§1.2 概率的定义及其计算

概率的统计（频率）定义

- **频率**

设在 n 次试验中，事件 A 发生了m 次

则称 $f_n=\dfrac{m}{n}$ 为事件A发生的**频率**

频率稳定性的实例

蒲丰(*Buffon*)投币 ——

投一枚硬币观察正面向上的次数

$n = 4040, \quad n_H = 2048, \quad f_n(H) = 0.5069$

皮尔森(*Pearson*) 投币

$n = 12000, \quad n_H = 6019, \quad f_n(H) = 0.5016$

$n = 24000, \quad n_H = 12012, \quad f_n(H) = 0.5005$

例 Dewey G. 统计了约438023个英语单词中各字母出现的频率，发现各字母出现的频率不同：

A: 0.0788	B: 0.0156	C: 0.0268	D: 0.0389
E: 0.1268	F: 0.0256	G: 0.0187	H: 0.0573
I: 0.0707	J: 0.0010	K: 0.0060	L: 0.0394
M: 0.0244	N: 0.0706	O: 0.0776	P: 0.0186
Q: 0.0009	R: 0.0594	S: 0.0634	T: 0.0987
U: 0.0280	V: 0.0102	W: 0.0214	X: 0.0016
Y: 0.0202	Z: 0.0006		

概率的统计定义

在相同条件下重复进行的 n 次试验中，事件 A 发生的频率稳定地在某一常数 p 附近摆动，且随 n 越大摆动幅度越小，则称 p 为事件 A 的概率，记作 $P(A)$.

对本定义的评价

优点：直观易懂

缺点：粗糙模糊　不便使用

概率的古典定义

1. 排列组合有关知识复习

加法原理：完成一件事情有n类方法，第i类方法中有m_i种具体的方法，则完成这件事情

共有 $$\sum_{i=1}^{n} m_i$$ 种不同的方法

乘法原理：完成一件事情有n个步骤，第i个步骤中有m_i种具体的方法，则完成这件事情

共有 $$\prod_{i=1}^{n} m_i$$ 种不同的方法

排列

从 n 个不同的元素中取出 m 个 (不放回地) 按一定的次序排成一排不同的排法共有

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\boxed{?}(n-m+1)$$

全排列

$$A_n^n = n!$$

可重复排列

从 n 个不同的元素中可重复地取出 m 个排成一排, 不同的排法有 n^m 种

不尽相异元素的全排列

n 个元素中有 m 类，第 i 类中有 k_i 个相同的元素，

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n,$$

将这 n 个元素按一定的次序排成一排，

不同的排法共有

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$$ 种

课堂提问2：例

组合 从 n 个不同的元素中取出 m 个(不放回地）组成一组， 不同的分法共有

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

多组组合 把 n 个元素分成 m 个不同的组（组编号）， 各组分别有 $k_1, k_2, \boxed{?}, k_m$ 个元素， $k_1 + k_2 + \boxed{?} + k_m = n$ ，不同的分法共有

$$C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} \boxed{?} C_{k_n}^{k_n}$$ 种

2. 古典概型

定义：设试验E的样本空间大小为n，样本点等可能出现。事件A包含r个样本点，则定义事件A的概率为r/n，记为P(A)，即

$$P(A)=\frac{A\text{中的样本点数}}{\Omega\text{中的样本点数}}=\frac{r}{n}$$

称这样的概率为**古典概率**。

例1 袋中有a只白球，b只红球，从袋中按不放回与放回两种方式取m个球（$m \le a+b$），求其中恰有k个（$k \le a, k \le m$）白球的概率

解 (1) **不放回情形**

E: 球编号，任取一球，记下颜色，放在一边，重复m次

□: $$n_\Omega = A_{(a+b)}^m = (a+b)(a+b-1)\boxed{?}(a+b-m+1)$$

记事件A为m个球中有k个白球，则

$$n_A = C_m^k A_a^k A_b^{m-k}$$

$$= \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \frac{a!}{(a-k)!} \cdot \frac{b!}{(b-m+k)!}$$

(2) 放回情形

$E2$: 球编号, 任取一球, 记下颜色, 放回去, 重复 m 次

□2:

$$n_{\Omega_2} = (a+b)^m$$

记 B 为取出的 m 个球中有 k 个白球, 则

$$P(B) = \frac{C_m^k a^k b^{m-k}}{(a+b)^m} = C_m^k \left(\frac{a}{a+b}\right)^k \left(\frac{b}{a+b}\right)^{m-k}$$ 记 $p = \dfrac{a}{a+b}$

$$P(B) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k} \quad k = 1, 2, \boxed{?}, \min(a, m)$$

称二项分布

例2（分房模型）设有 k 个不同的球, 每个球等可能地落入 N 个盒子中（$k \le N$）, 设每个盒子容球数无限, 求下列事件的概率:

（1）某指定的 k 个盒子中各有一球；

（2）恰有 k 个盒子中各有一球；

（3）某指定的一个盒子恰有 m 个球($m \le k$)

例3 在0,1,2,3, …,9中不重复地任取5个数，求它们依次能排成五位奇数的概率.

思考题1：

将15 名同学(含3 名女同学), 平均分成三组. 求

(1) 每组有1 名女同学(设为事件A)的概率;

(2) 3 名女同学同组(设为事件B)的概率

解 $n_\Omega = C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5$

(1) $n_A = C_{12}^4 C_8^4 C_4^4 C_3^1 C_2^1 C_1^1$ $P(A) = \dfrac{25}{91}$

(2) $n_B = C_3^1 C_{12}^2 C_{10}^5 C_5^5$ $P(B) = \dfrac{6}{91}$

概率的公理化定义

设 □ 是随机试验E的样本空间，若能找到一个法则，使得对于E的每一事件A赋于一个实数，记为$P(A)$, 称之为事件A的概率，这种赋值满足下面的三条公理：

- 非负性：$\forall A \subset \Omega,\ P(A) \geq 0$
- 规范性：$P(\Omega) = 1$
- 可列可加性：$P\left(\boxed{?}_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

其中 $A_1, A_2, \boxed{?}$ 为两两互斥事件.

概率的性质

- $P(\varnothing)=0$
- 有限可加性: 设 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 两两互斥

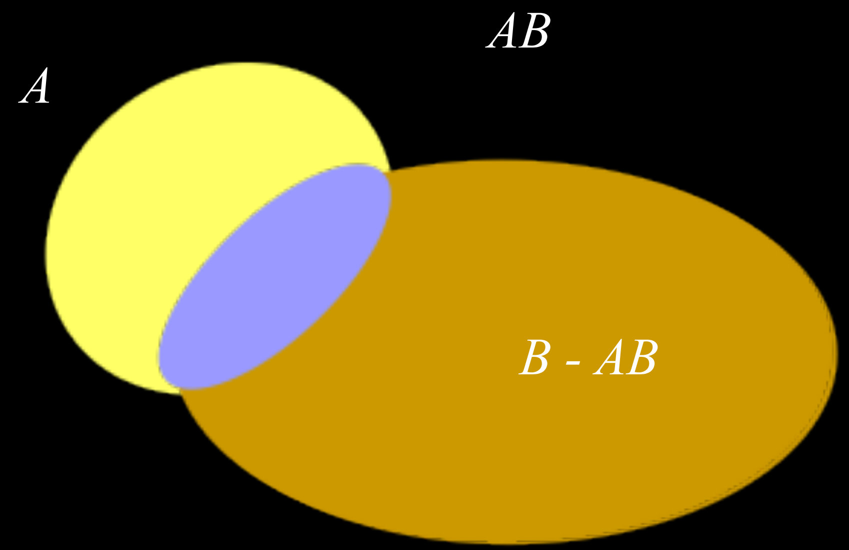
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

- $P(\bar{A})=1-P(A) \quad \Rightarrow P(A)\leq 1$
- 若 $A\subset B \Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A)$

$$\Rightarrow P(A)\leq P(B)$$

- 对任意两个事件A, B, 有

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)$$



$$B=AB+(B-A)$$

$$P(B)=P(AB)+$$

$$P(B-AB)$$

- 加法公式：对任意两个事件A, B, 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$$

推广：

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

一般:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} \boxed{?} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j) +$$

$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n}^{n} P(A_iA_jA_k) + \boxed{?} + (-1)^{n-1} P(A_1A_2 \boxed{?} A_n)$$

右端共有 $2^n - 1$ 项.

例4 小王参加“智力大冲浪”游戏，他能答出第一类问题的概率为0.7，答出第二类问题的概率为0.2，两类问题都能答出的概率为0.1．求小王

(1) 答出第一类而答不出第二类问题的概率

(2) 两类问题中至少有一类能答出的概率

(3) 两类问题都答不出的概率

解 设事件A_i表示“能答出第 i 类问题” $i=1,2$

(1) $$P(A_1\overline{A_2})=P(A_1)-P(A_1A_2)=0.7-0.1=0.6$$

(2) $$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=0.8$$

(3) $$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})=P(\overline{A_1\cup A_2})=0.2$$

例5 在1,2,3, ,9中重复地任取 n (≥ 2)个数,
求 n 个数字的乘积能被10整除的概率.

解 $n_{\Omega} = 9^{n}$

设 A 表示事件"n 次取到的数字的乘积能被10整除"

设 $A1$ 表示事件"n 次取到的数字中有偶数"

$A2$表示事件"n 次取到的数字中有5"

$A = A1A2$

$$\overline{A} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$$

$$P\left(\overline{A_1}\right)=\frac{5^n}{9^n} \quad P\left(\overline{A_2}\right)=\frac{8^n}{9^n} \quad P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\right)=\frac{4^n}{9^n}$$

$$\begin{aligned} P\left(\overline{A}\right) &= P\left(\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\right) \\ &= P\left(\overline{A_1}\right)+P\left(\overline{A_2}\right)-P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\right) \\ &= \frac{5^n+8^n-4^n}{9^n} \end{aligned}$$

$$P(A)=1-\frac{5^n+8^n-4^n}{9^n}.$$

思考题2（匹配问题）

把标有 1,2,3,4 的 4 个球随机地放入标有1, 2,3,4 的 4 个盒子中，每盒放一球，求至少有一个盒子的号码与放入的球的号码一致的概率

解 设 A 为所求的事件

设 A_i 表示 i 号球入 i 号盒， $i = 1,2,3,4$

则 $A = \boxed{?}_{i=1}^{4} A_i$ $\quad P(A_i) = \dfrac{3!}{4!} = \dfrac{1}{4}, \quad i = 1,2,3,4$

$$P(A_iA_j)=\frac{2!}{4!}=\frac{1}{12}, \qquad 1\le i<j\le 4$$

$$P(A_iA_jA_k)=\frac{1!}{4!}=\frac{1}{24}, \qquad 1\le i<j<k\le 4$$

$$P(A_1A_2A_3A_4)=\frac{1}{24}$$

由广义加法公式

$$P(A)=\sum_{1\le i\le 4}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le 4}P(A_iA_j)$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le 4}P(A_iA_jA_k)-P(A_1A_2A_3A_4)=\frac{5}{8}$$

作业　P 36习题1

A组：4，5

B组：1，2

几何概型（等可能概型的推广）

例 某人的表停了，他打开收音机听电台报时，已知电台是整点报时的，问他等待报时的时间短于十分钟的概率

10分钟

9点

10点

$$P(A)=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$$

几何概型

设样本空间为有限区域 Ω, 若样本点落入 Ω 内任何区域 G 中的概率与区域G的测度成正比, 则样本点落入G内的概率为

$$P(A)=\frac{G\text{的测度}}{\Omega\text{的测度}}$$

例6 两船欲停靠同一个码头, 设两船到达码头的时间各不相干，而且到达码头的时间在一昼夜内是等可能的. 如果两船到达码头后需在码头停留的时间分别是1 小时与2 小 时, 试求在一昼夜内，任一船到达时，需 要等待空出码头的概率.

约会问题 x

解 设船1 到达码头的瞬时为 x ， $0 \le x < 24$

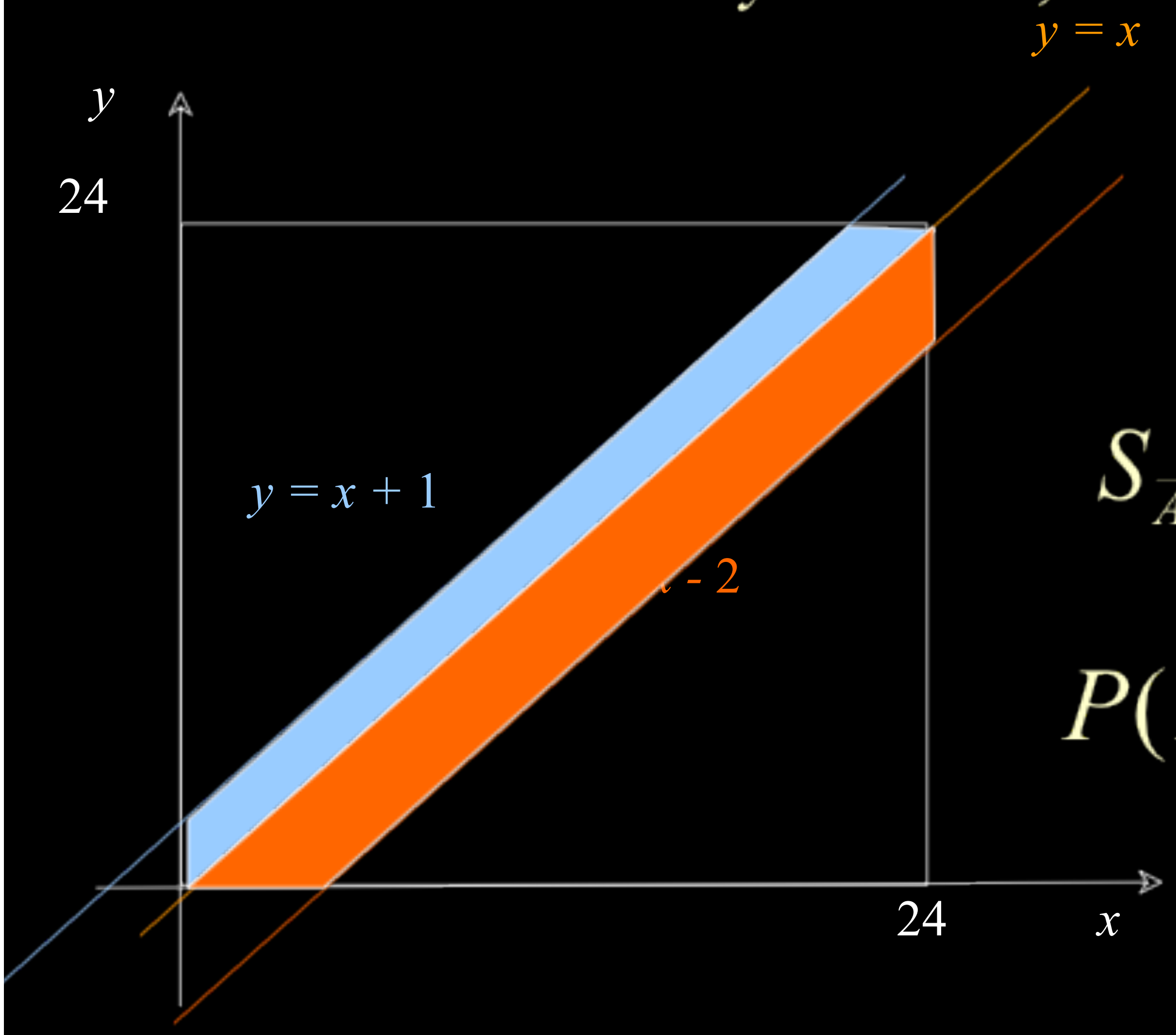
船2 到达码头的瞬时为 y ， $0 \le y < 24$

设事件 A 表示任一船到达码头时需要等待空出码头

$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 \le x < 24, 0 \le y < 24\}$$

$$A = \{(x,y) \mid (x,y) \in \Omega,$$

$$0 \le y - x \le 1, 0 \le x - y \le 2\}$$



$$S_{\Omega} = 24^2$$

$$S_{\bar{A}} = \frac{1}{2}\left(23^2 + 22^2\right)$$

$$P(A) = 1 - \frac{S_{\bar{A}}}{S_{\Omega}} = 0.1207$$

作业 P36习题1

A组：8

B组：3

$x \in (0, l)$

$y \in (0, l)$

$x+y > l-(x+y) \Rightarrow x+y >$

$x-y < l-(x+y)$ $2x < l$

$x < \frac{l}{2}$

$2x < \frac{l}{2}$