Le lemme

Soit X une variable aléatoire discrète intégrable sur l'univers Ω.

🐥 **Question 0** Montrer qu'il existe $x \geq \mathbb{E}X$ tel que $x \in X(\Omega)$.

Correction

▷ On suppose par l'absurde que $X(\Omega) \subset]-\infty, x[$.

$$\mathbb{E}X = \sum_{a \in X(\Omega)} a\mathbb{P}\{X = a\} < x \sum_{a \in X(\Omega)} \mathbb{P}\{X = a\} = x$$

Donc $\mathbb{E}X < x$, c'est absurde ↯ ◁

Un peu de chauffe

Soit $G = (S, A)$ avec $n := |S|$, $m := |A|$ et $m \geq 4n$. On note $\operatorname{cr}\left(\overline{G}\right)$ le nombre de croisements d'une représentation planaire $\overline{G}$ de G. Alors on définit $\operatorname{cr}(G) := \min \operatorname{cr}\left(\overline{G}\right)$.

D'après *la formule d'Euler*, pour tout graphe H, $\operatorname{cr}(H) \geq m(H) - 3n(H)$.

On note $S^\dagger \subset S$ une partie aléatoire de S où chaque sommet est choisi indépendamment avec une probabilité p. On note ensuite $H := G\left[S^\dagger\right]$ et $\overline{H} := \overline{G}\left[S^\dagger\right]$.

🐥 **Question 1** Montrer que $\operatorname{cr}\left(\overline{H}\right) \geq m(H) - 3n(H)$.

Correction

$$\operatorname{cr}\left(\overline{H}\right) \geq \operatorname{cr}(H) \geq m(H) - 3n(H)$$

d'après la *formule d'Euler*.

🐈 **Question 2** Déterminer $\mathbb{E}[m(H)]$ et $\mathbb{E}[n(H)]$.

Correction

Chaque sommet est choisi avec une probabilité p donc $\mathbb{E}[n(H)] = \sum_{s \in S} p = np$.

Pour qu'une arête existe, il faut que ses deux sommets soient choisis, $\mathbb{E}[m(H)] = \sum_{\{uv\} \in A} \mathbb{P}(u \text{ choisi et } v \text{ choisi}) = \sum_{\{uv\} \in A} p^2 = mp^2$.

🐈 **Question 3** Exprimer $\mathbb{E}\left[\operatorname{cr}\left(\overline{H}\right)\right]$ en fonction de $\operatorname{cr}(G)$.

Correction

Pour qu'un croisement existe, il faut que deux arêtes existent, donc que les quatre sommets existent

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathrm{cr}\left(\overline{H}\right)\right] &= \sum_{\{uv\},\{wx\}\text{ se croisent}} \mathbb{P}(\{uv\}\text{ existe et }\{wx\}\text{ existe})\\ &= \sum_{\{uv\},\{wx\}\text{ se croisent}} \mathbb{P}\left(\left\{u\in S^{\dagger}\right\}\cap\left\{v\in S^{\dagger}\right\}\cap\left\{w\in S^{\dagger}\right\}\cap\left\{x\in S^{\dagger}\right\}\right)\\ &= p^4\ \mathrm{cr}\left(\overline{G}\right)\ \text{car } u,v,w,x \text{ sont distincts}\end{aligned}$$

On est conscient de la possibilité d'un croisement de type "α", mais on choisit de faire comme s'ils n'existaient pas.

Question 4 Démontrer $\mathrm{cr}(G)\geq \frac{1}{64}\frac{m^3}{n^2}$.

Correction

On choisit $p = 4\frac{n}{m}$ et reprend les résultats précédents.

$$p^4\ \mathrm{cr}(G)\geq \mathbb{E}\left(\mathrm{cr}\left(\overline{H}\right)\right)\geq \mathbb{E}(m(H)) - 3\mathbb{E}(n(H)) = mp^2 - 3np$$

En réarrangeant, on a bien $\mathrm{cr}(G)\geq \frac{1}{64}\frac{m^3}{n^2}$.

Une question d'originalité

Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ telle que tout $k\in[\![1,n]\!]$ apparaît exactement n fois dans M.

Question 5 Montrer qu'il existe une ligne ou une colonne contenant au moins $\sqrt{n}$ valeurs distinctes.

Correction

Soit L une ligne *ou* colonne aléatoire de M, puis N le nombre de valeurs distinctes. Si I_k est le nombre d'occurrences de k dans M, on a $N = \sum_k \mathbb{P}\{I_k\geq 1\}$. Pour cette variable en particulier, le pire cas est si les n occurrences de k sont dans une même mineure $\sqrt{n}\times\sqrt{n}$. Ainsi, $\mathbb{P}\{I_k\geq 1\}\geq\frac{2\sqrt{n}}{2n}$.

En sommant, $\mathbb{E}N\geq\sqrt{n}$, et on conclut par le lemme de la méthode probabiliste.

□

De la géométrie

Soit $\boldsymbol{a}\in\mathbb{C}^{10}$. On dira que $\boldsymbol{p}\in\mathbb{C}^{10}$

- *couvre* $\boldsymbol{a}$ si
$$\boldsymbol{a}\subset\bigcup_{x\in\boldsymbol{p}}\overline{\mathcal{B}}(x,1)$$
- est *sans superposition* si
$$\forall x,y\in\boldsymbol{p}, x\neq y\Rightarrow\overline{\mathcal{B}}(x,1)\cap\overline{\mathcal{B}}(y,1)=\emptyset$$

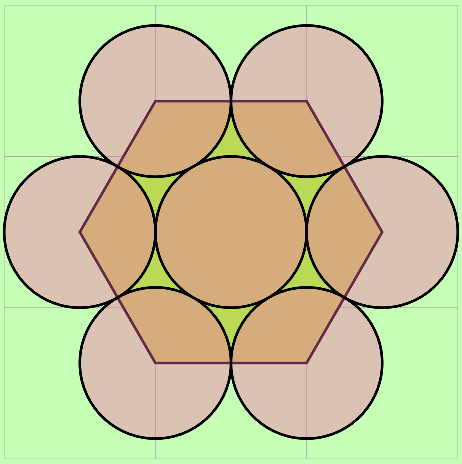
Question 6 Montrer qu'il existe $\boldsymbol{p} \in \mathbb{C}^{10}$ couvrant $\boldsymbol{a}$ sans superposition.

Ind: $\frac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 0.907$

Correction

On commence par montrer le résultat suivant: "il existe $\ell \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ couvrant $\boldsymbol{a}$ sans superposition".

$\llbracket$ On considère l'empilement de Lagrange :



On note A_H l'aire de l'hexagone et A_C l'aire du cercle. Un peu de géométrie donne :

- $A_C = \frac{\pi}{4}$
- $A_H = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

En répétant cet empilement à l'infini, on couvre donc une proportion $\eta := \frac{A_C}{A_H}$ de l'aire du plan.

On introduit donc une variable aléatoire N le nombre de points de $\boldsymbol{a}$ couverts avec une translation aléatoire de notre motif. Cette variable aléatoire est d'espérance $10\eta = 10 \times \frac{\pi\sqrt{3}}{6} > 9$, donc il existe une translation telle que l'empilement de Lagrange couvre $\boldsymbol{a}$. $\rrbracket$

Comme ℓ est sans recouvrement, au plus 10 éléments de ℓ couvrent un élément de $\boldsymbol{a}$. On pose alors $\boldsymbol{p}$ ces éléments, et d'autres s'il le faut pour compléter. On a donc construit $\boldsymbol{p} \in \mathbb{C}^{10}$ couvrant $\boldsymbol{a}$ sans recouvrement.

□

Du rab

Soit $k \in \mathbb{N}$.

La propriété à laquelle on s'intéresse ici est la *propriété de distance*

$$\mathcal{D}(a_1 ... a_k) := \left(\forall i, j, |a_i - a_j| \leq 2\right) \vee \left(\forall i \neq j, |a_i - a_j| \geq 1\right)$$

On pose enfin $\mathcal{P}(n) := \forall A \in \mathfrak{P}(\mathbb{C}), (|A| = n) \Longrightarrow (\exists \{a_1 ... a_k\} \subset A, \mathcal{D}(a_1 ... a_k))$

Question 7 Calculer $\inf\{n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)\}$.

Correction

Honnêtement j'ai oublié comment faire... vous êtes libres de PR une réponse probabiliste !