Programme de colles MP2I semaine 25
du 29 avril au 3 mai 2024

Combinatoire et dénombrement

Théorie des ensembles finis

Lemme du cardinal : pour deux entiers naturels n et p, s'il existe une injection de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, p\}$ alors $n \leq p$ (QC). Définition d'un ensemble fini, de son cardinal.

Premières opérations sur les ensembles finis : réunions disjointes finies (QC). Lemme des bergers (QC).

Parties d'un ensemble fini : théorème fondamental (QC). Tout ensemble fini non vide totalement ordonné admet un maximum et un minimum (QC). Caractérisation des parties finies de $\mathbb{N}$ comme parties majorées.

Applications et ensembles finis. Bijections partant d'un ensemble fini ou arrivant à un ensemble fini, existence d'une bijection entre deux ensembles finis de même cardinal. Injection d'un ensemble E dans un ensemble fini F : conséquence sur la finitude et le cardinal de E (QC) ; contraposée (i.e. lemme des tiroirs). Surjection d'un ensemble fini E dans un ensemble F : conséquence sur la finitude et le cardinal de F (QC). Caractérisation des bijections entre deux ensembles finis de même cardinal (QC), cas particulier des applications d'un ensemble fini dans lui-même.

Produit cartésien de deux ensembles finis (QC). Produit cartésien d'une famille finie d'ensembles finis.

Dénombrements classiques

Nombre de parties d'un ensemble fini de cardinal n (QC). Nombre d'applications d'un ensemble fini de cardinal n vers un ensemble fini de cardinal p (QC). Nombre de p-arrangements d'un ensemble fini de cardinal n (QC), traduction comme nombre d'injections d'un ensemble fini de cardinal p vers un ensemble fini de cardinal n. Nombre de permutations d'un ensemble fini de cardinal n. Nombre de parties de cardinal p d'un ensemble fini de cardinal n (QC).

Démonstration combinatoire de l'identité $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, de la relation de Pascal (QC).

En complément, on a vu la formule $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$ et sa démonstration combinatoire, ainsi que l'identité de Vandermonde et sa démonstration combinatoire. On a aussi vu quelques aspects sur les ensembles infinis : existence d'une injection de $\mathbb{N}$ vers n'importe quel ensemble infini, et théorème de Cantor-Bernstein. Tout développement sur les questions de cardinaux infinis est proscrit.