Questions de cours MPSI

MPSI 2

Il s'agit pour chacune des questions, d'énoncer le résultat et, lorsque cela est précisé, de le démontrer.

Questions de cours au programme de colle cette semaine : 64 à 82

Consigne aux colleurs: posez une question de chaque couleur. Le temps passé à restituer ces questions par écrit au tableau doit être inférieure à 10 minutes (ne comptez pas le temps de présentation orale, qui est supposé rapide). Mettez un chronomètre.

En cas de question de cours non sue dans le temps imparti, passez à l'exercice. Une question de cours non sue donnera lieu à une note de colle inférieure ou égale à 8.

Conseil aux étudiants : entraînez-vous, de votre côté, à une restitution en temps limité pour y arriver en colle.

1. Soit E, F, G trois ensembles. Montrer que si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$.

2. Donner la définition de "$A \Rightarrow B$". Donner sa négation, sa contraposée, sa réciproque. Application: Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, écrire avec des quantificateurs les assertions: f est croissante, f est décroissante, f n'est pas croissante.

3. Quand peut-on intervertir deux quantificateurs ? Donner un exemple de proposition où l'interversion est illicite.

4. Donner six types d'assertion vues en cours de logique. Donner pour chacune un schéma démonstratif type. **Réponse attendue** Il s'agit de:

   (a) $\exists x \in E \quad P(x)$. Schéma type:

   $$\text{Posons } x = \dots \text{. On a [...]. Donc } P(x)\text{, et donc } \exists x \in E \quad P(x).$$

   (b) $\forall x \in E \quad P(x)$. Schéma type:

   $$\text{Soit } x \in E\text{. Alors [...] donc } P(x)\text{. Ainsi on a } \forall x \in E \quad P(x)$$

   (c) P ou Q. Schéma type:

      i. Cas 1: P vraie: rien à démontrer.
      ii. Cas 2 : P fausse: alors [...] donc Q est vraie.

      Ainsi P ou Q est vraie.

   (d) P et Q. Schéma type:
   On démontre les deux assertions P et Q séparément; ou alors on démontre P, puis Q (en s'aidant de P).

(e) $P \Rightarrow Q$. Schéma type:

Supposons P. Alors [...]. Donc Q. Ainsi on a $P \Rightarrow Q$.

(f) $P \Longleftrightarrow Q$. Schéma type:

Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons P. Alors [...] donc Q.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons Q. Alors [...] donc P.

On a donc $P \Leftrightarrow Q$.

Autres propositions: On peut aussi mentionner la négation de P.

5. Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la somme $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$.

6. Calculer, pour tout entier naturel $n \geq 2$, la somme $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{2}{k(k+2)}$.

7. Enoncer et démontrer la formule du binôme de Newton. **Réponse attendue** Déonstration par récurrence (le dénombrement sera fait au 2eme semestre et n'est pas exigible ici); vu la longueur de la preuve, on ne demande que la rédaction de l'hérédité.

8. Reformuler l'inégalité $|x-a| \leq h$ sans valeurs absolues. Démontrer votre affirmation

   Réponse attendue Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+$. Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, on a $|x-a| \leq h$ si, et seulement si $a-h \leq x \leq a+h$. La démonstration peut se faire par équivalence, en remarquant que $|a-h| = \max(a-h, h-a)$.

9. Enoncer les inégalités triangulaires; démontrer l'une des deux (au choix de l'examinateur). **Réponse attendue** Si x et y sont deux réels quelconques, alors on a :

$$|x+y| \leq |x| + |y| \text{ et } \big||x| - |y|\big| \leq |x-y|.$$

10. Donner la définition de la somme, du produit, et de la composée de deux fonctions; au besoin, préciser les conditions pour que ces objets soient bien définis.

11. Montrer que la composée de deux fonctions **dé**croissantes est croissante.

12. Donner la définition d'une fonction périodique. **Réponse attendue** Attention l'ensemble de définition doit etre invariant par $\pm T$–translation.

13. Donner l'ensemble des parties de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

14. On se donne des parties $A_1, A_2, \cdots, A_n$ d'un ensemble E. Définir $\bigcup_{i=1}^{n} A_i, \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, donner leurs complémentaires.

    Réponse attendue On a $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \in E | \exists i \in [|1,n|] \quad x \in A_i\}$, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \in E | \forall i \in [|1,n|] \quad x \in A_i\}$, $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

15. Résoudre par analyse synthèse le système suivant: $\begin{cases} \sqrt{x^2+2y+y^2} = y \\ x^2+y^2 = 2xy \end{cases}$

    Réponse attendue Décryptez bien cet énoncé: ce qu'il demande, c'est de donner tous les $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ telles que les deux égalités suivantes sont vraies: $\sqrt{x^2+2y+y^2} = y$ et $x^2+y^2 = 2xy$.

    Autrement dit, on demande de décrire l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2+2y+y^2} = y \text{ et } x^2+y^2 = 2xy\}$ en donnant ses éléments.

- **Analyse ($\Rightarrow$).** Soit (x, y) une solution du système. On a alors $\sqrt{x^2 + 2y + y^2} = y$ donc $x^2 + 2y + y^2 = y^2$ puis $x^2 + 2y = 0$. De plus $x^2 + y^2 = 2xy$ donc $(x - y)^2 = 0$ donc $x = y$. Ainsi $x^2 + 2x = 0$ donc $x = 0$ (et $y = 0$) ou $x = -2$ (et $y = -2$).

  Par ailleurs, la première égalité montre que y est positif car $y = \sqrt{x^2 + 2y + y^2} \geq 0$. Ainsi $y = -2$ est exclu, aussi a-t-on $x = y = 0$.
- **Synthèse ($\Leftarrow$)** On vérifie que $(0, 0)$ est bien solution.

Ainsi l'ensemble des solutions du système d'équations est $\{(0, 0)\}$.

16. Donner la définition de la fonction sh (sinus hyperbolique), prouver que cette fonction est bijective et donner sa bijection réciproque.

    Réponse attendue Soit $y \in \mathbb{R}$. **Raisonnons par analyse-synthèse**

    - Analyse/Unicité.

      Soit un réel x tel que $y = \text{sh}x$. On a alors $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $e^{2x} + 2ye^x - 1 = 0$ Ainsi, e^x est solution de l'équatin $u^2 - 2yu - 1 = 0$ donc en posant $\Delta = (-2y)^2 + 4 = 4(y^2 + 1)$ on a $e^x = (y \pm \sqrt{y^2 + 1})$.

      Comme $e^x > 0$, et que $y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$ on a donc $e^x = (y + \sqrt{y^2 + 1})$ donc $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$

      Ainsi, si un tel x existe, alors il est unique.
    - Synthèse/existence.

      Réciproquement, posons $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$

      Cet x existe bien puisque $y^2 + 1$ est positif, et que $y + \sqrt{y^2 + 1} > y + \sqrt{y^2} \geq y + |y| \geq 0$ ainsi $y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$ et ln est défini en $y + \sqrt{y^2 + 1}$.

      On a alors

      $$\begin{aligned} e^x - e^{-x} &= y + \sqrt{y^2 + 1} - \frac{1}{y + \sqrt{y^2 + 1}} \\ &= y + \sqrt{y^2 + 1} - \frac{-y + \sqrt{y^2 + 1}}{1} \\ &= y + \sqrt{y^2 + 1} - \frac{-y + \sqrt{y^2 + 1}}{1} \\ &= 2y \end{aligned}$$

      ce qui montre l'existence, et conclut la démonstration.

17. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la dérivée de f pour que f soit constante sur I. Le résultat demeure-t-il si I n'est pas un intervalle ?

18. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la dérivée d'une fonction f pour que f soit strictement croissante sur l'intervalle I. Donner des contre–exemples.

    Réponse attendue On attend: f' est positive sur I et ne s'annule identiquement sur aucun segment $[a, b]$ d'intérieur non vide de I.

    Contre exemples attendus: I n'est pas un intervalle; la dérivée strictement positive n'est pas nécessaire; la dérivée strictement positive sauf en un nombre fini de points n'est pas nécessaire (dessin au tableau)

19. Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la bijection.

20. Enoncer des résultats sur la dérivablité et la dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée de deux fonctions.

21. Donner les relations entre sin et cos que l'on peut déduire de la lecture sur le cercle trigonométrique et sur le triangle rectangle.

    On demandera au choix toutes les relations à partir de cos(première colonne du tableau) ou toutes les relations à partir de sin (deuxieme colonne du tableau)

    Réponse attendue

◯ trigo	$\cos(-\theta)=\cos(\theta)$ $\cos(\pi+\theta)=-\cos(\theta)$ $\cos(\pi-\theta)=-\cos(\theta)$	$\sin(-\theta)=-\sin(\theta)$ $\sin(\pi+\theta)=-\sin(\theta)$ $\sin(\pi-\theta)=\sin(\theta)$	$\tan(-\theta)=-\tan(\theta)$ $\tan(\pi+\theta)=\tan(\theta)$ $\tan(\pi-\theta)=-\tan(\theta)$
△ rectgl	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin(\theta)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos(\theta)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$
	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin(\theta)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos(\theta)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$

attention aux valeurs interdites de θ pour tan

22. Si $u=\tan\frac{t}{2}$, donner $\cos t$, $\sin t$, $\tan t$ en fonction de u; démontrer ces formules. **Réponse attendue** $\cos t=\frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin t=\frac{2u}{1+u^2}$

23. A partir de la définition de la fonction ln, prouver que pour tous réels a et b strictement positifs, on a $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$. **Réponse attendue** La fonction ln est définie comme primitive...

24. Montrer que la fonction tan est dérivable et donner deux expressions de sa dérivée. **Réponse attendue** Quotient de deux fonctions drv, $1/\cos^2$, $1+\tan^2$

25. Donner la définition de arctan et donner (et démontrer) une expression de sa dérivée. **Réponse attendue** Bijection réciproque (préciser intervalles)

26. Que dire des expressions $\arcsin(\sin x)$ et $\sin(\arcsin(x))$? **Réponse attendue** Question très courte, il faut une réponse rapide (comme toujours avec les questions de ce type). Ici:

    - pour tout $x\in[-1,1]$, on a $\sin(\arcsin x)=x$;
    - pour tout $\alpha\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, on a $\arcsin(\sin\alpha)=\alpha$.

    La première formule n'a pas de **sens** si $x\notin[-1,1]$ et la deuxième n'est a priori plus vraie si $\alpha\notin[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

27. Donner la dérivée de arcsin (avec démonstration). Version avancée Semestre 2: En exploitant les résultats d'analyse vus au deuxième semestre, donner en plus des conséquences sur arcsinus.

    Réponse attendue Ils doivent aussi démontrer la relation $\cos(\arcsin(x))=\ldots$.

    Version avancée Semestre 2:: Les conséquences en terme d'équivalent, DL à l'ordre n en 0, concavité/convexité sont attendues.

28. Donner la définition de la partie entière d'un nombre réel.

    De plus, si x est réel et n est un entier relatif, reformuler l'assertion $\lfloor x\rfloor<n$ sans partie entière. Preuve.

    Réponse attendue On a $(\lfloor x\rfloor<n)\iff x<n$. Preuve en utilisant la défintition.

29. **Enoncer et démontrer**, dans $\mathbb{C}$, la première inégalité triangulaire.

    Version avancée Semestre 2: Cas d'égalité, preuve, et interprétation géométrique.

    Réponse attendue

    La démonstration du cours est un raisonnement par équivalence:
    $$|z+z'|\leq|z|+|z'|\iff \mathrm{Re}(\bar{z}z')\leq|\bar{z}z'|$$
    On a l'égalité, ssi on a $\mathrm{Re}(\bar{z}z')=|\bar{z}z'|$ ssi $\bar{z}z'$ est un réel positif.

30. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in]0, 2\pi[$, calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos k\,\theta$.

    Pourquoi a-t-on supposé $\theta \neq 0$ et $\theta \neq 2\pi$? **Réponse attendue** Passage par la partie réelle, somme géométrique et technique de l'angle moitié.

31. Soit x un réel; linéariser $\sin^2(x)\cos^4(x)$. **Réponse attendue**

$$\begin{aligned}
\sin^2(x)\cos(x)^4 &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 \\
&= -\frac{1}{64}\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)\left(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}\right) \text{ binome} \\
&= -\frac{1}{64}\left(e^{6ix}+2e^{4ix}-e^{2ix}-4-e^{-2ix}+2e^{-4ix}+e^{-6ix}\right) \text{ developper -regrouper} \\
&= -\frac{1}{64}\left(e^{6ix}+e^{-6ix}+2(e^{4ix}+e^{-4ix})-(e^{2ix}+e^{-2ix})-4\right) \text{ Euler} \\
&= -\frac{1}{32}\left(\cos(6x)+2\cos(4x)-\cos(2x)-2\right)
\end{aligned}$$

32. Soit θ un réel: exprimer alors $\cos 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$. **Réponse attendue** La formule du binôme de Newton nous donne :

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^5 &= \cos^5\theta + 5\,i\,\cos^4\theta\,\sin\theta - 10\cos^3\theta\,\sin^2\theta \\
&\quad - 10\,i\,\cos^2\,\sin^3\theta + 5\cos\theta\,\sin^4\theta + i\,\sin^5\theta.
\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles, on obtient :

$$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\,\sin^2\theta + 5\cos\theta\,\sin^4\theta.$$

En remplaçant $\sin^2\theta$ par $1-\cos^2\theta$ dans l'expression de $\cos 5\theta$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\,(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta\,(1-\cos^2\theta)^2 \\
&= 16\,\cos^5\theta - 20\,\cos^3\theta + 5\,\cos\theta.
\end{aligned}$$

33. Donner tous les $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ tels que $x + y = -3$ et $xy = 2$.

34. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner toutes les racines n–emes de l'unité. Preuve.

35. Donner la **définition** d'une racine n–ieme d'un nombre complexe. Décrire ensuite ces racines n-èmes, preuve.

    Réponse attendue Soit $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^{\cdot} Z \in \mathbb{C}$. On dit que Z ets une récine n ième de z si l'on a $Z^n = z$.

    Sit Z_0 est **une** racine n ieme de z, l'ensemble des racines n ièmes de z est $\{Z_0\xi; \xi \in \mathbb{U}_n\}$.

36. Résoudre l'équation $e^z = a$ lorsque a est un nombre complexe non nul. **Réponse attendue** On écrit sous forme trigo $a = re^{it}$, aussi $z_0 = \ln(r) + it$ est une solution. Si z est complexe solution alors $e^z = e^{z_0}$, donc $e^{z-z_0} = 1$ puis ...

37. Que dire de la composée de deux injections, de deux surjections ? Démontrer ces résultats.

    Attention, ces questions 38 et 39 seront exigibles à partir de mercredi 16/10, ne pas interroger en début de semaine:

38. Soit $u : E \to F$ et $v : F \to E$ telles que $v \circ u = Id_E$ et $u \circ v = Id_E$. Montrer que u est bijective et que $v = u^{-1}$.

39. Enoncer quatre propriétés ensemblistes faisant intervenir des images réciproques. En démontrer certaines, au choix de l'examinateur. **Réponse attendue** Soit $u : E \to F$ et $B, B' \subset F$. On a: $B \subset B' \Rightarrow u^{-1}(B) \subset u^{-1}(B')$; $u^{-1}(B \cup B') = u^{-1}(B) \cup u^{-1}(B')$; $u^{-1}(B \cap B') = ...$; $u^{-1}(F \setminus B') = ...$

40. Donner une primitive d'une des fonctions suivantes (au choix de l'examinateur) sur son intervalle de définition: tan; $\cos^3$; $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$; $x \mapsto e^{\lambda x}\cos(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

    Expliquez comment vous avez trouvé cette primitive. **Réponse attendue** Ces exercices sont traités dans le polycopié de cours sur le calcul intégral et ont été vus en classe.

41. Enoncer la formule du changement de variable dans une intégrale et la formule d'intégration par parties dans une intégrale. Les utiliser pour donner une primitive de arctan et calculer l'intégrale $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt$. **Réponse attendue** IPP pour arctan, chgmt de variable pour la seconde: $t = \sin(u)$ par exemple. Ces exemples ont été faits en cours et sont rédigés dans les documents de cours.

42. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\beta \neq 0$. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de
    $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2} \end{array}.$$

    Réponse attendue Pour tout X réel on a:

    $\int_0^X \dfrac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta^2}\int_0^X \dfrac{dx}{(\frac{x-\alpha}{\beta})^2+1} \overset{u=\frac{x-\alpha}{\beta}, du=\frac{1}{\beta}dx}{=} \frac{1}{\beta^2}\int_{...}^{\frac{X-\alpha}{\beta}} \dfrac{\beta dx}{u^2+1} = \frac{1}{\beta}\arctan(\dfrac{X-\alpha}{\beta}) + C$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction est donc : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\beta}\arctan(\dfrac{x-\alpha}{\beta}) \end{array}$.

43. Pour une équation différentielle linéaire du premier ordre, énoncer et démontrer le principe de superposition.

44. Pour une équation différentielle linéaire du premier ordre, expliquer la méthode de la variation de la constante.

45. Considérons une équation différentielle linéaire homogène du 2nd ordre à coefficients constants; donner ses solutions réelles et ses solutions complexes.

46. Qu'est-ce qu'un problème de Cauchy, et quels résultats connaît-on à ce sujet ? **Réponse attendue** Ils ont deux problèmes de Cauchy à leur programme: celui pour les ED linéaires du premier ordre avec condition initiale sur y, et celui pour les ED linéaires du second ordre à coefficients constants avec conditions initales sur y et y' (au même t_0).

47. Définir (pour une partie A de $\mathbb{R}$) la borne supérieure, et donner la caractérisation de celle-ci.**Réponse attendue** Attention à ne pas méalnger définition, propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$, et caractérisation.

    On attend par exemple la caractérisation $a = \sup A \iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad a - \epsilon \leq x$

48. Donner deux définitions de la densité d'une partie de $\mathbb{R}$ et montrer l'équivalence de ces deux définitions. **Réponse attendue** Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) pour tout réel x et pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver au moins un élément de A dans l'intervalle $]x-\epsilon, x+\epsilon[$;

(b) entre deux réels distincts, on peut toujours trouver au moins un élément de A.

On dit alors, lorsque A les vérifie, que la partie A est **dense** dans $\mathbb{R}$.

49. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que l'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a. **Réponse attendue** On doit distinguer les cas $a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$, $a = -\infty$. L'examinateur est invité à choisir un des trois cas pour rendre plus rapide la rédaction de la preuve.

50. Décomposer en facteurs premiers un nombre entier donné par l'examinateur. Donner ses valuations p-adiques. **Réponse attendue** Par exemple 280, 242 ou 360... On a $360 = 2^3 3^2 5^1$ donc $v_2(360) = 4, v_3(360) = 2, v_5(360) = 1$ et $v_p(360) = 0$ pour tout p premier autre que 2, 3, ou 5.

51. Enoncer le theorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.

52. Donner les propriétés de la valuation p–adique; donner les valuations p–adiques du pgcd et du ppcm. **Réponse attendue** Étant donné deux entiers naturels non nuls a et b, on a :

    (a) $\forall p \in \mathbb{P} \quad v_p(a\,b) = v_p(a) + v_p(b)$

    (b) $b \mid a \iff \forall p \in \mathbb{P} \quad v_p(b) \leq v_p(a)$,

    (c) $\forall p \in \mathbb{P} \quad v_p(a \wedge b) = \min\big(v_p(a), v_p(b)\big)$ et $v_p(a \vee b) = \max\big(v_p(a), v_p(b)\big)$.

53. Donner la définition d'un entier inversible modulo n et donner une CNS pour qu'il le soit. Preuve. **Réponse attendue** Soit $x \in \mathbb{Z}$, on dit que x est **inversible modulo** n s'il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $xy \equiv 1[n]$. C'est équivalent à $x \wedge n = 1$. Preuve par équivalence ou double implication cf Bezout. Version avancée Semestre 2: Bonus: traduire dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

54. Si p est premier, montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^p \equiv n[p]$.

    Réponse attendue On a $p \mid \binom{p}{k}$ pour $1 \leq k \leq p-1$ (à prouver) donc $(a+b)^p \equiv a^p + b^p[p]$ (à prouver).

    Par récurrence on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^p \equiv n[p]$

    Version avancée Semestre 2: Bonus: traduire dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

55. Donner les cinq propriétés à connaître que peut (ou peut ne pas) vérifier une relation binaire sur un ensemble E. Donner pour chacune d'elles un exemple de relation la vérifiant et un exemple de relation ne la vérifiant pas.

	réflexive si	$\forall x \in E \quad xRx$,
	transitive si	$\forall (x,y,z) \in E^3 \quad (xRy \text{ et } yRz) \Longrightarrow xRz$.
Réponse attendue	**symétrique** si	$\forall (x,y) \in E^2 \quad xRy \Longrightarrow yRx$,
	antisymétrique si	$\forall (x,y) \in E^2 \quad (xRy \text{ et } yRx) \Longrightarrow x = y$
	totale si	$\forall (x,y) \in E^2 \quad (xRy \text{ ou } yRx)$

56. Soit R une relation d'équivalence sur un ensemble E. Montrer que les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence forment une partition de E.

57. Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et $\mathcal{A}$ une partie de E. Donner la définition d'un maximum éventuel de $\mathcal{A}$. **Montrer** que ce maximum, s'il existe, est unique. Quelles notions retrouve-t-on dans les deux cas $(E, \leq) = (\mathcal{P}(X), \subset)$ et $(E, \leq) = (\mathbb{N}, |)$?

Avancé si l'étudiant est à l'aise : même question avec la notion de borne supérieure.

Réponse attendue

Pour le cas particulier $(E, \leq) = (\mathcal{P}(X), \subset)$ A est le maximum de $\mathcal{A}$ lorsque les éléments de $\mathcal{A}$ sont tous inclus dans A.

Pour le cas particulier $(E, \leq) = (\mathbb{N}, |)$ a est le maximum de $\mathcal{A}$ lorsque les éléments de $\mathcal{A}$ sont tous des diviseurs de a.

58. Considérons un système linéaire réel à deux équations et deux inconnues. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ce système ait une unique solution (x, y). Interpréter géométriquement. Exprimer x et y par une formule le cas échéant. **Réponse attendue** Déterminant, formules de Cramer en dimension 2.

59. Considérons un système linéaire réel à deux équations et trois inconnues. Par des considérations géométriques, donner le nombre de solutions de celui-ci. **Réponse attendue** On veut qu'ils parlent de l'intersection de 2 plans dans l'espace et discutent de leur intersection.

60. Soit $*$ une loi de composition interne sur E. On suppose que $*$ est associative et a un élément neutre. Soit $x \in E$; on suppose que x est inversible. Prouver que cet inverse est unique.

61. Donner la définition d'un morphisme et d'un endo/iso/automorphisme. **Réponse attendue** Soit $(E, *)$ et $(E', *')$ deux ensembles munis de lois de composition internes; on dit que f est un morphisme de E vers E' si...

62. Montrer que la composée de deux morphismes est un morphisme.

63. Montrer que la bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

64. Donner la définition d'un groupe, d'un anneau, d'un corps. Donner quelques exemples d'ensembles formés de nombres, et d'ensembles formés de fonctions, qui sont (ou ne sont pas) des groupes, des anneaux, des corps. **Réponse attendue** Pas de démonstration dans cette question, on attend donc toutes les définitions et tous les exemples rapidement.

    En vrac qqs exemples vus en cours:

    $(\mathbb{R}, +, \times), (\mathbb{C}^*, \times), (\mathbb{U}_n, \times), (\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \times), (\mathbb{K}^n, +\times), (S_3, o)$...

65. Donner trois propriétés d'un morphisme de groupe. Les démontrer. **Réponse attendue** Soit f un morphisme de groupes de $(G, *)$ (d'élément neutre e) dans $(G', \cdot)$ (d'élément neutre e'). On a alors :

    - $f(e) = e'$,
    - $\forall x \in G \quad \big(f(x)\big)^{-1} = f\left(x^{-1}\right)$,
    - $\forall x \in G\,,\ \forall n \in \mathbb{Z} \quad \big(f(x)\big)^{n} = f\left(x^{n}\right).$

66. Soit $f : (G, .) \to (G', *)$ un morphisme de groupes. Que dire de l'image directe (resp. de l'image réciproque) d'un sous groupe de G (resp. de G') par f ? Preuve.

67. Caractériser l'injectivité d'un morphisme de groupe par son noyau; prouver cette caractérisation. **Réponse attendue** Soit f un morphisme de groupe. Alors f est injectif si, et seulement si on a $\operatorname{Ker} f = \{e\}$, ou encore:

    $$\forall x \in G \quad (f(x) = e' \Longrightarrow x = e.) \qquad (*)$$

68. Donner tous les endomorphismes de groupe de $(\mathbb{Z},+)$. Donner tous les morphismes d'anneaux groupe de $(\mathbb{C},+,\times)$ vers $(\mathbb{R},+,\times)$.

    Réponse attendue Exercices corrigés en cours.

69. Enoncer et démontrer la formule du binôme dans un anneau.

70. Reformuler à l'aide d'un produit matriciel les deux assertions suivantes:

    - "la somme des coefficients sur chaque ligne de A est nulle"
    - "$\alpha X+\beta Y+\gamma Z=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$" (avec X,Y,Z trois matrices colonnes de même taille)

    Réponse attendue

    - $A\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$
    - Notons $A=(X\ Y\ Z)$ la matrice obtenue en concaténant les colonnes. L'assertion équivaut à: $A\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

71. Donner la **définition** d'une matrice inversible, et donner une **condition nécessaire et suffisante d'inversibilité** (en utilisant les systèmes associés). $\star$ En option, prouver cette caractérisation.

    Réponse attendue Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Définition: $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe une matrice $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

    $$A\,B=B\,A=I_n,$$

    ie si elle est inversible dans l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$. Une telle matrice B vérifiant la double égalité ci-dessus est unique. On l'appelle **l'inverse de** A, et on la note A^{-1}.

    Caractérisation : A est inversible si, et seulement si pour tout second membre $Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système associé $AX=Y$ admet une unique solution $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

    $\star$ preuve en bonus $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose A inversible, alors :**Analyse** Soit X tq $AX=Y$ alors on a $X=A^{-1}AX=A^{-1}Y$ **Synthese** On a bien $A(A^{-1}Y)=AA^{-1}Y=Y$

    $\boxed{\Leftarrow}$ Il s'agit de construire explicitement une matrice $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB=BA=I_n$. Prenons pour Y successivement les matrices élémentaires $Y_i=E_{i,1}$. Remarquez d'une part que l'on a, avec l'écriture par blocs des colonnes: $I_n=(Y_1\ \dots\ Y_n)$.

    D'autre part pour chacun de ces seconds membres Y_i, il existe par hypothèse une matrice $X_i\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $AX_i=Y_i$.

    Posons $B=(X_1\ \dots\ X_n)$ (écriture par bloc). En faisant le produit par blocs, on a donc

    $$AB=A(X_1\ \cdots\ X_n)=(AX_1\ \ AX_2\ \ \cdots\ AX_n)=(Y_1\ Y_2\ \cdots Y_n)=I_n.$$

    On n'a pas fini: il faut aussi prouver que l'on a $BA=I_n$, ou encore que $BA-I_n=0_n$.

    Remarquons tout d'abord que $A\times 0_{p,1}=0_{n,1}$. Ainsi si C est une matrice colonne et que $AC=0$, alors on a $C=0_{p,1}$ d'après l'unicité de la solution à l'équation $AX=0_{n,1}$.

    À présent on a $A(BA-I_n)=A(BA)-A=(AB)A-A=I_nA-A=0_n$. Prouvons que chaque colonne de $BA-I_n$ est nulle. En effet en notant $BA-I_n=(C_1\ C_2\ \cdots\ C_n)$, on a $A(BA-I_n)=(AC_1\ AC_2\ \cdots\ AC_n)$ mais $A(BA-I_n)=0_n$ donc $AC_i=0_{n,1}$ pour tout i donc toutes les colonnes C_i sont nulles. Ainsi on a $(BA-I_n)=0_n$.

72. Donner les propriétés de la trace. Démontrez l'un d'elles au choix de l'examinateur. **Réponse attendue**

- Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on a $\mathrm{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \mathrm{Tr}(A) + \beta \mathrm{Tr}(B)$
- Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{Tr}\left(P^{-1} A\, P\right) = \mathrm{Tr} A$.
  Autrement dit, deux matrices semblables ont même trace: **la trace est un invariant de silimitude**.

73. Qu'est-ce qu'une suite arithmético–géométrique et comment calcule-t-on explicitement son terme général ?

    En bonus: montrer que cette astuce est un cas particulier de la relation $f^{-1}(\{b\}) = a \star \ker f$ lorsque f est un morphisme de groupes et a un antécédent de b par f.

    Version avancée Semestre 2: montrer que l'ensemble des suites arithmético-géométrique vérifiant $u_{n+1} = au_n + b$ est un sous–espace affine de l'ensemble des suites complexes. **Réponse attendue** L'ensemble de ces suites est de la forme $\omega + G$ où ω est un suite constante bien connue et G le SEV des suites géométriques de raison a.

74. Qu'est-ce qu'une suite récurrente linéaire homogène du second ordre, et comment calcule-t-on explicitement son terme général ? On attend les cas réels et complexes. Pas de démonstration demandée.

    Application: calculer une expression de la suite de terme général u_n telle que $u_0 = u_1 = 1$ et vérifiant: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

75. Soit (u_n) un suite réelle; écrire avec des quantificateurs que (u_n) est convergente. Montrer ensuite, avec la définition, que la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

76. Montrer, avec la définition, que la suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

77. La proposition suivante est **fausse**: "Si $u_n \to +\infty$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n > 0$, alors $u_n v_n \to +\infty$"

    Donner un contre–exemple; donner la bonne hypothèse à rajouter pour que la proposition devienne vraie. Prouver alors le résultat.

    Réponse attendue On demande à ce que la suite soit non pas positive ni strictement positive, mais minorée par un réel m strictement positif APCR. J'ai insisté lourdement sur cette hypothèse en cours.

78. Montrer que si $|u_n - \ell| \leq v_n$ APCR, et que $\lim v_n = 0$ alors $\lim u_n = \ell$. **Réponse attendue** On veut qu'ils introduisent les rangs n_1, n_2 et posent N le maximum des deux rangs.

79. Montrer que si $u_n \to 0$ et $v_n \to 0$, alors $u_n + v_n \to 0$ **Réponse attendue** On veut qu'ils introduisent les rangs n_1, n_2 et posent N le maximum des deux rangs. On découpe les ε.

80. Enoncer et démontrer le théorème de la limite monotone (suites). **Réponse attendue** On pourra, pour la démonstration, se limiter au cas où la suite est croissante et majorée.

81. Soit u la suite de terme général $u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}\cdot$

Donner deux démonstrations de la convergence de la suite u.

Réponse attendue Première preuve: la suite est croissante et mlajorée par 3. Théorème de la limite monotone. **Deuxième preuve**: Posons $v_n = u_n + \frac{1}{n!}\cdot$ Alors u et v sont adjacentes.

82. On considère la suite u définie par $u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p+1}\cdot$ Montrer que la suite u est convergente.

Réponse attendue En simplifiant pour $n \in \mathbb{N}$ la quantité $u_{n+2} - u_n$, on montre que les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes; un théorème du cours garantit que si ces deux sous suites CV vers la mm limite alors la suite converge.

83. Donner une fonction f et un point a tel que f a une limite positive ℓ en a mais f n'est pas de signe constant au voisinage de a. **Réponse attendue** Par exemple $x\cos(1/x)$ ou $x1_{\mathbb{Q}}(x) - x1_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)$. Preuve attendue, au moyen des suites ou d'une restriction à deux parties.

84. Donner la définition du sous-espace vectoriel engendré et prouver son existence. **Réponse attendue** C'est le plus petit sev de E contenant A (au sens de la relaion d'inclusion). L'étudiant doit poser $F = \bigcap_{A\subset F', F' \text{ sev}} F'$ et montrer que l'intersection d'une famille quelconque de sevs est un sev.

85. Si A est une partie finie de E, décrire $\mathrm{Vect}(A)$. Démontrer votre assertion. **Réponse attendue** Notons $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. On a $\mathrm{Vect}(A) = B$, où $B = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i ai; (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$. L'étudiant doit bien dire que:

- B est un sev
- B contient A
- Si F est un sev contenant A, alors F contient B (mentionner la récurrence, mais elle n'est pas un attendu de la question)

86. Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$. Prouver que $v \circ u = 0$ si, et seulement si $\mathrm{Im} u \subset \mathrm{Ker}\, v$.

87. Si $u : E \to F$ est linéaire et $b \in F$, que dire de l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = b$? Preuve. **Réponse attendue** Soit vide, soit de la forme $a + \ker u$ avec a un antécédent de b par f. C'est alors un sous-espace affine de E.

88. En deux temps: A puis B.

A- prouver l'une des régles de calcul suivantes, au choix de l'examinateur:

- $\mathrm{o}(u_n) + \mathrm{o}(u_n) = \mathrm{o}(u_n)$
- $\mathrm{o}(u_n) + \mathrm{O}(u_n) = \mathrm{O}(u_n)$
- $u_n \mathrm{o}(v_n) = \mathrm{o}(u_n v_n)$
- $\mathrm{o}(\mathrm{o}(u_n)) = \mathrm{o}(u_n)$
- $u_n \mathrm{o}(v_n) = \mathrm{o}(u_n v_n)$

Réponse attendue

- Les deux suites $o(u_n)$ désignent chacun une suite de terme général inconnu, mais dont on sait qu'il est respectivement de la forme $a_n u_n$ et $b_n u_n$ avec $a_n \to 0$ et $b_n \to 0$. On a $o(u_n) + o(u_n) = a_n u_n + b_n u_n = (a_n + b_n)u_n$. Posons $c_n = a_n + b_n$; on a $c_n \to 0$. Ainsi $(a_n + b_n)u_n = o(u_n)$ puis on a $o(u_n) + o(u_n) = o(u_n)$.
- On a l'existence de deux suites (a_n) et (b_n) respectivement tendant vers 0 et bornées, telles que
$o(u_n) + O(u_n) = a_n u_n + b_n u_n = \underbrace{(a_n + b_n)}_{\text{bornee}} u_n = O(u_n)$.
- On a l'existence de (b_n) tendant vers 0, telles que $u_n o(v_n) = u_n b_n v_n = b_n(u_n v_n) = o(u_n v_n)$ car $b_n \to 0$
- On a l'existence de deux suites (a_n) et (b_n) tendant vers 0, telles que $o(o(u_n)) = o(a_n u_n) = b_n a_n u_n = o(u_n)$ car $a_n b_n \to 0$
- On a l'existence de deux suites (a_n) et (b_n) tendant vers 0, telles que $o(u_n o(v_n)) = o(u_n b_n v_n) = a_n(u_n b_n v_n) = a_n b_n(u_n v_n) = o(u_n v_n)$ car $a_n b_n \to 0$

B - Simplifier l'une des expressions suivantes (toutes vues en cours!), au choix de l'examinateur :

(a) $n^3 + 4n^2 + 3n + o(n^2) = ...$
(b) $n^3 - 6n^2 + 3n + O(n^2) + o(n^2) = ...$
(c) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + O(\frac{3}{n^3}) = ...$
(d) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^4} + o(\frac{1}{n^3}) = ...$
(e) $\sqrt{n} + 2\sqrt{n} + 3\sqrt{n} + O(\sqrt{n}) = ...$

Réponse attendue

(a) $n^3 + 4n^2 + 3n + o(n^2) = n^3 + 4n^2 + o(n^2)$
(b) $n^3 - 6n^2 + 3n + O(n^2) + o(n^2) = n^3 + O(n^2)$
(c) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + O(\frac{3}{n^3}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + O(\frac{1}{n^3})$
(d) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^4} + o(\frac{1}{n^3}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^3})$
(e) $\sqrt{n} + 2\sqrt{n} + 3\sqrt{n} + O(\sqrt{n}) = O(\sqrt{n})$

89. Soit $(G, .)$ un groupe fini et $a \in G$, montrer qu'il existe $k \in [|1, n|]$ tel que $a^k = e$. **Réponse attendue** Les (au plus) $n + 1$ éléments $a^0, a^1, \cdots, a^n$ sont élements de G, qui a n éléments, donc deux sont égaux (tiroirs).

    On peut donc écrire $a^k = a^l$ avec $0 \leq k < l \leq n$ puis $a^{l-k} = e$ avec $1 \leq l - k \leq n$.

90. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) et $E_1, E_2, \cdots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E. Montrer l'assertion:

    "Si $\bigcup_{k=1}^n E_k$ est un sous-espace vectoriel de E alors l'un des E_i contient tous les autres."

    Réponse attendue Par récurrence. **Initialisation** $n = 1, 2$ ok déjà vu. **Hérédité:** On suppose l'assertion vraie au rang $n - 1$, montrons la au rang n. On procède par disjonction de cas:

    CAS 1: E_1 contient tous les E_i : ok.

    CAS 2: E_1 est inclus dans la réunion de tous les autres E_i; alors on est ramené à H_{p-1}.

    CAS 3: **Supposons l'existence d'un** $x \in E_1 \setminus (\bigcup_{i=2}^p E_i)$ **et d'un** $y \in (\bigcup_{i=2}^p E_i) \setminus E_1$. Nous allons prouver que ce n'est pas possible. En effet considérons $u_k := x + ky$ avec

$k \in \mathbb{N}$. Chacun des u_k appartient à E comme combinaison linéaire d'éléments de E, donc à l'un des E_i.

Par principe des tiroirs il existe deux (et même une infinité) vecteurs u_k, u_l dans le même E_i, mais leur différence aussi appartient à E_i donc $(k-l)y$ puis y appartient à E_i. A son tour $x = u_k - ky \in E_i$. Enfin on a un E_i qui contient à la fois x et y, contradiction.

91. Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif **fini**. Montrer que si A est intègre, alors A est un corps. On utilisera **obligatoirement** l'application

$$f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & ax \end{array}$$

Réponse attendue Soit $a \in A$, $a \neq 0$; il suffit de montrer que a est inversible. Or l'application f est bien définie et injective. En effet si $f(u) = f(v)$ alors $au = av$ donc $a(u-v) = 0$ et par intégrité $u - v = 0$ donc $u = v$.

Injective entre deux ensembles de mm cardinal, f est donc bijective. Aussi 1_A a un antécédent par f, noté x. Ce x vérifie $ax = xa = 1_A$, donc a est inversible.

La démonstration utilisant $a^0, a^1, \cdots, a^n$ et le principe des tiroires est aussi tres bien, mais ce n'est pas celle qui est attendue ici.

92. Enoncer et démontrer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.

93. Montrer que si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors α est racine de P si et seulement si $X - \alpha$ divise P. Enoncer une proposition généralisant ce résultats à $\alpha_1, \dots \alpha_p$. **Réponse attendue** Montrer que la division euclidienne de P par $X - \alpha$ s'écrit $P = (X-\alpha)Q + P(\alpha)$. Dire ensuite que $X - \alpha \mid P$ si, et seulement si $P(\alpha) = 0$.

94. Montrer que les fonctions sin et $x \mapsto \sqrt[3]{x^2+1}$ ne sont pas polynomiales sur $\mathbb{R}$. **Réponse attendue** Par l'absurde; pour sin utiliser les racines d'un éventuel polynôme P, ou les dérivées successives. Pour l'autre, se ramener à une égalité de polynômes et montrer que les degrés ne correspondent pas.

95. Formule et définition des polynomes interpolateurs de Lagrange. A quoi servent-ils ? **Réponse attendue** $L_i = \dfrac{\prod_{i \neq j}(X - x_j)}{\prod_{i \neq j}(x_i - x_j)}$, unique polynôme de degré $n-1$ tel que $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$. Permettent de démontrer constructivement l'existence d'un unique polynôme de degré au plus $n-1$ tel que....

96. Enoncer et démontrer la formule de Taylor pour les polynômes.

97. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les dérivées de A, pour que α soit racine d'ordre r de A. Démontrer que cette équivalence. **Réponse attendue** Pour une des implications, utiliser la formule de Taylor. Pour l'autre, démontrer que si α est racine d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ de A, alors α est racine d'ordre $r-1$ de A. Itérer ensuite le résultat.

98. Donner les DLs en 0 d'une ou plusieurs des fonctions usuelles $x \mapsto \frac{1}{1-x}, \exp, x \mapsto \ln(1+x), \sin, \cos, \mathrm{ch}, \mathrm{sh}, x \mapsto (1+x)^\alpha$ au choix de l'examinateur

99. Calculer un ou deux des DLs suivants (au choix de l'examinateur):
    - développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto e^x + \ln(1+x)$.
    - développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto e^x(1+x)^{1/3}$.
    - développement limité de $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$ à l'ordre $2n+1$

- développement limité à l'ordre 2 de la fonction cos en $\dfrac{\pi}{3}$.
- développement limité de tan à l'ordre 3 en 0.
- $x \mapsto e^x \ln(1+x)$. à l'ordre 2 en 0, en optimisant les ordres de précision.
- $x \mapsto e^{-x}$ à l'ordre 3 en 0, en contrôlant bien la substitution

Pour les deux questions qui suivent on peut faire les preuves dans le cas où $I = [|1, n|]$

100. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille libre de E. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective, montrer qu'alors la famille $\big(u(e_i)\big)_{i\in I}$ est libre.

101. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective si, et seulement si la famille $\big(u(e_i)\big)_{i\in I}$ est libre.

102. Définir et décrire la somme de deux sous espaces vectoriels; preuve ? **Réponse attendue** $F + G$ est le plus petit SEV contenant F et G (définition). C'est aussi l'ensemble $\{x + y; (x, y) \in F \times G\}$ (description). Pv par double inclusion.

103. Définir de deux façons le fait que deux sous-espaces vectoriels soient en somme directe. Montrer l'équivalence de ces deux définitions. **Réponse attendue** On peut on bien dire que $F \cap G = \{0_E\}$, ou bien dire que $\forall x, x' \in F \quad \forall y, y' \in G \quad x + y = x' + y' \Rightarrow (x = x' \text{ et } y = y')$. Il faut montrer l'équivalence des deux assertions.

104. Soit p un endomorphisme de E; alors p est un projection si, et seulement si $\cdots$. Le montrer. **Réponse attendue** $p^2 = p$ ssi p est la projection sur $\ker(p - Id_E)$ parallèlement à $\ker p$. On le montre.

105. Donner deux définitions d'un hyperplan de E et prouver que ces deux définitions sont équivalentes. Eventuellement l'examinateur pourra ne vous demander qu'une seule des deux implications. **Réponse attendue** Un SEV H de E est un hyperplan si, et seulement si l'une des deux assertions suivantes, équivalentes, est vérifiée:

    (a) Il existe une droite vectorielle supplémentaire de H dans E

    (b) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

106. Donner la définition d'une fonction lipschitzienne, montrer que toute fonction lipschitzienne est continue, et envisager la réciproque. **Réponse attendue** On attend une fonction comme la fonction carrée ou racine carrée, et une preuve de non–lipschitiziannité

107. Enoncer et démontrer le théorème des bornes atteintes.

108. (I intervalle) Caractériser, parmi les fonctions continues sur I, celles qui sont injectives. Preuve.

     Réponse attendue on attend: f est stmt monotone. Preuve: $\Leftarrow$ déjà vu, n'utilise pas la continuité $\Rightarrow$ Supposons f injective.

     Soit $a, b \in I$ avec $a \neq b$. On a donc $f(a) \neq f(b)$. Quitte à remplacer f par $-f$ on suppose $f(a) < f(b)$.

     Montrons alors que f est croissante.

     Soit $x, y \in I$ avec $x < y$.

Posons $u : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & f((1-\lambda)b+\lambda y) - f((1-\lambda)a+\lambda x) \end{array}$. Comme on a $u(1) = f(y) - f(x)$, il s'agit de prouver que $u(1) > 0$.

On sait que u est continue (par opérations), et que $u(0) = f(b) - f(a) > 0$. De plus u ne s'annule pas: si en effet, par l'absurde, on avait $u(\lambda) = 0$ pour un certain λ, on aurait alors $f((1-\lambda)b+\lambda y) = f((1-\lambda)a+\lambda x)$. Mais f est injective donc $(1-\lambda)b+\lambda y = (1-\lambda)a+\lambda x$; ainsi on a $(1-\lambda)(b-a) = \lambda(x-y)$. Mais on a $(1-\lambda)(b-a) \geq 0$ et $\lambda(x-y) \leq 0$ donc $(1-\lambda)(b-a) = \lambda(x-y) = 0$ puis $1-\lambda = \lambda = 0$, absurde.

Ainsi par TVI u est strictement positive. En particulier $u(1) > 0$ donc $f(y) > f(x)$.

109. Enoncer et démontrer le théorème des accroissement finis. **Réponse attendue** On applique Rolle à ...

110. Enoncer et démontrer le théorème de la limite de la dérivée. **Réponse attendue** On montre le résultat plus général suivant (on accepte ussi une preuve avec seulemtn $\ell \in \mathbb{R}$): Soit $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.
S'il existe $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ tel que $\lim_{x\to a, x\neq a} f'(x) = \ell$, alors $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$. Pour cela, utiliser caractérisation séquentielle de la limite + TAF.

111. Donner une fonction dérivable qui ne soit pas de classe C^1. Preuve. **Réponse attendue** Considérer, par exemple, la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$, et prolonger. C'est un exercice du cours.

112. Montrer que la composée de deux fonctions de classe C^∞ est une fonction de classe C^∞.

113. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ est prolongeable en une fonction de classe C^∞ à $\mathbb{R}_+$. **Réponse attendue** Par opérations, f est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$. De plsu on montre par récurrence "Pour tout entier n, il existe une fonction polynomiale P_n telle que pour tout $x > 0$, on a $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$."
On montre enfin que toutes les dérivées successives tendent vers 0 en 0. En effet, pour tout polynôme P, on a $\lim_{u\to 0} P(u)e^{-u} = 0$ par croissances comparées (et combinaison linéaire). Par composition avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, on a bien $\lim_{x\to 0^+} P\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$" Conclusion.

114. Ecrire la **forme** des décompositions en éléments simples de l'une des fractions rationnelles suivantes:
    (a) $\dfrac{1}{X^4-1}$ (sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$)
    (b) $\frac{X^3}{X^2+2X+2}$ (sur $\mathbb{R}$)
    (c) $\dfrac{X^4+1}{(X+1)^2(X^2+1)}$. (sur $\mathbb{C}$)
    (d) $\frac{4X^3}{(X^2-1)^2}$
    (e) $\dfrac{X^2+X+1}{X^3(X^2+1)^3}$ sur $\mathbb{R}$

    Ne pas chercher à calculer les valeurs des coefficients.

115. Donner la définition du PGCD de deux polynômes. Quelles sont les deux façons de calculer un PGCD ? **Réponse attendue** Les deux façons: décomposer en facteur irréductibles OU appliquer algorithme d'Euclide.

116. Enoncer le lemme de Gauss dans $\mathbb{K}[X]$. Quelle erreur classique est souvent commise en lieu et place de ce lemme ? **Réponse attendue** Erreur classique: $A \mid BC$ et A ne divie pas B impliquerait $A \mid C$. c'est faux bien sûr, et il faut donner un contre–exemple pour valider entièrement cette question de cours!

117. Donner le développement limité à l'ordre 3 de $\ln(1+e^x)$ en 0, en utilisant O et $\sim$ pour simplifier certaines parties du calcul.

Réponse attendue On a (avec $h(x) = \frac{e^x-1}{2}$):

$$\ln(1+e^x) = \ln\left(2\Big(\frac{1}{2}+\frac{e^x}{2}\Big)\right) = \ln 2+\ln\left(1+\frac{e^x-1}{2}\right) = \ln(2)+h(x)-\frac{1}{2}h(x)^2+\frac{1}{3}h(x)^3+h(x)^3\,\epsilon\big(h(x)\big).$$

Classiquement:

$$h(x) = \frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+\mathrm{o}(x^3)\ ;\quad h(x)^2 = \frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{4}+\mathrm{o}(x^3)\ ;$$

Pour le terme $h(x)^3$ on peut plutôt passer les équivalents: $h(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{2}$ donc $h(x)^3 \underset{0}{\sim} \dfrac{x^3}{8}$; ainsi $h(x)^3 = \frac{x^3}{8}+\mathrm{o}(x^3)$. Enfin pour le dernier terme on a $h(x)^3\epsilon\big(h(x)\big) = \mathrm{O}(x^3)\times \mathrm{o}(1) = \mathrm{o}(x^3)$. Le reste du calcul suit.

118. Etudier $\lim_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)^2}{\sin(x)\,((1+x)^5-1)}$;

119. Etudier la position relative locale en 0 des courbes des deux fonctions $\sin(x^2)$ et $\sin^2(x)$.

Réponse attendue Au V(0) on a $\sin(x)^2-\sin(x^2) = (x-\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3))^2-(x^2+\mathrm{o}(x^4)) = -\dfrac{x^4}{3}+\mathrm{o}(x^4)$ donc $\sin(x)^2-\sin(x^2) \sim -\dfrac{x^4}{3}$. Comme $-\dfrac{x^4}{3} \leq 0$, alors au voisinage de 0 on a $\sin(x)^2-\sin(x^2) \leq 0$. Autrement dit:

$$\exists \eta > 0 \quad \forall x \in]-\eta,\eta[\quad \sin(x)^2 \leq \sin(x^2)$$

Bonus si l'étudiant insiste sur le caractrère non constructif de η.

120. Donner un équivalent en $+\infty$ de $(x^{\frac{1}{x}}-1)(\sin(\frac{1}{x^2})-\frac{1}{x^2})$.

Réponse attendue On a d'une part $x^{\frac{1}{x}}-1 = e^{\frac{\ln x}{x}}-1 \sim \frac{\ln x}{x}$ car $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$ et $e^u-1 \underset{0}{\sim} u$. On a d'autre par $\sin(u)-u \underset{0}{\sim} \dfrac{-u^3}{6}$ donc $\sin(\frac{1}{x^2})-\frac{1}{x^2} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{6x^6}$. Ainsi $(x^{\frac{1}{x}}-1)(\sin(\frac{1}{x^2})-\frac{1}{x^2}) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln x}{6x^7}$.

121. Donner un équivalent en $+\infty$ de $x \mapsto \int_x^{2x}\sqrt{\ln(t)}dt$

Réponse attendue On a pour $x \geq 1$,

$$x\sqrt{\ln(x)} = (2x-x)\sqrt{\ln(x)} \leq \int_x^{2x}\sqrt{\ln(t)}dt \leq (2x-x)\sqrt{\ln(2x)} = x\sqrt{\ln(2x)}$$

Mais $\dfrac{x\sqrt{\ln(2x)}}{x\sqrt{\ln(x)}} = \sqrt{\dfrac{\ln(2x)}{\ln(x)}} = \sqrt{\dfrac{\ln 2}{\ln x}+1} \to_{x\to+\infty} 1$ donc $x\sqrt{\ln(x)} \sim x\sqrt{\ln(2x)}$ puis $\int_x^{2x}\sqrt{\ln(t)}dt \underset{+\infty}{\sim} x\sqrt{\ln(x)}$. **Bien faire justifier toutes les inégalités** Pour rappel les intégrales n'ont pas été revues depuis longtemps.

122. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$ admet une aymptote oblique au vosiinage de $+\infty$, en donner l'équation et préciser la position relative locale.

Réponse attendue On a au voisinage de $+\infty$: $\dfrac{x^3}{x-1} \sim x^2$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{x^2} \sim x$.

Pour $x > 1$, on pose $\boxed{u = \dfrac{1}{x} \text{ changement de variable classique à connaître}}$, d'où

$$f(x) = \sqrt{\frac{\frac{1}{u^3}}{\frac{1}{u} - 1}} = \frac{1}{u}\frac{1}{\sqrt{1-u}} \overset{DL}{=} \frac{1}{u} \times (1 + \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + \mathrm{o}(u^2)) = \frac{1}{u} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}u + \mathrm{o}(u) \overset{*}{=} x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

[Rq: (*) est à justifier en remplaçant $\mathrm{o}(u)$ par sa def.]

De la dernière expression on déduit:

- $f(x) = x + \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1)$ donc la droite $\Delta : y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à f au voisinage de $+\infty$
- on a $f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \sim \frac{3}{8x}$ et $\frac{3}{8x}$ est positif, donc au voisinage de $+\infty$, la courbe représentative de f est située au-dessus de la droite Δ au voisinage de $+\infty$.

123. Formule de Stirling; traduction comme développement asymptotique.

Réponse attendue La démonstration de $n! \sim \ldots$ n'est pas exigible à ce stade. Par contre ils doivent savoir en déduire que $\ln(n!) = n\ln(n) - n + \dfrac{1}{2}\ln(n) + C + \mathrm{o}(1)$.

124. Montrer que $n+1$ vecteurs combinaisons linéaires de n vecteurs forment une famille liée. **Réponse attendue** Récurrence sur n; ne pas utiliser la dimension finie – qui n'est pas encore définie à ce stade.

125. Donner un condition nécessaire et suffisante sur le rang d'une famille finie de vecteurs $(x_1, \cdots, x_p)$ pour que cette famille soit libre (resp. génératrice). Démontrer cette affirmation. **Réponse attendue** libre ssi rg vaut p, génératrice ssi rg vaut $\dim E$ (et E de dimension finie).

126. Enoncer et démontrer la formule de Grassmann. **Réponse attendue** Compléter une base de $F \cap G$.

127. Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n est de dimension finie, donner cette dimension. **Réponse attendue** Base extraite de la canonique

128. Donner la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ lorsque E et F sont de dimension finie. Prouver votre assertion dans le cas où $F = \mathbb{K}$. **Réponse attendue** On attend pour la preuve l'assertion: si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E alors les (e_i^*) sont une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

129. Si $u : E \to F$ et E est de dimension, comparer le rang de u et la dimension de E et donner une CNS d'injectivité. Preuves. **Réponse attendue** l'image d'une base est libre ssi ...

130. Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et si S est un supplementaire de $\ker u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im} u$. En quoi ce résultat est-il utile ? **Réponse attendue** Utile pour le theoreme du rang. Preuve du th du rang attendue bien sûr.

131. En utilisant des résultats sur les isomorphismes et la dimension, démontrer: la formule de Grassmann; un résultat d'interpolation polynomiale. **Réponse attendue** On attend l'utilisation de $\begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \longrightarrow & E_1 + E_2 \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$
et de $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ P & \longmapsto & (P(x_1), \cdots, P(x_n))) \end{array}$.

132. Si $H_1, \ldots, H_m$ sont des hyperplans de E (où E est de dimension finie égale à n), que dire de la dimension de $\bigcap_{1 \leq i \leq m} H_i$? Le démontrer. **Réponse attendue** On a $\dim \bigcap_{1 \leq i \leq m} H_i \geq n - m$, il suffit de 'applicquer le th du rang à $\Phi : x \mapsto (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x))$ où les φ_i sont des formes linéaires tq $H_i = \ker \varphi_i$.

133. Soit E un espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace de dimension p. Montrer que p est l'intersection de $n - p$ hyperplans. **Réponse attendue** On prend $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F complétée en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, on montre que $F = \bigcap_{p+1 \leq i \leq n} \ker e_i^*$.

134. Enoncer le théorème d'approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escaliers. Preuve (on admet le théorème de Heine). **Réponse attendue** On attend que pour toute fonction f continue par morceaux, et totu $\epsilon > 0$ il existe g en escalier telle que $\sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)| < \epsilon$

135. Donner la définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux. Preuve. **Réponse attendue** Pour toute suite de fonction en esclalier tendant vers f (uniformémént), la limite des intégrales existe, est finie, et est la même. Etc.

136. Soit f une fonction continue positive et non nulle sur un segment, que dire de son intégrale ? Le démontrer. **Réponse attendue** On attend une preuve en ϵ: si f n'était pas nulle on la minorerait par une fonction en esclaier positive d'intégrale non nulle, etc. Dessin exigé.

137. Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Donner un équivalent de la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} k^a$. **Réponse attendue** Sommes de Riemann.

138. Soit f continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f = \int_0^1 tf(t)dt = 0$. Montrer que f s'annule en au moins deux points. **Réponse attendue** On montre facilement (TVI) qui f admet un pt d'annulation. Si elle en admet uniquement un, on force $P \times f$ à rester de mm signe avec P polynôme bien choisi. Exo vu en cours.

139. Démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.

140. Démontrer la formule sur les sommes de Riemann **dans le cas d'une fonction de classe C^1.** On donnera une majoration de l'erreur commise.

141. Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n dt$. Donner un équivalent de la suite (I_n).

142. Donner la valeur de $\lim_{N \to, +\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!}$, preuve.

143. Si p est un projecteur d'un espace vectoriel de dimension finie, montrer qu'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

144. Montrer que toute matrice est équivalente à une matrice J_r. **Réponse attendue** On attend une mise en place d'une forme matricielle du th du rang avec les bonnes bases. On passe alors en matrices de passage, c'est fini.

145. Donner la formule de changement de base entre deux matrices représentatives d'une même application linéaire. Prouver cette formule.

146. Une matrice carrée est inversible si et seulement si elle est inversible à gauche OU à droite: pourquoi ? (Preuve attendue)

147. Prouver l'assertion:

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A est égal à r si, et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

(a) il existe une sous-matrice carrée ...

(b) toute sous-matrice carrée ...

Compléter l'énoncé et le prouver.

Réponse attendue La fin de l'énoncé est:

(a) il existe une matrice carrée d'ordre r inversible extraite de A,

(b) toute matrice carrée d'ordre $k > r$, extraite de A, est non inversible.

On commence par prouver que toute sous-matrice d'une matrice de rang r est de rang au plus r. Pour l'implication directe:

- Commencer par supposer $\text{rg}A = r$.
  - Pour (a), on peut trouver une famille de r vecteurs colonnes libre, et donc une sous-matrice $p \times r$ de rang r, dont les lignes ...
  - quant à (b), une matrice ayant stmt plus de lignes ou de collonnes que sont rang est non inversible
- Réciproquement, supposer (i) et (ii), poser $s = \text{rg}(A)$ et envisager $s > r$ puis $r < s$.

148. Montrer que dans un système linéaire homogène de n équations et p inconnues, le nombre d'inconnues secondaires vaut $n - q$ où q est le nombre d'équations indépendantes.

Réponse attendue On considère A la matrice du système, le th du rang donne $p = \text{rg}A + \dim\ker A$.

Mais $\dim\ker A$ ets justement le nombre d'inconnues secondaires, et $\text{rg}A = q$ est le nombre de lignes indépendantes de la matrice (ie les autres lignes sont combinaisons linéaires de certaines q lignes de A).

149. Toute matrice A est équivalente à une matrice J_r: donner une méthode **algorithmique** pour aboutir à une telle matrice.

Réponse attendue Dan les grandes lignes : on opère sur les lignes et les colonnes. En ligne, on échelonne A grâce à un pivot de Gauss. On échange au besoin des colonnes si certaines sont nulles.

Une fois A échelonnée, on opère en colonne pour transformer A en J_r.

On traduit tout cela en terme de matrices élémentaires.

150. Prouver que $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ **Réponse attendue** On ne peut pas dériver les fonctions de la variable complexe en MPSI; passer par $t \mapsto e^{tz}$ et appliquer Taylor Lagrange.

151. Déterminer la nature des séries de terme général:

$$u_n = (1 + 2 + \cdots + n)^{-\alpha}$$

avec $\alpha > 0$

$$v_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Réponse attendue Calcul et discussion sur le paramètre pour u; développement asymptotique et équivalent pout v. Justification de l'APCR-positivité

152. Donner deux séries dont les termes généraux sont équivalents mais qui n'ont pas la même nature. Prouver votre affirmation. **Réponse attendue** $\dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1}{n\ln n} \sim \dfrac{(-1)^n}{n}$

153. Doner la nature de $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ **Réponse attendue** $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \dfrac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} =$ $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}((\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}})^2)\right)$ car $\dfrac{1}{1-u} = 1 + u + \mathrm{O}(u^2)$

$$\ldots = \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{CV(s.altern.)} - \underbrace{\frac{1}{n}}_{DV(Riemann)} + \underbrace{\mathrm{O}(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})}_{ACV:thcomp} \quad \text{donc la série diverge.}$$

154. Citer les théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs. Au choix de l'examinateur, en démontrer un. **Réponse attendue** Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.

Si $u_n = O(v_n)$ ou $u_n = o(v_n)$, et que les termes généraux sont positifs APCR, alors pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les series $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Eventuellement poser des questions si on relaxe les hypothèses par exemple: positivité APCR, négativité, une seule des deux séries à termes positifs.

155. Enoncer un théorème de comparaison série/intégrale et le démontrer. **Réponse attendue** Si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est positive décroissante Cpm, alors la série $\sum f(n)$ a meme nature que la suite $(\int_0^n f(t)dt)$.

156. Enoncer et redémontrer les résultats relatifs aux séries de Riemann

157. Montrer que toute série absolument convergente est convergente. Que dire de la réciproque ?

158. Définir le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base; le déterminant d'un endomorphisme; le déterminant d'une matrice. Si A est une matrice carrée, exprimer son déterminant en fonction de ses coefficients. Preuve de cette formule. **Réponse attendue**

Pour la preuve de la formule, on peut se ramener à l'expression ddu déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Ainsi soit E un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Soit ϕ une forme n–linéaire alternée sur E et u_1, u_2,..., u_n des vecteurs de E. On peut écrire :

$$\forall j \in [|1, n|] \quad u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i \ \text{avec}(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Alors on a:

$$\begin{aligned}
\phi(u_1,u_2,\ldots,u_n) &= \sum_{\substack{1\leq i_1\leq n\\ 1\leq i_2\leq n\\ \cdots\\ 1\leq i_n\leq n}} a_{i_1,1}\,a_{i_2,2}\ldots a_{i_n,n}\,\phi(e_{i_1},e_{i_2},\ldots,e_{i_n})\\
&\overset{(1)}{=} \sum_{\sigma\in[|1,n|]^{[|1,n|]}} a_{\sigma(1),1}\,a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}\,\phi(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},\ldots,e_{\sigma(n)})\\
&\overset{(2)}{=} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} a_{\sigma(1),1}\,a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}\,\phi(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},\ldots,e_{\sigma(n)})\\
&\overset{(3)}{=} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\,a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}\,\phi(e_1,e_2,\ldots,e_n).
\end{aligned}$$

[Preuves de (1), (2) et (3)]

(1) Les ensembles $[|1,n|]^n$ et $[|1,n|]^{[|1,n|]}$ sont en bijection ! A chaque n uplet $(i_1,\cdots,i_n)\in[|1,n|]^n$, correspond **naturellement et bijectivement** l'application $\sigma:\begin{array}{ccc}[|1,n|] & \longrightarrow & [|1,n|]\\ k & \longmapsto & i_k\end{array}$; et quand on parcourt tous les n uplets, on décrit exactement toutes les applications appartenant à $[|1,n|]^{[|1,n|]}$.

(2) Lorsque σ n'est pas une injection, la famille $(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},\ldots,e_{\sigma(n)})$ possède au moins deux vecteurs identiques donc $\phi(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},\ldots,e_{\sigma(n)})=0$, car ϕ est une application n–linéaire alternée. On a donc

$$\phi(u_1,u_2,\ldots,u_n) = \sum_{\sigma\in[|1,n|]^{[|1,n|]},\ \sigma \text{ injective}} a_{\sigma(1),1}\,a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}\,\phi(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},\ldots,e_{\sigma(n)})$$

Mais les injections de $[|1,n|]^{[|1,n|]}$ sont les bijections de $[|1,n|]^{[|1,n|]}$, autrement dit ce sont les permutations de $[|1,n|]$.

(3) La forme linéaire est alternée et on décompose en transpositions.

159. Montrer que si f est une forme n- linéaire alternée sur E (où $\dim E = n$), alors f est antisymétrique.

160. Pour $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que $x\mapsto\det(A+xI_n)$ est une fonction polynomiale de degré au plus n. Bonus: donner degré et coefficient dominant.
Réponse attendue Par définition, pour $x\in\mathbb{R}$:

$$\det(A+xI_n) = \sum_{\sigma\in SS_n} \epsilon(\sigma)\,b_{\sigma(1),1}\,b_{\sigma(2),2}\cdots b_{\sigma(n),n} \text{ avec } b_{i,j}=\begin{cases} a_{i,j} & \text{si } i\neq j\\ a_{i,i}+x & \text{sinon.}\end{cases}$$

Donc, $\det(A+xI_n)$ s'exprime comme une somme finie de produits de n fonctions polynomiales en x de degré au plus 1. Par suite, $x\mapsto\det(A+xI_n)$ est bien une fonction polynomiale de degré au plus n.

161. Calculer $\begin{vmatrix} a & c & \cdots & c\\ b & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & c\\ b & \cdots & b & a\end{vmatrix}$ pour $b\neq c$ **Réponse attendue** On considère la fonction $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & D(a+x,b+x,c+x).\end{array}$, elle est affine (à prouver); on évalue en deux valeurs bien choisies.

162. Prouver la formule du développement du déterminant selon une ligne (ou une colonne).

163. Donner le determinant par blocs $\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix}$. **Réponse attendue** La forme $M \mapsto \begin{vmatrix} M & B \\ 0 & C \end{vmatrix}$ est une forme n linéaire alternée des colonnes de M donc est proportionnelle au déterminant de M. On évalue alors en M bien choisie.

164. Définir le déterminant de Vandermonde. Donner sa valeur. Preuve. **Réponse attendue** Récurrence. On pose $f(x) = V(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x)$, on montrer que c'ets un polynôme de degré n et on détermine ses racines; etc.

165. Définition de la comatrice. Formule remarquable. Preuve. **Réponse attendue** (définition juste puis) Formule $A\mathrm{Com}(A)^T = \mathrm{Com}(A)^T A = \det(A) I_n$, puis développement de A pour la diagonale et développement d'une certaine matrice A' pour les coefficients non diagonaux.

166. Donner la définition d'une fonction convexe, et deux caractérisations. **Réponse attendue** Outre la def on attend la croissance des pentes (quatre affirmations équivalentes); et dans le cas dérivable le fait que la courbe de f soit au-dessus de ses tangentes, ie que f" soit croissante.

167. Inégalité de Jensen (avec démonstration).

168. Enoncé et preuve de l'inégalité arithmético-géométrique.

169. Soit $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $a, b > 0$. Montrer que $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

170. Donner des inégalités sur sin grâce au cours sur la convexité. **Réponse attendue** On attend $\sin(x) \leq x$ et $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi} x$ en précisant bien sur quels intervalles c'est vrai/faux et en faisant des dessins.

171. Expliquer précisément en quoi un similitude directe se décompose en similitudes directes plus simples.

     Réponse attendue Une similitude $z \mapsto az + b$ est:

     (a) Si $a = 1$, une translation;

     (b) si $a \neq 1$, la composée d'une rotation et d'une homothétie de mêmes centres. Cette composée commute. De plus:

         i. le rapport est égal au module de a;

         ii. l'angle est égal à un argument de a;

         iii. le centre est d'affixe $b/(1-a)$, obtenu en résolvant $f(\omega) = \omega$ (on cherche le point invariant par la transformation).

172. Donner la définition du groupe symétrique, son cardinal, la définition d'un cycle, d'une transposition, et énoncer et montrer la "relation de Chasles" sur les cycles. **Réponse attendue** pour "Chasles": $(a_1, \cdots, a_q)(a_q, \cdots, a_p) = (a_1, \cdots, a_p)$. Pour la démontrer, on peut d'abord démontrer la décomposition en transpositions du cycle. L'idée est de faire toucher la notion de partie génératirce d'un groupe (programme de MP).

173. Définition de la signature d'une permutation. Preuve de l'unicité. **Réponse attendue** C'est l'unique morphisme vers $\{\pm 1\}$ qui envoie toutes les transpos sur -1. Celles-ci imposent la valeur sur toute permutation.

174. Démontrer, au choix de l'interrogateur, l'une des deux affirmations suivantes:

Prop 1

Soit σ une permutation de $[|1,n|]$.

Il existe un entier naturel non nul m tel que : $Id_{[|1,n|]}, \sigma, \dots, \sigma^{m-1}$ soient deux à deux distincts et $\sigma^m = Id_{[|1,n|]}$. De plus pour tout $k, \ell \in \mathbb{Z}$, on a $\sigma^k = \sigma^\ell \iff k \equiv \ell[m]$.

Prop 2

Soit σ une permutation de $[|1,n|]$ et $x \in [|1,n|]$.

Il existe un entier naturel non nul p tel que :

$$x, \sigma(x), \dots, \sigma^{p-1}(x) \text{ soient deux à deux distincts et } \sigma^p(x) = x.$$

De plus pour tout $k, \ell \in \mathbb{Z}$, on a $\sigma^k(x) = \sigma^\ell(x) \iff k \equiv \ell[p]$.

175. Donner le nombre d'anagrammes du mot ORANGE et du mot ANANAS. Généraliser à tous les mots, ie donner le nombre d'anagrammes d'un mot contenant n_1 fois la lettre ℓ_1, n_2 fois la lettre ℓ_2,..., n_p fois la lettre ℓ_p.
Réponse attendue

(a) Un mot résulte de la permutation des lettres du mot orange. Comme les lettres sont distinctes, ces permutations donnent des mots distincts. Il y a donc $6! = 120$ anagrammes.

(b) Il y a trois a et deux n, donc les permutations ne conduisent pas à des mots différents. Il y a deux manières de compter.

- Il y a 6! permutations possibles de l'ensemble des lettres. Mais à chaque anagramme correspond $3!\,2!$ permutations, car on peut permuter les trois a et les deux n. On obtient $\frac{6!}{3!\,2!} = 60$ anagrammes.
- Pour construire un anagramme, c'est-à-dire une 6-liste, on place d'abord les a. Il y a $\binom{6}{3} = 20$ choix possibles. On place ensuite les n parmi les places restantes. Il y a $\binom{3}{2} = 3$ choix possibles. Le s est la lettre restante. Il a donc $20 \times 3 = 60$ anagrammes.

(c) En appliquant la première méthode de la question précédente, on obtient $\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_p!}$, où $n = n_1 + \cdots + n_p$. Si l'on appliquait la deuxième méthode la question précédente, on trouverait :

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1\cdots-n_{p-1}}{n_p}.$$

En écrivant les coefficients binomiaux sous forme de factorielles, on voit qu'on peut simplifier $(n-n_1)!$, $(n-n_1-n_2)!$,...,$(n-n_1-\cdots-n_{p-1})!$ pour obtenir le même résultat que dans le première méthode.

176. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de surjections de $[|1,n|]$ dans $[|1,2|]$?
Réponse attendue Si $n = 1$, il n'y a pas de surjections de $[|1,n|]$ dans $[|1,2|]$. Pour $n \geq 2$, il y a 2^n applications de $[|1,n|]$ dans $[|1,2|]$. Une telle application n'est pas surjective si, et seulement si tous les éléments de $[|1,n|]$ ont même image. Il y a donc 2 applications non surjectives et $2^n - 2$ surjections.

177. Un groupe de $2n$ personnes comprend n hommes et n femmes. Combien y a-t-il de manières de les disposer autour d'une table ronde, en ne tenant compte que de leurs positions relatives? (deux dispositions sont identiques si chaque invité a le même voisin à sa gauche et le même voisin à sa droite).

Réponse attendue Une des personnes étant fixée, il y autant de dispositions différentes que de manières de placer les personnes restantes dans les $2n-1$ autres places, c'est-à-dire $(2n-1)!$.

178. Soit n et p des entiers naturels non nuls. Combien y a-t-il de listes d'entiers $(i_1, i_2, \dots, i_p)$ telles que $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$? **Réponse attendue** Il y a autant de telles p-listes que de parties de $[|1, n|]$ de cardinal p, c'est-à-dire $\binom{n}{p}$. En effet :

   - à une telle p-liste, on peut associer la partie $\{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ de $[|1, n|]$;
   - réciproquement, une partie de $[|1, n|]$ de cardinal p étant choisie, il n'y a qu'une façon de ranger ses p éléments par ordre croissant pour obtenir une p-liste $(i_1, i_2, \dots, i_p)$ telle que $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$.

179. On désire organiser des matchs entre $2n$ équipes de basket, chacune disputant un match. De combien de façons u_n peut-on organiser ces matchs, c'est-à-dire apparier les équipes deux à deux ? **Réponse attendue** On choisit 2 équipes ($\binom{2n}{2}$ choix) pour former un premier match, puis 2 équipes parmi les $2n-2$ restantes ($\binom{2n-2}{2}$ choix) pour former un deuxième match,..., enfin 2 équipes parmi les 2 restantes pour faire un dernier match. On a ainsi :

$$\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{2}{2} = \frac{(2n)!}{2^n}$$

choix. Mais on a ainsi construit des listes $(M_1, M_2, \dots, M_n)$ de matchs, alors ce que l'on cherche à compter ce sont les ensembles $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ de n matchs, sans ordre. Pour obtenir le nombre cherché, il faut donc diviser par $n!$, nombre de façons de permuter $M_1, M_2, \dots, M_n$. On obtient :

$$u_n = \frac{(2n)!}{2^n\, n!}\cdot$$

180. Donner la définition d'une probabilité. Démontrer ses premières propriétés. **Réponse attendue**

   (a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;

   (b) $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$;

   (c) si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$; de plus, $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$;

   (d) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

181. Formule des probabilités totales, des probabilités composées, de Bayes(plusieurs versions). Démonstrations de ces formules.

182. D'un jeu de 52 cartes, 5 cartes sont distribuées à un joueur. Quelle est la probabilité que ce joueur ait en main au moins une paire, c'est-à-dire deux cartes de même valeur ? **Réponse attendue** On prend comme univers l'ensemble des parties à 5 éléments de l'ensemble des 52 cartes. Comme la distribution se fait au hasard, on le munit de la probabilité uniforme. On appelle B l'événement "le joueur a au moins deux cartes de même valeur". On calcule $P(\bar{B})$. Application numérique facultative.

183. On considère une famille de deux enfants. On suppose que chaque enfant a une chance sur deux d'être une fille.
   On sait que l'aîné est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille?
   Même question si on sait seulement que l'un des deux enfants est une fille.

184. Le fonctionnement d'un appareil au cours du temps obéit aux règles suivantes :

   - s'il fonctionne à la date $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité a de fonctionner à la date n ;
   - s'il est en panne à la date $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité b d'être en panne à la date n,

   où (a,b) est un couple de réels de $]0,1[$.
   On suppose que l'appareil est en état de marche à la date 0. Donner sa probabilité de fonctionnement au temps n. **Réponse attendue** Mise en équation du problème, arithl-geometrique, et $p_n = \dfrac{1-b}{2-a-b} + (a+b-1)^n \dfrac{1-a}{2-a-b}$

185. Une urne $\mathcal{U}$ contient des jetons numérotés : 1 jeton numéroté 1, 2 jetons numérotés 2,..., n jetons numérotés n. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n ; l'urne i contient i boules blanches et $n-i$ boules noires. On tire un jeton dans $\mathcal{U}$; si le jeton tiré porte le numéro i, on prélève une boule dans l'urne numéro i.

   Quelle est la probabilité que la boule prélevée soit blanche ? **Réponse attendue** Formule des probabilités totales, on obtient $\dfrac{2n+1}{3n}$.

186. Meme contexte que précédemment: Quelle est la probabilité que la boule soit tirée de l'urne n sachant qu'elle est blanche ?

187. Une certaine maladie affecte une personne sur dix mille.
   On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour 0,1% des personnes saines testées. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsqu'elle a un test positif ? Commenter.

188. Donner la définition d'une famille d'événements mutuellement indépendants (famille finie). Comparer avec une autre définition, expliquer en quoi cette définition est meilleure. **Réponse attendue** L'indepdnance deux à deux ne passe pas aux opérations; contre-exemple simple et explicite attendu; par exemple: On lance deux dés équilibrés et l'on considère les événements $A=$(le premier dé amène un nombre pair), $B=$(le second dé amène un nombre pair) et C=(les deux dés amènent des nombres de même parité).
   Les événements A, B et C sont deux à deux indépendants, mais A et $B\cap C$ ne sont pas indépendants et A et $B\cup C$ ne sont pas indépendants.

189. Les notions de conditionnement et indépendance sont des concepts probabilistes, alors que d'autres sont simplement ensemblistes. Expliquer. Montrer sur un exemple en quoi c'est le cas. **Réponse attendue** On attend un exemple simple et complètement formalisé ((Ω, P) etc) où un changement de probabilité joue sur l'indépendance et le conditionnement.

190. Dans un schéma de Bernoulli où n expériences indépendantes sont répétées, avec chacune une probabilité p de succès, quelle est la probabilité d'obtenir exactement k succès ? **Réponse attendue** $\Omega = \{0,1\}^n$ muni de la probabilité produit: $P(\{w\}) = p^{\sum_i w_i}(1-p)^{n-\sum w_i}$

   A:= "obtenir k exactement succès", cardinal de A, dire que toutes les issues dans A ont la mm probabilité et conclure.

191. Donner la définition d'une variable aléatoire et de la loi d'une variable aléatoire réelle.

192. Donner les principales méthodes pour déterminer la loi d'un v.a. **Réponse attendue** Commencer déterminer un ensemble raisonnable contenant $X(\Omega)$. Puis trosi cas classiques:

    (a) Exprimer $(X = k)$ en fonction d'événements de Ω dont on connaît la probabilité

    (b) Cas où X est définie à partir de max/min: chercher $\mathbb{P}(X \leq k)$

    (c) Cas où $Y = u(X)$, X de loi connue et u application. Méthode vue en cours; le candidat doit l'expliquer, au moins sur un exemple.

193. Donner les trois principales définitions ou propriétés permettant de calculer l'espérance d'une variable aléatoire réelle. Donner, pour chacune d'elles, un exemple où on y fait appel. **Réponse attendue** On attend:

    - La définition de l'espérance
    - Le théorème de transfert
    - La linéarité de l'espérance

    Un énoncé précis de chacun est demandé: des exemples et exercices ont été faits en cours.

194. Donner deux formules pour l'espérance d'une variable aléatoire réelle. Démontrer que ces deux formules donnent bien le même résultat.

195. Donner deux formules pour la variance d'une variable aléatoire réelle. Démontrer que ces deux formules donnent bien le même résultat. Préciser laquelle est la définition. Donner une utilisation pour chacune d'elles. **Réponse attendue** On attend la définition de la variance et le théorème de Koenig Huyghens. La définition sert, par exemple, à montrer que la variance d'une v.a. est positive; le th de KHghns sert à des calculs concrets (exemples vus en cours).

196. Enoncer et démontrer les inégalités de Markov et/ou de Bienaymé–Tchebitchev.

197. Expliquer en quoi la loi conjointe du couple (X, Y) détermine les lois marginales; la réciproque est-elle vraie ?

198. Préciser et démontrer ce qui suit: la somme de variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales, suit elle même une loi binomiale. **Réponse attendue** Attention le paramètre p doit être le même pour toutesles V.a.

    Preuve par récurrence, le gros du calcul ayant lieu pour la somme de deux binomiales. Le cas $n = 2$ doit don etre détaillé.

    Par ailleurs, l'hérédité n'est pas complètement immédiate: on utilise que $X_1 + \ldots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes (lemme des coalitions).

199. Prouver que pour un système linéaire (S) de taille $n \times p$:

$$\begin{gathered}\text{Nombre d'inconnues secondaires pour l'expression des solutions de } (S) \\ \text{(s'il existe des solutions)} \\ = \\ \text{Nombre d'inconnues secondaires pour l'expression des solutions de } (S_0) \\ = \\ \text{Nombre d'inconnues principales — Nombre d'équations } \textbf{indépendantes}\end{gathered}$$

Réponse attendue Soit u l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à la matrice A du système. Le nombre d'inconnues secondaires pour exprimer les solutions est en fait la dimension de $\operatorname{Ker} u$.

Le rang de (S) est égal au rang de u.

Les lignes de la matrice A correspondent aux différentes équations; le rang de la famille des lignes **aussi** est le rang de A, ainsi $\mathrm{rg}A$ est aussi le nombre maximal d'équations linéairement indépendantes dans le système.

Appliquons le théorème du rang à u, on a $n = \mathrm{rg}(A) + \dim\ker u$. On a donc la relation

$$\underbrace{\dim\ker u}_{\text{Nombre d'inconnues secondaires}} = \underbrace{n}_{\text{Nombre d'inconnues}} - \underbrace{\mathrm{rg}(A)}_{\text{Nombre d'équations } \textbf{indépendantes}}$$

200. Prouver que $\mathrm{rg}(\begin{pmatrix} a & *** \\ 0 & A \end{pmatrix}) = 1 + \mathrm{rg}(A)$ pour tout $a \neq 0$ et toute matrice A.

201. Donner et prouver les conditions équivalentes pour qu'un système linéaire soit de Cramer. **Réponse attendue**

Si (S) est un système linéaire de n équations à n inconnues, il est équivalent de dire :

(i) le système (S) admet une solution et une seule,
(ii) le système (S_0) ne possède que la solution triviale $(0, 0, \dots, 0)$,
(iii) la matrice du système est inversible,
(iv) pour tout second membre b, le système (S_b) avec b pour second membre admet une solution et une seule,
(v) il existe b un second membre, tel que le système (S_b) avec b pour second membre admet une solution et une seule.

Pour la preuve, on attend en particulier que si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et qu'on a un $y \in F$ qui admet un unique antécédent par u, alors u est injectif.

202. Prouver que l'on a $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$

203. En admettant le résultat qui précède montrer la formule de Stirling "sans détermination de la constante": $n! \sim K n^n e^{-n} \sqrt{n}$ avec K un réel

204. En redémontrant rapidement les résultats nécessaires sur les intégrales de Wallis, déterminer la constante K de la question précédente.

205. Démontrer l'inégalité de Cauchy Schwarz pour un produit scalaire sur un espace préhilbertien.

206. Décrire l'algorithme de Schmidt. L'examinateur pourra demander son application une famille de vecteurs simple (trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ par exemple).

207. Donner la définition de l'orthogonal d'une partie et montrer que c'est un espace vectoriel.

208. Si F est un sous espace vectoriel de dimension finie, d'un espace préhilbertien, que dire de F et de son orthogonal ? Le démontrer.

Réponse attendue On a $F \oplus F^{\perp} = E$.

Le caracatère direct est immédiat; pour l'existence de la décomposition considérer une b.o.n $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ de F et poser $y = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i) e_i$.

209. Définir la projection orthogonale sur un sous–espace vectoriel d'un espace euclidien; caractériser le projeté othogonal en terme de distance; démontrer cette caractérisation

Réponse attendue Il s'agit de la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

Si $x \in E$, $p(x)$ est l'unique point de F qui réalise la distance $d(x,F)$. Pour la preuve, utiliser le th de Pythagore.

210. Donner la définition d'une boule ouverte et d'un ouvert. Aux étudiants: vous préciserez le contexte; $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique ? Norme quelconque sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ? Vous donnerez alors les définitions nécessaires.

211. Définition de la continuité d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$. Généralisation éventuelle à des espaces vectoriels normés.

212. Montrer que la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{xy}{x^2+y^2} \end{array}$ est un contre–exemple intéressant à quelque chose. Preuves.

213. Tracer la représentation graphique des fonctions suivantes (définies de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$): $(x,y) \mapsto x^2+y^2$, $(x,y) \mapsto x^2+y$, $(x,y) \mapsto |x|+|y|$

Donner les lignes de niveau.

214. Calculer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{2^n}$, $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \dfrac{p^q}{e^{2p}q!}$, $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \dfrac{1}{(i+j)!}$, $\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^k}$.

Réponse attendue Les familles concernées sont des familles de réels positifs, ont peut donc manipuler librement.

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^n} = \sum_{(k,n)\in\mathbb{N}^*} \dfrac{\delta_{k\leq n}}{2^n} = \sum_{k\in\mathbb{N}^*}\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{\delta_{k\leq n}}{2^n} = \sum_{k\in\mathbb{N}^*}\sum_{n=k}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{2^k}\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{2^{k-1}} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{2^j} = 2$

(b) $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \dfrac{p^q}{e^{2p}q!} = \sum_{p\in\mathbb{N}}\sum_{q\in\mathbb{N}} \dfrac{p^q}{e^{2p}q!} = \sum_{p\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{e^{2p}}\sum_{q\in\mathbb{N}} \dfrac{p^q}{q!} = \sum_{p\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{e^{2p}}e^p = \sum_{p\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{e}\right)^p = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{e}} = \dfrac{e}{e-1}$.

(c) **sommation par paquets** $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \dfrac{1}{(i+j)!} = \sum_{s\in\mathbb{N}}\sum_{(i,j)\in P_s} \dfrac{1}{(i+j)!}$ Avec $P_s = \{(i,j)\in\mathbb{N}^2 | i+j=s\}$.
A présent $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \dfrac{1}{(i+j)!} = \sum_{s\in\mathbb{N}} \dfrac{|P_s|}{s!} = \sum_{s\in\mathbb{N}} \dfrac{s+1}{s!} = \sum_{s\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{(s-1)!} + \sum_{s\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{s!} = 2e$

(d) $\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^k} = \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^k} = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\frac{1}{n^2}}{1-\dfrac{1}{n}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2-n} = 1$

215. Sommabilité de la famille $\left(\dfrac{(-1)^{p+q}}{p+q}\right)_{p,q\geq 1}$?

Réponse attendue

La famille $\left(\dfrac{(-1)^{p+q}}{p+q}\right)_{p,q\geq 1}$ n'est pas sommable car: $\sum_{p\geq 1,q\geq 1} \left|\dfrac{(-1)^{p+q}}{p+q}\right| = \sum_{p\geq 1,q\geq 1} \dfrac{1}{p+q} = \sum_{p\geq 1,q\geq 1} \dfrac{1}{p+q} = \sum_{p\geq 1}\sum_{q=1}^{+\infty} \dfrac{1}{p+q} = \sum_{p\geq 1} +\infty = +\infty$.

En effet, on a $\sum_{q=1}^{+\infty} \dfrac{1}{p+q} = \sum_{k=q+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k} = +\infty$

216. Existence et calcul de $\sum_{1\leq n\leq k} \dfrac{(-1)^n}{nk(k+1)}$. **Réponse attendue**

(a) **Sous réserve de sommabilité de la famille** $(\dfrac{(-1)^n}{nk(k+1)})_{1\leq n\leq k}$**, on a:**
$\sum_{k\geq n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{nk(k+1)} = \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n} \sum_{k\geq n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n}\dfrac{1}{n} = \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$
$= \left(\dfrac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}\right) - \left(\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}\right) = -\dfrac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2} = -\dfrac{\pi^2}{12}$

(b) **Preuve de la sommabilité** On a $\sum_{k\geq n\geq 1} \left|\dfrac{(-1)^n}{nk(k+1)}\right| = \sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n}\sum_{k\geq n}\dfrac{1}{k(k+1)} =$
$\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2} < +\infty$

217. Existence et calcul de $\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k+1}^{+\infty} \dfrac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}$.

Réponse attendue

(a) **sous réserve de sommabilité** de la famille $(\dfrac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n})_{1\leq k<n}$
$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k+1}^{+\infty}\dfrac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n} = \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n} = \sum_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{2^n}(\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} -$
$1) = \sum_{n=2}^{+\infty}\dfrac{-1}{2^n} = -\dfrac{1}{2}$.

(b) **preuve de sommabilité** $\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k+1}^{+\infty}\left|\dfrac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}\right| = \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{2^n} = \sum_{n=2}^{+\infty}\dfrac{n-1}{2^n} <$
$+\infty$

218. Redémontrer que l'exponentielle complexe est un morphisme de $(\mathbb{C},+)$ vers $(\mathbb{C},\times)$. **Réponse attendue**

$\sum_{i\in\mathbb{N}}\dfrac{a^i}{i!}\sum_{j\in\mathbb{N}}\dfrac{b^j}{j!} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{\substack{0\leq i,j\leq n\\ i+j=n}}\dfrac{a^ib^j}{i!j!} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{a^kb^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{n!}{k!(n-k)!}a^kb^{n-k} =$
$\sum_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{1}{n!}(a+b)^n = e^{a+b}$

Preuve que le calcul est valide: les familles ... sont sommables, produit de Cauchy

219. Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$.

Réponse attendue

Sous réserve de sommabilité :$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} x^kx^{n-k} =$
$(\sum_{n=0}^{+\infty} x^k)^2 = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

Preuve que le calcul est valide: Ce calcul est valable lorsque la famille (x^k) est sommable, c'est-à-dire lorsque ...

220. Soit $I_n := \int_0^1 t^n \exp(t)dt$. Montrer que la suite (I_n) tend vers 0, d'au moins deux façons. **Réponse attendue** Methode 1: $0\leq t^ne^t\leq t^n\times e$ puis intégration et limite.

Methode 2 IPP

On a $I_{n+1} = e-(n+1)I_n$ puis $I_n = \dfrac{e-I_{n+1}}{n+1} \leq \dfrac{e}{n+1}$ (car $I_n\geq 0$)