封

1 .设 $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x>0\\ x\sin\frac{1}{x}, & x<0\end{cases}$，那么 $\lim_{x\to0}f(x)$ 不存在的原因是（ ）C

A. ~~$f(0)$ 无定义~~ B. ~~$\lim_{x\to0-0}f(x)$ 不存在~~

C. $\lim_{x\to0+0}f(x)$ 不存在 D. $\lim_{x\to0-0}f(x)$ 和 $\lim_{x\to0+0}f(x)$ ~~都存在但不相等~~

2.函数 $f(x)=\frac{x^2-x}{\sin\pi x}$ $x(x-1)$ 的可去间断点的个数为（B） $\frac{2x-1}{\pi\cos\pi x}$

A. 1 B.2 C.3 D.无穷多个

线

3.设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 点可导的一个充要条件是（ ）

A. $\lim_{h\to+\infty}h\left[f(a+\frac{1}{h})-f(a)\right]$ 存在 B. $\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

C. $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ 存在 D. $\lim_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-2h)}{h}$ 存在 $\frac{f(a+(-2h))-f(a)}{-2h}$.

4.设 $\xi$ 为 $f(x)=\arctan x$ 在区间 $[0,b]$ 上应用拉格朗日中值定理的"中值"，

则 $\lim_{b\to0}\frac{\xi^2}{b^2}=$ （ ）C $\frac{\arctan b-0}{b}=\frac{1}{1+\xi^2}$ $\xi^2=\frac{\frac{b}{\arctan b}-1}{b^2}=\frac{b-\arctan b}{b^3}=\frac{\frac{1}{3}}{1}=\frac{1}{3}$

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

5.若 $\int f(x)dx=F(x)+C$ 则 $\int f(\sin x)\cancel{\cos x dx}=$ （ ）A $d\sin x$ $F'(x)=f(x)$. $F'(\sin x)=f(\sin x)\cos x$

A. $F(\sin x)+C$ B. $-F(\sin x)+C$

C. $xF(\sin x)+C$ D. $F\sin x)\sin x+C$

6.下列四个广义积分中收敛的个数为（ ）A

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题（共小题3分共18分）

1.极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\boxed{?}+\frac{1}{2n}\right)=$ ~~___~~ $\ln 2$ $2SC-2S=2S(C-1)\sim x\cdot\frac{1}{2}x^2$

2.当 $x\to0$ 无穷小量 $\sin2x-2\sin x$ 与 $x^k$ 是同阶无穷小，则 $k=$ 3

3.设曲线方程为 $y=x^2+\sin x$，该曲线在点 $(0,0)$ 处的法线方程为 $y=-x$

4.曲线 $xy=1$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率为 $\frac{\sqrt2}{2}$ $y'=2x+\cos x=0+1=1$ $y=-1(x-0)+0$.

$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\frac{\frac{2}{x^3}}{(1+\frac{1}{x^4})^{\frac{3}{2}}}$ $=\frac{2}{2^{\frac{3}{2}}}$ $2\sqrt2$

$y=\frac{1}{x}$ $y'=-\frac{1}{x^2}$ $y''=\frac{2}{x^3}$

5.已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\ln x}{x}$，则 $\int xf'(x)dx=$ $\frac{1-2\ln x}{x}+C$

$=\frac{1-\ln x}{x^2}$ $\int xdf(x)=xf(x)-\int f(x)dx=\frac{1-\ln x}{x}-\frac{\ln x}{x}$

6.定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)dx=$ $\frac{\pi^2}{4}$



三、计算题（每小题6分，共24分）

1.计算极限 $\lim_{x\to+\infty}\left(x\tan\frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

$\because \lim_{x\to+\infty}\frac{\tan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$

$\therefore$ 原式 $=\lim_{x\to+\infty}\left[1+(x\tan\frac{1}{x}-1)\right]^{\frac{1}{x\tan\frac{1}{x}-1}\cdot(x\tan\frac{1}{x}-1)x^2}$

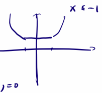
$=\lim_{x\to+\infty}e^{(x^3\tan\frac{1}{x}-x^2)}$

$\because \lim_{x\to+\infty}(x^3\tan\frac{1}{x}-x^2)=\lim_{x\to+\infty}x^3(\tan\frac{1}{x}-\frac{1}{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{3}$

$\therefore$ 原式 $=e^{\frac{1}{3}}$

2.讨论函数 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的可导性。

$f(x)=\begin{cases}-x^3 & x\le-1\\ 1 & x\in(-1,1)\\ x^3 & x\ge1\end{cases}$ $|x|^3\ge1$ $x\ge1$ $x\le-1$.



$f'_-(-1)=\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1^-}\frac{-x^3-1}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{-3x^2}{1}=-3\ne f'_+(-1)=0$

$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{3x^2}{1}=3\ne f'_-(1)=0$

$\therefore f(x)$ 在 $(-1,1)$ 和 $(1,1)$ 处不可导.

3.设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\frac{1}{3}t^3+t+\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3}t^3-t+\frac{1}{3} \end{cases}$ 确定，求 $y=y(x)$ 的极值。

$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t^2-1}{t^2+1}=0 \Rightarrow t=\pm 1$

| $t$ | $(-\infty,-1)$ | $(-1,1)$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $y'(x)$ | + | − | + |
| $y(x)$ | ↗ | ↘ | ↗ |

极大值 $y_1=-\frac{1}{3}+1+\frac{1}{3}=1$

极小值 $y_2=\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$

4.计算不定积分 $\int(\ln x)^2dx.$

令 $x=e^t$ $\ln x=t$

原式 $=\int t^2e^tdt=\int t^2de^t=t^2e^t-\int 2te^tdt=t^2e^t-2e^t(t-1)+C=e^t(t^2-2t+2)+C$

$=x(\ln^2x-2\ln x+2)+C$



1.设 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内可导且 $f'(x)<0$，令 $F(x)=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{f(u)}{u^2}du-x\int_1^{\frac{1}{x}}f(u)du.$

（1）求 $F''(x)(x>0)$；

（2）讨论曲线 $y=F(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的凹凸性并求其拐点坐标。

(1) $F'(x)=\frac{f(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}}\cdot-\frac{1}{x^2}-\int_1^{\frac{1}{x}}f(u)du-x\cdot f(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})=-f(\frac{1}{x})-\int_0^{\frac{1}{x}}f(u)du+\frac{1}{x}\cdot f(\frac{1}{x})=f(\frac{1}{x})(\frac{1}{x}-1)-\int_0^{\frac{1}{x}}f(u)du$

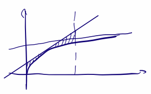
$F''(x)=f'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})(\frac{1}{x}-1)+f(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})-f(\frac{1}{x})\cdot(-\frac{1}{x^2})=(-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2})f'(\frac{1}{x})=\frac{f'(\frac{1}{x})}{x^3}(x-1)$

(2)

| $x$ | $(0,1)$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|
| $F''(x)$ | + | − |
| $F(x)$ | 上凹 | 上凸 |

拐点：$(1,0)$

2.求曲线 $y=\sqrt{x}$ 的一条切线 $l$，使该曲线与切线 $l$ 及直线 $x=0,x=2$ 所围成的平面图形面积最小。



$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ $l$: $y=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\sqrt{x_0}=\frac{x}{2\sqrt{x_0}}+\frac{\sqrt{x_0}}{2}$

$S=\int_0^2(\frac{x}{2\sqrt{x_0}}+\frac{\sqrt{x_0}}{2}-\sqrt{x})dx=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^2+\frac{\sqrt{x_0}}{2}\cdot 2-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{1}{\sqrt{x_0}}+\sqrt{x_0}-\frac{2^{\frac{5}{2}}}{3}\geqslant 2-\frac{2^{\frac{5}{2}}}{3}$

当且仅当 $x_0=1$ 时 "=" 成立.

$\therefore l$: $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$.

五、证明题（每小题8分，共16分）

1.设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数，且 $f''(x)\neq 0$，试证：

（1）$x\in(-1,1),x\neq 0$，存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$，使得 $f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)x]$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

1.(1) $\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'[\theta(x)x]$ …… ※

由拉格朗日中值定理可证得.

假设. $\exists\ \alpha(x)\in(0,1)$ 且 $\alpha(x)\neq\theta(x)$ 有 $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\alpha(x)x)$

则在 $\alpha(x)x$ 和 $\theta(x)x$ 构成的区间上用罗尔定理

$\exists\ \xi\in(-1,1)$ 有 $f''(\xi)=0$ 与题干矛盾.

(2) ※两边求极限:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}f'[\theta(x)x]=f'(0)$

$\Leftrightarrow f'[\theta(x)x]=f'(0)+\alpha(x)$ $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$.

$\frac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{\theta(x)\cdot x}=\frac{\alpha(x)}{\theta(x)\cdot x}$

$\therefore \exists\ \eta\in(0,\theta(x)\cdot x)$ 有 $f''(\eta)=\frac{\alpha(x)}{\theta(x)\cdot x}$ $\theta(x)=\frac{\alpha(x)}{xf''(\eta)}$ $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \eta\to 0}}\frac{\alpha(x)}{xf''(\eta)}=0$

## 五、证明题（每小题8分，共16分）

1.设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数，且 $f''(x)\neq 0$，试证：

（1） $x\in(-1,1), x\neq 0$，存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$，使得 $f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)x]$；

（2） $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

2.设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，证明：$\int_0^{2a}f(x)dx=\int_0^a[f(x)+f(2a-x)]dx$，并由此计算 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

$\int_0^{2a}f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_a^{2a}f(x)dx$ 即证 $\int_a^{2a}f(x)dx=\int_0^a f(2a-x)dx$ 左边令 $x=2a-t$ $\int_a^{2a}f(x)dx=\int_a^0 f(2a-t)d(-t)=\int_0^a f(2a-t)dt=$ 右边

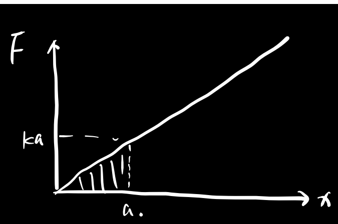
原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}+\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2 x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x}=-\pi\arctan\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=+\frac{\pi^2}{4}$

$-2$

## 六、应用题（本题8分，）

某部通讯连因执行任务需要在野外搭建大帐篷，搭建大帐篷需要用气锤将桩打进土层，气锤每次击打都将克服土层对桩的阻力而做功。设土层对桩的阻力大小与桩被打进地下的深度成正比（比例系数为 $k>0$），气锤第一次击打将桩打进地下 $a$ 米，根据设计方案，要求气锤每次击打桩时所做的功相等，问：气锤击打3次后，可将桩打进地下多深？






第1次击打：

$W=\int_0^a kx\,dx=\frac{1}{2}kx^2\Big|_0^a=\frac{1}{2}ka^2$

第2次击打：

$W=\frac{1}{2}ka^2=\int_a^m kx\,dx=\frac{1}{2}kx^2\Big|_a^m=\frac{k(m^2-a^2)}{2}\Rightarrow m=\sqrt{2}a$

第3次击打：

$W=\frac{1}{2}ka^2=\int_{\sqrt{2}a}^n kx\,dx=\frac{1}{2}kx^2\Big|_{\sqrt{2}a}^n=\frac{k(n^2-2a^2)}{2}\Rightarrow n=\sqrt{3}a$