Le théorème de Szemerédi–Trotter et les jeux Maker-Breaker

Paul RAPHAEL

Numéro de candidat: 33557

2024

Sommaire

Sommaire

Sommaire

Sommaire

Sommaire

Le théorème

Présentation du problème

On se donne P et L des ensemble fini de points et droites. On peut majorer les incidences par

- $|L||P|$
- $|I(P, L)| = O(|L| + |L|^{\frac{1}{2}}|P|)$

Le gros théorème

Théorème 1 : Szemerédi-Trotter

Si on se donne P un ensemble fini de points distincts, et L un ensemble fini de lignes distinctes, alors en notant $I(P, L) = \{(p, l) \in P \times L \mid p \in l\}$, on a

$$|I(P, L)| = O(|P|^{\frac{2}{3}}|L|^{\frac{2}{3}} + |P| + |L|) \tag{1}$$

Les gaphes planaires

On note les graphes $G = (V, E)$, ou V est l'ensemble des sommets du graphe, E l'ensemble des arètes. Les graphes sont considérés comme non orientés, sans boucles et à arètes simple.

Définition et propriétés élémentaires

Graphe planaire

Un graphe simple G est dit planaire si on peut le représenter dans le plan sans que deux de ses arètes ne se croisent.

Propriété 1

Soit G un graphe planaire : tout sous graphe de G est également planaire.

Propriété 2

Si $G = (V, E)$ est un graphe planaire, et que l'on note F l'ensemble de ses faces $\sum_{f \in F} deg(F) = 2|E|$ ou $deg(F)$ est le nombre d'arrètes ajdacentes à la face F.

La caractéristique d'Euler

Théorème 2

Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire connexe. Alors,

$$|V| - |E| + F = 2$$

ou F est le nombre de faces du graphe.

Exemple

Sur l'exemple on a 7 sommes, 6 faces (on compte la face extérieure) et 11 arètes : $6 + 7 - 11 = 2$.

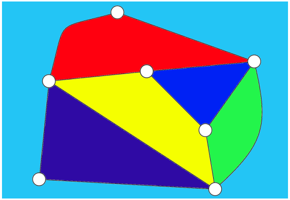

Figure – Graphe 1

Construction des graphes planaires

Lemme 1

Tout graphe planaire connexe G peut s'obtenir en ajoutant un nombre fini d'arète à partir d'un arbre, tout en conservant le caractère planaire au long du processus.

Preuve : On raisonne par récurence sur le nombre de cycle élémentaire du graphe.

Exemple

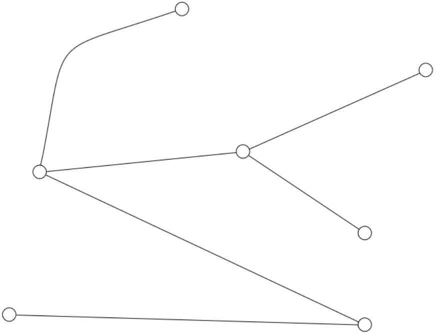

Figure – Construction du Graphe 1

Exemple

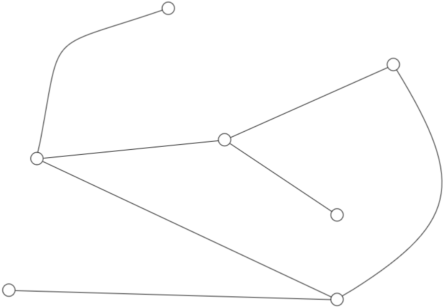

Figure – Construction du Graphe 1

Exemple

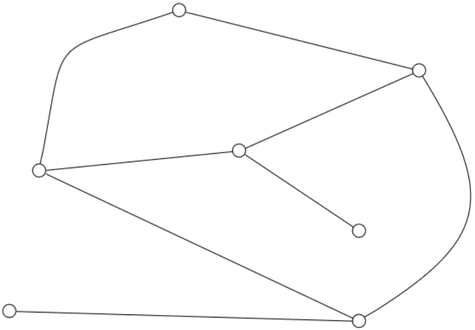

Figure – Construction du Graphe 1

Exemple

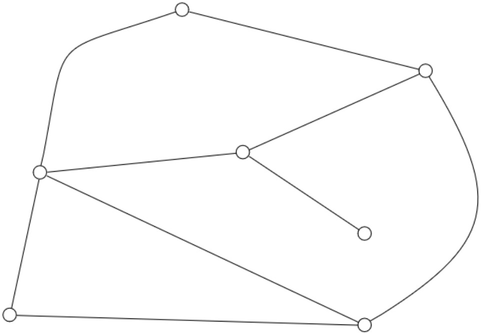

Figure – Construction du Graphe 1

Exemple

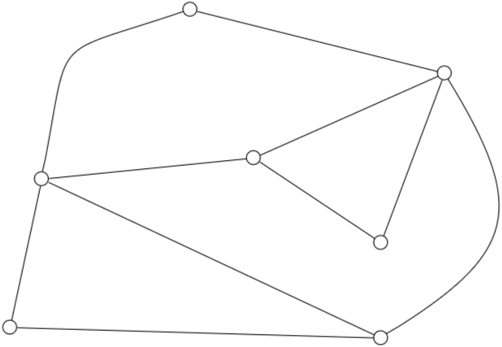

Figure – Construction du Graphe 1

Exemple

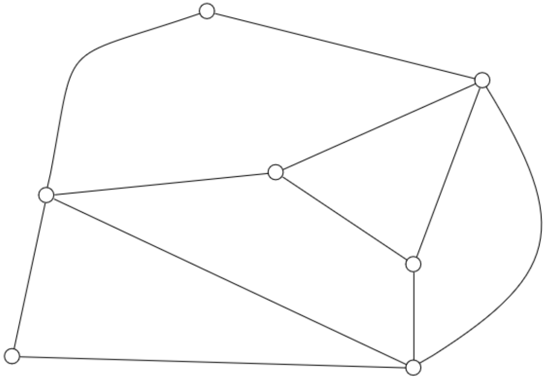

Figure – Construction du Graphe 1

Preuve du théorème 2

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe acyclique

- Si G est arbre, alors $|E| = |V| - 1$ et il n'y a qu'une face
- Ensuite, pour un graphe G, on applique le lemme, en remarquant que les graphes intermédiaires sont planaire en tant que sous graphe de G.
- On conclu car le procédé ne modifie pas la quantité $|V| - |E| + F$

Corollaire

Si G=(V,E) est un graphe planaire, alors : $|V| - |E| + F \geqslant 2$ ou F est le nombre de faces du graphe.

Preuve : On raisonne sur les composantes connexes du graphe

Théorème 3 : l'inégalité des croisements

Soit $G = (E, V)$ un graphe simple. Si $|E| \geqslant 4|V|$ alors

$$cr(G) \geqslant \frac{|E|^3}{64|V|^2} \tag{2}$$

ou $cr(G)$ correspond au nombre minimum d'arète qu'il faut retirer de G afin de le rendre planaire.

Propriété 3

Si G est un graphe planaire alors $|E| \leqslant 3|V|$

Preuve : Le résultat est évident si G a moins de 3 arrêtes. Sinon :

- *Chaque face est adjacente à au moins 3 arètes, donc* $2|E| \geqslant 3|F|$ *(Propriété 2)*
- *La caractéristique d'Euler donne* $|E| \leqslant 3|V| - 6 \leqslant 3|V|$

Corollaire

Pour $G = (V, E)$ un graphe, on a $cr(G) \geqslant |E| - 3|V|$

La preuve se fait en appliquant la propriété 3 au sous graphe G' de G rendu planaire en retirant $cr(G)$ arête

Un peu de proba

Donnons nous un réel $1 > p \geqslant 0$.

- $G' = (V', E')$ ou on prend dans V' les arêtes de V avec probabilité p
- On admet qu'un croisement dans un graphe non planaire est du à 4 sommets.
- On passe à l'espérance : $p^4 cr(G) \geqslant p^2|E| - 3p|V|$
- Pour $0 < p = \frac{4|V|}{|E|} \leqslant 1$ on conclut

Démonstration du théorème

Construction astucieuse et considérérations élémentaires

Soit P un ensemble fini de points et L un ensemble fini de droites, ou chaque ligne contient au moins deux points de P.

- On pose $G = (V, E)$ où $V = P$ et ou $(u, v) \in E \leftrightarrow \exists l \in L$ tel que $(u, l) \in I(P, L)$ et $(v, l) \in I(P, L)$
- $|E| = |I(P, L)| - |L|$
- G est un graphe simple, sans boucle.
- $|L|^2 \geqslant cr(G)$

Application de l'inégalité des croisements

- Soit $|E| < 4|P|$ ie $|I(P,L)| \leqslant 4|P| + |L|$, et donc $|I(P,L)| = O(|P| + |L|)$
- Soit on applque le théorème 3 $|L|^2 \geqslant \frac{(|I(P,L) - |L|)^3}{64|P|^2}$ soit $|I(P,L) = O(|P|^{\frac{2}{3}}|L|^{\frac{2}{3}} + |L|)$

Corollaire

Le nombre m de lignes contenant k points est $O(\frac{|P|^2}{k^3} + \frac{|P|}{k})$

Les jeux Maker-Breaker

Un premier jeux

Imaginons le jeu suivant :

- Le plateau : Z^2
- Le premier doit joueur doit aligner n points sur une même droite sans points du joueur 2
- Le deuxième joueur doit l'en empecher à tous prix

Exemples

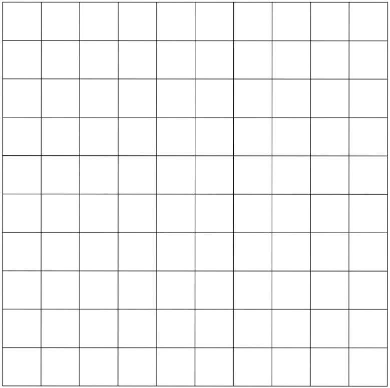

Figure – Partie pour n=5, b(t)=m(t)=t

Exemples

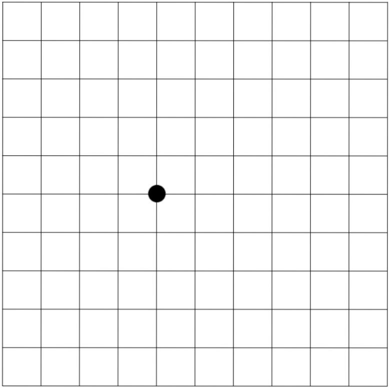

Figure – Partie pour n=5, b(t)=m(t)=t

Exemples

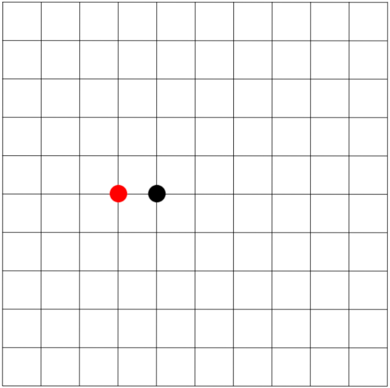

Figure – Partie pour n=5, b(t)=m(t)=t

Exemples

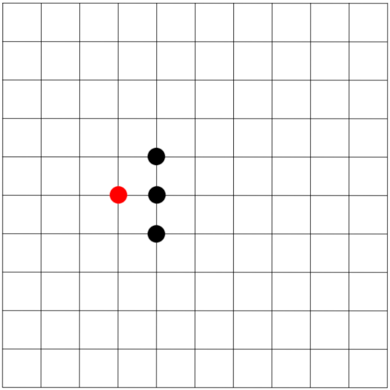

Figure – Partie pour n=5, b(t)=m(t)=t

Exemples

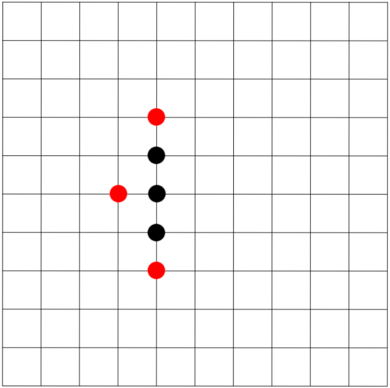

Figure – Partie pour n=5, b(t)=m(t)=t

Exemples

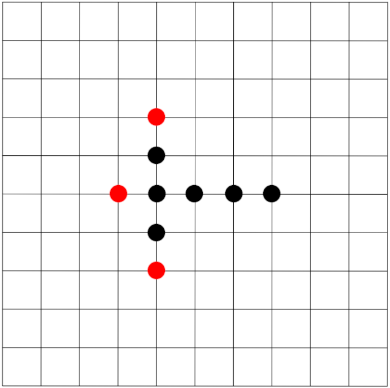

Figure – Partie pour n=5, b(t)=m(t)=t

Exemples

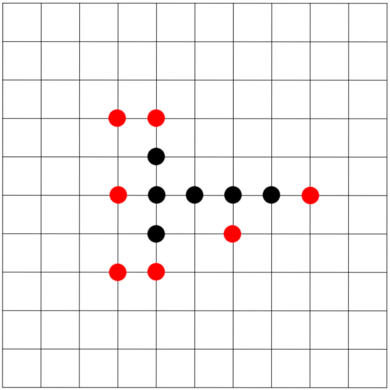

Figure – Partie pour n=5, b(t)=m(t)=t

Exemples

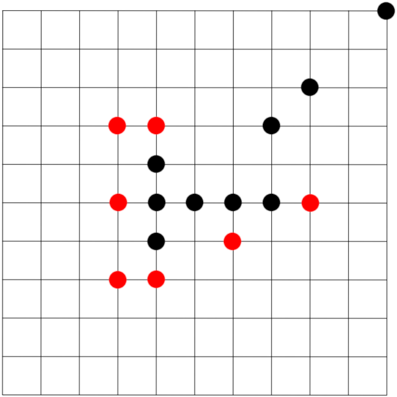

Figure – Partie pour n=5, b(t)=m(t)=t

Exemples

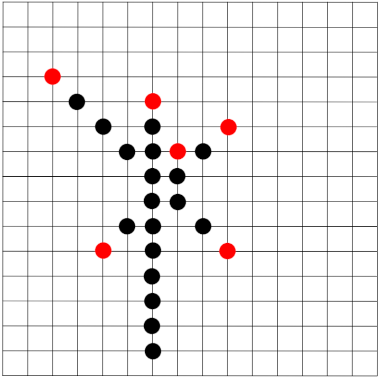

Figure – Partie pour n=10, m(t)=2t, b(t) = t

Un resultat majeur

Théorème 4

Soit $c(t) = t^{\alpha}$, d une fonction, et, pour n > 1, soit τ_n le temps de victoire pour le jeu (c, d) n à la suite.

1. Si $\alpha > 1$ et $d(t) = \omega(log(t))$ alors $c(\tau_n) = (1 + o(1))n$
2. Si $\alpha < 1$ et $d(t) = \omega(t^{1-\alpha})$ alors $c(\tau_n) = (1 + o(1))n$

Le jeu des corbeilles

On imagine le jeu suivant, dont l'étude est cruciale pour comprendre le premier jeu : Pour M est b des fonctions à valeurs entière, M croissante, et T un entier, on pose le jeu de type (M, b, T)

- On suppose que l'on à $1 + \sum_{i=1}^{T} b(i)$ corbeilles
- A chaque tour, le constructeur place un certain nombre de points dans les corbeilles
- Le nombre de points qu'il place doit vérifier que au cours des s dernier tour, il n'a pas placer plus de $M(s)$ points.
- A chaque tour i on retire les i corbeilles avec le plus de points
- Il faut maximiser le poid dans la dernière corbeille.

Le jeu des corbeilles

Lemme

Dans un jeu des corbeille de type (M, b, T), si $M(0) = 0$ et que pour tout s on a $\sum_{t=s}^{T} b(t) \geqslant b(T)(\frac{T-s+1}{2})$,le jeu se termine avec un poids de la cobreille majorée par

$$\frac{2}{b(T)} \sum_{t=1}^{T} \frac{\Delta M(t)}{t}$$

ou $\Delta M(t) = M(t) - M(t-1)$

Demonstration du théorème 4

Soit $\epsilon > 0$. On va

- Donner une stratégie pour le destructeur
- Montrer qu'il peut la respecter
- Montrer que pour n assez grand, les conditions sur le temps de victoire sont respecté

Commencons par fixer $\epsilon > 0$, et supposons par l'absurbe de le constructeur gagne en temps T+1 avec $c(T) > (1-\epsilon)n$

La stratégie

La stratégie pour le destructeur est la suivante :

- Trouver les segments actif du constructeur avec le plus de points
- Réaliser une $\epsilon/2$ séparation, ce qui se fait avec $4/\epsilon$ points

Réduction

- $\tilde{d}(t) = \frac{\epsilon d(t)}{4}$ et $M(s) = Szt(T^{\alpha}s, \tilde{d}(T)s + 1)$
- Les corbeilles sont les segments actif avec $\epsilon n/2$ points au moins
- Le poid vaut le nombre de points moins $\epsilon n/2$

On voit donc que le constructeur gagne en temps T+1 dans le premier jeu seulement si il a au moins $\epsilon n/2$ poids dans la dernière corbeille dans cette configuration, (ou b=d)

Conclusion

Si on note Π le poids dans la denière corbeille, alors d'après ce qui précède.

$$\Pi = O\left(\frac{1}{\tilde{d}(T)}\left(T^{(2\alpha+1)/3}\tilde{d}(T)^{2/3} + T^{\alpha}log(T) + \tilde{d}(T)log(T)\right)\right) \tag{3}$$

$$= O\left(\frac{1}{d(T)}\left(T^{(2\alpha+1)/3}d(T)^{2/3} + T^{\alpha}log(T) + d(T)log(T)\right)\right) \tag{4}$$

Amélioration du théorème de Szemerédi–Trotter

Théorème admis

Théorème 5

Soit G un graphe tel que $|V| \geqslant 3$, que l'on peut représenter dans le plan sans qu'une arête ne croise plus de 3 autres. Alors

$$|E| \leqslant 5.5(|V| - 2)$$

Théorème 6

Pour G un graphe avec plus de trois arètes,

$$cr(G) \geqslant \frac{7}{3}|E| - \frac{25}{3}(|V| - 2)$$

On déduit le théorème suivant

Théorème 7

Pour tout graphe avec au moins 3 arètes,

$$cr(G) \geqslant 4|E| - \frac{103}{6}(|V| - 2).$$

Amélioration de l'inégalité des croisements

Proposition

Pour tout graphe G tel que $\frac{103}{16}\frac{|V|}{|E|} \leqslant 1$,

$$cr(G) \geqslant \frac{1024}{31827}\frac{|E|^3}{|V|^2}.$$

Dans le cas général, on peut montrer que

$$cr(G) \geqslant \frac{1}{31.1}\frac{|E|^3}{|V|^2} - 1.06|V|$$

Théorème de Szemerédi–Trotter raffiné

Si on se donne P un ensemble de points distincts, et L un ensemble de lignes distinctes, alors en notant $I(P, L) = \{(p, l) \in P \times L \mid p \in l\}$, on a

$$|I(P, L)| \leq 2.5|P|^{2/3}|L|^{2/3} + |P| + |L|. \tag{5}$$