Chapitre 13

Circuits linéaires en régime sinusoïdal forcé

1 Notion de régime forcé

Dans les chapitres précédents, on s'est intéressé au régime libre ou indiciel des circuits, c'est-à-dire que la source de tension imposait une tension constante (pouvant être nulle).

On va maintenant s'intéresser à la réponse de tels circuits au régime *forcé*, c'est à dire que la tension imposée est une fonction quelconque (mais continue) du temps.

L'analyse de Fourier s'appliquant toujours pour des circuits linéaires, on peut toujours décomposer la source de tension en composante monochromatiques sinusoïdales :

$$e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

On s'intéressera donc principalement ici à la réponse au régime *sinusoïdal forcé* des circuits linéaires, ce qui permet d'étudier la réponse individuelle aux différentes fréquences.

s.i.t. sinusoïdale

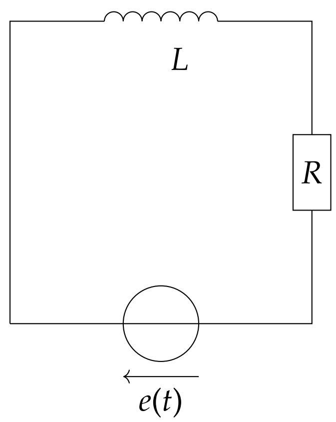
Une source idéale de tension sinusoïdale est une source de tension qui impose une d.d.p. $e(t)$ sinusoïdale d'amplitude et de fréquence fixées, ce indépendamment du courant qu'elle débite

On supposera que les pulsations des sources sinusoïdales permettent toujours de se placer dans l'ARQS, et ce afin de pouvoir continuer à utiliser les lois usuelles de l'électrocinétique vues au chapitre 4 : $f \leq c/L$ où L est la taille typique du circuit.

2 Étude d'un exemple en notation réelle

2.1 Résolution directe

On peut chercher à résoudre directement le problème du régime forcé sinusoïdal. Considérons le circuit RL série forcé par un générateur de tension sinusoïdale : $e(t) = e_0 \cos(\omega t)$.



La loi des mailles donne :

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = e(t) = u_0 \cos(\omega t)$$

On sait résoudre une telle équation différentielle : la solution est la somme de la solution de l'équation homogène (sans second membre) et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

2.2 Régime transitoire

La première nous est bien connue : il s'agira en général d'une solution de type régime transitoire, qui disparait au bout de 5τ environ (ici, $\tau = \frac{L}{R}$). Dans ce chapitre, on sera d'avantage intéressé par le comportement en régime permanent, on se permet donc d'ignorer cette partie de la solution.

2.3 Régime permanent

Pour ce qui est de la solution particulière, on peut essayer une solution de la forme : $i_p(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. En injectant, il vient :

$$L(B\omega\cos(\omega t) - A\omega\sin(\omega t)) + R(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)) = u_0\cos(\omega t).$$

Par identification, on a donc :

$$\begin{cases} AR + BL\omega = u_0 \\ -AL\omega + BR = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = \frac{R}{R^2+L^2\omega^2}u_0 \\ \\ B = \frac{L\omega}{R^2+L^2\omega^2}u_0 \end{cases}$$

Aux temps longs, le régime permanent du courant dans le circuit s'écrit donc :

$$i_p(t) = \frac{R}{R^2 + L^2\omega^2}u_0 \cos(\omega t) + \frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}u_0 \sin(\omega t)$$

2.4 Conclusion

- On note que le régime permanent est indépendant des conditions initiales, propriété déjà rencontrée pour les systèmes linéaires.
- En raison de la linéarité du circuit, la pulsation du signal de sortie est égale à celle du signal d'entrée.
- Contrairement au cas du régime indiciel des circuits (cf. chapitre 5 et 6), le régime permanent n'est pas un régime continu mais variable
- La démarche employée ici, bien que directe, n'est pas très aisée : on imagine assez facilement qu'elle devienne calculatoire pour des circuits plus complexes, d'ordre supérieur ou avec des dérivations.

3 Représentation complexe d'un signal sinusoïdal

3.1 Rappel sur les signaux sinusoïdaux

Un signal sinusoïdal ou harmonique est défini par son amplitude A, sa pulsation ω, sa phase à l'origine φ_0 :

$$s(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

avec les relations $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.

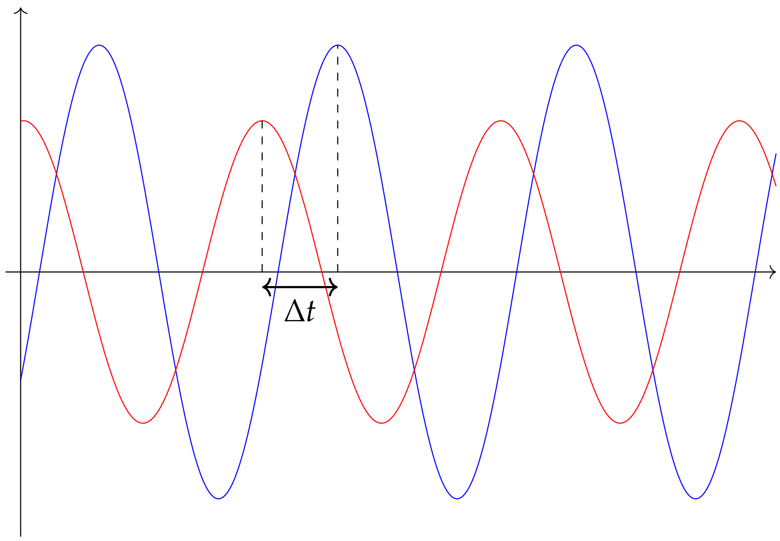
Déphasage

Deux signaux sinusoïdaux s_1 et s_2 synchrones (même ω) de phases à l'origine φ_1 et φ_2 sont déphasés si $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Le déphasage de s_2 par rapport à s_1 est donné par :

$$\Delta\varphi_{2\to 1} = \varphi_2 - \varphi_1$$

Lien $\Delta\phi/\Delta t$

Si s_1 et s_2 (synchrones à ω) sont décalés temporellement de Δt, ils sont déphasés de $\Delta\varphi = \omega\Delta t$.



On dit que s_2 et en avance (resp. en retard) sur s_1 si $\Delta\phi_{2\to 1} > 0$ (resp. $\Delta\phi_{2\to 1} < 0$.

3.2 Valeur efficace

La mesure au multimètre en mode *DC* d'un signal harmonique à plus d'une dizaine de Hertz donne un résultat nul, eu égard au caractère alternant de ce signal. Afin de caractériser son amplitude, on se donne la définition :

Valeur efficace (RMS)

La valeur efficace d'un signal périodique (période T) est donnée par la racine carrée de la moyenne du carré de ce signal (Root-Mean Squared) :

$$s_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\mathrm{d}t}$$

La valeur moyenne d'un cosinus/sinus carré valant 1/2, il s'ensuit :

<u>Pour un signal sinusoïdal</u>, la valeur efficace est l'amplitude du signal divisée par $\sqrt{2}$:

$$s_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

Exemple : la tension du secteur (entre la phase et le neutre) est conditionnée à 230 V efficace, soit une amplitude d'environ 310 V, ou encore 620 V crête-à-crête (V_{pp}).

Interprétation : la valeur efficace d'un signal périodique est la valeur du signal continu qu'il faudrait générer pour obtenir la même énergie.

Contre-exemples : un signal triangle d'amplitude E possède une amplitude RMS de $E/\sqrt{3}$, un signal créneau d'amplitude E possède une amplitude RMS de E.

3.3 Représentation complexe d'un signal

L'heuristique étudiée au paragraphe 2 nous montre que la solution **aux temps longs** du régime sinusoïdal forcé sera forcément une combinaison linéaire de sinus et cosinus synchrones avec le signal d'entrée. Ce qui importe, c'est l'amplitude/la phase à l'origine de la réponse. Afin de l'extraire, on utilise la représentation complexe d'un signal :

Représentation complexe

À tout signal harmonique $s(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ est associé sa représentation complexe :

$$\underline{s} = Ae^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{A}e^{j\omega t}$$

où $j^2 = -1$. $\underline{A} = Ae^{j\phi}$ est l'*amplitude complexe* du signal, elle contient toute l'information sur celui-ci.

Signal réel

Le signal réel est obtenu en écrivant :

$$s(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{s}\right)$$

Plutôt que de passer par l'opération de partiel réelle, qui peut être calculatoire dès lors qu'il y a des opérations de quotient, on peut choisir d'extraire séparément amplitude (réelle) et phase à l'origine.

Amplitude et phase à l'origine

On obtient l'amplitude réelle du signal en calculant le module de sa représentation complexe :

$$A = |\underline{s}| = |\underline{A}|$$

On obtient la phase à l'origine (modulo 2π) du signal en calculant l'argument de sa représentation complexe :

$$\varphi = \arg(\underline{A}) == \begin{cases} \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\left(\underline{A}\right)}{\mathrm{Re}\left(\underline{A}\right)}\right) & \text{si } \mathrm{Re}\left(\underline{A}\right) > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\left(\underline{A}\right)}{\mathrm{Re}\left(\underline{A}\right)}\right) & \text{si } \mathrm{Re}\left(\underline{A}\right) < 0 \end{cases}$$

Remarque 1 : les deux approches précédentes (calcul de la partie réelle ou extraction module/argument) donnent nécessairement le même résultat. Un peu de trigonométrie permet en principe de s'en convaincre.

Remarque 2 : La démarche de prendre les parties réelles n'est licite que si la tension imposée est écrite en cosinus. Si c'est un sinus qui est imposé, il faudra prendre la partie imaginaire...)

3.4 Représentation de Fresnel

On peut se donner un point de vue géométrique qui facilitera parfois l'interprétation des opérations sur les représentations complexes : la représentation de Fresnel dite des vecteurs tournants.

La représentation complexe est tracée dans le plan complexe sous la forme d'un vecteur de norme $|\underline{s}|$ et faisant avec l'axe réel un angle $\arg \underline{s}$. Il s'agit alors d'un vecteur tournant à la pulsation ω, qu'on se contente de représenter pour $t = 0$. On a alors $\arg \underline{s} = \phi_0$.

3.5 Opérations sur les représentations complexes

Les opérations linéaires sur les signaux temporels commutant avec le calcul de la partie réelle, celles-ci se transposent directement sur les représentations complexes.

Autrement dit, l'espace des représentations complexes possède une structure d'espace vectoriel, et le passage d'un signal à sa représentation complexe est une application linéaire.

Addition de deux signaux

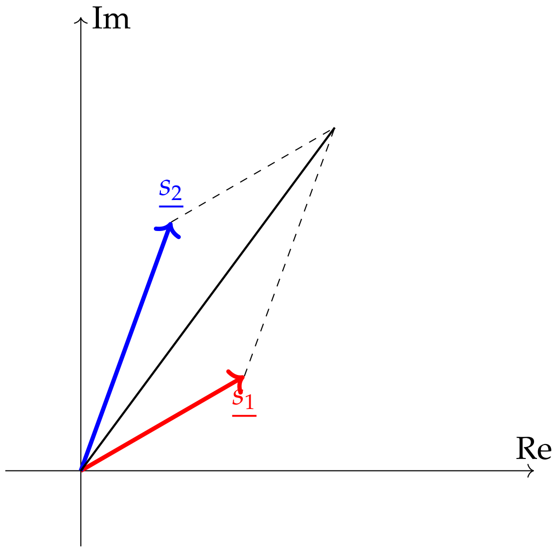
Addition

La représentation complexe de $s_1(t) + s_2(t)$ est donnée par :

$$s_1(t) + s_2(t) \longrightarrow \underline{s_1} + \underline{s_2}$$

Important : par inégalité triangulaire, l'addition des représentations complexes n'implique par l'addition des amplitudes réelles ! Une condition nécessaire pour écrire cela est l'absence de déphasage entre s_1 et s_2.

Représentation de Fresnel :



Avec Al-Kashi (développement du carré scalaire), on voit que l'amplitude réelle du signal somme est donnée par :

$$A = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

qui correspond au calcul :

$$A = \left|A_1 e^{j\varphi_1} + A_2 e^{j\varphi_2}\right|$$

Multiplication par un scalaire

Multiplication par un scalaire

La représentation complexe de $\lambda s(t)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) est donnée par :

$$\lambda s(t) \to \lambda \underline{s}$$

Dérivation par rapport au temps

La dérivation de la représentation complexe de $\underline{s}$ donne :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Ae^{j(\omega t+\varphi)}) = (j\omega)Ae^{j(\omega t+\varphi)} = (j\omega)\underline{s}$$

On peut vérifier qu'en passant à la partie réelle :

$$\mathrm{Re}\left((j\omega)\underline{s}\right) = \mathrm{Re}\left(jA\omega\cos(\omega t+\varphi) - A\omega\sin(\omega t+\varphi)\right) = -A\omega\sin(\omega t+\varphi)$$

on retrouve bien $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ comme attendu.

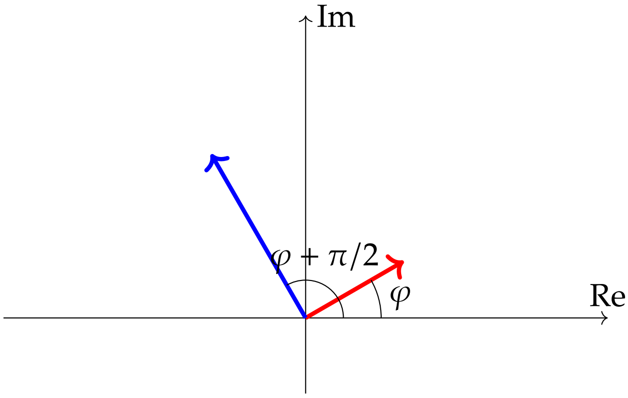
Dérivation

L'opération de dérivation d'un signal correspond à la multiplication de sa représentation complexe par $j\omega$:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \to (j\omega)\underline{s}$$

Noter l'homogénéité du passage aux complexes.

Représentation de Fresnel :



On note que la dérivation correspond à une rotation de $+\pi/2$ de la représentation de Fresnel (suivi d'une homothétie de rapport ω).

Généralisation : dériver n fois dans le domaine réel revient à une multiplication par $(j\omega)^n$ en représentation complexe.

Intégration par rapport au temps

Le calcul pour le cas de l'intégration par rapport au temps est semblable, mais il faut régler la question de la constante d'intégration.

Comme on ne souhaite travailler qu'avec des signaux harmoniques (sans quoi la notation complexe n'aurait pas de sens), il est nécessaire d'annuler toute constante qui apparaitrait dans des calculs.

$$\int \underline{s}\mathrm{d}t = \frac{1}{j\omega}Ae^{j(\omega t+\varphi)} = \frac{1}{j\omega}\underline{s}$$

Intégration

L'opération d'intégration (primitive) d'un signal par rapport au temps correspond à la division de sa représentation complexe par $j\omega$:

$$\int s(t)\mathrm{d}t \rightarrow \frac{1}{j\omega}\underline{s}$$

Opérations non-linéaires

Les opérations non-linéaires ne commutent pas avec la partie réelle, on reviendra toujours aux signaux réels pour des calculs de quantités non-linéaires (par exemple, le produit).

4 Impédance complexe d'un dipôle

4.1 Dipôle linéaire

On s'est intéressé au début de ce cours à des dipôles dit linéaires. On avait donné à ce moment une définition plutôt étrange : ce sont ceux dont la caractéristique dynamique est donnée par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

On a alors une relation de la forme :

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{\mathrm{d}^i u}{\mathrm{d}t^i} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{\mathrm{d}^k i}{\mathrm{d}t^k} + f(t)$$

On ne considère ici que des dipôles passifs, d'où $f(t) = 0$.

En passant en notation complexe, les dérivées deviennent des multiplications par $j\omega$, d'où :

$$\sum_{i=0}^{N} a_i (j\omega)^i \underline{u} = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k \underline{i}$$

Et on peut alors factoriser par $\underline{u}$ et $\underline{i}$, d'où on déduit :

$$\underline{u} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j\omega)^i} \underline{i}$$

Impédance d'un dipôle

L'impédance complexe d'un dipôle est le rapport entre l'amplitude complexe de la tension à ses bornes et l'amplitude complexe de l'intensité le traversant :

$$\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$$

Remarque : on peut aussi définir l'impédance comme le rapport des tensions/intensité complexes, le facteur en $e^{j\omega t}$ se simplifiant. En revanche, on ne peut pas la réduire au rapport des amplitudes réelles !

La notion d'impédance permet ainsi la généralisation de la loi d'Ohm aux dipôles linéaires, qui portent leur nom en raison de la relation linéaire qui lie tension et intensité complexes.

4.2 Impédance des dipôles usuels

Impédance d'une résistance

La loi d'Ohm survit au passage à la notation complexe, et on a donc :

$$\underline{u} = R\underline{i}$$

Impédance d'une résistance

L'impédance d'un conducteur ohmique de résistance R vaut :

$$\underline{Z}_R = R$$

Impédance d'une bobine

La relation fondamentale d'une bobine est $u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Après passage à la notation complexe, on a donc :

$$\underline{u} = jL\omega\underline{i}$$

Impédance d'une bobine

L'impédance d'une bobine idéale d'inductance L vaut :

$$\underline{Z}_L = jL\omega$$

On retrouve qu'en basse fréquence, $\omega \sim 0 \Rightarrow Z_L \sim 0$, donc la bobine se comporte comme un fil.

En haute-fréquence en revanche, $Z_L \to +\infty$:

Comportement HF d'une bobine

En haute fréquence, une bobine est équivalente à un interrupteur ouvert.

Impédance d'un condensateur

La relation fondamentale du condensateur est $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. Après passage à la notation complexe, on a donc :

$$\underline{i} = jC\omega\underline{u}$$

Impédance d'un condensateur

L'impédance d'un condensateur de capacité C vaut :

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$$

On retrouve qu'en basse fréquence, $\omega \sim 0 \Rightarrow Z_C \to +\infty$, donc le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

En haute-fréquence en revanche, $Z_C \to 0$:

Comportement HF d'un condensateur

En haute fréquence, un condensateur est équivalent à un fil.

4.3 Vocabulaire

On pose $Z = R + jX$ et $Y = 1/Z = G + jB$:

- Z est appelée impédance (complexe), R résistance et X réactance. Ces trois quantités s'expriment dans le SI en ohms (Ω).
- Y est appelée admittance (complexe), G la conductance et B la susceptance. Ces trois quantités s'expriment en siemens ($S = \Omega^{-1}$).
- $R, G \geq 0$ mais le signe de X ou B est quelconque.
- Un dipôle est purement résistif si $\forall\omega$, $\mathrm{Im}\left(\underline{Z}\right) = 0$, ce qui est équivalent à $X = 0$, ou encore à $B = 0$. Exemple : conducteur ohmique idéal.
- Un dipôle est purement réactif si $\forall\omega$, $\mathrm{Re}\left(\underline{Z}\right) = 0$, ce qui est équivalent à $R = 0$, ou encore à $G = 0$. Exemple : condensateur idéal, bobine idéale.

4.4 Lien entre impédance et déphasage u/i

L'impédance permet la mesure du déphasage entre u et i. En effet, supposons que ces deux quantités s'écrivent (en choisissant convenablement l'origine des temps) :

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t + \phi) \qquad i(t) = i_0 \cos(\omega t)$$

On aura alors :

$$\frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{u_0 e^{j(\omega t+\phi)}}{i_0 e^{j\omega t}} = \frac{u_0}{i_0} e^{j\phi} = \underline{Z}$$

et donc finalement :

Impédance et déphasage

Le déphasage entre la tension aux bornes d'un dipôle et le courant le traversant est donné par l'argument de son impédance complexe :

$$\phi = \arg(\underline{Z})$$

Exemples :

- $\phi = 0$ pour une résistance : les dipôles purement résistifs ne créent pas de déphasage entre la tension aux bornes du dipôle et l'intensité la traversant.
- $\phi = +\pi/2$ pour une bobine : tension et intensité sont en quadrature de phase, avec u en avance sur i.
- $\phi = -\pi/2$ pour un condensateur : tension et intensité sont en quadrature de phase, avec u en retard sur i.

5 Lois de l'électrocinétique en RSF

5.1 Loi des noeuds

Le cadre de l'ARQS étant toujours respecté, celle-ci reste vraie : à un noeud, on peut écrire

$$\sum_k \varepsilon_k i_k(t) = 0 \quad (1)$$

Écrivons $i_k(t) = a_k \cos(\omega t + \phi_k)$. Si on décale l'origine des temps d'un quart de période $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega}$, alors $t \to t - \frac{\pi}{2\omega}$, et on a alors d'après l'égalité précédente :

$$\sum_k \varepsilon_k a_k \sin(\omega t + \phi_k) = 0 \quad (2)$$

On a donc, en écrivant (1) + j(2) :

LDN en RSF

En RSF, la somme algébrique des courants *complexes* est nulle :

$$\sum_k \varepsilon_k \underline{i_k} = 0$$

En divisant le tout par $e^{j\omega t}$, on a même le résultat plus fort que la somme algébrique des amplitudes des courants complexes est nulle :

$$\sum_k \varepsilon \underline{I_k} = 0$$

Attention : il est rigoureusement faux de vouloir aller plus loin en affirmant que la somme algébrique des amplitudes réels des courants est nulle. En effet, les phases à l'origine des différents courants peuvent être différentes.

5.2 Loi des mailles

Passons à présent à la loi des mailles. En toute généralité, celle-ci s'écrit

$$\sum_i \varepsilon_i u_i = 0$$

où u_i est la tension entre deux extrémités d'une branche. De même, par linéarité, on arrive à la conclusion que

LDMℂ

$$\sum_i \varepsilon_i \underline{u_i} = 0 \Leftrightarrow \sum_i \varepsilon_i \underline{U_i} = 0$$

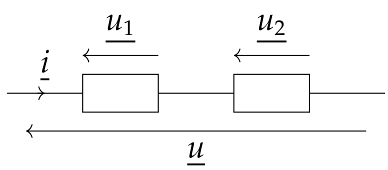
La somme algébrique des tensions complexes (ou de leurs amplitudes complexes) est nulle.

Attention : ne surtout pas affirmer que la somme des modules des tensions complexes est nulle, car c'est en toute généralité parfaitement faux.

5.3 Association d'impédances

Impédances en série

On considère deux impédances $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_2}$ en série.



On a :

$$\underline{u} = \underline{u_1} + \underline{u_2} = \underline{Z_1}\underline{i} + \underline{Z_2}\underline{i} = (\underline{Z_1} + \underline{Z_2})\underline{i} = \underline{Z_{\text{eq}}}\underline{i}$$

Par récurrence immédiate :

Impédances en série

Une association série d'impédances $\{\underline{Z_i}\}_{i=1..N}$ est équivalente à une unique impédance :

$$\underline{Z_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^{N} \underline{Z_i}$$

Impédances en parallèle

On considère deux impédances $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ en parallèle :
On a :

$$\underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2 = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{u}}{\underline{Z}_2} = \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}\right)\underline{u} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}_{\text{eq}}}$$

Par récurrence immédiate :

Impédances en parallèle

Une association parallèle d'impédances $\{\underline{Z}_i\}_{i=1..N}$ est équivalente à une unique impédance :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\underline{Z}_i} \Leftrightarrow \underline{Y}_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \underline{Y}_i$$

5.4 Loi de Pouillet

Loi de Pouillet

Une source idéale de tension $\underline{e}$ mise en série avec des impédances $\{\underline{Z}_i\}_{i=1..N}$ débite un courant :

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{\sum_{i=1}^{N} \underline{Z}_i}$$

5.5 Ponts diviseurs

On considère des dipôles linéaires en série, d'impédances $\underline{Z}_k$. Avec les conventions du schéma, la loi des mailles permet d'écrire

$$\underline{e} = \sum \underline{u}_k = \sum \underline{Z}_k \underline{i} = \underline{i} \sum \underline{Z}_k \Longrightarrow \underline{i} = \frac{\underline{e}}{\sum \underline{Z}_k}$$

Puis, pour le dipôle n, on a $\underline{u}_n = \underline{Z}_n\, \underline{i}_n$ d'où finalement :

PDT$\mathbb{C}$

Pour n dipôles d'impédances $\{\underline{Z_i}\}$ **en série** soumis à une différence de potentiel $\underline{e}$, on a :

$$\underline{u_k} = \frac{\underline{Z_k}}{\sum_i \underline{Z_i}}\underline{e}$$

On a un résultat similaire pour le pont diviseur de courant :

PDC$\mathbb{C}$

Pour n dipôles d'impédances $\{\underline{Z_i}\}$ **en parallèle** entre deux noeuds, le courant $\underline{i_k}$ traversant le k-ème dipôle est donné en fonction du courant arrivant au noeud $\underline{i}$ par :

$$\underline{i_k} = \frac{\underline{Y_k}}{\sum_i \underline{Y_i}}\underline{i} = \frac{\frac{1}{\underline{Z_k}}}{\sum_i \frac{1}{\underline{Z_i}}}\underline{i}$$

On peut donc utiliser les formules des ponts diviseurs en RSF : on doit simplement utiliser les impédances complexes au lieu des simples résistances, et considérer les amplitudes complexes des tensions.

Le point intéressant est que la tension complexe aux bornes d'un dipôle peut donc être obtenue en faisant un simple rapport de quantités algébriques, plutôt que de résoudre une équation différentielle.

6 Application aux circuits du premier ordre

6.1 Retour sur le RL série

Reprenons l'exemple introductif. En appliquant le diviseur de tension à la bobine, on trouve que $\underline{u_L} = \frac{jL\omega}{R+jL\omega}\underline{e}$, d'où ($\tau = L/R$) :

$$\underline{i} = \frac{1}{1+j\omega\tau}\frac{\underline{e}}{R}$$

On peut récupérer l'information réelle de deux manières :

• Comme $\underline{e} = e\exp(j\omega t) = e\cos(\omega t) + je\sin(\omega t)$, en extrayant la partie réelle, on trouve bien

$$i = \frac{1}{1+\omega^2\tau^2}\frac{e}{R}\cos(\omega t) + \frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}\frac{e}{R}\sin(\omega t).$$

• L'amplitude réelle est donnée par :

$$|\underline{i}| = \frac{e}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

Quant à la phase, elle est donnée par :

$$\phi = \arg\left(\frac{\underline{e}}{R + jL\omega}\right) = -\arg(R + jL\omega) = -\arctan(\omega\tau)$$

On a donc :

$$i(t) = \frac{e}{R}\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}\cos(\omega t - \arctan(\omega\tau))$$

Pour montrer que cette expression est identique à la précédente, on calcule :

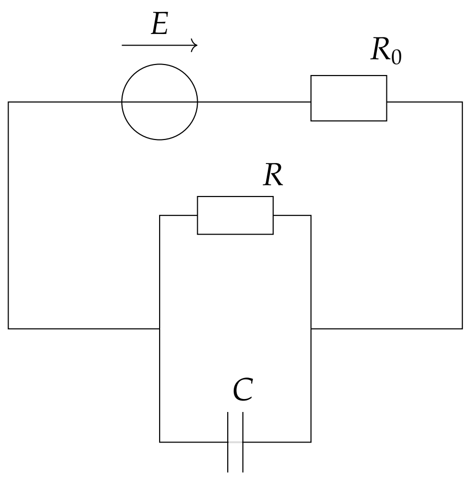
$$\cos(\arctan(\omega\tau)) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \qquad \sin(\arctan(\omega\tau)) = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

d'où :

$$i(t) = \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2}\frac{e}{R}\cos(\omega t) + \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}\frac{e}{R}\sin(\omega t).$$

6.2 Détermination d'une équation différentielle a posteriori

On reprend l'exemple du circuit RC parallèle alimenté par une source réelle de tension :



La détermination de l'équation différentielle est plus aisée en passant d'abord aux complexes : le circuit est équivalent à une source de tension $\underline{e}$ en série avec une impédance équivalente :

$$\underline{Z_{\mathrm{eq}}} = R_0 + \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} = R_0 + \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

Ce qui donne accès au courant complexe dans la branche principale :

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{\underline{Z_{\text{eq}}}}$$

On a ensuite accès à la dynamique de u_c en écrivant un pont diviseur de courant :

$$\underline{u_c} = \frac{\underline{i_c}}{jC\omega} = \frac{1}{jC\omega}\frac{jC\omega}{jC\omega + \frac{1}{R}}\frac{\underline{e}}{\underline{Z_{\text{eq}}}}$$

Et après simplifications :

$$\underline{u_c} = \frac{R}{1 + jRC\omega}\frac{1 + jRC\omega}{(R + R_0) + jRR_0C\omega}\underline{e} = \frac{R}{(R + R_0) + jRR_0C\omega}\underline{e}$$

On peut alors repasser à la notation réelle pour obtenir l'équation différentielle :

$$\underline{e} = \left(1 + \frac{R_0}{R} + jR_0C\omega\right)\underline{u_c} \Rightarrow R_0C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \left(1 + \frac{R_0}{R}\right)u_c = e$$