Coupe Animath d'Automne

2 octobre 2024

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

- ▷ Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.

  Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

- ▷ **Pour les exercices 1 et 8,** seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.

- ▷ **À part dans les exercices 1 et 8,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.

- ▷ Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.

  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.

  LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.

  Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)

contact-pofm@animath.fr

Exercices collégiens

Exercice 1. (AMC 10 2021 A1) Calculer

$$\frac{(2039-2024)^2}{9}.$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 2. (perso, inspiré de Serbia MO 2018 P1) Soit ABC un triangle, et D un point sur le segment $[BC]$ (autre que B et C). Soit P le point sur le segment $[AB]$ tel que (DP) est la bissectrice de $\widehat{ADB}$, et soit Q le point sur le segment $[AC]$ tel que (DQ) est la bissectrice de $\widehat{CDA}$.
Que vaut l'angle $\widehat{QDP}$?

Exercice 3. (perso) Soient a et b des entiers tels que les entiers $a+b$ et ab sont divisibles par 10. Montrer que 10 divise a et b.

Exercice 4. (perso) Peut-on placer des entiers strictement positifs sur les sommets d'un octogone (c'est-à-dire un polygone à 8 côtés) de sorte que les produits de deux entiers situés sur des sommets voisins soient $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ (pas forcément dans cet ordre là) ?

Exercice 5. (Polish Junior MO 1st round 2017, P3) Dans chaque case d'une grille 11×11, on écrit le nombre $-1, 0$ ou 1. On suppose que la somme des nombres de chaque colonne est positive ou nulle et que la somme des nombres de chaque ligne est négative ou nulle. Déterminer le nombre minimal de 0 dans la grille.

Exercice 6. (perso) Soit $ABCD$ un carré, E et F des points à l'extérieur de $ABCD$ tels que ABE et DAF sont équilatéraux. On note H le milieu de $[EF]$ et G le point d'intersection des droites (BF) et (CE). Montrer que $GH = GC$.

Exercice 7. (Pologne 2023 junior MO P1) Soient a, b et c des réels positifs tels que

$$a+b \geqslant ab\ ,\ \ b+c \geqslant bc\ ,\ \ c+a \geqslant ca.$$

Montrer que $a+b+c \geqslant \frac{3}{4}abc$.

Exercices lycéens

Exercice 8. (AMC) Soient x et y des réels non nuls tels que $x + y = 2024xy$. Calculer

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 9. (Polish Junior MO 2019, P1) Soient $a, b \geq 2$ deux entiers. On suppose que $\frac{a-1}{b-1} - \frac{a}{b} = 1$. Montrer que $\frac{a}{b}$ et $\frac{a-1}{b-1}$ sont des entiers.

Exercice 10. (Polish Final Junior 2024) Existe-t-il un quadrilatère non croisé $ABCD$ tel qu'il existe un point P tel que les segments $[AP]$, $[BP]$, $[CP]$ et $[DP]$ sont tous contenus à l'intérieur du quadrilatère et tels que

$$AP = AB, BP = BC, CP = CD, DP = DA\,?$$

Exercice 11. (Polish Junior MO 1st round 2017, P3) Dans chaque case d'une grille 11×11, on écrit le nombre $-1, 0$ ou 1. On suppose que la somme des nombres de chaque colonne est positive ou nulle et que la somme des nombres de chaque ligne est négative ou nulle. Déterminer le nombre minimal de 0 dans la grille.

Exercice 12. (perso) Soit $ABCD$ un carré, P et Q des points à l'extérieur de $ABCD$ tels que ABP et DAQ sont équilatéraux. On note M le milieu de $[PQ]$ et N le point d'intersection des droites (BQ) et (DP). Calculer $\frac{NM}{NC}$.

Exercice 13. (Poland MO Final 2023) Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite infinie d'entiers telle que pour toute paire d'indices strictement positifs (k, ℓ), on a $k + \ell \mid a_k + a_\ell$. Montrer que pour toute paire d'indices strictement positifs (k, ℓ), $k - \ell \mid a_k - a_\ell$.

Exercice 14. (All Russian 2015 Grade 9 Day 2 P1) 100 nombres réels sont placés autour d'un cercle, de sorte que chaque nombre est strictement plus grand que la somme des deux nombres qui le suivent (dans le sens des aiguilles d'une montre). Déterminer le nombre maximal de réels strictement positifs sur ce cercle.

Exercice 15. (Romania JBMO TST 2017 D3 P2) Déterminer le plus petit réel α ayant la propriété suivante :

Quelques soient les réels $x_1, \ldots, x_{2024}$, il existe toujours un indice i appartenant à $\{1, \ldots, 2024\}$ tel que

$$\{x_i - x_1\} + \{x_i - x_2\} + \{x_i - x_3\} + \ldots + \{x_i - x_{2023}\} + \{x_i - x_{2024}\} \leqslant \alpha.$$

On rappelle que $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire *du réel x, c'est-à-dire $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ est le partie entière de x, autrement dit le plus grand entier inférieur ou égal à x.*
Par exemple $\{1,2\} = 0,2$, $\{3\} = 0$ et $\{-2,4\} = 0,6$.