重庆大学高等数学（工学类）课程试卷

☑A卷 ☐B卷

2018—2019 学年 第2学期

开 课 学 院 ： 数 统 学 院 课 程 号 ： MATH10023 考试日期：20190617

考试方式： ☐开卷 ☑闭卷 ☐其他 考试时间：120分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试;

2.考试作弊,留校察看,毕业当年不授学位;请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等,属严重作弊,开除学籍.

1

(A) 2 (B) 2 (C) 3 (D) 3

2.函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $\vec{u}=(1,2,2)$ 的方向导数为（D .

$(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$.

(A) 12 (B) 6 (C) 4 (D) 2

$2xy,\ x^2,\ 2z$

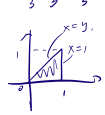
$(4,1,0)$

$\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=\frac{6}{3}$

3.交换积分次序后 $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy=$ （A .

(A) $\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx$ (B) $\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx$

(C) $\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx$ (D) $\int_0^x dy\int_0^1 f(x,y)dx$



4.设曲线 $\Gamma: x=t, y=\frac{1}{2}t^2, z=\frac{1}{3}t^3 (0\le t\le 1)$，第一型曲线积分 $\int_\Gamma \sqrt{2y}ds=$ （C

t^2.

$\int_0^1 t\cdot\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt$.

(A) $\int_0^1 \sqrt{t}\sqrt{1+t^2+t^4}dt$ (B) $\int_0^1 \sqrt{1+t^2+t^4}dt$

(C) $\int_0^1 t\sqrt{1+t^2+t^4}dt$ (D) $\int_0^1 t^2\sqrt{1+t^2+t^4}dt$

5.设常数 $k>0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k+n}{n^2}$ （C

$\frac{k}{n^2}+\frac{1}{n}$.

(A) 发散 (B) 绝对收敛

(C) 条件收敛 (D) 敛散性与 k 的取值有关

6.设 y_1,y_2 是微分方程 $y''+p(x)y'=q(x)$ 的两个特解，若常数 λ,μ 使得 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应齐次方程的解，则（A) .

(A) $\lambda=\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{2}$ (B) $\lambda=-\frac{1}{2},\mu=-\frac{1}{2}$

(C) $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{1}{3}$ (D) $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{2}{3}$

二、填空题（每小题3分，共18分）

1.将 yOz 坐标面上的抛物线 $z=2-y^2$ 绕 z 轴旋转一周得到的曲面方程为 $z=2-x^2-y^2$

2.设函数 $f(u)$ 可导，$z=yf(\frac{y^2}{x})$，则 $2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$ $yf(\frac{y^2}{x})$

$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'\cdot(-\frac{y^2}{x^2})\cdot 2x=-\frac{2y^3f'}{x}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=(f+y\cdot f'\cdot\frac{2y}{x})y=yf+\frac{2y^3f'}{x}$

3.设 $\Omega: x^2+y^2+(z-1)^2\le 1$，则 $\iiint_\Omega(\cancel{x}+\cancel{xy}z^2-3)dxdydz=$ -4π

$-3\cdot\frac{4}{3}\pi$

4.设向量场 $\vec{A}=(2z-3y)\vec{i}+(3x-z)\vec{j}+(y-2x)\vec{k}$，则旋度 $rot\vec{A}=$ $(2,4,6)$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z-3y & 3x-z & y-2x \end{vmatrix}$

$1+1 \quad -2-2 \quad 3+3$

5.已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为 $(1,5]$

$-4 — -2 — 0$

$1 — 3 — 5$

6.微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为 $y=$ $e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$

三、计算题（每小题6分，共24分）

1.求过点 $(2,4,-1)$ 且与两平面 $\pi_1: x+2y-3z+4=0, \pi_2: x+3y-z=0$ 都垂直的平面 π 的方程。

$(1,2,-3)\times(1,3,-1)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=(7,-2,1)$

π: $7(x-2)-2(y-4)+(z+1)=0$.

$7x-2y+z-5=0$

2.求函数 $z = x^2 + 3y^2 - 2x$ 在闭区域且 $D = \left\{(x,y) \middle| \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1\right\}$ 上的最大值和最小值。

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 6y = 0 \Rightarrow y = 0.$

$z(1,0) = -1.$

$f = x^2 + 3y^2 - 2x + \lambda(4x^2 + 9y^2 - 36)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 + 8\lambda x = 0.$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 6y + 18\lambda y = 0.$

$4x^2 + 9y^2 = 36$

$\begin{cases} x = \pm 3 \\ y = 0 \end{cases}$

$z(3,0) = 3$

$z(-3,0) = 15$

$\therefore z_{max} = 15$

$z_{min} = -1.$

3.计算 $I = \boxed{?}_{\Sigma} y^2 x\,dydz + x^2 z^2\,dzdx + x^2 z\,dxdy$，其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧。

$\iiint_{\Omega} (y^2 + x^2)\,dxdydz = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \sin^2\varphi \cdot r^2 \sin\varphi\, dr$

$= \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi \cdot 2\pi \cdot \int_0^1 r^4 dr$

$= \frac{1}{2}(\pi - 0) \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{5}$

$= \frac{\pi^2}{5}$

4.求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ 的收敛域，并求其和函数。

$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n\, n}{(n+1)(-1)^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} (-1) \cdot \frac{n}{n+1} = -1. \quad \therefore R = 1.$

$x = -1$ 时.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$ 发散

$x = 1$ 时

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ 收敛

$\therefore$ 收敛域：$(-1, 1]$

四、综合题（每小题8分，共16分）

1.设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，且满足 $f(t) = \iint_{D_t} (x^2 + y^2) f(\sqrt{x^2 + y^2})\,dxdy + t^4$，其中 $D_t : x^2 + y^2 \le t^2 (t > 0)$，求 $f(t)$ 的表达式。

$f(t) = a + t^4.$

$a = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t r^3 f(r)\, dr$

$= 2\pi \int_0^t r^3 (a + r^4)\, dr$

$= 2\pi \left(a \cdot \frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{8} t^8 \right)$

$= \frac{\pi a t^4}{2} + \frac{\pi t^8}{4}$

$a = \dfrac{\frac{\pi t^8}{4}}{1 - \frac{\pi}{2} \cdot t^4} = \dfrac{\pi t^8}{2 - 2\pi t^4}$

$f(t) = \dfrac{\pi t^8}{2 - 2\pi t^4} + t^4$

$= \dfrac{2t^4 - \pi t^8}{2 - 2\pi t^4}$

2.设 $z = f(x,y)$ 是由方程 $F(x - z, y - z) = 0$（其中 $F(u,v)$ 有连续的偏导数）唯一确定的可微二元函数，L 为正向单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$，试求 $I = \boxed{?}(-x^2 y - z)dx + (xy^2 + z)dy.$

$I = \iint_{\Sigma} \left[y^2 + \frac{\partial z}{\partial x} - \left(-x^2 - \frac{\partial z}{\partial y} \right) \right] dxdy$

$\begin{cases} F_1'\left(-1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) + F_2'\left(+\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F_1'}{F_1' + F_2'} \\ -F_1' \frac{\partial z}{\partial y} + F_2'\left(1 - \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0. \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-F_2'}{-F_1' - F_2'} = \frac{F_2'}{F_1' + F_2'} \end{cases}$

$I = \iint_{\Sigma} \left(x^2 + y^2 + \frac{F_1'}{F_1' + F_2'} + \frac{F_2'}{F_1' + F_2'} \right) dxdy = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + 1)\, dxdy$

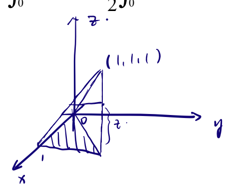
$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr + \pi = 2\pi \cdot \frac{1}{4} + \pi = \frac{3\pi}{2}$

五、证明题（每小题8分，共16分）

1.设 $a_n \ne 0$ 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = a \ne 0$，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right|$ 同敛散。

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1} - a_n|}{\left| \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{(a_{n+1} - a_n) a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} |a_n a_{n+1}| = a^2$

2.证明：$\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y f(z)dz = \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - z)^2 f(z) dz.$



$I = \int_0^1 dz \int$

六、应用题（本题8分）

某机器的一薄片型金属构件S为圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$z^2=2x$割下的有限部分，该圆锥面与柱面的交线记为C.

（1）求C在xOy平面上的投影曲线的方程

（2）求S的面积。