重庆大学数学与统计学院

国家级精品课程数学实验课件

数学实验之—方程求解

SHUXUESHIYANZHIFANGCHENGQIUJIE

课件制作群：数学实验课程组

你可以自由的从网站math.cqu.edu.cn/上传或下载重庆大学数学实验与数学建模的最新信息，ppt幻灯片及相关资料，以便相互学习.

实 验 目 的

[1] 复习方程(组)求解的基本理论；

[2] 掌握方程求解的图形化方法；

[3] 掌握方程求解的系列迭代算法；

[4] 熟悉方程求解的MATLAB编程；

[5] 体会解决实际问题的方程模型的建立过程

引 例

例2 飞机

【问题背景】

在近90年

经有三次 因

音707是第一

的喷气式客机

机。为设计一

成为世界飞机

价格作为

研发出来的一

波音707客机

波音747客机

波音777客机

数学实验之
——方程求解
实验目的
引言引例
图形放大
区间迭代
点迭代
软件求解
范 例
课堂延伸
布置实验
结 束

引 例

问题分析

定价策略：利润$R(p)$达最大的价格p？

飞机的定价主要考虑以下因素：

飞机的制造成本、公司的生产能力、飞机的销售数量与价格、竞争对手的行为与市场占有率等。

引 例

假设

1. 假设考虑只有一种型号的飞机；

2. 价格决定销售总量：根据历史数据预测分析得：

$$N(p) = -78p2 + 655p + 125$$

其中$N(p)$表示价格为p的全球销售总量;

3. 该公司的市场占有率h是一个常数；

4. 该公司的制造成本为：

$$C(x) = 50 + 1.5x + 8x3/4 \text{；}$$

数学实验之

——方程求解

实验目的

引言引例

图形放大

区间迭代

点迭代

软件求解

范　例

课堂延伸

布置实验

结　束

引 例

建立模型

设价格表示为 p；

由假设2, 销售总量

$$N(p) = -78p2 + 655p + 125$$

由假设3,该公司的市场占有率h是一个常数,可得

该公司的销售量：$x = h \times N(p)$

从而，利润函数：$R(p) = px - C(x)$

引 例

建立模型

于是，得到如下数学模型：

$$\max R(p)=\max_{p>0}\{px-C(x)\}$$

化简目标函数，得

$$R(p)=(p-1.5)(-78p^2+655p+125)h-50-8h^{\frac{3}{4}}(-78p^2+655p+125)^{\frac{3}{4}}$$

令

$$R'(p)=0$$

得

$$(-78p^2+655p+125)h+(p-1.5)(-156p+655)h-$$
$$6h^{\frac{3}{4}}(-78p^2+655p+125)^{-\frac{1}{4}}(-156p+655)=0$$

数学实验之

－－方程求解

实验目的

引言引例

图形放大

区间迭代

点迭代

软件求解

范　例

课堂延伸

布置实验

结　束

引 例

模型求解

需要求解如下方程：

$$(-78p^2+655p+125)h+(p-1.5)(-156p+655)h-$$
$$6h^{\frac{3}{4}}(-78p^2+655p+125)^{-\frac{1}{4}}(-156p+655)=0$$

其中，选取h=0.5

可以采用3种方法：

1.图形法

2.区间迭代法

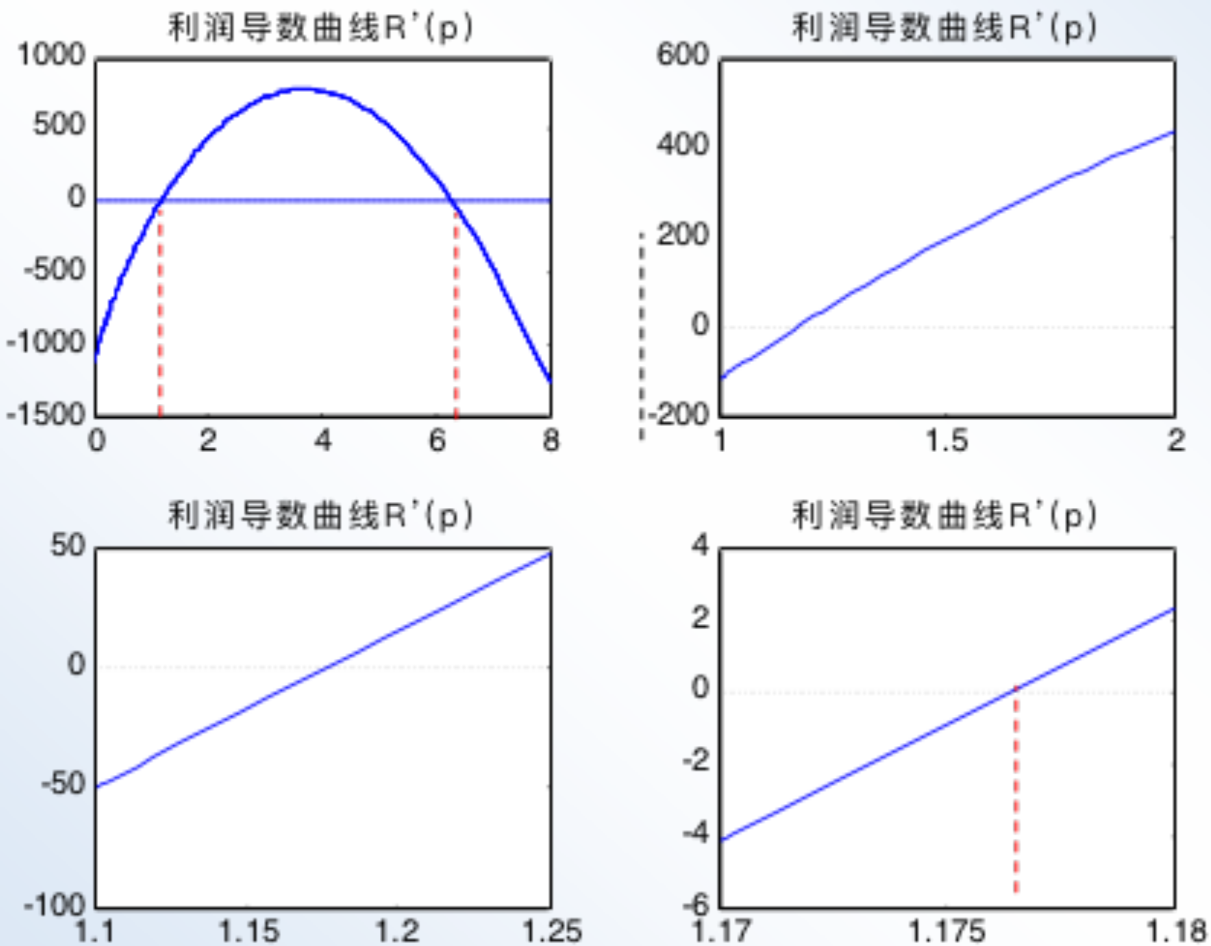
3.点迭代法

引 例

模型求解

1.图形法

作图：曲线-x轴　　一个零点：放大



1.1764

数学实验之

－－方程求解

实验目的

引言引例

图形放大

区间迭代

点迭代

软件求解

范　例

课堂延伸

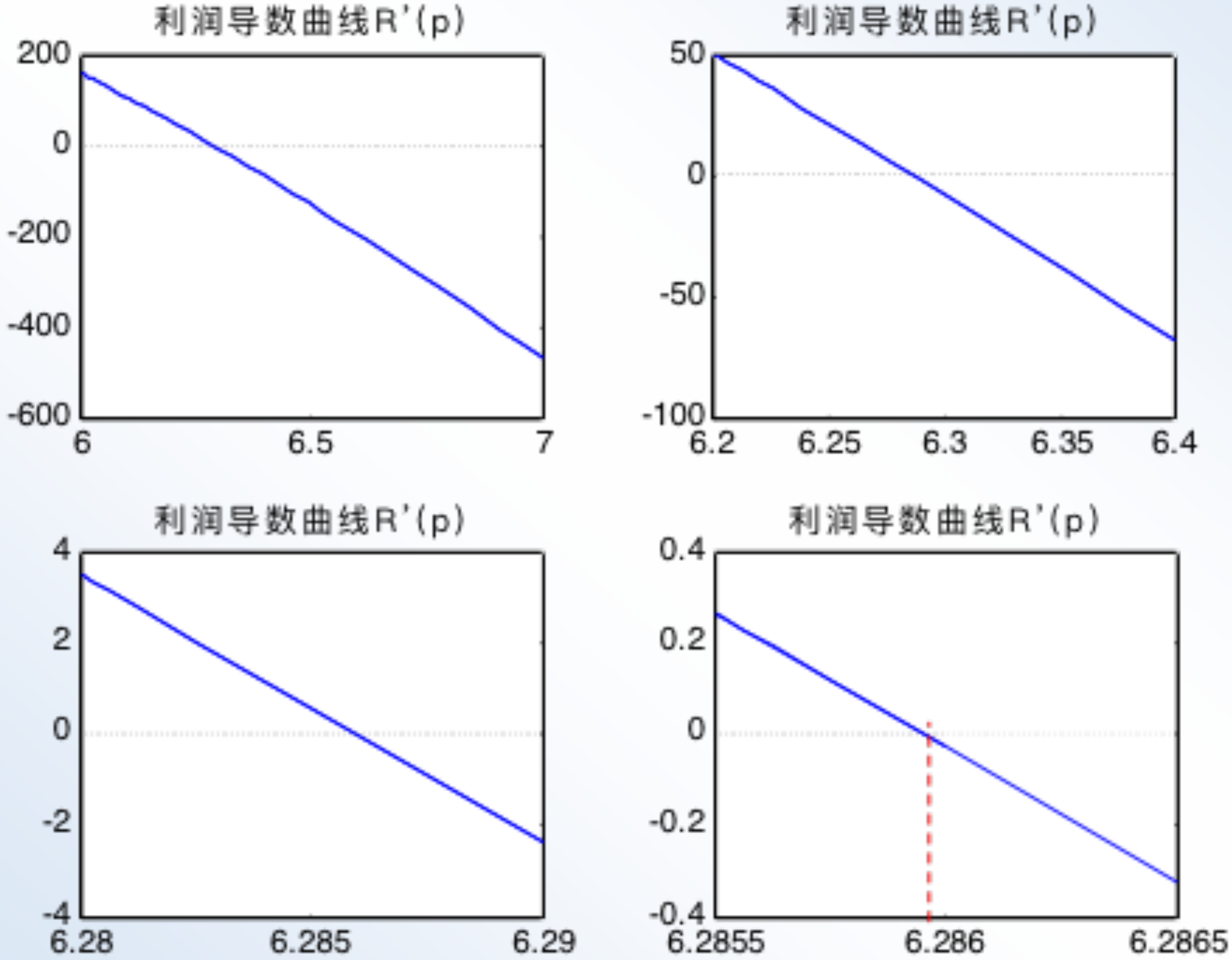
布置实验

结　束

模型求解

引 例

1.图形法　另一个零点：放大



6.2860

数学实验之
－－方程求解

实验目的

引言引例

图形放大

区间迭代

点迭代

软件求解

范　例

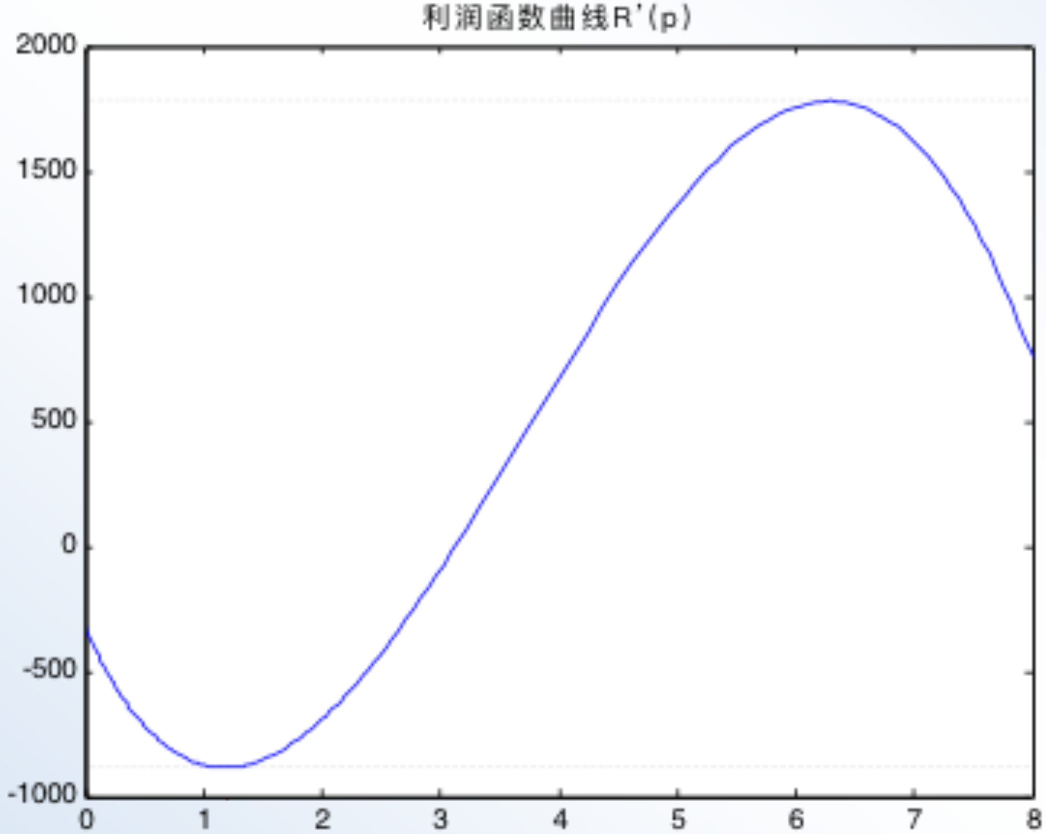
课堂延伸

布置实验

结　束

引 例

模型求解



1.1764 **6.2860**

数值解为：

p1=1.1764

p2=6.2860

代数程的常用求解方法

1. 图形放大法

2. 区间迭代法

3. 点迭代法

图形放大法

图形放大法-步骤

求解方程 $f(x)=0$

1）建立坐标系 xoy，画曲线 $y=f(x)$；

2）观察曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴相交的交点；

3）将交点逐一进行局部放大；

4）该交点的横坐标值就是方程的根。

方程求解-举例 图形放大法

例1：求方程 $x5 + 2x2 + 4 = 0$ 的一个根.

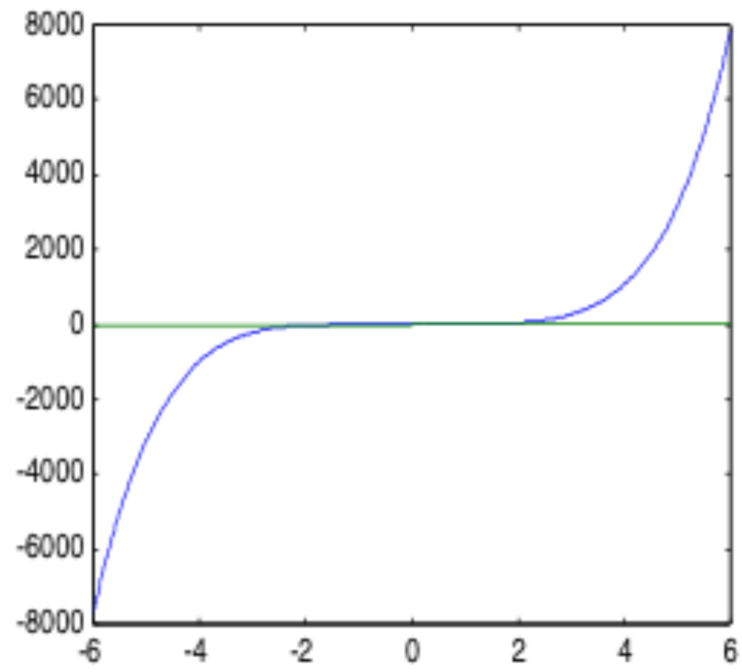
该方程有几个根？寻找其中一个实根，并且达到一定的精度。

画方程曲线图（tuxfd.m）

```
x=-6:0.01:6;
y=x.^5+2.*x.^2+4;
plot(x,y),hold on,
line([-6,6],[0,0])
```

或

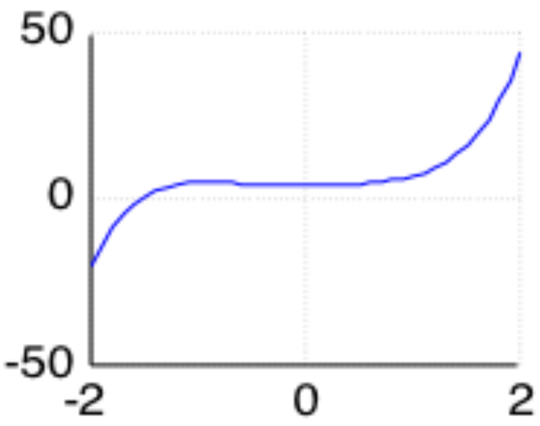
```
ezplot('f(x)',[-6,6])
```



区间缩小，放大图形 [-6, 6] -> [-2, 2]

图形放大法

放大 逐次缩小区间，观察一个根在-1.6～-1.5之间。



数学实验之
－－方程求解

实验目的

引言引例

图形放大

区间迭代

点迭代

软件求解

范　例

课堂延伸

布置实验

结　束

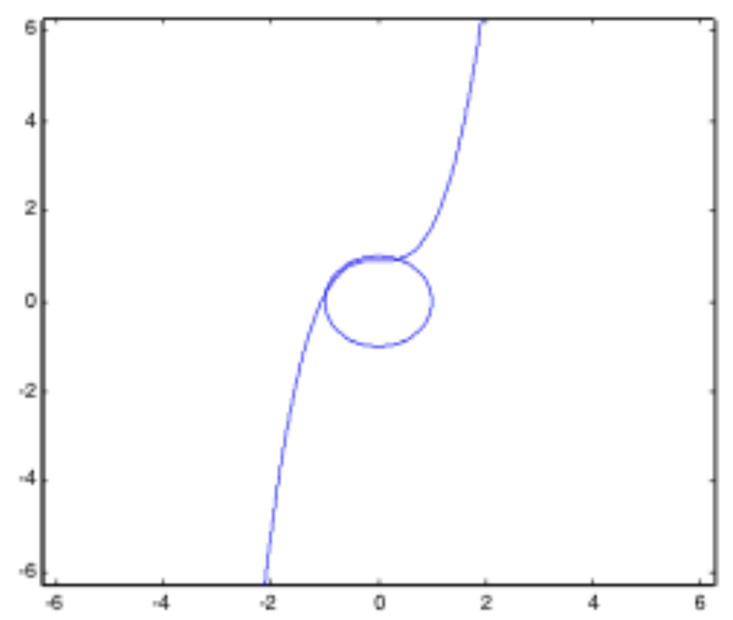
图形放大法

方程组求解举例

例2：用图解法求下列代数方程组的根

$$\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ 0.75*x^3-y+0.9=0 \end{cases}$$

```
ezplot('x^2+y^2-1')
hold on
ezplot('0.75*x^3-y+0.9')
```

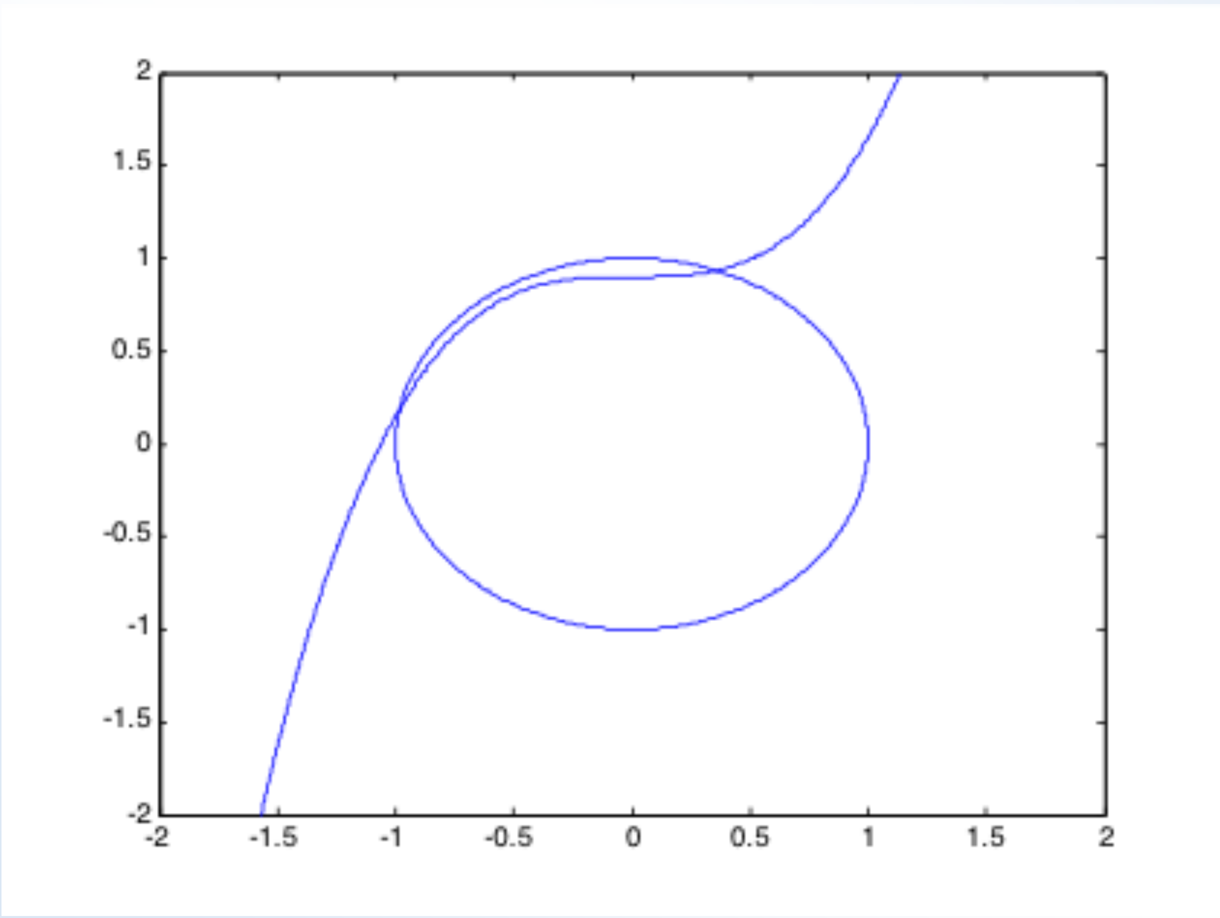


图形放大法

图形放大

Matlab 程序

```
ezplot('x^2+y^2-1‘，[-2，2])
hold on
ezplot('0.75*x^3-y+0.9‘， [-2，2])
```

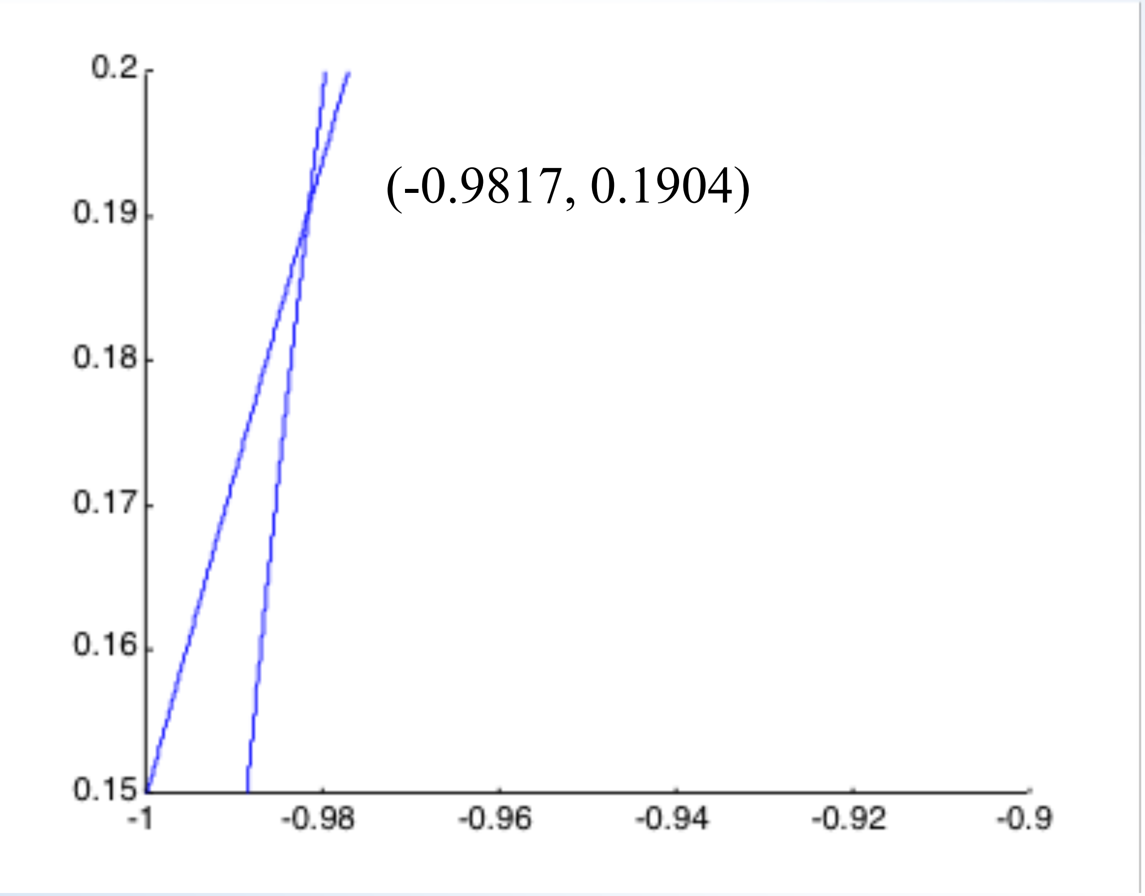


图形放大法

图形放大-继续

图形放大

```
ezplot('x^2+y^2-1‘, [-1,-0.9,0.15,0.2])
hold on
ezplot('0.75*x^3-y+0.9‘, [-1,-0.9,0.15,0.2])
```



图形放大法

结果验证

Matlab提供的数值求解-函数solve

```
syms x y;
[x,y]=solve(x^2+y^2-1,75*x^3/100-y+9/10);
double(x), double(y)
```

输出结果：

x=	y =
0.3570	0.9341
0.8663 + 1.2154i	-1.4916 + 0.7059i
-0.5540 + 0.3547i	0.9293 + 0.2114i
-0.9817	0.1904
-0.5540 - 0.3547i	0.9293 - 0.2114i
0.8663 - 1.2154i	-1.4916 - 0.7059i

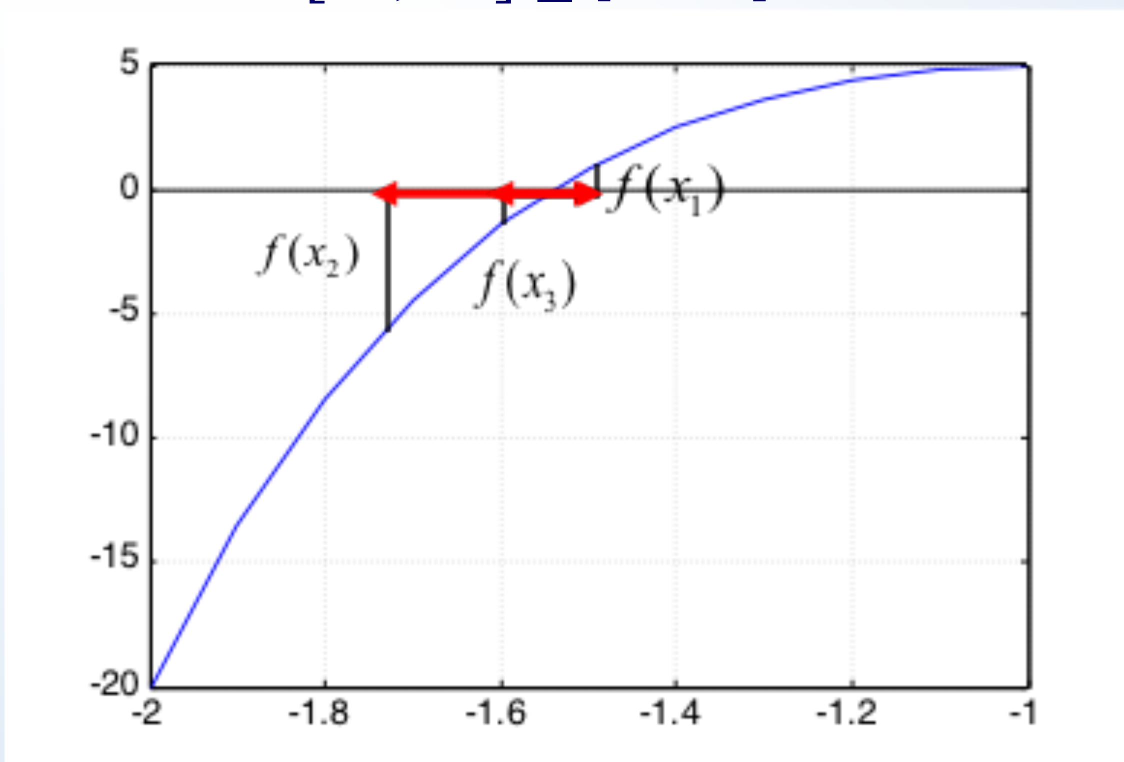
实验目的
引言引例
图形放大
区间迭代
点迭代
软件求解
范　例
课堂延伸
布置实验
结　束

区间迭代法

数值迭代又分为两类：区间迭代和点迭代

区间迭代方法之一：　　**二分法**

$[x2, x1]$ □ $[x3, x1]$



区间迭代方法之一：　　**黄金分割法=0.618法**

数学实验之
——方程求解
实验目的
引言引例
图形放大
区间迭代
点迭代
软件求解
范　例
课堂延伸
布置实验
结　束

点迭代法

引例： $3x$□$\mathrm{e}x = 0$

1） 该方程有多少个根？如何判 断？

2） 如何进行点迭代求解？

方程等价变形： $x = \mathrm{e}x/3$

0	1/3
1/3	0.4652
0.4652	0.5308

左右：越来越接近

数学实验之

－－方程求解

实验目的

引言引例

图形放大

区间迭代

点迭代

软件求解

范　例

课堂延伸

布置实验

结　束

点迭代法

观察迭代产生的等式左右的结果：越来越接近

方程3*x*□e*x*=0的迭代求解表： *x* = e*x*/3

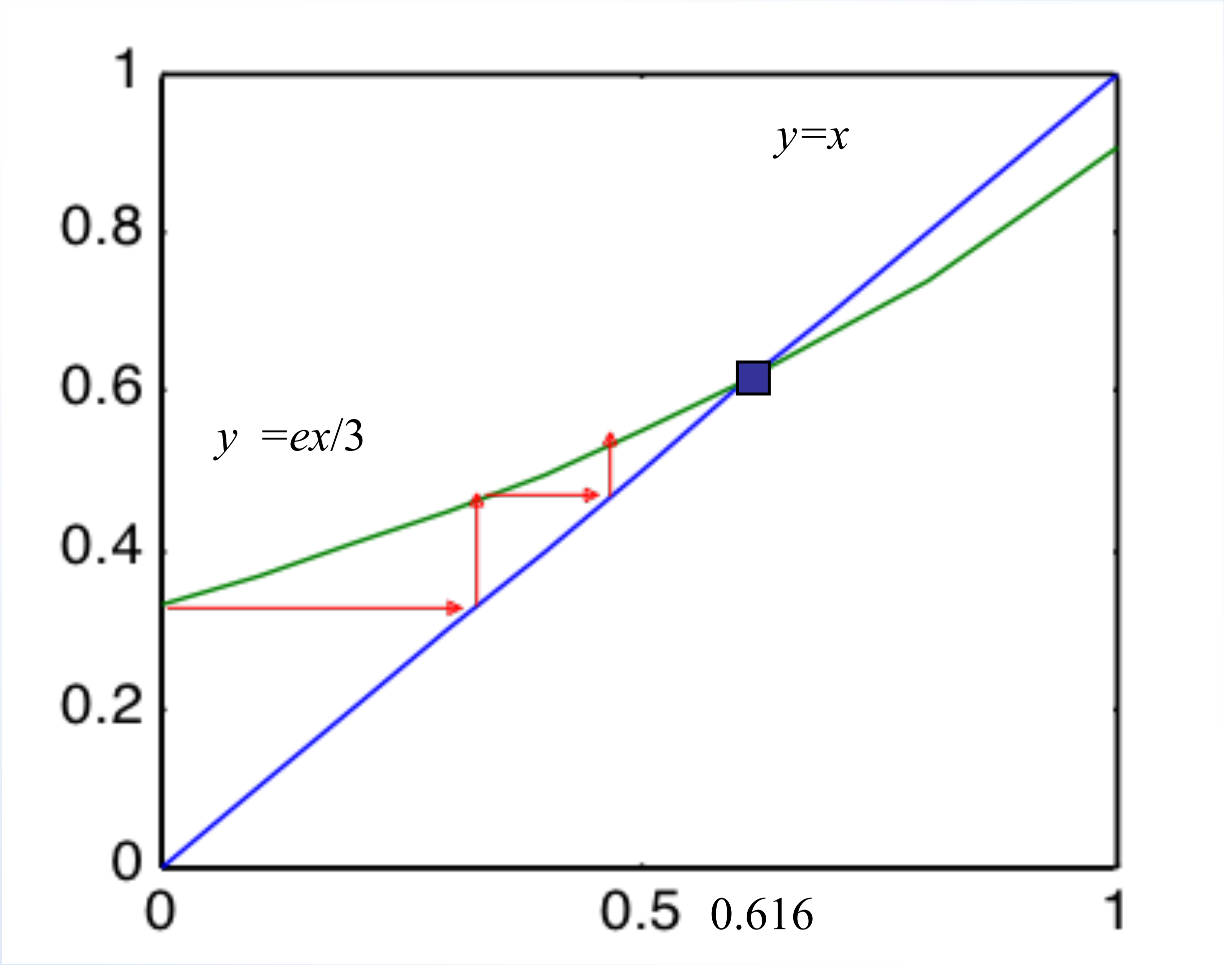
序号	0	1	2	3	4	5	6
左边	0	0.333	0.465	0.531	0.567	0.588	0.599
右边	0.333	0.465	0.531	0.567	0.588	0.599	0.607
序号	7	8	9	10	…		
左边	0.607	0.612	0.615	0.616	…		
右边	0.612	0.615	0.616	0.617	…		

实验目的
引言引例
图形放大
区间迭代
点迭代
软件求解
范　例
课堂延伸
布置实验
结　束

点迭代法

图形表示点迭代

点迭代过程如图所示



数学实验之
——方程求解

实验目的

引言引例

图形放大

区间迭代

点迭代

软件求解

范　例

课堂延伸

布置实验

结　束

点迭代法

点迭代的步骤与问题

迭代步骤：3步

方程： $f(x)=0$

构造迭代函数： $x=\varphi(x)$　经过简单变形

产生迭代序列：

$$x_{n+1}=\varphi(x_n),\quad n=0,\ 1,\ \ldots$$

给定迭代初值x_0

思考问题：3个

1.迭代表达式$x=\varphi(x)$是否唯一？

2.迭代产生的序列是否一定会收敛?

3. 迭代收敛性与初始值x_0是否有关?

数学实验之
——方程求解
实验目的
引言引例
图形放大
区间迭代
点迭代
软件求解
范　例
课堂延伸
布置实验
结　束

点迭代法

点迭代举例-函数构造

例： 用点迭代方法求解方程 $x3$ -$x2$ -x-1 = 0

解： 第一步 构造迭代函数：

$$x=\varphi(x)$$

$$x = x^3 - x^2 - 1 \qquad \varphi_1(x)$$

$$x = \sqrt[3]{x^2 + x + 1} \qquad \varphi_2(x)$$

$$x = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \qquad \varphi_3(x)$$

数学实验之
——方程求解

实验目的
引言引例
图形放大
区间迭代
点迭代
软件求解
范　例
课堂延伸
布置实验

结　束

点迭代法

迭代举例-Matlab实现程序

第二/三步 迭代+初始值

设定初值 $x0=1$，

$xn+1 = □(xn)$， $n=0$， 1， …

用 MATLAB 编程（died2.m)

```
x(1)=1;y(1)=1;z(1)=1;%(初始点)
for k=1:20
  x(k+1)=x(k)^3-x(k)^2-1;          % □1 (x)
  y(k+1)=(y(k)^2+y(k)+1)^(1/3);    % □2 (y)
  z(k+1)=1+1/z(k)+1/z(k)^2;        % □3 (z)
end
x, y, z
```

数学实验之
——方程求解
实验目的
引言引例
图形放大
区间迭代
点迭代
软件求解
范　例
课堂延伸
布置实验
结　束

点迭代法

计算结果

序号	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	序号	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$
1	1.4422	3.0000	8	1.8175	1.8136
2	1.6537	1.4444	9	1.8385	1.8554
3	1.7532	2.1716	10	1.8389	1.8294
4	1.7995	1.6725	11	1.8391	1.8454
5	1.8209	1.9554	12	1.8392	1.8355
6	1.8308	1.7730	13	1.8392	1.8416
7	1.8354	1.8822			

精确解：x=1.8393

$\varphi_1(x)$的迭代是失败的（迭代不收敛）。

实验目的
引言引例
图形放大
区间迭代
点迭代
软件求解
范　例
课堂延伸
布置实验
结　束

点迭代法

观察结论

迭代函数$\varphi 2(x)$和$\varphi 3(x)$的选取是成功的。精确解为 x=1.8393。 并且选取函数$\varphi 2(x)$、$\varphi 3(x)$其收敛速度不一致，前者的速度快些！

提出问题

对于给定的方程 $f(x) = 0$, 有多种方式将它改写成等价的形式 $x = \varphi(x)$。但重要的是

如何改写使得序列收敛？并且收敛速度快？

解决办法?

点迭代法

加速迭代收敛

若 $x = j(x)$ 迭代不收敛，则不直接使用$j(x)$迭代，

而用由$j(x)$与x的加权平均：

$h(x) = l\, j(x) + (1-l)x$

进行迭代，其中l为参数。显然

x满足 $x = h(x)$　　x满足 $x = j(x)$

$x_{n+1} = h(x_n)$　　$x_{n+1} = j(x_n)$

关键是如何确定函数$h(x)$中的参数l？

数学实验之
——方程求解
实验目的
引言引例
图形放大
区间迭代
点迭代
软件求解
范　例
课堂延伸
布置实验
结　束

点迭代法

加速迭代收敛:参数λ如何确定?

理论证明：在满足$|h'(x)|<1$的条件下，迭代过程收敛

令 $h'(a)=0$，　　即 $l j'(a)+(1-l)=0$，解出

$$\lambda = \frac{1}{1-\varphi'(a)}$$

用xn替换a，得

$$\lambda = \frac{1}{1-\varphi'(x_n)}$$

加速迭代过程：

$$x_{n+1} = h(x_n) = \lambda\varphi(x_n) + (1-\lambda)x_n = \frac{\varphi(x_n) - x_n\varphi'(x_n)}{1-\varphi'(x_n)}$$

加速迭代函数：

$$x = h(x) = \frac{\varphi(x) - x\varphi'(x)}{1-\varphi'(x)}$$

数学实验之

－－方程求解

实验目的

引言引例

图形放大

区间迭代

点迭代

软件求解

范　例

课堂延伸

布置实验

结　束

点迭代法

加速迭代-举例

例如：当□1(x)= x3-x2-1时，进行改进得：

$$x = h(x) = \frac{\varphi(x) - x\varphi'(x)}{1 - \varphi'(x)}$$

$$h(x) = \frac{(x^3 - x^2 - 1) - x(3x^2 - 2x)}{1 - (3x^2 - 2x)} = \frac{-2x^3 + x^2 - 1}{-3x^2 + 2x + 1}$$

加速迭代过程：

$$x_{n+1} = h(x_n) = \frac{-2x_n^3 + x_n^2 - 1}{-3x_n^2 + 2x_n + 1}$$

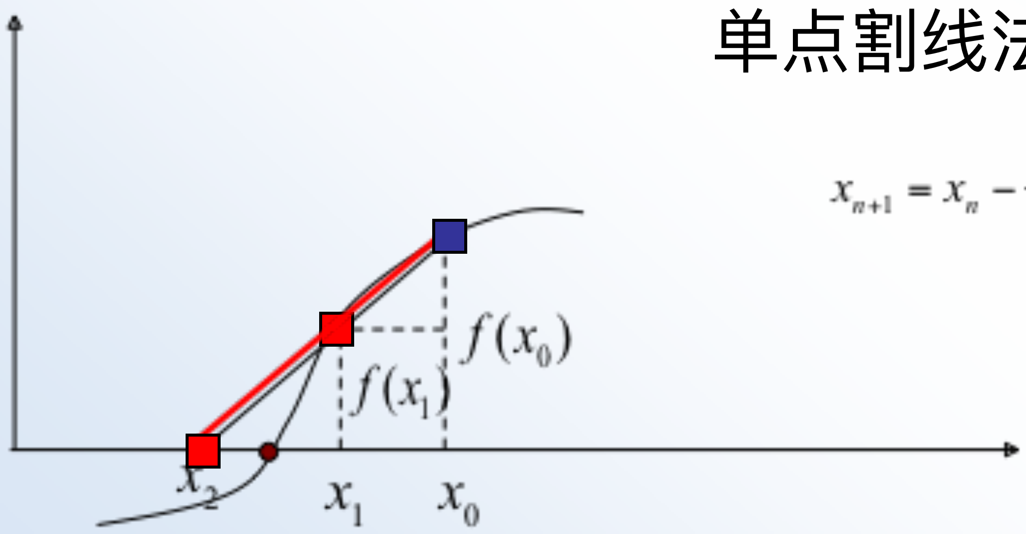
实验发现，它比□2(x)， □3(x)的收敛速度要快！

点迭代法

几个经典的点迭代方法

1、单点割线法:xn与x0

$$\frac{f(x_1)}{x_1-x_2}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\Leftrightarrow x_2=x_1-\frac{f(x_1)(x_1-x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}$$



单点割线法：迭代公式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(x_n)-f(x_0)}(x_n-x_0)$$

数学实验之
——方程求解

实验目的

引言引例

图形放大

区间迭代

点迭代

软件求解

范　例

课堂延伸

布置实验

结　束

点迭代法

几个经典的点迭代方法

2、两点割线法: *xn*与*xn*-1

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1})$$

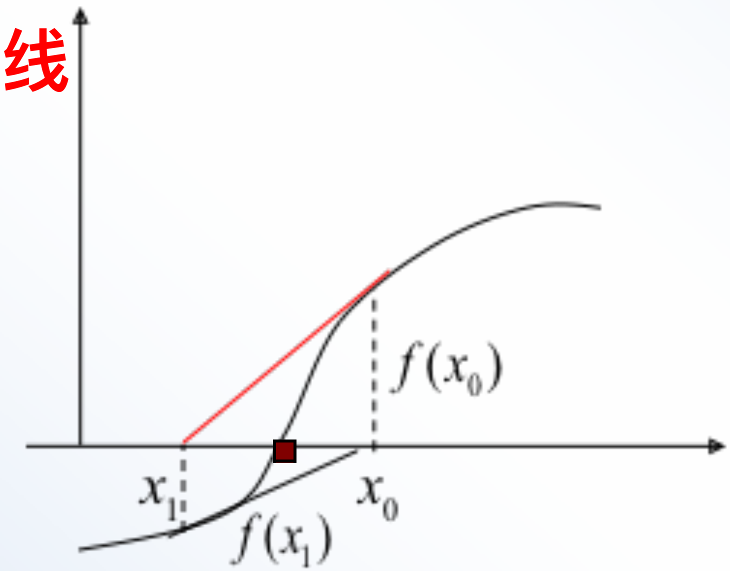
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)}(x_n - x_0)$$

3、牛顿切线法:*xn*切线

$$\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



简单迭代法的应用

例：计算下列方程的解。

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt - x^2 + 1 = 0$$

使用简单迭代方法求解如下。得到方程的等价形式

$$x = \sqrt{\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt + 1}$$

下面是简单的迭代程序：

```
x=5;
for i=1:20
x=sqrt(double(int(sym('sin(t)/t'),0,x))+1)
end
```

注释：这里设计积分的函数int的使用，可以查看相关的帮

实验目的
引言引例
图形放大
区间迭代
点迭代
软件求解
范　例
课堂延伸
布置实验
结　束

Matlab软件求解法

1、方程(组)，$f1(x)=0,\ldots,fn(x)=0,\ x=(x1,\ldots,xn)$ **solve**

syms x， solve ($f1(x)$, $f2(x)$, …, $fn(x)$)

solve是符号求解命令,方程中出现的所有变量或参数都要事先定义为符号变量。

2、方程(组)，$f1(x)=0,\ldots,fn(x)=0,\ x=(x1,\ldots,xn)$ **fsolve**

X = fsolve (‘fun’, X0, options)

fun.m

function f = fun(x)

f(1)= $f1(x)$ **;**

……

f(n)= $fn(x)$ **;**

初值

1） 可以省略。

2） options 可以用optimoptions来设置。

注意：以上方程组求解方法：适合方程求解;

fsolve还可解非线性超定方程组.

Matlab软件求解法

3、单变量方程， $f(x) = 0$

方程求解还有一些其他的 Matlab函数 **fzero**

[x,fv,ef,out] = fzero (fun, X0, options)

@myfun
myfun是MATLAB函数:
function f = myfun(x)
f= $f(x)$ **;**

或
@(x) f(x)

初值或有根区间

1）可以省略。

2）options可以用optimset来设置。

Matlab软件求解法

4、多项式方程： $a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_0 = 0$ **roots**

p=[*am*, *am*-1, …,*a*0]；

roots(p)

特点：可以找出全部根。

5、线性方程组： **AX = b**

其中A是m×n阶矩阵，b是m维向量。

x=A \b

or x=inv(A)*b

特点：只能求出一个特解。

“\”还可解线性超定方程组.

Matlab软件求解法

solve()语句的用法

①单变量方程　$f(x)=0$

1）符号方程

例1：　求解方程 $ax2+bx+c=0$

输入:

```
>> syms x a b c
>> x1=solve(a*x^2+b*x+c)
```

输出

```
x1 =
-(b + (b^2 - 4*a*c)^(1/2))/(2*a)
-(b - (b^2 - 4*a*c)^(1/2))/(2*a)
```


实验目的
引言引例
图形放大
区间迭代
点迭代
软件求解
范　例
课堂延伸
布置实验
结　束

Matlab软件求解法

2）数值方程

例2：　解方程：　x3-2x2=x-1

解：

```
syms x, s=solve(x^3-2*x^2-x+1)
```

double(s)或vpa(s)

输出：

```
s =
root(z^3 - 2*z^2 - z + 1, z, 1)
root(z^3 - 2*z^2 - z + 1, z, 2)
root(z^3 - 2*z^2 - z + 1, z, 3)
```

```
double(s)
ans =
   0.5550
  -0.8019
   2.2470
```

```
vpa(s)
ans =
 0.55495813208737119142219487100641
-0.80193773580483825247220463901489
 2.2469796037174670610500097680085
```

数学实验之
——方程求解
实验目的
引言引例
图形放大
区间迭代
点迭代
软件求解
范　例
课堂延伸
布置实验
结　束

Matlab软件求解法

3）无穷解

例3　求解方程：　tan(x)-sin(x)=0

输入：solve(tan(x)-sin(x))

输出：　0　(不能给出全部解)

Matlab软件求解法

solve()语句的用法

② 方程组 $f_1(x)=0, \boxed{?}, f_m(x)=0$

例4 $\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ 0.75*x^3-y+0.9=0 \end{cases}$

输入： syms x y

```
[x,y]=solve(x^2+y^2-1,75*x^3/100-y+9/10);
x1=double(x), y1=double(y),
```

输出：

```
x1 =
 -0.9817 + 0.0000i
  0.3570 + 0.0000i
 -0.5540 - 0.3547i
 -0.5540 + 0.3547i
  0.8663 - 1.2154i
  0.8663 + 1.2154i
```

```
y1 =
  0.1904 + 0.0000i
  0.9341 + 0.0000i
  0.9293 - 0.2114i
  0.9293 + 0.2114i
 -1.4916 - 0.7059i
 -1.4916 + 0.7059i
```

Matlab软件求解法

solve()语句的用法

例5：求解方程组

$$\begin{cases} \sin x + y^2 + \ln z - 7 = 0 \\ 3x + 2^y - z^3 + 1 = 0 \\ x + y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

解① 输入：

```
syms x y z,  [x,y,z]=solve(sin(x)+y^2+log(z)-7,  …

    3*x+2^y-z^3+1,x+y+z-5,x,y,z)
```

输出：

```
x = 5.1004127298867761621009050441017
y = -2.6442371270278301895646143811868
z = 2.543824397141054027463709337085
```

Matlab软件求解法

fsolve()语句的用法

解②：1）建立方程组的M-函数文件(nxxf.m)

```
function eq=nxxf(x)
 eq(1)=sin(x(1))+x(2)^2+log(x(3))-7;
 eq(2)=3*x(1)+2^x(2)-x(3)^3+1;
 eq(3)=x(1)+x(2)+x(3)-5;
```

1) 运行程序(test4.m)

```
[y,error]=fsolve('nxxf',[1,1,1])
```

3）运行结果：

```
y= 0.5990  2.3959  2.0050
error =1.0e-010 *
      0.2213     0.3803    -0.0005
```

Matlab软件求解法

fsolve()语句的用法

解②：改变初值会怎么样?

1）建立求方程组函数值的M-函数文件(nxxf.m)

```
function eq=nxxf(x)
 eq(1)=sin(x(1))+x(2)^2+log(x(3))-7;
 eq(2)=3*x(1)+2^x(2)-x(3)^3+1;
 eq(3)=x(1)+x(2)+x(3)-5;
```

1）运行程序(test4.m)

```
[y,error]=fsolve('nxxf',[0,0,0])
```

3）运行结果：

Objective function is returning undefined values at initial point.
FSOLVE cannot continue.

目标函数在初始点返回了没有定义的值，fsolve不能继续

数学实验之
——方程求解

实验目的

引言引例

图形放大

区间迭代

点迭代

软件求解

范　例

课堂延伸

布置实验

结　束

Matlab软件求解法

fsolve()语句的用法

想

1) fsolve 的输入中解的初值会影响输出的解吗?

1) fsolve 的输入中解的初值的选择应注意些什么?

2) 如何选择fsolve的输入中解的恰当初值?

Matlab软件求解法

fzero()语句的用法: 求解 tan(x)-sin(x)=0

用于求单变量方程的根,所采用的算法主要是二分法,割线法和逆二次插值法的混合方法.

1）建立方程组的M-函数文件

```
function eq=sfun(x)
eq= tan(x)-sin(x);
```

1) 运行程序(test4.m)

```
[y,fv,ef,out]=fzero(@sfun,[-0.1*pi,2.1*pi])
```

3）运行结果:

y =3.1416, fv =-2.4493e-16, ef =1

out =

包含以下字段的 struct:

intervaliterations: 0 iterations: 3 funcCount: 5

algorithm: 'bisection, interpolation'

message: '在区间 [-0.314159, 6.59734] 中发现零'

Matlab软件求解法

roots()语句的用法

例6：求解多项式方程 $x9+x8+1=0$

输入： p=[1,1,0,0,0,0,0,0,0,1];

roots(p)

输出：

-1.2131

-0.9017 + 0.5753i

-0.9017 - 0.5753i

-0.2694 + 0.9406i

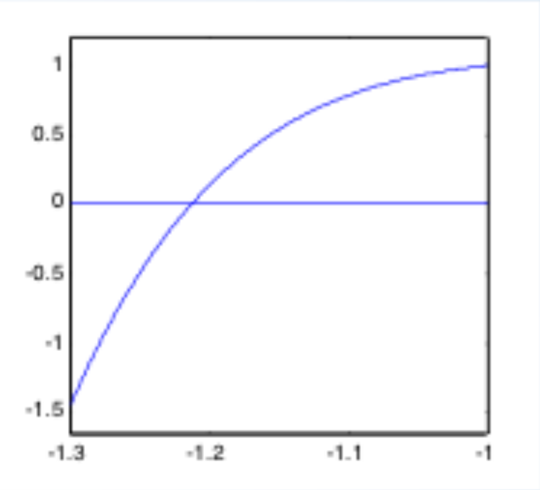
-0.2694 - 0.9406i

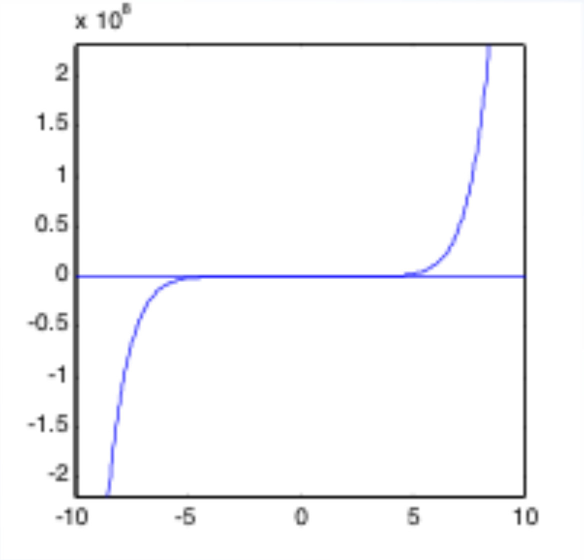
0.4168 + 0.8419i

0.4168 - 0.8419i

0.8608 + 0.3344i

0.8608 - 0.3344i





Matlab软件求解法

A\b 和inv()语句的用法

例7: $AX = b$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ -3 \end{bmatrix}$

解: 输入:A=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]; b=[6; 14; -3];

x1=A\b, x2=inv(A)*b, x3=pinv(A)*b

输出: 警告: 矩阵接近奇异值，或者缩放错误。结果可能不准确。RCOND = 1.541976e-18。

```
x1 =
 1.0e+17 *
  1.1259
 -2.2518
  1.1259
```

```
x2 =
 1.0e+17 *
  1.1259
 -2.2518
  1.1259
```

```
x3 =

 -7.0833
 -0.5000
  6.0833
```

Matlab软件求解法

A\b 和inv()语句的用法

例7: $AX = b$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ -3 \end{bmatrix}$

检验：

A*x1-b	A*x2-b	A*x3-b
ans =	ans =	ans =
-6	-6	4.1667
-142	-142	-8.3333
3	3	4.1667

思考

1、题中rank(A)=rank(A|b)=2<3, 该方程组有无穷解。

2、输出结果是否一致?

3、如何求方程组的全部解?

Matlab软件求解法

1、以三种方法求线性方程组AX=b的解

```
A=gallery(5);    % 生成5阶矩阵A
A(:,1)=[];       % 去掉矩阵A的第一列
b=[1.7 7.5 6.3 0.83 -0.082]';
x=inv(A'*A)*A'*b,
xx=pinv(A)*b,
xxx=A\b
```

2、比较三种解的误差

```
e=norm(b-A*x),        e =   1.3871
ee=norm(b-A*xx),      ee =   0.0474
eee=norm(b-A*xxx)     eee =  0.0474
```

范 例

放射性废物的处理问题

【问题背景】

一段时间, 美国原子能委员会是按以下方式处理浓缩放射性废物的. 他们将废物装入密封性能很好的圆桶中, 然后扔到水深300英尺的海里. 这种做法是否会造成放射性污染, 很自然地引起了生态学家及社会各界的关注. 原子能委员会一再保证, 圆桶非常坚固, 决不会破漏, 这种做法是绝对安全的. 然而一些工程师们却对此表示怀疑, 他们认为圆桶在海底相撞时有可能发生破裂. 由此双方展开了一场笔墨官司.

究竟谁的意见正确呢? 只能让事实说话了!

范 例

问题分析

问题的关键在于圆桶到底能承受多大速度的碰撞? 圆桶和海底碰撞时的速度有多大?

工程师们进行了大量破坏性的实验, 发现圆桶在直线速度为40 ft/s 的冲撞下会发生破裂, 剩下的问题就是计算圆桶沉入300 ft 深的海底时, 其末速度究竟有多大?

范 例

问题假设

1. 使用55加仑的圆桶; (1加仑 = 3.7854升)
2. 装满放射性废物时的圆桶重量为

   W = 527.436磅 (1 磅 = 0.4526公斤)
3. 在海水中圆桶受到的浮力 B = 470.327磅
4. 圆桶下沉时受到海水的阻力 D = C v

   C 为常数, 经测算得: C = 0.08.
5. 建立坐标系, 取垂直向下为坐标方向 y ,

数学实验之

－－方程求解

实验目的

引言引例

图形放大

区间迭代

点迭代

软件求解

范 例

课堂延伸

布置实验

结 束

建立模型

范 例

根据牛顿第二定律, 圆桶下沉时应满足微分方程:

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=W-B-D$$ [illegible] $-$ [illegible] $-$ [illegible]

[illegible] $m=\frac{W}{g},D=Cv,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v$

$B=470.327$

$\mathrm{W}=527.436$

$\mathrm{C}=0.08$

$$m\frac{dv}{dt}=W-Cv-B$$

[illegible] $:v(0)=0$

[illegible] $v(t)=\frac{W-B}{C}(1-e^{-\frac{Cg}{W}t})$

[illegible] [illegible]

$$\lim v(t)=\frac{W-B}{C}\approx 713.86(ft/s)(\text{当}t\longrightarrow\infty\text{时})$$

数学实验之
——方程求解
实验目的
引言引例
图形放大
区间迭代
点迭代
软件求解
范 例
课堂延伸
布置实验
结 束

范 例

模型求解

为了求出圆桶与海底的碰撞速度$v(t)$, 需要求出圆桶下沉到海底300英尺时的时间 t, 再计算 $v(t)$, 要做到这一点是十分困难的. 若将速度v 看成是海水深度y 的函数, 即

由复合函数的求导法知

$$v(t) = v(y(t))$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}v$$

范　例

模型求解

[illegible]

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=W-B-Cv$$

或

$$\frac{v}{W-B-Cv}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=\frac{g}{W}$$

[illegible]

$$v(0)=0,\ y(0)=0$$

[illegible]

$$-\frac{v}{C}-\frac{W-B}{C^2}\ln\frac{W-B-Cv}{W-B}=\frac{gy}{W}$$

难以直接求出 *v*的表达式！

借助数值方法求出 $v(300)$=45.1ft/s，显然大于40ft/s。

结论：放射性废物不能随意放入公海！

课堂延伸

非线性方程组求解的迭代方法

给定非线性方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1, \boxed{?}, x_n) = 0 \\ \boxed{?}\boxed{?} \\ f_n(x_1, \boxed{?}, x_n) = 0 \end{cases}$$

改写成等价的方程组

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1, \boxed{?}, x_n) \\ \boxed{?}\boxed{?} \\ x_n = g_n(x_1, \boxed{?}, x_n) \end{cases}$$

类似于单变量的简单迭代法 $f(x) = 0, \Rightarrow x = g(x)$ **x：向量**

数学实验之
——方程求解
实验目的
引言引例
图形放大
区间迭代
点迭代
软件求解
范　例
课堂延伸
布置实验
结　束

课堂延伸

举例

例4

$$\begin{cases} x_1^{\ 2} - \underline{10x_1} + \boxed{x_2^{\ 2}} + 8 = 0 \\ \boxed{x_1x_2^{\ 2} + x_1} - \underline{10x_2} + 8 = 0 \end{cases}$$

构造如下的迭代函数:

$$\begin{cases} x_1 = 0.1x_1^2 + 0.1x_2^2 + 0.8 \\ x_2 = 0.1x_1x_2^2 + 0.1x_1 + 0.8 \end{cases} \qquad (1)$$

或

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{10x_2 - 8}{x_2^2 + 1} \\ x_2 = \sqrt{10x_1 - 8 - x_1^2} \end{cases} \qquad (2)$$

想：迭代序列如何表示?

课堂延伸

迭代序列的表示

迭代产生的数列是：

(x11,x12), (x21,x22), …, (xn1,xn2),…

Matlab软件中的数组表示：

$$\begin{bmatrix} x(1,1) & x(1,2) \\ x(2,1) & x(2,2) \\ \boxed{?} & \boxed{?} \\ x(n,1) & x(n,2) \\ \boxed{?} & \boxed{?} \end{bmatrix}$$

实验目的
引言引例
图形放大
区间迭代
点迭代
软件求解
范　例
课堂延伸
布置实验
结　束

课堂延伸

Matlab程序：只输出最后结果：一维向量

```
x=[0,0];y=[0,0];    (died5.m,died55.m)
for k=1:4
  x(1)=0.1*x(1)^2+0.1*x(2)^2+0.8
  x(2)=0.1*x(1)*x(2)^2+0.1*x(1)+0.8
  y(1)=(10*y(2)-8)/(y(2)^2+1)
  y(2)=sqrt(10*y(1)-8-y(1)^2)
end
x,y,
```

(1)

(2)

尝试：

选择初始点: (0, 0), (2, 3), (8, 9), …

迭代次数逐次增加，观察结果。

课堂延伸

Matlab程序：输出中间迭代结果：二维向量

```
x=[];y=[]; %(died55.m)
x(1,1)=0;x(1,2)=1;y(1,1)=0.5;y(1,2)=0.5;
for k=2:8
 x(k,1)=0.1*x(k-1,1)^2+0.1*x(k-1,2)^2+0.8;
 x(k,2)=0.1*x(k-1,1)*x(k-1,2)^2+0.1*x(k-1,1)+0.8;
 y(k,1)=(10*y(k-1,2)-8)/(y(k-1,2)^2+1);
 y(k,2)=sqrt(10*y(k-1,1)-8-y(k-1,1)^2);
end
```

(1)

(2)

课堂延伸

迭代结果：二维向量

x = 0	1.0000	y =0.5000	0.5000
0.9000	0.8000	-2.4000	0 + 1.8028i
0.9450	0.9476	3.5556 - 8.0123i	0 + 6.1449i
0.9791	0.9794	0.2176 - 1.6716i	8.9872 - 1.2878i
0.9918	0.9918	0.9861 + 0.1242i	2.5696 - 3.1112i
0.9967	0.9967	1.7722 + 1.3369i	1.0606 + 0.4699i
0.9987	0.9987	2.0884 + 1.3747i	3.1930 + 1.3515i
0.9995	0.9995	2.1005 - 0.4925i	3.4312 + 1.1666i

收敛

不收敛