更新取决于已知先前测量变量 z_k 的情况下, x_k 的先验状态估计 \hat{x}_k^- 的概率分布。先验估计 \hat{x}_k^- 和加权的测量变量 z_k 以及预测 $H\hat{x}_k^-$ 之差的线性组合构成了后验状态估计 \hat{x}_k 。

测量过程中的测量一步预测之差 $(z_k - H\hat{x}_k^-)$ 反应的是预测值和实际值之间的差距, 该值也被称为的革新或者残余。

(5) 更新估计误差方差阵

设后验估计误差 $e_k \equiv x_k - \hat{x}_k$ 。那么状态分布的方差 $P_k = E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T]$ 是一个二阶非中心矩。则有后验估计误差协方差 $P_k = E(e_k e_k^T)$ 。通过单位矩阵 I 和增益的差，得到更新的估计误差方差阵

$$P_k = (I - K_k H) P_k^- \quad (2.13)$$

对于递推的时变系统来说，系统状态是关于时间的变量，系统观测值不更新会导致后验估计不准确，反馈更新该矩阵确保保证系统的有效。

在卡尔曼滤波器的过程，估计原则就是使最优状态估计的协方差 P_k 最小，即数学模型尽可能接近真实值。

则卡尔曼滤波器的数学模型为：

$$\min J = \sum P_k \quad (2.14)$$

该问题是一个无约束优化问题。在约束问题中，通过求导求解目标，目标点也可以称为 **KT** 点，条件为 **KKT** 条件。

该问题同样求导求解目标，目标最优点为上述递推公式，条件称为一阶必要条件。

令 P_k 对增益矩阵 K 求偏导为 0：

$$\frac{\partial P_k}{\partial K} = -2(P_k^- H^T) + 2K(HP_k^- H^T + R) = 0 \quad (2.15)$$

解得答案与递推公式 (2.11) 相同：

$$\begin{aligned} K_k &= \frac{P_k^- H^T}{HP_k^- H^T + R} \\ &= P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1} \end{aligned} \quad (2.16)$$

2.3 卡尔曼滤波器算法框架

在 A 和 H 都是常数矩阵（状态参数对时间的一阶偏导数为 0，则线性运动定常）和模型噪声 w_k 和观测噪音 v_k 都是平稳随机序列的情况下（ Q_k, R_k 为常数矩阵），则该离散系统的卡尔曼滤波器是稳定的^[10]。可以设计出卡尔曼滤波器算法中的三个步骤：① 初始化、② 预测和③ 更新。

3.1 运动模型介绍

根据运动模型的复杂程度，运动模型分为一次运动模型（线性运动模型）和二次运动模型（非线性运动模型）^[8]，所有的线性运动模型有：

- ① 恒定速度模型 (*Constant Velocity, CV*)
- ② 恒定加速度模型 (*Constant Acceleration, CA*)。

线性运动模型假定机动目标的运动是直线的。考虑目标的运动方向改变，所有的非线性运动模型有：

- ③ 恒定转弯率和速度模型 (*Constant Turn Rate and Velocity, CTRV*)
- ④ 恒定转弯率和加速度模型 (*Constant Turn Rate and Acceleration, CTRA*)
- ⑤ 恒定转向角和速度模型 (*Constant Steering Angle and Velocity, CSAV*)
- ⑥ 恒定曲率和加速度模型 (*Constant Curvature and Acceleration, CCA*)
- ⑦ 恒定转向角和加速度模型 (*Constant Steering Angle and Acceleration, CSAA*)

这些运动模型的关系如图 3 所示。

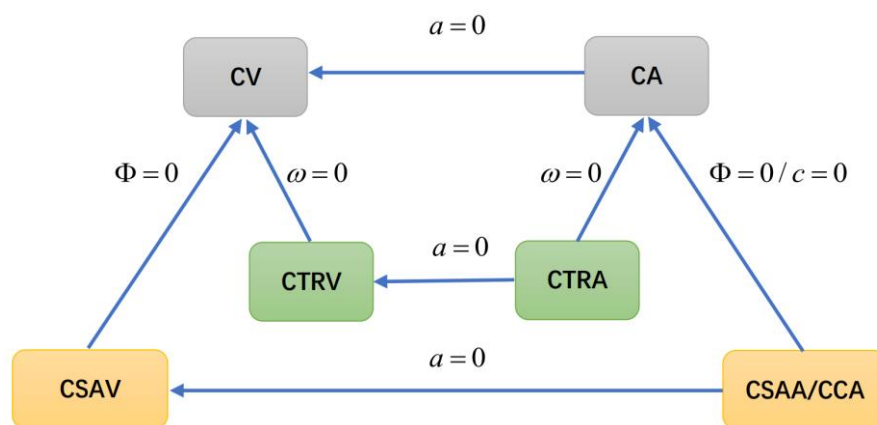


图 3 运动模型关系图

CTRV 和 *CTRA* 中假定速度 v 和偏航角速度 (yaw rate) ω 独立。

另外假定速度为线性变化，通过恒定转向角 Φ 来建立速度 v 和偏航角速度 ω 的关联，这样可以引出 *CSAV*、*CSAA*。

在 *CTRV* 和 *CTRA* 中，偏航角速度状态测量系统也存在高斯白噪声。

对于非线性运动模型，*CSAV*、*CSAA*或*CCA*在实际使用中比较少，目标追踪系统使用最多的是*CTRV*和*CTRA*模型。*CTRA*运动模型的处理会使用与*CTRV*不同的线性化方法，由于篇幅限制，下文非线性运动模型仅建立*CTRV*模型。

3.2 线性运动模型

在运动模型中，状态转移公式或状态转移方程或状态转移函数是基于一些先验知识和运动规律递推总结而来，使其方便用于编程和递归计算。

(1) 恒定速度模型

在计算编程中按照滤波器的递推公式，转移函数对应的是状态方程中的状态转移矩阵。*CV*模型的二维系统状态空间表示为：

$$\vec{x}(t) = (x, y, v_x, v_y)^T \quad (3.1)$$

状态转移函数为：

$$\vec{x}(t + \Delta t) = \begin{pmatrix} x(t) + \Delta t v_x \\ y(t) + \Delta t v_y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

状态空间也可表示为：

$$CV_x = (x, y, \theta, v)^T \quad (3.3)$$

状态空间分别为目标的横坐标、纵坐标、与 x 轴夹角（文中的夹角均逆时针为正）、线速度，这种表示方法和第一种等价。

设由 X_k 到 X_{k+1} 的时间间隔为 T_k ，对应的状态转移方程为：

$$X_{k+1} = X_k + \begin{pmatrix} v \cos(\theta) T_k \\ v \sin(\theta) T_k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

(2) 恒定加速度模型

恒定速度模型(*CV*)假设速度是常量，实际上简化了目标实际移动的形式。速度是常量的模型运动形式太过于单一，更复杂的运动情况会无法正确预测目标，不能应用于有转弯的运动目标。

恒定加速度模型(CA)为恒定速度模型(CV)的速度分量增加速度变化表示,可以应用于有转弯的运动目标。

CA模型的二维系统状态空间可以表示为:

$$CA_X = (x, y, \theta, v, a)^T \quad (3.5)$$

状态空间分别为目标的横坐标、纵坐标、与 x 轴夹角、线速度、加速度。

设由 X_k 到 X_{k+1} 的时间间隔为 T_k , 状态转移方程为:

$$X_{k+1} = X_k + \begin{pmatrix} (v_k T_k + \frac{a}{2} T_k^2) \cos(\theta) \\ (v_k T_k + \frac{a}{2} T_k^2) \sin(\theta) \\ a T_k \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

3.3 非线性运动模型

非线性运动模型中恒定转弯率和速度模型(CTRV)是使用的最广泛的。CTRV其实是CV的一般形式,当角速度 $\omega=0$ 时推导就是CV的形式。CTRV模型假设目标在合速度大小不变的同时,以恒定的转弯速率改变运动方向。

在CTRV中,目标的二维系统状态空间表示为:

$$\vec{x}(t) = (x, y, v, \theta, \omega)^T \quad (3.7)$$

状态空间分别为横坐标、纵坐标、速度(合速度)、偏航角方向、偏航角速度。

状态转移函数为:

$$\vec{x}(t + \Delta t) = \begin{pmatrix} x(t) + \frac{v}{\omega} \sin(\omega \Delta t + \theta) - \frac{v}{\omega} \sin(\theta) \\ y(t) - \frac{v}{\omega} \cos(\omega \Delta t + \theta) + \frac{v}{\omega} \cos(\theta) \\ v \\ \omega \Delta t + \theta \\ \omega \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

使用CTRV存在 $\omega=0$ 的情况的一个问题。此时状态转移函数公式中的 (x, y) 变成无穷大。考察 $\omega=0$ 的情况,此时的目标实际上是直线的, (x, y) 的计算公式就变成了:

$$\begin{cases} x(t + \Delta t) = x(t) + v \cos(\theta) \Delta t \\ y(t + \Delta t) = y(t) + v \sin(\theta) \Delta t \end{cases}$$

非线性运动模型无法使用标准卡尔曼滤波进行与状态转移矩阵相关的步骤。

对于非线性场景，使用到以下对线性化的处理。为了基于保证模型的线性，使用 CV 模型，用处理噪声表示估计目标的运动方向转变带来的速度分量变化。

状态转移的表示为：

$$x_{t+1} = g(x_t, u)$$

其中， g 表示 CTRV 模型中的状态转移函数， u 表示处理噪声。

回到 CTRV 模型公式 (3.8) 中， $\omega \neq 0$ 时转移函数不变， $\omega = 0$ 时使用导数定义或者洛必达法则求解，那么状态转移函数为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x}(t + \Delta t) = g(x(t)) = \begin{pmatrix} x(t) + \frac{v}{\omega} \sin(\omega \Delta t + \theta) - \frac{v}{\omega} \sin(\theta) \\ y(t) - \frac{v}{\omega} \cos(\omega \Delta t + \theta) + \frac{v}{\omega} \cos(\theta) \\ v \\ \omega \Delta t + \theta \\ \omega \end{pmatrix}, \omega \neq 0 \\ \vec{x}(t + \Delta t) = g(x(t)) = \begin{pmatrix} x(t) + v \cos(\theta) \Delta t \\ y(t) + v \sin(\theta) \Delta t \\ v \\ \omega \Delta t + \theta \\ \omega \end{pmatrix}, \omega = 0 \end{array} \right. \quad (3.9)$$

对于这个多元的状态转移函数，使用下行多元泰勒级数公式进行近似：

$$T(x) = f(u) + Df(u)(x - u) + o(x - u)$$

其中， $Df(u)$ 是雅克比矩阵。雅克比矩阵是多元函数中，各个因变量关于各个自变量的一阶偏导数构成的矩阵，类似于多元函数的导数。

$$J = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

在数学分析中，导数作为切空间上的线性映射，可以适当选择基底(欧式空间或者希尔伯特空间)，给出切空间上点的坐标从而线性映射为一个矩阵。在欧式空间中，这个矩阵是雅克比矩阵。雅克比矩阵的重要性在于它能体现一个可微方程与给出点的最优线性逼近。雅克比矩阵在各种优化方法中使用也广泛，但是求解雅克比矩阵的时候往往伴随大量的求解矩阵的逆。

那么 EKF 进行局部线性化使用的方法: $h(x) \approx h(u) + \frac{\partial h(u)}{\partial x}(x-u)$ 。在 EKF 中, 由于 $(x-u)$ 本身数值很小, 更高阶的级数在此问题中忽略不计, 只考虑利用雅克比矩阵进行线性化。 $CTRV$ 模型公式 (3.9) 中, 对状态空间的各个元素求偏导数可以求解得到:

当 $\omega \neq 0$ 时, 雅克比矩阵:

$$J_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\omega}(-\sin(\theta) + \sin(\Delta t\omega + \theta)) & \frac{v}{\omega}(-\cos(\theta) + \cos(\Delta t\omega + \theta)) & \frac{\Delta v}{\omega} \cos(\Delta t\omega + \theta) - \frac{\Delta v}{\omega^2}(-\sin(\theta) + \sin(\Delta t\omega + \theta)) \\ 0 & 1 & \frac{v}{\omega}(-\sin(\theta) + \sin(\Delta t\omega + \theta)) & \frac{1}{\omega}(\cos(\theta) - \cos(\Delta t\omega + \theta)) & \frac{\Delta v}{\omega} \sin(\Delta t\omega + \theta) - \frac{\Delta v}{\omega^2}(\cos(\theta) - \cos(\Delta t\omega + \theta)) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

当 $\omega = 0$ 时, 雅克比矩阵:

$$J_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t \cos(\theta) & -\Delta t v \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & \Delta t \sin(\theta) & \Delta t v \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

解得雅克比矩阵后, 再对模型噪音进行处理。在 $CTRV$ 模型中噪音的引入主要来源于两处^[12]: ① 直线加速度噪声、② 偏航角加速度噪声。

假定直线加速度和偏航角加速度满足均值为 0, 方差分别为 $\sigma_a^2, \sigma_\omega^2$ 的高斯分布。由于均值为 0, 不考虑状态转移方程中的处理噪声 u 。

考虑直线加速度和偏航角加速度对状态量 $\vec{x}(t) = (x, y, v, \theta, \omega)^T$ 的影响的表达式如下:

$$noise = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Delta t^2 \mu_a \cos(\theta) \\ \frac{1}{2} \Delta t^2 \mu_a \sin(\theta) \\ \Delta t \mu_a \\ \frac{1}{2} \Delta t^2 \mu_\omega \\ \Delta t \mu_\omega \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

其中 μ_a, μ_ω 为当前模型下看作处理噪声的直线上和转角上的加速度

分解矩阵:

$$noise = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Delta t^2 \cos(\theta) & 0 \\ \frac{1}{2} \Delta t^2 \sin(\theta) & 0 \\ \Delta t & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \Delta t^2 \\ 0 & \Delta t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_a \\ \mu_\omega \end{bmatrix} = G \cdot \mu \quad (3.13)$$

根据图 1 噪声的表示，处理噪声的协方差矩阵 Q 的表达式为：

$$Q = E[nosie \cdot nosie^T] = E[G\mu\mu^T G^T] = G \cdot E[\mu\mu^T] \cdot G^T \quad (3.14)$$

其中：

$$E[\mu\mu^T] = \begin{pmatrix} \sigma_a^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\dot{\omega}}^2 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

在 $CTRV$ 模型中，协方差矩阵 Q 用于处理噪声， Q 的计算公式为：

$$Q = \begin{bmatrix} (\frac{1}{2}\Delta t^2 \sigma_a \cos(\theta))^2 & \frac{1}{4}\Delta t^4 \sigma_a^2 \sin(\theta) \cos(\theta) & \frac{1}{2}\Delta t^3 \sigma_a^2 \cos(\theta) & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}\Delta t^4 \sigma_a^2 \sin(\theta) \cos(\theta) & (\frac{1}{2}\Delta t^2 \sigma_a \sin(\theta))^2 & \frac{1}{2}\Delta t^3 \sigma_a^2 \sin(\theta) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\Delta t^3 \sigma_a^2 \cos(\theta) & \frac{1}{2}\Delta t^3 \sigma_a^2 \sin(\theta) & \Delta t^2 \sigma_a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\frac{1}{2}\Delta t^2 \sigma_{\dot{\omega}})^2 & \frac{1}{2}\Delta t^3 \sigma_{\dot{\omega}}^2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\Delta t^3 \sigma_{\dot{\omega}} & \Delta t^2 \sigma_{\dot{\omega}}^2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

求解得到状态转移的雅克比矩阵和处理噪声后，根据图 2 算法框架，就可以设计出使用 EKF 的算法程序，并且该算法可以用于带有转弯和速度变化的机动目标。

在测量部分，参考章节 2.1 的观测方程，即可写出测量部分。如果测量含有非线性空间的数据，使用求解雅克比矩阵的方法到对应空间即可，下文的双雷达 $CTRV$ 运动仿真会使用到一个非线性的测量空间。

4 运动目标跟踪仿真

本节将先给出了比较简单的一维 CA 运动仿真的仿真条件，根据本文第二章所描述的卡尔曼滤波数学模型和第三章的恒定加速度模型，不考虑在 y 方向的移动，此时与 x 轴夹角为 0、线速度就是 x 方向的移动速度。

根据图 2 算法框架，使用 Python 语言仿真，解出各个状态变量数值，并分析算法结果和性能。

根据实际应用，接着给出了有激光雷达和扫描雷达两个传感器的双雷达 $CTRV$ 运动仿真，该仿真中雷达的测量数据分为了线性和非线性，应用到了本文章节 § 3.3 中利用雅克比矩阵的非线性处理。根据图 2 算法框架，使用 Python 语言仿真，然后进行仿真分析。

4.1 一维 CA 运动源仿真

(1) 仿真条件

假设信号源的运动方程为： $s(t) = 3t^2 - 2t + 5 + \text{noise}(t)$ ，其中 $\text{noise}(t)$ 是一个均值为 0，方差为 0.25 的高斯白噪声。

状态向量为 $x_k = (s, s', s'')^T$ ，并取初值 $x_0 = (0, 0, 0)^T$ 状态转移矩阵为：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 T 为采样间隔，本例中取值 $T = 0.05$ 。

动态系统维度数 $n = 3$ ，测量系统维度数 $m = 1$ 。

模型噪音协方差取值：

$$Q = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

观测矩阵 $H = (1, 0, 0)$ ，观测向量为信号源运动方程产生。

观测噪声协方差矩阵为 [0.25]。初始估计误差协方差矩阵为：

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

观测长度 $k = 200$ 。要求对输出的状态向量序列每隔 5 个时刻打印一次。

(2) 仿真设计

对系统先进行分析，参考公式 (3.5)：一维状态不含 $(y, \theta)^T$ ，则状态空间

$x_k = (s, s', s'')^T$ ，含义为： $s_k = (x, v, a)^T$ 。该状态可以表示为：

$$s_t = \begin{bmatrix} x_t \\ v_t \\ a_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{t-1} + v_{t-1}T + a_{t-1} * \frac{T^2}{2} \\ v_{t-1} + a_{t-1}T \\ a_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ v_{t-1} \\ a_{t-1} \end{bmatrix}$$

拆解可得到 $s_t = As_{t-1}$ ，该一维状态的运动的转移方程符合基本公式 (2.1)。

根据图 2 算法框架，设计适用于该模型的 Python 语言卡尔曼滤波器如下：

Step1. 初始化系统：根据仿真定义系统状态转移矩阵，噪声矩阵，初始估计误差协方差矩阵和系统状态变量。根据信号源的运动方程和模型噪声，生成采样数据。

Step2. 计算预测误差方差估计： $P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q_k$ ；

Step3. 计算滤波增益矩阵：计算 $K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1}$ ；

Step4. 计算后验状态向量修正： $\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H\hat{x}_k^-)$ ；

Step5. 更新估计误差方差阵： $P_k = (I - K_k H) P_k^-$ ；

Step6. 在未结束观测序列前，回到 Step2 计算预测误差： $P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q_k$ ；

Step7. 结果输出：输出真值、观测值和全部的状态变量，以便画图和分析。

(3) 仿真结果

程序运行结果部分如下表 3 所示。

表 3 Kalman 滤波程序结果

t 时刻	s 真值	y 观测值	x(0):滤波 x	x(1):滤波 v	x(2):滤波 a
0	5	4.45	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
0.25	4.69	5.79	5.51E+00	7.61E-02	4.85E-03
0.5	4.75	4.76	4.73E+00	2.17E-02	5.15E-03
0.75	5.19	5.14	5.10E+00	1.31E-01	3.08E-02
1	6	6.2	5.94E+00	5.10E-01	1.56E-01
1.25	7.19	5.74	6.22E+00	5.82E-01	1.52E-01
1.5	8.75	9.03	8.74E+00	2.16E+00	7.79E-01
1.75	10.69	10.35	1.01E+01	2.98E+00	1.06E+00
2	13	13.49	1.30E+01	5.00E+00	1.86E+00
2.25	15.69	16.22	1.62E+01	7.11E+00	2.65E+00
2.5	18.75	19.33	1.91E+01	8.71E+00	3.10E+00
2.75	22.19	22.09	2.18E+01	9.95E+00	3.34E+00
3	26	25.8	2.58E+01	1.21E+01	4.01E+00

全部的观测状态变量一共有 3 个，状态空间 $x_k = (s, s', s'')^T$ ，含义为： $s_k = (x, v, a)^T$

表格的前 3 列为观测值和真值，在实际情况中真值是无法得出。真值是运动公式生成，再加入高斯噪声得到观测值，真值的作用是帮助分析算法性能。

测量系统维度数 $m=1$ ，只能得到位置观测，该位置观测对应的是状态空间的第一个列，代表位置滤波值。

(4) 仿真分析

将滤波算法仿真得出数值结果绘图，如图 4 所示。

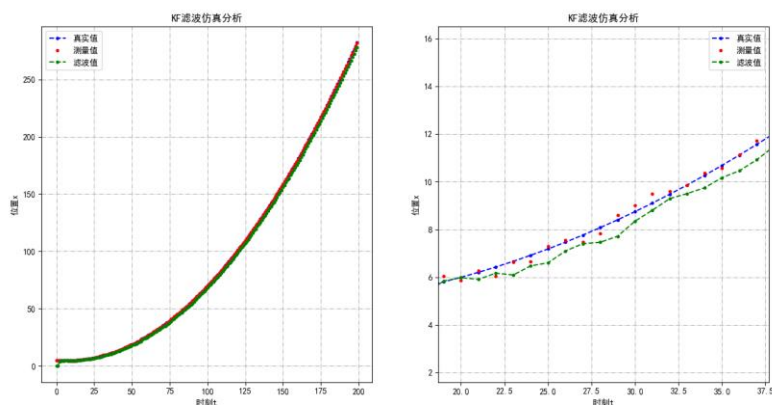


图 4 KF 滤波分析

可以看到在部分时间段位置的滤波值始终小于真值和观测值。从系统上来分析：源运动方程的二阶导数（恒定加速度） $s''(t) = 6$ 。根据表 3，在数学模型中，在该部分数值始终是处于跟踪来接近。位置数据误差如图 5 所示。

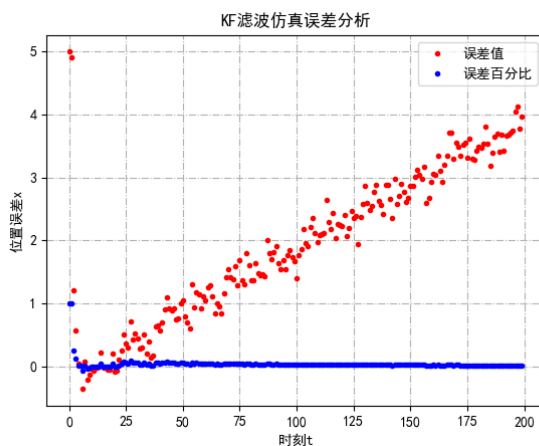


图 5 数据误差分析

总体数据误差分析如表 4 所示。

表 4 KF 误差分析

最大误差	平均误差	均方误差
5.0	2.0475	2.4071

说明 KF 滤波效果良好，能够有效的跟踪机动目标。对状态变量序列就行分析可知：在模型推导中加速度恒定量为 6，但是在滤波过程中依然存有变化，这种变化是由滤波增益矩阵根据观测调整得到，且误差值随着滤波在增大，但是误差百分比依然稳定。

4.2 双雷达 CTRV 运动仿真

(1) 仿真条件

0 号激光雷达： 机动目标初始运动方向为 x 轴，运动方向左侧为 y 轴。

1 号扫描雷达： 测量机动目标在与 0 号激光雷达的距离 ρ ，机动目标与 x 轴的夹角 ψ ，以及机动目标相对距离变化率 $\dot{\rho}$ 。

假设信号源的真实二维的运动条件为：经过短暂校准时间后，测量坐标 $(0.6, 0.6)$ ，对应速度为： $(3.6, 3.6)$ ，且目标真实的以恒定转为率 $\omega = 0.35$ 运动 250 个测量间隔，再以恒定转为率 $\omega = -0.35$ 运动 250 个测量频率。雷达交叉间隔测量时间为 $T = 0.05$ 。

(2) 仿真设计

根据公式 (3.2) 的表述， EKF 中使用一个测量矩阵 H 将预测的结果线性映射到测量空间。目前使用雷达和激光雷达传感器数据融合来测量机动目标会有两种数据，即：

数据 1： 激光雷达的测量是线性的，则测量矩阵为：

$$H_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

将预测线性映射到激光雷达测量空间：

$$H_L \vec{x} = (x, y)^T$$

数据 2： 扫描雷达的预测映射到测量空间是非线性的，则测量表达式为：

$$g(u, \vec{x}) = \begin{pmatrix} \rho \\ \psi \\ \dot{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ a \tan_2(y, x) \\ \frac{v_x + v_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix}$$

表达式对 CTRV 状态空间 $\vec{x} = (x, y, v, \theta, \omega)$ 求导的雅克比矩阵（测量矩阵）：

$$J_H = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x(v_x + v_y)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{v}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y(v_x + v_y)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{x+y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

在程序中使用 Jacobian 函数求解雅克比矩阵代替完整推导雅克比矩阵。

根据上述设计和图 2 算法框架，设计出适用于该模型的扩展卡尔曼滤波器如下：

Step01. 初始化系统：读取雷达数据，初始系统状态变量的数据空间，根据公式(4.9)定义系统状态转移矩阵。

Step02. 根据雷达数据类型数据预处理：计算步长时间差、进行观测数据融合和暂存观测矩阵 z_k ；

Step03. 本步数据预处理：根据 ω 值是否为 0，确定当前情况的转移矩阵 J_A ；

Step04. 本步数据预处理：由公式 (3.12) ~ (3.15) 计算传递的噪音 Q_k ；

Step05. 计算预测误差方差估计： $P_k^- = J_A P_{k-1} J_A^T + Q_k$ ；

Step06. 根据雷达数据类型，计算滤波增益矩阵：计算 $K_k = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1}$ ；

Step07. 根据雷达数据类型，计算后验状态向量修正： $\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H \hat{x}_k^-)$ ；

Step08. 根据雷达数据类型，更新估计误差方差阵： $P_k = (I - K_k H) P_k^-$ ；

Step09. 保存数据：保存本步的滤波状态变量和相关值，以便画图和分析；

Step10. 在未结束观测序列前，回到 Step2；

Step11. 结果输出：输出真值、观测值和全部的状态变量、画图和分析。

(3) 仿真结果

程序运行的状态空间结果部分如下表 5 所示。

表 5 EKF 滤波状态空间

坐标 x	坐标 y	距离 ρ	夹角 ψ	变化率 $\dot{\rho}$
5.27E+00	7.23E-01	5.13E+00	1.17E-01	2.42E-01
5.53E+00	7.33E-01	5.22E+00	1.14E-01	2.17E-01
5.83E+00	7.42E-01	5.27E+00	1.07E-01	1.91E-01
6.07E+00	6.80E-01	5.12E+00	6.28E-02	1.13E-01
6.33E+00	7.77E-01	5.13E+00	1.15E-01	1.78E-01
6.58E+00	8.12E-01	5.09E+00	1.27E-01	1.82E-01
6.82E+00	8.05E-01	5.07E+00	1.15E-01	1.55E-01
7.06E+00	7.96E-01	4.93E+00	1.03E-01	1.31E-01
7.28E+00	8.67E-01	4.89E+00	1.34E-01	1.60E-01

(4) 仿真分析

使用滤波算法仿真得出如下图 6 所示。

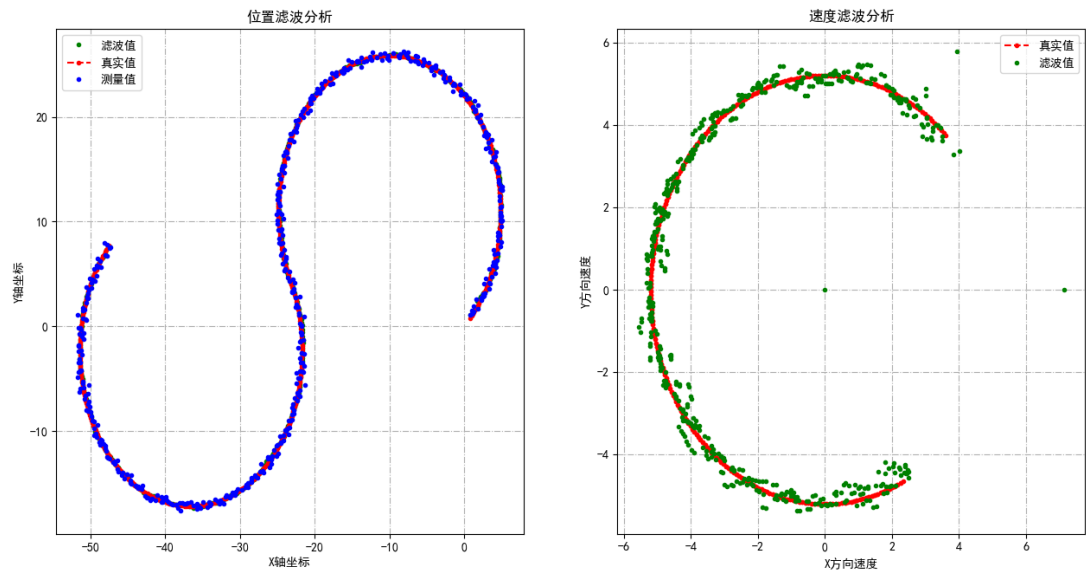


图 6：CTRV 数据融合仿真

部分滤波数据比较如表 7 和表 8

表 7 EKF 位置数据比较

x 坐标真实值	x 坐标滤波值	y 坐标真实值	y 坐标滤波值
1.13E+00	1.28E+00	1.17E+00	1.44E+00
1.30E+00	1.35E+00	1.37E+00	1.64E+00
1.47E+00	1.43E+00	1.57E+00	1.74E+00
1.63E+00	1.76E+00	1.77E+00	1.79E+00
1.79E+00	1.78E+00	1.97E+00	1.96E+00
1.95E+00	1.70E+00	2.18E+00	2.40E+00

可以看到位置的滤波效果良好。

表 8 EKF 速度数据比较

v_x 速度真实值	v_x 速度滤波值	v_y 速度真实值	v_y 速度滤波值
3.48E+00	3.93E+00	3.86E+00	5.77E+00
3.41E+00	3.02E+00	3.93E+00	4.87E+00
3.34E+00	3.01E+00	3.98E+00	4.71E+00
3.27E+00	4.03E+00	4.04E+00	3.35E+00
3.20E+00	3.31E+00	4.10E+00	3.99E+00
3.13E+00	9.56E-01	4.15E+00	5.23E+00

可以看到状态空间中速度的滤波效果良好。

结果数据误差分析如表 9

表 9 EKF 误差分析

	RMSE	最大误差	最小误差	平均误差
x 坐标滤波-真值	0.089057	0.291198	0.000005	0.069548
y 坐标滤波-真值	0.100237	0.286806	0.000002	0.079330
v_x 速度滤波-真值	0.337982	3.612049	0.000419	0.171114
v_y 速度滤波-真值	0.349428	3.803371	0.000592	0.190654

在图 5 中,可以看到在速度初始化仅仅使用了位置,因此在速度滤波数据初始化点是在 $(0,0)$ 。CTRV 模型认为合速度是恒定的,速度的调整靠偏航噪声实现,在速度滤波数据明显在真实值附近波动而不是完全符合真实值,但是速度分量的叠加和真实效果一致,可以认为 EKF 滤波实现了机动目标的数据融合和精确跟踪,说明 EKF 滤波效果优异。

结束语

卡尔曼滤波器应用十分广泛，本文仅仅举出简单的单机动目标跟踪。在算法仿真方面，本文成功实现了 KF 算法处理的一维 CA 运动源仿真和 EKF 处理的双雷达 CTRV 运动仿真。经过仿真测试，标准卡尔曼滤波器能够很好的实现目标的估计和预测。

由于 EKF 需要计算雅克比矩阵，在数据矩阵较大的时候 EKF 效果较差。由于 EKF 只展开到一阶，在长时间的预测上容易产生累计误差，造成预测结果精度不够高。

本文有几处没有完成的地方比较遗憾，本文使用的是离散形式的滤波器，对于连续形式，是带有高斯过程或者布朗运动的随机过程常微分线性系统，本文没有提及推导。

没有使用更高效的无损卡尔曼滤波器(*Unscented Kalman Filter, UKF*)，即在先验分布中的估计点附近采样，采样点线性回归的方法实现 CTRA 仿真。

本文基于卡尔曼滤波器的仿真不局限于机动目标运动模型。在大学生数学建模的各种比赛中，优化和利用模型来预测是十分常见的建模过程，而数学建模中使用最广泛的还是前人经验总结的模型，启发式搜索方法。对于非平稳过程，启发式搜索方法对参数和初始值十分敏感。针对一个系统，例如传染病传播，利用 SEIRJH 等常微分方程组设计出对应的状态转移矩阵，可以清除各种原因产生的噪声数据而进行跟踪预测。

致谢

感谢我的论文指导老师何帆老师，在论文写作给予的指导和平时生活学习过程中给与的帮助。

感谢各位老师在课程教学时的认真付出和数学建模竞赛期间的栽培。

感谢叶琴同学和王建成同学在平时生活中和竞赛中给予的帮助。

感谢父母辛苦培育。

最后，感谢自己的不懈努力。

参考文献

- [1] 唐金君. 基于传感器信息融合的自动导引车自由路径转向研究[D].南京航空航天大学,2012.
- [2] 杜磊. 基于卡尔曼滤波的交流异步电机无速度传感器矢量控制系统[D].南京航空航天大学,2010.
- [3] 邵承会. 高度脉冲噪声污染水岸图像分割[D].吉林大学,2005.
- [4] 庄祉昀. 卫星导航数据优化处理技术研究[D].国防科学技术大学, 2010.
- [5] 黄树清,胡方强,包亚萍,吕涛.抑制多径的 BD2/GPS 双模自适应扩展卡尔曼滤波算法[J].电子技术应用,2017,43(02):77-80.
- [6] 桂晓纯. 基于卡尔曼滤波卫星三频信标仿真分析研究[D].温州大学, 2015.
- [7] 左现刚,刘艳昌,王建平.次优扩展卡尔曼滤波的无线传感器网络定位算法[J].火力与指挥控制,2015,40(10):69-71.
- [8] AdamShan 的博客. 无人驾驶汽车系统入门（二）——高级运动模型和扩展卡尔曼滤波.
- [9] 徐士良. 常用算法程序集:C++描述 第6版. [M]. 北京: 清华大学出版社. 2019.05.
- [10] 李啸海. 基于弱多径效应识别的室内定位方法研究[D].兰州交通大学, 2017.
- [11] 赵延. 机动目标自适应卡尔曼滤波算法研究[D]. 电子科技大学, 2004.
- [12] 陈庆武,张志安,何雨,韩明明,黄学功.基于改进扩展卡尔曼滤波算法的移动机器人定位方法研究[J].测试技术学报,2018,32(04):292-299.
- [13] Adaptive control in an asynchronous electric drive on the basis of an artificial neural network with calculation of the rotor flux[J] . B. Shetat,N. Kabash,A. N. Ladygin. Russian Electrical Engineering . 2007 (6)
- [14] Interlaced Kalman filtering of 3-D angular motion based on Euler's nonlinear equations. Algrain M.C,Saniie J. IEEE Tran.AES . 1994
- [15] The ionospheric impact of the October 2003 storm event on Wide Area Augmentation System[J] . Attila Komjathy, Lawrence Sparks, Anthony J. Mannucci, Anthea Coster. GPS Solutions . 2005 (1)