Dans tout cet exercice, nous numéroterons les chiffres des nombres du chiffre de poids fort au chiffre de poids faible. Ainsi, le début d'un nombre sera la partie écrite usuellement à gauche.

La juxtaposition dénotera la concaténation, à l'exception de l'intérieur des calculs de complexités. La notation $X^{(n)}$ s'ignifiera une concaténation de n répétitions de l'entier X.

Question 1

On commence par montrer que $\preceq$ est un préordre total.

Pour X un entier, on a $XX \leqslant XX$ donc $\preceq$ est refléxive. De plus, pour tout entiers X, Y, alors $XY \leqslant YX$ ou $YX \leqslant XY$ est vraie, donc $X \preceq Y$ ou $Y \preceq X$ et $\preceq$ est totale. A noter que $\preceq$ n'est pas antisymétrique car, par exemple $8 \preceq 88$ et $88 \preceq 8$ car $888 = 888$ mais $8 \neq 88$ donc $\preceq$ n'est pas une relation d'ordre.

Montrons maintenant que $\preceq$ est transitive. Pour cela, soit $X \preceq Y \preceq Z$ des entiers. Nous allons montrer que $X \preceq Z$. montrons d'abord que l'on peut se rammener au cas ou Y n'est pas un préfixe de X ou de Z.

En effet, si Y est un préfixe de X, on écrit $X = Y^{(k)}X'$, ou Y n'est pas un préfixe de X'. Cela est possible si X n'est pas une concaténation d'un certain nombre de copies de Y. Si c'est le cas, on peut à la place montrer le résultat en itérant l'inégalité définissant $Y \preceq Z$. On a alors, d'une part, $X' \preceq Y$, car l'inégalité $XY \leqslant YX \Leftrightarrow Y^{(k)}X'Y \leqslant YY^{(k)}X'$ et on peut simplifier à gauche k copies concaténées de Y car cela revient à soustraire des deux cotés de l'inégalité par $Y^{(k)} \times 10^{|X'|+|Y|}$ où $|X'| + |Y| = |X| = \lfloor log_{10}(X) \rfloor$ est la longueur en chiffres de X écrit en base 10. Un raisnonnement similaire en écrivant $Z = Y^{(k')}Z'$ où Z' n'a pas Y comme préfixe montre que $Y \preceq Z'$. On peut donc, moyennant le résultat sur les entiers où Y n'est ni préfixe de X, ni de Z, l'appliquer à $X' \preceq Y \preceq Z'$ pour obtenir $X' \preceq Z'$. D'autre part l'inégalité $X'Z' \leqslant Z'X'$ ainsi obtenue implique

$$Y^{(k)}X'Z' = XZ' \leqslant Y^{(k)}Z'X' \leqslant Z'Y^{(k)}X' = Z'X.$$

En effet, l'inégalité est conservée en concaténant à gauche des deux cotés par $Y^{(k)}$ puis on obtient la deuxième inégalité de la ligne grâce à l'inégalité $YZ' \leqslant Z'Y$, donnée par $Y \preceq Z$, itérée, ou l'on concatène a chaque fois des deux cotés de l'inégalité par les bons entiers. Similairement, avec $X \preceq Z$, on a

$$Y^{(k')}Z'X = ZX \geqslant Y^{(k')}XZ' \geqslant XY^{(k')}Z = XZ.$$

Donc $X \preceq Z$.

Supposons donc maintenant que Y n'est pas préfixe de X ou Z. On distingue alors deux cas, soit X et Z sont des préfixes de Y, soit l'un d'entre eux n'en est pas un.

Traitons d'abord le cas ou X et Z sont des préfixes de Y. On écrit alors $XY' = Y = ZY''$. On note $l = |X|$, $l' = |Z|$ et $k = l + l' = |XZ|$ les longueurs respectives de ces entiers. En nottant, pour un entier N, $N[1, k]$ pour l'entier composé des chiffres 1 à k de N, on a que XZ est égal a $XY[1, k] = XZY''[1, k]$, et de même, ZX est égal a $ZY[1, k]$. Comme $X \preceq Y$, $XY[1, k] \leqslant YX[1, k]$. De même, comme $Y \preceq Z$, alors $ZY[1, k] \geqslant YZ[1, k]$. Or, comme Z et X

sont des préfixes de Y et $k \leqslant |Y|+\min(l,l')$, on a $YX[1,k] = YY[1,k] = YZ[1,k]$. En combinant les inégalités précédentes, on obtient $XZ \leqslant ZX$, ie $X \preceq Z$.

Supposons maintenant que X ou Z n'est pas préfixe de Y. Traitons le cas ou Z n'en est pas un, le cas pour X est similaire. Notons i la position de la première différence entre ZY et YZ (la borne que nous allons donner sur i justifiera que $ZY \neq YZ$). Montrons d'abord que $i \leqslant \min(|Z|,|Y|)$. Supposons par l'absurde le contraire, et notons $m :- \min(|Z|,|Y|)$. On a alors $ZY[1,m] = YZ[1,m]$, selon si $m = |Z|$ ou $m = |Y|$ cela se simplifie en $Z = Y[1,m]$ ou $Y = Z[1,m]$ et donc Z est un préfixe de Y ou Y est un préfixe de Z ce que l'on a écarté, donc $i \leqslant m$.

On a alors, comme $Y \preceq Z$, $Z[i] > Y[i]$. Cela impose donc $Z[1,i] = ZX[1,i] > YX[1,i] = Y[1,i]$. De plus, les chiffres de XZ et de XY sont égaux jusqu'au $|X|+i-1^{\text{ème}}$ (et donc en particulier jusqu'au $i^{\text{ème}}$ car on a traité séparément le cas ou $X = 0$). On a donc:

$$\begin{aligned} ZX[1,i] &> YX[1,i] \\ &\geqslant XY[1,i] && (\ X \preceq Y) \\ &= XZ[1,i]. \end{aligned}$$

Et donc $ZX > XZ$ car ces nombres ont le même nombre de chiffres, donc $X \preceq Z$.

Montrons maintenant que pour résoudre le problème il suffit de trier la liste selon la relation $\preceq$ (en plaçant les plus gros entiers pour $\preceq$ en 1^{er}) puis de renvoyer la concaténation de tout les entiers de la liste triée. Montrons le résultat par recurrence sur le nombre m d'entiers dans la liste. Si $m = 1$ le résultat est trivial. Sinon supposons par l'absurde qu'il n'existe aucune solution ou M_1 le permier élément de la liste est en premier dans le résultat. Donons nous une solution XYM_1Z où Y ou M_1 est le plus à gauche, ici Y est un entier de la liste et X et Z sont des concaténations (potentiellement vides) d'entiers de la liste. Comme $Y \preceq M_1$, $XM_1YZ \geqslant XYM_1Z$ et donc on a trouvé une solution où M_1 est plus à gauche que dans la précédente, absurde, donc il existe une solution ou M_1 est en premier. Par récurrence, une solution possible, que l'on notera M', pour le reste de la liste est de concaténer le reste trié pour $\preceq$. Comme concaténer M_1 à gauche est une fonction croissante, il est clair qu'on obtient un résultat optimal parmi ceux qui commencent par M_1 avec M_1M'. Or il existe des résultats optimaux pour toute la liste commençant par M_1 donc M_1M' est une solution valide.

Question 2

Donnons nous X et Y des entiers écrits en binaire, de longueur respectives l_X et l_Y, ainsi que T leur arbre suffixe généralisé. On supposera que la structure de cette arbre est enrichie pour pouvoir accéder aux requètes de plus proche ancètre commun en temps constant, et qu'on dispose de plus de deux tableaux A_X et A_Y contenant respectivement dans leur case k un pointeur vers la feille de l'arbre correspondant à $X[k,l_X]$ (resp. $Y[k,l_Y]$). Cet enrichissement se fait en complexité temporelle $\mathcal{O}(l_X+l_Y)$, de même que la création des deux tableaux, dont le remplissage peut se faire en un parcours de l'arbre, qui a $\mathcal{O}(l_X+l_Y)$ arrêtes. On remarque que comme XY

et YX ont le même nombre ed chiffres, leur ordre relatif est déterminé par ordre lexicographique sur l'écriture en base 10.

On commence par aller chercher le plus proche ancètre commun des feuilles correspondant à X et Y (que l'on peut récupérer en temps constant grâce à A_X et A_Y).

Si cet ancêtre est un préfixe strict de X et de Y, alors on note $i < \min(l_X, l_Y)$ sa longueur. On a obtenu que $X[1,i] = Y[1,i]$ et $X[i+1] \neq Y[i+1]$, sinon on aurait trouvé un ancètre commun de longueur au moins $i+1$. Si $X[i+1] < Y[i+1]$, on renvoie que $X \preceq Y$, sinon, alors $X[i+1] > Y[i+1]$ et on renvoie $Y \preceq X$. Cette partie de l'algorithme est correcte car si $XY[1,i] = X[i,i] = Y[1,i] = YX[1,i]$ et $XY[i+1] = X[i+1] < Y[i+1] = YX[i+1]$ alors XY est plus petit en ordre lexicographique que YX et donc en ordre naturel par la remarque faqite au début de la réponse à cette question. Et l'argument symmétrique fonctionne si $X[i+1] > Y[i+1]$.

On suppose maintenant, quitte à échanger les rôles de X et de Y que l'ancètre trouvé est égal à X. Si il est aussi égal à Y, alors $X = Y$ et on peut renvoyer $X \preceq Y$. Sinon $l_X < l_Y$ et X est un préfixe strict de Y, ce qu'on peut écrire $Y = XZ$, où $Z = Y[l_X, l_Y]$. La position de la feuille de T coresspondant au suffixe Z de Y est sauvegardée dans A_Y et on peut donc la retrouver en temps constant. On considère maintenant le plus proche ancètre commun de Y et Z dans T et on note i' la longueur de la chaîne associée. Encore une fois si $i' < l_Z = l_Y - l_X$ alors on a $Y[1,i'] = Z[1,i']$ et $Y[i'+1] \neq Z[i'+1]$, ou les deux termes de cette équation sont bien définis. Si $Y[i'+1] < Z[i'+1]$ alors on renvoie $X \preceq Y$. En effet, on a alors

$$XY[1, l_X + i'] = X(Y[1,i']) = X(Z[1,i']) = XZ[1, l_X + i'] = Y[1, l_X + i'] = YX[1, l_X + i'],$$

et

$$XY[l_X + i' + 1] = Y[i'+1] < Z[i'+1] = XZ[l_X + i' + 1] = YX[l_X + i' + 1].$$

Donc $XY < YX$ en ordre lexicographique donc naturel et $X \preceq Y$. Si $Y[i'+1] > Z[i'+1]$ un argument symmétrique montre bien que $Y \preceq X$ donc on renvoie cela.

Si maintenant $i' = l_Z$ alors Z est un préfixe de Y et on a $Y = ZZ'$, avec $Z' = Y[l_Y - l_X, l_Y]$, de taille l_X. On récupère le plus proche ancètre commun à X et Z' (dont on récupère la feuille correspondante avec A_Y). On note i'' la longueur de la chaîne associée à cet ancètre. Si $i'' < l_X$ alors $X[1,i''] = Z'[1,i'']$ et $X[i''+1] \neq Z'[i''+1]$. Si $Z'[i''+1] < X[i''+1]$ alors on renvoie $X \preceq Y$. En effet, on a alors:

$$XY[1, l_Y + i''] = XZZ'[1, l_Y + i''] = XZ(Z'[1,i'']) = XZ(X[1,i'']) = YX[1, l_Y + i''],$$

et

$$XY[1, l_Y + i'' + 1] = Z'[i''+1] < X[i''+1] = YX[l_Y + i'' + 1].$$

Donc $XY < YX$ et $X \preceq Y$. Symmétriquement si $Z'[i''+1] > X[i''+1]$ alors on a $XY \geqslant YX$ et on renvoie $Y \preceq X$.

Finalement si $i'' = l_X$, on a $X = Z'$ et donc

$$XY = XZX = YX$$

et on peut renvoyer $X \preceq Y$.

Au total, on fait au plus trois recherches de plus proche ancètre commun, qui se font en temps constant, deux accès à des tableaux et un nombre borné par une constante de comparaisons entre entiers pour l'ordre naturel. La compléxité de la comparaison, la structure initiale étant donnée, est donc bien en $\mathcal{O}(1)$.

Question 3

Commençons par noter qu'il y a $l = 10^{\lceil(\log_{10} n)/4\rceil - 1} \leqslant Cn^{1/4}$ entiers positifs ayant strictement moins de $(\log_{10} n)/4$ chiffres.

On commence par construire un tableau T de taille l rempli de zéros, indéxé à partir de 0, et une liste L initialement vide. On fait ensuite une passe sur les nombres de la liste initiale ayant strictement moins de $(\log_{10} n)/4$ chiffres. Quand on rencontre N, on incrémente la case N du tableau (on a bien $N < l$), et si elle était à 0 avant incrémentation, on rajoute N à L, de sorte que L ne contient pas de duplicata. Cette étape s'effectue en temps $\mathcal{O}(n)$.

On trie ensuite L avec un algorithme standard, par exemple un tri fusion. Comme les comparaisons se font en temps constant d'après la question 2, et que L contient au plus l éléments, ce tri se fait en temps $\leqslant Cl\log(l) \leqslant C'n^{1/4}\log(n)$. On rajoute ensuite dans une autre liste L', initailement vide, les éléments de L, dans l'ordre, et mettant $T[N]$ fois un élément N. Cela prend un temps borné par le nombre d'éléments dans L', et elle contient exactement les éléments de la liste initiale ayant strictement moins de $(\log_{10} n)/4$ chiffres. Cette étape est donc bornée en temps par $\leqslant Cn$.

Le temps total de calcul pour cette question est donc en $\mathcal{O}(n)$.