EXERCICE 8 $\boxed{\textbf{F}}$ Solution

Soit $(G, \cdot)$ un groupe tel que :

$$\forall x \in G,\ x^2 = e.$$

Montrer que $(G, \cdot)$ est abélien.

$\boxed{22}$ *Théorème de Lagrange*

Soit G un groupe fini de cardinal n, noté multiplicativement. On souhaite montrer que pour tout $x \in \mathrm{G}$, $x^n = 1$.

1. Soit H un sous-groupe de G.

a. Montrer que l'on définit une relation d'équivalence sur G en posant, pour tous $x, y \in \mathrm{G}$,

$$x \sim y \iff x^{-1}y \in \mathrm{H}.$$

b. Quelle est la classe d'équivalence d'un élément $x \in \mathrm{G}$?

c. En déduire que $\#\mathrm{H}$ divise $\#\mathrm{G}$.

2. Soit $x \in \mathrm{G}$.

a. Justifier l'existence d'un unique entier $n_x \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^{n_x} = 1$ et :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad x^k = 1 \iff n_x \,|\, k\ .$$

L'entier n_x est appelé l'*ordre* de x.

b. Conclure.

1 Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la matrice carrée
✎★

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Montrer qu'il existe deux réels a_n et b_n que l'on déterminera tels que $\mathrm{M}^n = a_n\mathrm{M} + b_n\mathrm{I}_3$.
2. Retrouver le résultat de la question **1.** en utilisant un polynôme annulateur de degré 2 de M.
3. Retrouver le résultat de la question **1.** en développant $\big((\mathrm{M} + \mathrm{I}_3) - \mathrm{I}_3\big)^n$.

carrées.

28 Soit A un anneau commutatif non nul. Un élément $x \in \mathrm{A}$ est dit *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$.

1. **a.** Quels sont les éléments nilpotents d'un anneau intègre ?
   b. Un élément nilpotent est-il inversible ?
2. Montrer que les éléments nilpotents de A en forment un idéal N (appelé nilradical de A).

3. Soit $x \in \mathrm{A}$ un élément nilpotent et $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$.
   a. Montrer que $1 - x$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de x.
   b. Montrer que $(1-x)^2$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de x.
   c. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(1-x)^{p+1}$ est inversible, avec :
$$(1-x)^{-p-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{p+k}{p} x^k.$$
4. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n1_{\mathrm{A}} \in \mathrm{A}^{\times}$; on notera $\frac{1}{n}$ l'inverse de $n1_{\mathrm{A}}$.
   Pour tout $x \in \mathrm{N}$, on pose
$$\mathbf{e}^x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}.$$
   Justifier cette écriture et montrer que :
$$\forall (x, y) \in \mathrm{N}^2, \quad \mathbf{e}^{x+y} = \mathbf{e}^x \mathbf{e}^y.$$

$\boxed{37}$ **1.** Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3}\}_{a,b\in\mathbb{Q}}$ est un corps.

2. Déterminer les automorphismes du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

3. Les corps $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sont-ils isomorphes ?

$\boxed{3}$ On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ✎★ $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$. On considère la matrice

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on pose par ailleurs :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une matrice $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{A}\mathrm{U}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Expliciter U_n en fonction de A, U_0 et $n \in \mathbb{N}$.

2. **a.** Montrer que P est inversible, calculer P^{-1} puis $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$. Déterminer l'expression de D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Exprimer A^n en fonction de P, D et n.

c. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.