

## Le lemme

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète intégrable sur l'univers  $\Omega$ .



**Question 0** Montrer qu'il existe  $x \geq \mathbb{E}X$  tel que  $x \in X(\Omega)$ .

## Un peu de chauffe

Soit  $G = (S, A)$  avec  $n := |S|$ ,  $m := |A|$  et  $m \geq 4n$ . On note  $\text{cr}(\overline{G})$  le nombre de croisements d'une représentation planaire  $\overline{G}$  de  $G$ . Alors on définit  $\text{cr}(G) := \min \text{cr}(\overline{G})$ .

D'après la formule d'Euler, pour tout graphe  $H$ ,  $\text{cr}(H) \geq m(H) - 3n(H)$ .

On note  $S^\dagger \subset S$  une partie aléatoire de  $S$  où chaque sommet est choisi avec une probabilité  $p$ . On note ensuite  $H := G[S^\dagger]$  et  $\overline{H} := \overline{G}[S^\dagger]$ .



**Question 1** Montrer que  $\text{cr}(\overline{H}) \geq m(H) - 3n(H)$ .



**Question 2** Déterminer  $\mathbb{E}[m(H)]$  et  $\mathbb{E}[n(H)]$ .



**Question 3** Exprimer  $\mathbb{E}[\text{cr}(\overline{H})]$  en fonction de  $\text{cr}(G)$ .



**Question 4** Démontrer  $\text{cr}(G) \geq \frac{1}{64} \frac{m^3}{n^2}$ .

## Une question d'originalité

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$  telle que tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  apparaît exactement  $n$  fois dans  $M$ .



**Question 5** Montrer qu'il existe une ligne ou une colonne contenant au moins  $\sqrt{n}$  valeurs distinctes.

## De la géométrie

Soit  $a \in \mathbb{C}^{10}$ . On dira que  $p \in \mathbb{C}^{10}$

• *couvre a* si

$$a \subset \bigcup_{x \in p} \overline{B}(x, 1)$$

• *est sans superposition* si

$$\forall x, y \in p, x \neq y \Rightarrow \overline{B}(x, 1) \cap \overline{B}(y, 1) = \emptyset$$



**Question 6** Montrer qu'il existe  $p \in \mathbb{C}^{10}$  couvrant  $a$  sans superposition.

Ind:  $\frac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 0.907$

## Du rab

Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

La propriété à laquelle on s'intéresse ici est la *propriété de distance*

$$\mathcal{D}(a_1 \dots a_k) := (\forall i, j, |a_i - a_j| \leq 2) \vee (\forall i \neq j, |a_i - a_j| \geq 1)$$

On pose enfin  $\mathcal{P}(n) := \forall A \in \mathfrak{P}(\mathbb{C}), (|A| = n) \implies (\exists \{a_1 \dots a_k\} \subset A, \mathcal{D}(a_1 \dots a_k))$



**Question 7** Calculer  $\inf\{n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)\}$ .