Colle 0

Paul RAPHAEL

2024-2025

1 Consigne

Vous devez répondre aux questions avec le langage de programmation C. Un code qui ne compile pas se verra attribuer un malus de -1. Si vous avez des fragments de fonctions, commentez-les et indiquez-moi que je dois lire cette partie. Je testerai vos algorithmes avec mes jeux de tests, donc respectez les noms des fonctions. Cependant, je vous demande aussi de tester vos fonctions, ce sera évalué. Des points bonus seront attribués à ceux qui gèrent bien la mémoire. Vous avez accès à la fonction testn() où n est le numéro de l'exercice.

2 Questions de cours

Question 1. À décider plus tard.

3 Stockage sur un disque

Imaginez la situation suivante. Vous avez un certain nombre de jeux vidéo $J_1, J_2, ...J_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ (pour après la prépa bien sûr), qui prennent chacun une place $s_1, ..., s_n$ où les tailles sont entières. Chacun vous apporte un plaisir $p_1, ..., p_n$. Bien sûr, sinon c'est trop facile, vous avez une place limitée P sur votre disque dur. Vous voulez ainsi maximiser le plaisir possible tout en vous assurant que votre sélection rentre sur le disque dur. Quel est le bonheur maximal possible ?

Question 2. Donnez un algorithme qui répond à la question de manière naïve. (Soyez précis)

On se donne maintenant un tableau à 2 entrées T. On considère que $T[i][j]$ résout le problème avec les i premiers jeux et une place de j. Ainsi j varie de 0 à D, et i de 0 à n.

Question 3. Trouvez une relation de récurrence, et en déduisez une fonction qui résout le problème de type :

```c
int exo1(int* bonheur, int* taille, int D, int n)
```

Question 4. Quelle est la complexité de l'algorithme précédent ?

4 Montée de marche

Vous êtes en juin, c'est maintenant l'heure de vos oraux X. Bien sûr, pas de pression puisque vous visez les ENS, mais bon il faut faire honneur à vos profs de Mathématiques et d'Info. Le bus vous amène en bas des marches de Lozère. Sur le chemin, vous vous rendez compte que vous pouvez facilement enjamber une marche, et donc monter les escaliers en sautant une marche de temps en temps. Supposons qu'il y a n marches :

Question 5. Combien y a-t-il de manières de monter les marches ?

On généralise le problème. On imagine un escalier à n marches, et qu'on a la possibilité, avec des chaussures spécialement conçues par Clément Allard le meilleur normalien en physique, de sauter $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ marches, où les alphas sont des entiers tous distincts.

Question 6. Écrivez un programme calculant le nombre de manières de monter les marches, avec une fonction de prototype :

```
int exo2(int* saut, int n, int p)
```

5 Barres de fer

Vous voici maintenant sorti des oraux X. En vous rendant à ceux des Mines, vous croisez Jean Raoul Scout, votre "ami" en ECG qui a l'air perdu. Il a monté une entreprise qui vend des barres de fer au cm, et selon la longueur de la barre en cm i, il y a un prix p_i. Sa machine fabrique des barres de taille n, et il se demande quelle serait la découpe optimale. Il vous donne la liste des prix sous la forme d'un tableau T, où $T[i]$ est le prix d'une barre de i cm.

Question 7. Combien de manières y a-t-il de découper une barre de n centimètres ? L'implémentation naïve est-elle donc envisageable ?

Question 8. En supposant que R soit un tableau tel que pour $i < n$ $R[i]$ soit une solution du problème, trouvez comment résoudre le problème.

Question 9. Déduisez de ce qui précède un algorithme qui résout le problème en $O(n^2)$, avec une fonction de la forme :

```
int exo3(int* prix, int n)
```

6 Plus grand carré blanc

Vous êtes maintenant 6 jours plus tard au 45 rue d'Ulm pour passer un oral de math. Vous entrez et voyez en passant devant une salle de littéraires ces derniers s'extasier devant de l'art moderne, une toile carrée avec des cases noires et blanches. L'un d'eux s'exclame : "hmmmm je me demande quelle est la taille du plus grand carré blanc". Vous décidez de l'aider. On modélise comme suit :

On se donne une matrice de taille $n \times m$ où n et m sont des entiers. Dans cette matrice, il y a des 0 (les carrés noirs) et des 1 (les carrés blancs). Le but est de calculer la taille du plus grand sous-carré de 1 présent dans la matrice. Bien sûr, il y aurait la solution naïve qui correspondrait au test de chaque possibilité mais cela ne nous intéresse pas.

Question 10. Trouvez une relation de récurrence permettant de résoudre le problème, et en déduisez une fonction qui résout le problème, de prototype :

```
int exo4(int** mat, int n, int m)
```

7 Approfondissement

Revenons sur les marches. Clément Allard étant un physicien de classe internationale, on suppose $max_{p \in [1,n]}(\alpha_p) = O(p)$. En déduire un algorithme qui résout l'exercice en $O(p^2 \log(n))$.