

Le lemme

Soit X une variable aléatoire discrète intégrable sur l'univers Ω .



Question 0 Montrer qu'il existe $x \geq \mathbb{E}X$ tel que $x \in X(\Omega)$.

Correction

▷ On suppose par l'absurde que $X(\Omega) \subset]-\infty, x[$.

$$\mathbb{E}X = \sum_{a \in X(\Omega)} a \mathbb{P}\{X = a\} < x \sum_{a \in X(\Omega)} \mathbb{P}\{X = a\} = x$$

Donc $\mathbb{E}X < x$, c'est absurde ↯



Un peu de chauffe

Soit $G = (S, A)$ avec $n := |S|$, $m := |A|$ et $m \geq 4n$. On note $\text{cr}(\overline{G})$ le nombre de croisements d'une représentation planaire \overline{G} de G . Alors on définit $\text{cr}(G) := \min \text{cr}(\overline{G})$.

D'après la formule d'Euler, pour tout graphe H , $\text{cr}(H) \geq m(H) - 3n(H)$.

On note $S^\dagger \subset S$ une partie aléatoire de S où chaque sommet est choisi indépendamment avec une probabilité p . On note ensuite $H := G[S^\dagger]$ et $\overline{H} := \overline{G}[S^\dagger]$.



Question 1 Montrer que $\text{cr}(\overline{H}) \geq m(H) - 3n(H)$.

Correction

$$\text{cr}(\overline{H}) \geq \text{cr}(H) \geq m(H) - 3n(H)$$

d'après la formule d'Euler.



Question 2 Déterminer $\mathbb{E}[m(H)]$ et $\mathbb{E}[n(H)]$.

Correction

Chaque sommet est choisi avec une probabilité p donc $\mathbb{E}[n(H)] = \sum_{s \in S} p = np$.

Pour qu'une arête existe, il faut que ses deux sommets soient choisis, $\mathbb{E}[m(H)] = \sum_{\{uv\} \in A} \mathbb{P}(u \text{ choisi et } v \text{ choisi}) = \sum_{\{uv\} \in A} p^2 = mp^2$.




Question 3 Exprimer $\mathbb{E}[\text{cr}(\overline{H})]$ en fonction de $\text{cr}(G)$.

Correction

Pour qu'un croisement existe, il faut que deux arêtes existent, donc que les quatre sommets existent

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\text{cr}(\overline{H})] &= \sum_{\{uv\}, \{wx\} \text{ se croisent}} \mathbb{P}(\{uv\} \text{ existe et } \{wx\} \text{ existe}) \\ &= \sum_{\{uv\}, \{wx\} \text{ se croisent}} \mathbb{P}(\{u \in S^{\dagger}\} \cap \{v \in S^{\dagger}\} \cap \{w \in S^{\dagger}\} \cap \{x \in S^{\dagger}\}) \\ &= p^4 \text{ cr}(\overline{G}) \text{ car } u, v, w, x \text{ sont distincts}\end{aligned}$$

On est conscient de la possibilité d'un croisement de type "α", mais on choisit de faire comme s'ils n'existaient pas.

 **Question 4** Démontrer $\text{cr}(G) \geq \frac{1}{64} \frac{m^3}{n^2}$.

Correction


On choisit $p = 4 \frac{n}{m}$ et reprend les résultats précédents.

$$p^4 \text{ cr}(G) \geq \mathbb{E}(\text{cr}(\overline{H})) \geq \mathbb{E}(m(H)) - 3\mathbb{E}(n(H)) = mp^2 - 3np$$

En réarrangeant, on a bien $\text{cr}(G) \geq \frac{1}{64} \frac{m^3}{n^2}$.

Une question d'originalité

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ telle que tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ apparaît exactement n fois dans M .

 **Question 5** Montrer qu'il existe une ligne ou une colonne contenant au moins \sqrt{n} valeurs distinctes.

Correction

Soit L une ligne ou colonne aléatoire de M , puis N le nombre de valeurs distinctes. Si I_k est le nombre d'occurrences de k dans M , on a $N = \sum_k \mathbb{P}\{I_k \geq 1\}$. Pour cette variable en particulier, le pire cas est si les n occurrences de k sont dans une même mineure $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$. Ainsi, $\mathbb{P}\{I_k \geq 1\} \geq \frac{2\sqrt{n}}{2n}$.

En sommant, $\mathbb{E}N \geq \sqrt{n}$, et on conclut par le lemme de la méthode probabiliste.

□

De la géométrie

Soit $a \in \mathbb{C}^{10}$. On dira que $p \in \mathbb{C}^{10}$

• couvre a si

$$a \subset \bigcup_{x \in p} \overline{\mathcal{B}}(x, 1)$$

• est sans superposition si

$$\forall x, y \in p, x \neq y \Rightarrow \overline{\mathcal{B}}(x, 1) \cap \overline{\mathcal{B}}(y, 1) = \emptyset$$

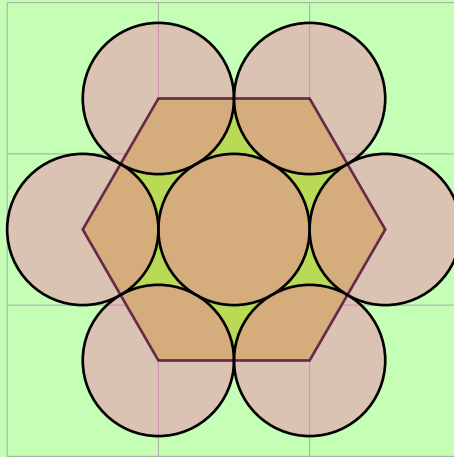
Question 6 Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{C}^{10}$ couvrant a sans superposition.

Ind: $\frac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 0.907$

Correction

On commence par montrer le résultat suivant: "il existe $\ell \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ couvrant a sans superposition".

¶ On considère l'empilement de Lagrange :



On note A_H l'aire de l'hexagone et A_C l'aire du cercle. Un peu de géométrie donne :

$$\bullet A_C = \frac{\pi}{4}$$

$$\bullet A_H = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

En répétant cet empilement à l'infini, on couvre donc une proportion $\eta := \frac{A_C}{A_H}$ de l'aire du plan.

On introduit donc une variable aléatoire N le nombre de points de a couverts avec une translation aléatoire de notre motif. Cette variable aléatoire est d'espérance $10\eta = 10 \times \frac{\pi\sqrt{3}}{6} > 9$, donc il existe une translation telle que l'empilement de Lagrange couvre a . ¶

Comme ℓ est sans recouvrement, au plus 10 éléments de ℓ couvrent un élément de a . On pose alors p ces éléments, et d'autres s'il le faut pour compléter. On a donc construit $p \in \mathbb{C}^{10}$ couvrant a sans recouvrement.

□

Du rab

Soit $k \in \mathbb{N}$.

La propriété à laquelle on s'intéresse ici est la *propriété de distance*

$$\mathcal{D}(a_1 \dots a_k) := (\forall i, j, |a_i - a_j| \leq 2) \vee (\forall i \neq j, |a_i - a_j| \geq 1)$$

On pose enfin $\mathcal{P}(n) := \forall A \in \mathfrak{P}(\mathbb{C}), (|A| = n) \implies (\exists \{a_1 \dots a_k\} \subset A, \mathcal{D}(a_1 \dots a_k))$

Question 7 Calculer $\inf\{n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)\}$.

Correction

Honnêtement j'ai oublié comment faire... vous êtes libres de PR une réponse probabiliste !