Programmes de colles 2023-2024

MPSI 2

Semaine 6 (18/11)

systèmes linéaires (visée pratique niveau Terminale "ancienne version", aucune théorie : les notions de rang, l'algèbre linéaire etc complètement hors–sujets).
Début des structures algébriques. Pa s de groupe, anneau , corps, cf programme plus bas

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Résolution de $\boxed{\text{petits}}$ systèmes linéaires par la méthode du pivot	
Système linéaire à coefficients réels de $\boxed{\text{deux ou trois}}$ équations à $\boxed{\text{deux ou trois}}$ inconnues. Algorithme du pivot et mise en évidence des opérations élémentaires. Ecriture rigoureuse de l'ensemble des solutions.	Interprétation géométrique : intersection de droites dans $\mathbb{R}^2$, de plans dans $\mathbb{R}^3$. Notations $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ $(\lambda \neq 0)$, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j (i \neq j)$. **Si le candidat est à l'aise, montez le niveau et passez à plus de trois inconnues.**

Structures algébriques usuelles : Loi de composition interne uniquement

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Loi de composition interne	
Loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité. L'élément neutre est unique. Si la loi est associative, et qu'il existe un élément neutre, le symétrique est unique s'il existe. Itéré d'un élément lorsque la loi est associative et qu'il existe un élément neutre. Partie stable.	On évite l'étude de lois artificielles. Inversibilité et inverse du produit de deux éléments inversibles.
Hors–programme officiel à ce niveau, mais ce serait dommage de le taire : morphismes de lois Exemples : exp, ln, etc	composition de morphismes, réciproque d'un isomorphisme. Pas de noyau à ce niveau de généralité.

Semaine 5 (11/11)

Arithmétique des entiers relatifs
Relation binaires
Borne supérieure

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Propriété de la borne supérieure	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure). Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a, b] \subset X$.	Notations $\sup X$, $\inf X$.
Densité	
Approximations décimales d'un réel.	Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès.
Tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Notion de partie dense de $\mathbb{R}$. Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.	Exemples : $\mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Relations binaires sur un ensemble	
Relation d'équivalence, classes d'équivalence.	La notion d'ensemble quotient est hors programme. Les classes d'équivalence forment une partition de l'ensemble sous-jacent. Congruences dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{Z}$. Notation $a \equiv b\ [c]$.
Relation d'ordre. Ordre partiel, total.	Voici d'autres concepts dont j'ai parlé, mais moins exigibles car le programme reste solencieux à leur propos : maximum, minimum, borne supérieure et inférieure.

Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne.	Caractérisation des couples d'entiers associés.
PGCD et algorithme d'Euclide	
PGCD de deux entiers naturels dont l'un au moins est non nul.	Notation $a \wedge b$. Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans $\mathbb{N}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.
Algorithme d'Euclide.	L'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs de $a \wedge b$. $a \wedge b$ est le plus grand élément (au sens de la divisibilité) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, PGCD de ka et kb.
Extension au cas de deux entiers relatifs.	
Relation de Bézout.	Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.

Contenus	Capacités & Commentaires
PPCM.	Notation $a \vee b$.
Entiers premiers entre eux	
Couple d'entiers premiers entre eux. Théorème de Bézout. Lemme de Gauss. Si a et b sont premiers entre eux et divisent n, alors ab divise n. Si a et b sont premiers à n, alors ab est premier à n. PGCD d'un nombre fini d'entiers, relation de Bézout. Entiers premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.	 Forme irréductible d'un rationnel.
Nombres premiers	
Nombre premier. L'ensemble des nombres premiers est infini. Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.	Crible d'Ératosthène. Dans mon cours et contrairement au programme officiel, j'ai admis l'unicité pour court-circuiter les étapes de construction et arriver plus vite aux résultats et aus exercices.
Pour p premier, valuation p-adique. Valuation p-adique d'un produit.	Notation $v_p(n)$. Caractérisation de la divisibilité en termes de valuations p-adiques. Expressions du PGCD et du PPCM à l'aide des valuations p-adiques.
Congruences	
Relation de congruence modulo un entier sur $\mathbb{Z}$. Opérations sur les congruences : somme, produit. Utilisation d'un inverse modulo n pour résoudre une congruence modulo n. Petit théorème de Fermat.	Notation $a \equiv b\ [n]$. Les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont hors programme.

Semaine 4 (4/11)

Deux thèmes avec des objectifs très distincts cette semaine.
A – Applications (encore!) Insistez absolument sur la rigueur dans les démonstrations et sur le schéma démonstratif : que veut-on démontrer, comment, utilisation précise des hypothèses, etc
B – Calcul intégral, Equations différentielles objectif quasi–exclusivement opératoire et calculatoire "pour les sciences expérimentales" : on veut qu'ils sachent calculer des intégrales et des primitives, des ensembles de solutions.

Contenus	Capacités & commentaires
Applications	
Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathscr{F}(E,F)$ et F^E.
Famille d'éléments d'un ensemble. Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble. Restriction et prolongement. Composition.	 Notation $\mathbb{1}_A$. Notation $f\|_A$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.	
Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	Notation f^{-1}. Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque.
Image directe.	Notation $f(A)$.
Image réciproque.	Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.

Calcul de primitives

Contenus	Capacités & Commentaires
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée f. On pourra noter $\int^{x} f(t)\mathrm{d}t$ une primitive générique de f.
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.	Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.
Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Intégration par parties, changement de variable.	Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Contenus	Capacités & Commentaires
Équation différentielle linéaire du premier ordre $$y' + a(x)y = b(x)$$ où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.
Ensemble des solutions de l'équation homogène.	
Principe de superposition.	
Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	
Méthode de la variation de la constante.	
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Contenus	Capacités & Commentaires
Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $$y'' + ay' + by = f(x)$$ où a et b sont des scalaires et f est une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle.	Équation homogène associée.
Ensemble des solutions de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Principe de superposition.	
Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	On a vu comment déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $x \mapsto A\mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme.

Semaine 3 (14/10)

Nombres complexes – Partie entière - Applications (attention ce chapitre sera terminé le lundi)

Contenus	Capacités & commentaires
a) Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes. Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.	La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).
b) Conjugaison et module	
Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Module. Relation $\lvert z\rvert^2 = z\overline{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Image du conjugué dans le plan complexe. Interprétation géométrique de $\lvert z - z'\rvert$, cercles et disques.
c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	
Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ pour $t \in \mathbb{R}$. Exponentielle d'une somme.	Notation $\mathbb{U}$.
Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}$.	Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q), \sin(p) \pm \sin(q)$. Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
Formule de Moivre.	Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.
d) Forme trigonométrique	
Forme trigonométrique $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(r > 0)$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient. Transformation de $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t - \varphi)$.	
e) Équations algébriques	
Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$.	Résultat évidement admis pour le moment.
Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$. Somme et produit des racines.	Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.
f) Racines n-ièmes	
Description des racines n-ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.	Notation $\mathbb{U}_n$. Représentation géométrique.
g) Exponentielle complexe	
Définition de e^z pour z complexe : $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)}$. Exponentielle d'une somme. Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$. Résolution de l'équation $\exp(z) = a$.	Notations $\exp(z)$, e^z. Module et arguments de e^z.

Contenus	Capacités & Commentaires
Partie entière	
Partie entière d'un nombre réel.	Notation $\lfloor x \rfloor$.
Relation de congruence sur $\mathbb{R}$.	Notation $a \equiv b\ [c]$.
Pour tout x réel et tout $a > 0$ réel, il existe un unique couple $(n, y) \in \mathbb{Z} \times [0, a[$ tel que $x = an + y$	$a = 1$: partie fractionnaire.
A partir de mercredi 18/10 : Résolution d'inéquations du type $n^2 > A$ d'inconnue n.	Ensemble des solutions; brève remarque sur la notion de propriété vraie à partir d'un certain rang.

Contenus	Capacités & Commentaires
Applications	
Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathscr{F}(E, F)$ et F^E.
Famille d'éléments d'un ensemble.	
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.	Notation $\mathbb{1}_A$.
Restriction et prolongement.	Notation $f\|_A$.
Composition.	
Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.	
A partir de ce point, au programme uniquement à partir de mercredi soir! Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	Notation f^{-1}. Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque.
Image directe.	Notation $f(A)$.
Image réciproque.	Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.
Relations habituelles : $f^{-1}(A \cap B)$, $f(A \cup B)$ etc	

Semaine 2 (07/10)

Contenus	Capacités & commentaires
Trigonométrie	
Cercle trigonométrique. Paramétrisation par cosinus et sinus.	
Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$.	Notation $a \equiv b\ [2\pi]$.
Cosinus et sinus de $\pi \pm x$, de $\frac{\pi}{2} \pm x$. Cosinus et sinus des angles usuels.	Les étudiants doivent savoir retrouver ces résultats et résoudre des équations et inéquations trigonométriques simples en s'aidant du cercle trigonométrique.
Formules d'addition $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$. Cas particulier des formules de duplication : $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.	On présente une justification géométrique de l'une de ces formules. Les étudiants doivent savoir retrouver rapidement les formules donnant $\cos(a)\cos(b)$, $\cos(a)\sin(b)$, $\sin(a)\sin(b)$.
Fonctions circulaires cosinus et sinus.	On justifie les formules donnant les fonctions dérivées de sinus et cosinus vues en classe de terminale.
Pour $x \in \mathbb{R}$, inégalité $\|\sin(x)\| \leqslant \|x\|$.	
Fonction tangente.	Notation tan. Dérivée, variations, représentation graphique.
Tangente de $\pi \pm x$. Tangente des angles usuels.	Interprétation sur le cercle trigonométrique.
Formule d'addition $\tan(a \pm b)$.	Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ en fonction de $\tan(t/2)$.

Contenus	Capacités & Commentaires
	Résolutions d'équations et inéquations trigonométriques.
Fonctions usuelles	
Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$. Logarithme décimal, logarithme en base 2.
Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$. Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle. Inégalités $\exp(x) \geqslant 1 + x$, $\ln(1 + x) \leqslant x$.	
Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan.	Dérivée, variations, représentation graphique.
Fonctions hyperboliques sh, ch, th.	Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme (même si on a calculé $argsh$ en exercice). La seule formule exigible est $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.
Dérivation	
Dérivée d'une fonction (à valeurs réelles...).	Notations $f'(x)$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)$.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.	Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente; ils ne sont pas démontrés à ce stade. Exemples simples de calculs de dérivées partielles.
Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.	Résultats admis à ce stade.
Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe.	Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités.
Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.	La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.
Dérivées d'ordre supérieur.	Définition informelle et exemples très simples.

Semaine 1 (30/09)

Logique, nombre réels : calculs, inégalités. – **Fonctions : ATTENTION uniquement de la variable réelle et à valeurs réelles.**
Ensembles.
Pas de dérivation etc.

Contenus	Capacités & commentaires
Inégalités	
Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Compatibilité avec les opérations. Intervalles de $\mathbb{R}$.	Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients. Utilisation de factorisations et de tableaux de signes. Résolution d'inéquations.
Valeur absolue. Inégalité triangulaire.	Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $\lvert x - a\rvert \leqslant b$.
Dans $\mathbb{R}$, parties majorées, minorées. Majorant, minorant; maximum, minimum.	
Généralités sur les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$	
Ensemble de définition.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$.
Parité, imparité, périodicité.	Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.
Somme, produit, composée.	
Monotonie (large et stricte).	Stabilité par composition.
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Traduction géométrique de ces propriétés. La fonction f est bornée si et seulement si $\lvert f\rvert$ est majorée.
Fonctions bijectives	La notion de bijection est nouvelle pour les étudiants.
Rudiments de logique, suite	
Modes de raisonnement : par analyse-synthèse.	Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et condition suffisante.
Exemple de résolution d'(in)équation par analyse-synthèse	Exemples de résolution par équivalence. Moralité : on privilégie l'analyse synthèse, on réserve les équivalences à des situations connues, ie 'pré-résolues algorithmiquement'.
Notion d'unicité, existence.	$\exists!$; négation de telles assertions
Ensembles	
Ensemble, appartenance. Ensemble vide.	
Inclusion. Partie (ou sous-ensemble).	
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	Notion de couple, triplet, etc
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathscr{P}(E)$.
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire.	Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, $\overline{A}$ et A^c pour le complémentaire.
Généralisation $\bigcup_{i\in I} A_i$, $\bigcap_{i\in I} A_i$	

Semaine du 23 septembre

En raison du Séminaire Pluridisciplinaire d'Intégration (SPI), toutes les colles sont supprimées cette semaine.

Semaine 0 (16/09)

Attention première semaine de colles.
Logique.
Nombre réels : calculs algébriques.

Contenus	Capacités & commentaires
Rudiments de logique et un peu d'ensembles (le minimum vital pour pouvoir s'exprimer)	
Connecteurs logiques	
Quantificateurs.	L'emploi de quantificateurs en guise d'abreviations est exclu.
Implication, contraposition, equivalence.	Les etudiants doivent savoir formuler la negation d'une proposition.
Modes de raisonnement : par disjonction de cas, par recurrence (**faible** seulement), par contraposition, par l'absurde.	
Ensemble, appartenance, inclusion. Sous-ensemble (ou partie). Ensemble vide.	Preuve par double inclusion

Contenus	Capacités & Commentaires
	Aucune theorie des ensembles : **les notions de, complementaires, reunion, produits cartesiens etc seront vues plus tard**.
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}; \emptyset$	

Révisions de calculs

Quatre opérations, puissances, racine carrée, identités remarquables, factorisations.	Compétences de niveau collège "bien compris".

Sommes et produits

Somme et produit d'une famille finie de nombres réels.	Notations $\sum_{i\in I} a_i$, $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\prod_{i\in I} a_i$, $\prod_{i=1}^{n} a_i$. Cas où I est vide.
Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes. Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} x^k$. Factorisation de $a^n - b^n$ par $a-b$.	Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.
Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.	Exemples de sommes triangulaires.
Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux.	Convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k<0$ et $k>n$.
Formule du binôme dans $\mathbb{R}$.	

Type d'exercices vus : formalisation avec des quantificateurs de toutes ces propriétés, stabilité.
Cette semaine, l'objectif est de travailler un peu le calcul de base et de savoir bien rédiger des démonstrations faciles. Veillez à etre tres attentif a bien introduire vos objets (" Soit $x \in E$ " par exemple), á conclure, et bien rédiger les démonstrations.
Exemples d'exercices :
Exercice Déterminer parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses. Le démontrer ensuite.

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ (x+1=0 \text{ et } x+2=0)$.
2. $(\exists x \in \mathbb{R},\ x+1=0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R},\ x+2=0)$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ (x+1 \neq 0 \text{ ou } x+2 \neq 0)$.
4. $\exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0;$
5. $\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0;$
6. $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*,\ \exists x \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0;$

Réponse: des questions 1 à 4)

1. Montrons que l'assertion "$\exists x \in \mathbb{R},\ (x+1=0 \text{ et } x+2=0)$" est fausse. Raisonnons par l'absurde : soit x vérifiant $(x+1=0 \text{ et } x+2=0)$; alors en faisant la différence des deux égalités on trouve $1=0$, absurde.
2. Montrons que l'assertion $(\exists x \in \mathbb{R},\ x+1=0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R},\ x+2=0)$. est vraie.
   Montrons $\exists x \in \mathbb{R},\ x+1=0$. Posons $x=-1$: alors $x+1=0$, ce qui prouve cette asseertion. On fait de même pour l'assertion $\exists x \in \mathbb{R},\ x+2=0$, et la conjonction est donc vraie.
3. Montrons que l'assertion $\forall x \in \mathbb{R},\ (x+1 \neq 0 \text{ ou } x+2 \neq 0)$ est vraie.
   Soit x un réel; raisonnons par disjonction de cas.
   Cas 1 : $x+1 \neq 0$, il n'y a rien à démontrer.
   Cas 2 : $x+1=0$; donc $x+2=1\neq 0$.
   Ainsi l'une des deux propositions au moins est vraie.

Exercice

1. Ecrire :
   $$A = \left(3^{23} - 3^{22}\right)\left(3^{24} - 3^{23}\right)\left(3^{25} - 3^{24}\right)$$
   sous la forme $2^m \times 3^n$ avec $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.
2. Factoriser $C = 3^{2019} - 3^{2018}$

3. Calculer $D = 3^{2^{85}} - 9^{4^{42}}$
4. Calculer $E = \dfrac{2^n + 2^{n-1}}{2^{n+1} - 2^n}$
5. Calculer $F = \frac{(3^{2017})^2 - (3^{2015})^2}{(3^{2018})^2 - (3^{2016})^2}$.
6. Comparer les deux réels $\sqrt{5 + 5/24}$ et $5\sqrt{5/24}$.
7. * Calculer $N = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ (On admet que pour tout réel y, il existe un unique réel x tel que $x^3 = y$; on note $x = \sqrt[3]{y}$)