

重庆大学高等数学1练习题

20 — 20 学年 第 学期

开课学院: 数学与统计 课程号: _____ 考试日期: _____

考试方式: ☐ 开卷 ☒ 闭卷 ☐ 其他 考试时间: 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

考试提示

1. 严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试;
2. 考试作弊, 留校察看, 毕业当年不授学位; 请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等, 属严重作弊, 开除学籍。

一、选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 设 $k \in \mathbb{N}$, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} x^k e^{-x} dx$ 等于 **【】 A**
- (A) 0 (B) 1. (C) $\frac{1}{k}$ (D) 不存在

答案: A

2. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某一邻域上有定义, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 点可导的一个充要条件是 **【】 D**
- (A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ 存在; (B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a+h)}{h}$ 存在;
- (C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$ 存在; (D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-2h)}{h}$ 存在.

答案: D

3. 已知 $f(x) = x(x-2)(x-4)(x-6)$, 则 $f'(x) = 0$ 有 **【】 C**



☒ A 卷

☐ B 卷

- (A) 一个实根 (B) 二个实根 (C) 三个实根 (D) 四个实根

答案: C

4. 设曲线 $y = \frac{1}{e^x - 1} + 1$ 水平渐近线的条数为 **【】 a** 铅直渐近线的条数为 **【】 b**, 则 **【】 D**

- (A) $a=0, b=1$ (B) $a=1, b=0$ (C) $a=1, b=1$ (D) $a=2, b=1$

答案: D

5. 若 $\int f(x) dx = F(x) + C$, 则 $\int e^{-x} f(e^{-x}) dx = \text{【】 B}$
- (A) $F(e^x) + c$ (B) $-F(e^{-x}) + c$ (C) $F(e^{-x}) + c$ (D) $F(e^x) + c$

答案: B

6. 下列为偶函数的是 **【】 D**

- (A) $\int_0^x f(t^2) dt$ (B) $\int_0^x f^2(x) dx$
- (C) $\int_0^x t[f(-t) - f(t)] dt$ (D) $\int_0^x t[f(-t) + f(t)] dt$

答案: D

二、填空题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|} dx = 1$, 则 $k = \text{【】 } -2$
- 答案: -2

2. 电量为 $+q$ 的点电荷位于 r 轴的坐标原点 O 处, 它所产生的电场力使 r 轴上的一个单位正电荷从 $r=a$ 处移动到 $r=b(a < b)$ 处, 则电场力对单位正电荷所作的功为 **【】 $kqe \cdot (\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$**

答案: $kq(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$

3. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且有 $\int_0^{x^2} f(t) dt = x^4 + 3x^2$, 则 $f(2) = \text{【】 } 7$

答案: 7

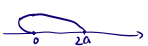
4. 设 $u_n = \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{2(1+2+\dots+k)} \right]^n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \text{【】 } \frac{1}{e}$

答案: $\frac{1}{e}$

5. 设 $f(x) = x^2 \cos x$, 则 $f^{(6)}(0) = \underline{30}$.

答案: 30 $f^{(6)}(x) = (x^2)^{(6)} + (x^2)^{(5)} \dots + (x^2)^{(2)} (\cos x)^{(4)}$
 $\frac{6!}{2!} \cdot 2 \times 1 \cdot$

6. 心形线 $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$) 所围成图形的面积为 $\underline{\frac{32}{3}a^2}$.

答案: $\frac{3}{4}\pi a^2$  $= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} a^2 (1 + \cos \theta)^2 d\theta$
 $= a^2 (\pi + \frac{2}{3})$

三、计算题 (每小题 7 分, 共 28 分)

1. 设函数 $f(x) = \arctan x$, 且 $f(x) = x f'(\xi)$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x^2}$.

$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) \Rightarrow \frac{\arctan x}{x} = \frac{1}{1 + \xi^2}$
 解: 由 $f(x) = x f'(\xi)$ 得: $\arctan x = \frac{x}{1 + \xi^2} \Rightarrow \xi^2 = \frac{x - \arctan x}{\arctan x} \Rightarrow \frac{\xi^2}{x^2} = \frac{x - \arctan x}{x^2 \arctan x}$
 $\xi^2 =$
 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^2 \arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3}$$

2. 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f'(x) = e^{-f(x)}$, $f(0) = 0$. 当 $n \geq 1$ 时, 求 $f^{(n)}(0)$.

解: $f'(x) = e^{-f(x)}$

$$f''(x) = e^{-f(x)} (-f'(x)) = -e^{-f(x)} \cdot e^{-f(x)} = -e^{-2f(x)}$$

$$f'''(x) = -e^{-2f(x)} [-2f'(x)] = (-1)(-2)e^{-3f(x)}, \dots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)(-2) \dots (-n+1) e^{-nf(x)} = (-1)^{n-1} (n-1)! e^{-nf(x)},$$

于是 $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$.

3. 计算不定积分 $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} dx$.

解 原式 = $\int \ln \cos x d \tan x = \tan x \ln \cos x - \int \tan x \cdot \frac{-\sin x}{\cos x} dx$

$$\tan x - x + C$$

$$= \tan x \ln \cos x + \int \tan^2 x dx = \tan x \ln \cos x + \int (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \tan x \ln \cos x + \tan x - x + C;$$

4. 计算 $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

解: 由于 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$, 故所给积分为反常积分。

令 $\arcsin x = t \Rightarrow x = \sin t, t \in [0, \frac{\pi}{2})$

$$\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{t \sin^2 t}{\cos t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} t \sin^2 t dt = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}$$

四、解答题 (每小题 7 分, 共 14 分)

1. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 若 $\ln^\alpha(1+2x), (1-\cos x)^\alpha$ 均是比 x 高阶的无穷小, 求 α 的取值范围.

解: 要使得 $0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^\alpha(1+2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^\alpha x^\alpha}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^\alpha x^{\alpha-1}$, 必有 $\alpha-1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$

要使得 $0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1-\cos x)^{\alpha/2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2\alpha/2} / 2^{\alpha/2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{-\frac{1}{2}\alpha} x^{\alpha-1}$, 必有 $\frac{2}{\alpha} - 1 > 0 \Rightarrow \alpha < 2$

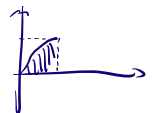
综上所述, $1 < \alpha < 2$.

2. 设 $A > 0$, D 是由曲线段 $y = A \sin x (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ 及直线 $y = 0, x = \frac{\pi}{2}$ 所围成的平面

区域, V_1, V_2 分别表示 D 绕 x 轴与绕 y 轴旋转所成旋转体的体积. 若 $V_1 = V_2$, 求 A 的值.

$$\text{解: } V_1 = \int_0^{\pi/2} \pi A^2 \sin^2 x dx = \frac{\pi^2 A^2}{4}, \quad V_2 = \int_0^{\pi/2} 2\pi x A \sin x dx = 2\pi A$$

$$V_1 = V_2 \Leftrightarrow \frac{\pi^2 A^2}{4} = 2\pi A \Rightarrow A = \frac{8}{\pi}$$



五、证明题 (每小题7分, 共14分)

1. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且 $x_i \in (a, b), (i=1, 2, \dots, n)$, 证明必存在点 $\xi \in (a, b)$, 使

$$f(\xi) = \frac{2}{n(n+1)} [f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + nf(x_n)]$$

证明: 记 $a = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, b = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 从

而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有最小值 m , 最大值 M . 故

$$m \leq \frac{1 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + \dots + n \cdot f(x_n)}{1+2+\dots+n} \leq M$$

$$2m \leq 2f(x_2) \leq 2M$$

.....

$$nm \leq nf(x_n) \leq nM$$

于是, $(1+2+\dots+n)m \leq f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + nf(x_n) \leq (1+2+\dots+n)M$

$$m \leq \frac{2}{n(n+1)} [f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + nf(x_n)] \leq M$$

由介值定理知, 必存在点 $\xi \in (a, b) \subset (a, b)$, 使

$$f(\xi) = \frac{2}{n(n+1)} [f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + nf(x_n)].$$

2. 证明: 当 $x > 0$ 时, 有不等式 $\arctan x + \frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{x^2(1+x^2)} < 0.$$

六、应用题 (共8分)

要做一个长方体的带盖箱子, 其体积为 72 立方厘米, 其底上两边长成 1:2 的关系, 问各边的长为多少时, 才能使其表面积为最小?

解: 设箱子的高为 z , 底上两边的长分别为 x 与 y , 且 $y = 2x$, 则有 $xyz = 72$.

即 $2x^2z = 72, z = \frac{36}{x^2}$. 面积 $A = 2(xy + yz + zx) = 4x^2 + \frac{216}{x}$.

$$\frac{dA}{dx} = 8x - \frac{216}{x^2} = \frac{8x^3 - 216}{x^2}, \text{ 令 } \frac{dA}{dx} = 0 \text{ 得 } x = 3, \text{ 在 } x = 3 \text{ 处 } \frac{d^2A}{dx^2} = 8 + \frac{432}{x^3} > 0.$$

故 $x = 3$ 为 A 的最小值, 此时 $y = 6, z = 4$, 因此箱子各边长应为 3、6、4 厘米.