

Le lemme

Soit X une variable aléatoire discrète intégrable sur l'univers Ω .



Question 0 Montrer qu'il existe $x \geq \mathbb{E}X$ tel que $x \in X(\Omega)$.

Un peu de chauffe

Soit $G = (S, A)$ avec $n := |S|$, $m := |A|$ et $m \geq 4n$. On note $\text{cr}(\overline{G})$ le nombre de croisements d'une représentation planaire \overline{G} de G . Alors on définit $\text{cr}(G) := \min \text{cr}(\overline{G})$.

D'après la formule d'Euler, pour tout graphe H , $\text{cr}(H) \geq m(H) - 3n(H)$.

On note $S^\dagger \subset S$ une partie aléatoire de S où chaque sommet est choisi avec une probabilité p . On note ensuite $H := G[S^\dagger]$ et $\overline{H} := \overline{G}[S^\dagger]$.



Question 1 Montrer que $\text{cr}(\overline{H}) \geq m(H) - 3n(H)$.



Question 2 Déterminer $\mathbb{E}[m(H)]$ et $\mathbb{E}[n(H)]$.



Question 3 Exprimer $\mathbb{E}[\text{cr}(\overline{H})]$ en fonction de $\text{cr}(G)$.



Question 4 Démontrer $\text{cr}(G) \geq \frac{1}{64} \frac{m^3}{n^2}$.

Une question d'originalité

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ telle que tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ apparaît exactement n fois dans M .



Question 5 Montrer qu'il existe une ligne ou une colonne contenant au moins \sqrt{n} valeurs distinctes.

De la géométrie

Soit $a \in \mathbb{C}^{10}$. On dira que $p \in \mathbb{C}^{10}$

• *couvre a* si

$$a \subset \bigcup_{x \in p} \overline{B}(x, 1)$$

• *est sans superposition* si

$$\forall x, y \in p, x \neq y \Rightarrow \overline{B}(x, 1) \cap \overline{B}(y, 1) = \emptyset$$



Question 6 Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{C}^{10}$ couvrant a sans superposition.

Ind: $\frac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 0.907$

Du rab

Soit $k \in \mathbb{N}$.

La propriété à laquelle on s'intéresse ici est la *propriété de distance*

$$\mathcal{D}(a_1 \dots a_k) := (\forall i, j, |a_i - a_j| \leq 2) \vee (\forall i \neq j, |a_i - a_j| \geq 1)$$

On pose enfin $\mathcal{P}(n) := \forall A \in \mathfrak{P}(\mathbb{C}), (|A| = n) \implies (\exists \{a_1 \dots a_k\} \subset A, \mathcal{D}(a_1 \dots a_k))$



Question 7 Calculer $\inf\{n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)\}$.