重庆大学《高等数学2》（工学类）课程试卷

☑A卷　☐B卷

2016 — 2017 学年 第 2 学期

开课学院：数统　课程号：MATH10023　考试日期：20170902

考试方式：☐开卷 ☑闭卷 ☐其他　考试时间：120 分钟

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得 分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

2.考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

1

(A) L_1 与 L_2 平行，且重合　(B) L_1 与 L_2 平行，但不重合

(C) L_1 与 L_2 异面　(D) L_1 与 L_2 垂直相交

2.设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(3^n+(-2)^n)}$ 的收敛半径是 R，则（D）

(A) $R=\infty$　(B) $R=\frac{1}{3}$　(C) $R=1$　(D) $R=3$

3.以下说法正确的是（B）

(A) 若 $f(x,y)$ 沿任意直线 $y=kx$ 在某点 x_0 连续，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续

(B) 若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续，则 $f(x_0,y)$ 在 y_0 连续

(C) 若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的偏导数 $f_x'(x_0,y_0), f_y'(x_0,y_0)$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续

(D) 若 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点处偏导数 $f_x'(x_0,y_0), f_y'(x_0,y_0)$ 存在，则全微分 $dz=f_x'(x_0,y_0)dx+f_y'(x_0,y_0)dy$

4.设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $D: x^2+y^2\le 2a^2$ 上连续，则当 $a\to 0$ 时 $\frac{1}{\pi a^2}\iint_D f(x,y)dxdy$ 的极限为（A）

$f(0,0)\cdot\frac{1}{\pi a^2}\cdot\pi\cdot(2a^2)$

(A) $2f(0,0)$　(B) $f(0,0)$　(C) $\sqrt{2}f(0,0)$　(D) 不存在

5.设 L 是圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\x+y+z=0\end{cases}$，若从 x 轴正向看去，此圆依逆时针方向进行，则曲线积分 $\oint_L ydx+zdy+xdz=$（~~D~~ C）

1, 1, 1

(A) $-\sqrt{2}\pi R^2$　(B) $\sqrt{2}\pi R^2$　(C) $-\sqrt{3}\pi R^2$　(D) $\sqrt{3}\pi R^2$

6.方程 $y''-2y'=xe^{2x}$ 的一个特解具有形式（D）

$\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ y & z & x\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\end{vmatrix}$

(A) $(ax+b)e^{2x}$　$x(ax+b)e^{2x}$.　(B) axe^{2x}

(C) ax^2e^{2x}　(D) $x(ax+b)e^{2x}$

$\frac{1}{\sqrt{3}}\iint(1+1+1)ds=\sqrt{3}S=\sqrt{3}$.

二、填空题（每小题3分，共18分）

$r^2-2r=0$　$r=0/2$.

1.已知直线 L 过点 $M(1,-2,0)$ 且与两条直线 $L_1:\begin{cases}2x+z=1\\x-y+3z=5\end{cases}$ 和 $L_2:\begin{cases}x=-2+t\\y=1-4t\\z=3\end{cases}$ 垂直，则 L 的参数方程为 ~~$\begin{cases}x=1-4t\\y=t-2\\z=-2t\end{cases}$（t为参数）~~

$x+2=\frac{y-1}{-4}=\frac{z}{0}=t$

$\begin{cases}x=1-8t\\y=-2-2t\\z=t.\end{cases}$　$\frac{x-1}{-8}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{1}=t$

$(2,0,1)\times(1,-1,3)$　$\begin{vmatrix}i & j & k\\2 & 0 & 1\\1 & -1 & 3\end{vmatrix}=(1,-5,-2)\times(1,-4,0)=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & -5 & -2\\1 & -4 & 0\end{vmatrix}=(-8,-2,1)$

2.级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}$ 的和为 $3e$

3.已知微分方程 $y'+P(x)y=e^x$ 有特解 $y=xe^x$，则该微分方程的通解为 $e^x(C+x)$

4.设 L 为取正向的圆周 $x^2+y^2=4$，则曲线积分 $\oint_L xdy-ydx=$ ~~-8π~~　8π

5.若曲面 $xyz=32$ 上的点 (x_0,y_0,z_0) 处的法线平行于向量 $\vec{s}=(2,8,1)$，则 $(x_0,y_0,z_0)=$ $(4,1,8)$

$(y_0z_0, x_0z_0, x_0y_0)\parallel(2,8,1)$

$\frac{z}{2}\cdot\frac{z}{8}\cdot z$　$4\times8\times8\times2$.　$yz=2xy$　$z=2x$

$z^3=32\times16$.　$xz=8xy$　$z=8y$.

$z=8$.　$xz=4yz$

$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{n!}=2\left(\sum_0\frac{x^n}{n!}\right)'x=2x\cdot e^x=2e$.

$F_2 \cdot \frac{dy}{dx} + F_3 \frac{dt}{dx} = -F_1$

$\frac{dy}{dx} - f_2' \frac{dt}{dx} = f_1'$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} -F_1 & F_3 \\ f_1 & -f_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_2 & F_3 \\ 1 & -f_2 \end{vmatrix}} = \frac{F_1 f_2 - f_1 F_3}{-F_2 f_2 - F_3}$

$(0,0,1)$　　$-3 \times \frac{4}{3}\pi$

6.设 $\Omega: x^2+y^2+z^2-2z \le 0$（手写：$+1$，$1$），则 $\iiint_\Omega (\cancel{x}+\cancel{xyz^2}-3)dv =$ $\underline{-4\pi}$

三、计算题（每小题6分，共24分）

1.设 $y=f(x,t)$，而 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x,y 的函数，其中 f,F 可微，求 $\frac{dy}{dx}$.

$\frac{dt}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_t}$

$\frac{dy}{dx} = f_1' + f_2' \cdot \frac{dt}{dx} = f_1 - f_2 \frac{F_x}{F_t}$

2.已知函数 $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$，求 $f(x,y)$ 的极值。

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2x}(x+y^2+2y) + e^{2x} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{2x}(2y+2) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4e^{2x}(x+y^2+2y) + 2e^{2x} + 2e^{2x}$
$= e^{2x}[4(x+y^2+2y)+4]\Big|_{\substack{x=\frac{1}{2}\\ y=-1}}$
$= 4e\left(\frac{1}{2}+1-2+1\right) = 2e$

$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^{2x}\big|_{x=\frac{1}{2}} = 2e$

$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2(2y+2)e^{2x}\big|_{\substack{x=\frac{1}{2}\\ y=-1}} = 0$

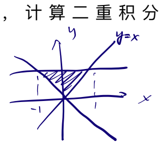
$B^2-AC = -4e^2 < 0$

$\because A>0$

$\therefore (\frac{1}{2},-1)$ 是极小值点

$f(\frac{1}{2},-1) = e(\frac{1}{2}-1) = -\frac{1}{2}e$

3.设 D 是由直线 $y=1, y=x, y=-x$ 围成的有界区域，计算二重积分 $\iint_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy.$



$= \iint_D \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} dxdy = \int_0^1 dy \int_{-y}^{y} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} dx = \int_0^1 dy \int_{-y}^{y} \left(1 - 2\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) dx$

$= \int_0^1 \left[x - 2y^2 \cdot \frac{1}{y}\arctan\frac{x}{y}\right]_{-y}^{y} dy$

$= \int_0^1 (2y - \pi y)\, dy = (2-\pi)\cdot\frac{1}{2}$

4.将函数 $f(x)=\frac{x^2}{x^2-5x+6}$ 展开成麦克劳林级数，并指出收敛区间。

$f(x) = \frac{x^2}{(x-2)(x-3)} = x^2\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) = x^2\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)$

$= x^2\left(-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{x^{n+2}}{3^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{2^{n+1}}$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{n+2}}{2^{n+1}} - \frac{x^{n+2}}{3^{n+1}}\right)$　　$x\in(-2,2)$

四、综合题（每小题8分，共16分）

1.计算曲线积分 $I=\oint_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 C 是正向曲线 $|x|+|y|=1.$

$P = \frac{x}{x^2+y^2}$　　$Q = \frac{-y}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

取 C'：$x^2+y^2=\varepsilon^2$（ε 足够小）

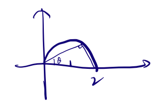
$I = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{C'} xdy - ydx$

$= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{C'}(1+1)\,dxdy$

$= \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 2\cdot \pi\varepsilon^2$

$= 2\pi$

2.设 Γ 为 $x^2+y^2=2x(y\ge0)$ 上从 $O(0,0)$ 到 $A(2,0)$ 的一段弧，连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=x^2+\int_\Gamma y\left[f(x)+e^x\right]dx+(e^x-xy^2)dy$，求 $f(x)$.



$a = \int_\Gamma y[f(x)+e^x]dx + (e^x-xy^2)dy$　　$D: \begin{cases}(x-1)^2+y^2\le1 \\ y\ge0\end{cases}$　　Γ'：$y=0$（$x=2\to x=0$）

$= \oiint_D (e^x - y^2 - f(x) - e^x)\,dxdy - 0$

$= \oiint_D (y^2+f(x))\,dxdy$　　$\frac{\cos 2\theta+2}{2}$　　$\cos 2\theta = 2c^2-1$　　$\left(\frac{\cos 2\theta+1}{2}\right)^2 = \frac{\cos^2 2\theta+1+2\cos 2\theta}{4}$

$= \oiint_D (y^2+x^2+a)\,dxdy$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^3 dr + a\oiint dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\cdot 4\cos^4\theta\, d\theta + a\cdot\frac{\pi}{2}$

$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2\theta+1)\,d\theta + \frac{\pi}{2}a$

$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 4\theta+1}{2}\,d\theta + \frac{\pi}{2}a$

$= \frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}a$

$\left(\frac{2-\pi}{2}\right)a = \frac{3\pi}{16}$

$a = \frac{3\pi}{8(2-\pi)}$

五、证明题（每小题8分，共16分）

1.证明：若 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，有界区域 V 的边界 S 为光滑曲面，则有 $\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS=\iiint_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz+\iiint_V u\Delta u dxdydz$，式中 u 及其二阶偏导数是在区域 V 内连续的函数，$\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿曲面 S 的外法线方向 n 的导数。

$\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS = \int_S u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)dS$

由高斯公式：$I = \iiint \frac{\partial u}{\partial x}$

2.证明：无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)$ 收敛。

$S_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} + \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \cdots + \ln n - \ln(n+1)$

$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \ln(n+1)$

六、应用题（共8分）

设曲线弧 AB 的极坐标方程为 $\rho=1+\cos\theta\,(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2})$，一质点 P 在力 $\vec{F}$ 的作用下沿曲线弧 AB 从点 $A(0,-1)$ 运动到点 $B(0,1)$，力 $\vec{F}$ 的大小等于点 P 到定点 $M(3,4)$ 的距离，其方向垂直于线段 MP，且与 y 轴正向的夹角为锐角，求力 $\vec{F}$ 对质点 P 所作的功。