

# Classiques

Paul RAPHAEL, Luke Convert

March 29, 2024

## 1 Algèbre

### 1.1 Algèbre Linéaire

- Diagonalisation simultanée
- $u_f[g] = fg - gf$ : calculer  $u^k$  si  $g$  est vecteur propre puis  $g$  nilpotent
- Décomposition de Dunford
- Un endomorphisme cyclique s'écrit comme une matrice compagnon dans une base adaptée
- Décomposition de Frobenius
- Exo 85 TD
- Propriétés sur l'orthogonal
- Matrice np
- Matrice inversible produit de transvection et dilatation
- Exo 33 exo algebre lineaire
- Lemme de factorisation
- Dimension du comutant (38-39) td reduction
- Centre de  $M_n(\mathbb{R})$
- Caractérisation des homotéthies  $(x, u(x))$  liée.
- Forme des suites récurrente linéaires
- Déterminant matrice compagnon
- $A \mapsto \xi A$  est continue
- Critère d'inversion d'Hadamard
- Densité de  $GL_n(\mathbb{R})$
- Commutativité du pol char

## 1.2 Espaces Euclidiens

- Décomposition  $OT$
- Racine carré de symétrique positive
- Décomposition  $OS$
- $Ker(u^*) = (Im(u))^{\perp}$
- En dim finie  $Im(u^*) = (Ker(u))^{\perp}$
- $S + +$  ouvert et connexe par arcs
- $M \in Gl_n(R), det(M) > 0$  cpa
- $O_n(R)$  compact
- Tout isometrie est produit d'au plus  $n$  reflexion
- Tout isométrie est produit d'au moins  $p$  reflexion
- $||u|| = ||u * ||$
- Représentation des formes bilinéaires par Riez
- Polybomes orthogonaux
- Existence de produit scalaire pour une base la rendant orthonormée
- Sous multiplicativité de la norme standard sur  $M_n(\mathbb{R})$
- Orthogonal d'une intersection (euclidien)
- Orthogonal d'une somme
- Egalité du polynôme caractéristique et annulateur de l'adjoint
- Continuité de  $P \mapsto P(a)$  quand  $a$  est de module grand
- $SO_n(\mathbb{R})$  cpa

## 1.3 Algèbre Générale

- Exposant d'un groupe
- Tout sous groupe d'un monogène est monogène
- Multiplicativité de l'indicatrice d'euler
- Indicatrice d'Euler pour multiple d'un premier
- Caractérisation  $I$  premier, maximal
- Idéaux d'un corps
- Division euclidienne implique principal
- Théorème chinois sur anneau principal

## 1.4 Polynômes

- $P'$  scindé
- $P' + \lambda P$  scindé
- DES de  $P'/P$
- Théorème de Lucas
- Inégalité avec  $P''$
- $((X - k)^n)_{k \in [0, n]}$  est libre

## 2 Analyse

### 2.1 Séries

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n}$  et  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(in\theta)}{n}$
- Série de bertrand
- Les séries pour les suites récurrente
- Formule de Stirling \*2
- Constante d'Euler
- $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$  avec  $f'$  intégrable, équivalence entre convergence de l'intégrale de  $f$  et série de  $f(n)$
- Divergence de  $(z^n)_n$
- Règle de Duhamel
- Etude de la suite récurrente  $u_n = \sin(u_n)$
- Nature de  $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2 + 2n + 3})$
- Nature de  $\sum \frac{\cos(\sqrt{n})}{n}$
- Equivalent de  $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(e^{\frac{2i\pi}{3}})^k}{k}$
- Principe des suites extraites

## 2.2 Series entières

- RCV  $P(n) a_n$
- Série entière de suites récurrentes linéaires et Fractions rationnelles
- Conditions affaiblies d'unicité de série entière
- Equadif vérifiée par serie entière

## 2.3 Fonction Vect

- Continuité du module de continuité
- Point de continuité du rang
- Principe de reconstitution
- Prolongement par continuité

## 2.4 Intégrales

- Methode de trapèze
- Lemme de Riemann Lebesgue
- Lien entre intégration et suite
  - $f$  positive,  $(u_n)_n$  positifs de limite infinie equivalence entre intégrale convergente et convergence de suite
  - $f$  complexe de limite nulle à l'infini et  $\int_0^n f$  CV implique intégrale convergente
- $f$  complexe d'intégrale convergente, avec une limite à l'infini,  $f$  de limite nulle
- Méthode des Résidus:
  - Calcul de  $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^{2n}}$  pour  $n \geq 1$
- Méthode IPP
- CVA et CV  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$
- CV de l'intégrale d'un taux d'accroissements
- DA de  $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

## 2.5 Intégrales à Paramètre

- Méthode d'utilisation de CVD:
  - Recherche d'une dominante
  - Utilisation avec un intervalle variable
  - Réduction à la CVD par changement de variable
- Méthode de Laplace
  - Equivalent de  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t^3)^n dt$
- Existence de DSE de  $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{tx} e^{-t\alpha} dt$
- Intégration terme à terme:
  - Formule de Cauchy pour les lacets
  - Transformation de Fourier d'une gaussienne
  - $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n(1+nx^2)}$  définie et intégrable
- La fonction  $\Gamma$  (équation fonctionnelle)
- Transformée de Laplace

## 2.6 Suites et Séries de fonctions

- Théorème de Dini \*3
- Cauchy Hadamard
- Methode Majoration itérée
- CVU de la série de fonction  $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{x+n}$
- CVU de la suite  $u_n : x \mapsto$
- Fonction  $\zeta$
- Propriétés de fonction en escalier (Lemme de Riemann Lebesgue)
- CVU uniforme de polynômes est polynomiale
- Méthode de convolution (Théorème de Weierstrass)

## 2.7 Topologie

- Précompacité
- Théorème des compact enboité
- Suites de cauchy
- Contractance strict donne point fixe
- Adhérence d'une suite convergente
- Borel lebuges
- Si  $f$  diverge elle admet un minimum
- $GL_n(C)$  connexe par arc
- $GL_n(R)$  pas connexe par arcs
- Unicité du centre d'une boule fermé dans un evn et diamètre d'une boule
- Pour  $N$  vérifiant séparabilité et homogénéité, convexité des éléments de norme inférieur à 1 implique  $N$  norme
- Suites de suites converge implique CV de ses termes
- Principe de recouvrement des extraction
- Densité d'une intersection avec un dense
- Egalité des ouverts implique équivalence des normes
- Fermé d'un fermé, est fermé dans l'espace (même pour ouvert)
- Continuité de la réciproque si l'espace de départ est compact
- Produit de cpa est cpa
- Composantes cpa d'un ouvert sont ouvertes

## 2.8 Calcul et Equations Différentiels

- Lemme de Gronwall
- Zéro isolés
- Variation des constantes
- Méthode de Sturm-Liouville
- Entrelacement des 0
- $inv$  est  $C^1$

- Chemin  $C^\infty$  pour ouvert cpa
- $tr(AB)$  plus petit que somme des produits des vp
- $T_{I_n}O_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})$
- Equation différentielle du wronskien
- Solution particulière polynomiale d'une équation diff
- Différentielle du déterminant
- Différentielle de l'ex
- Endomorphisme d'évaluation

### 3 Exponentielle

- $e^a \in \mathbb{R}[a]$
- $\det(e^a) = e^{tr(a)}$
- Surjectivité de l'exponentielle sur les matrices complexes
- Calcul de  $\exp \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$

### 4 Probabilités

- Polynômes de Bernstein
- Lemme de Borel Cantelli \*2
- Formule du crible
- Boreliens
- Loi image
- Intersections de tribu
- Loi de poisson comme loi limite
- Moment d'ordre  $p$  implique  $p - 1$
- Fonction caractéristique d'une v.a.d
- Exemple de construction de loi binomiale ou géométrique
- Limite d'événements de la forme  $|X| \geq a$