第五章　正弦电流电路导论

❖ 正弦电流电路、正弦稳态

线性电路在正弦交流电源激励下，在接通电源较长时间以后，响应的自由分量已趋近于零，电路中任一电压、电流响应均仅包含强制分量（与激励源同频率的正弦量），电路的这种工作状态称为正弦稳态。这样的电路称为正弦电流电路。

本章及第六章将全面论述正弦电流电路及其分析计算方法。这是交流电路的主要内容，也是研究非正弦周期电流电路必备的基础。

❖正弦交流电应用非常广泛

发电厂发出的电流是正弦电流

高压输送损耗小

交流电从低压变为高压方便

正弦交流电变化平滑且不易产生高次谐波

非正弦周期函数，可以通过傅立叶级数将其分解为一系列不同频率的正弦函数

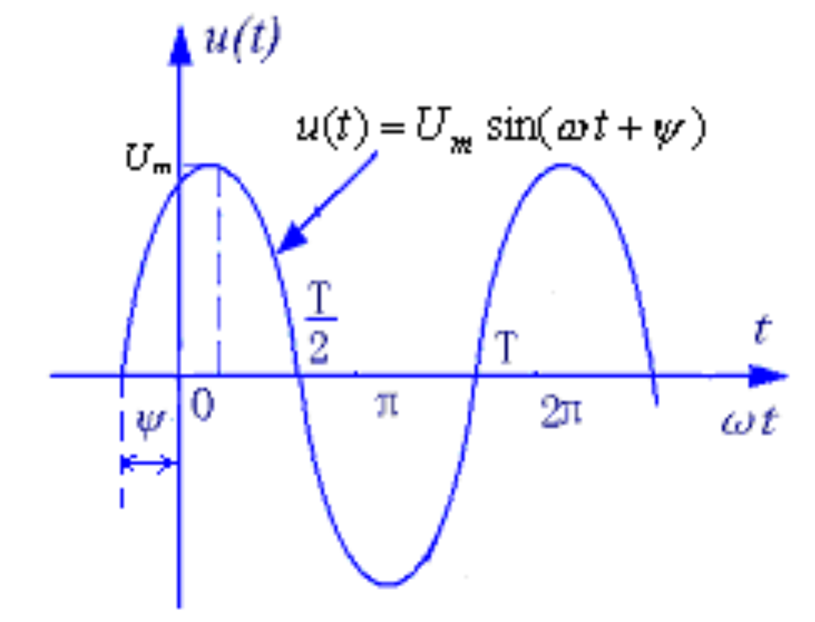
本章主要内容：

- 正弦电路的基本概念，正弦量的三要素及其相量表示；
- 基尔霍夫定律和电路元件VCR的相量形式；
- 阻抗和导纳,简单正弦电流电路的计算。

§5-1 正弦电压和电流的基本概念

1. 正弦量的三要素

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$$



- U_m：幅值，最大值（振幅、峰值）

- ω：角频率，单位：弧度/秒 （rad/s）

  T：周期，单位：秒（s）

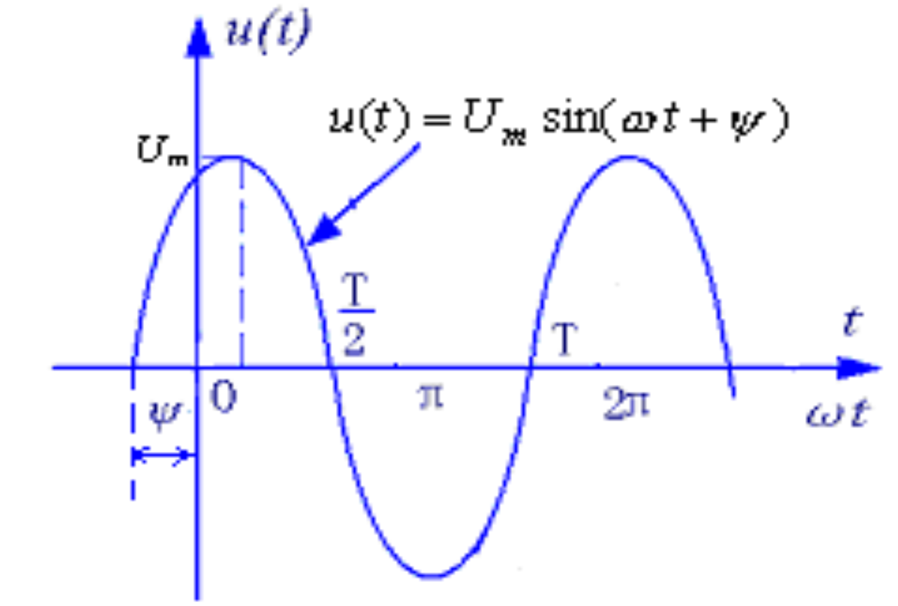
  f：频率，单位：赫兹（Hz）

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

工频：50Hz

$$f = \frac{1}{T}$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$$



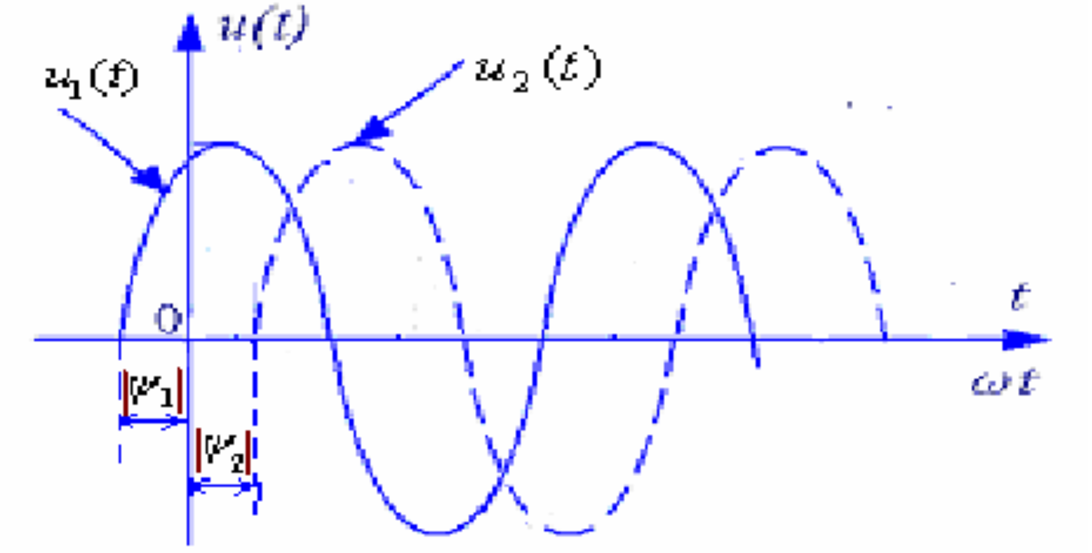
$(\omega t+\psi)$：瞬时相位角，简称相角或相

➢ ψ：初相角

意义：表示正弦电压由负值向正值变化所经过的零值点距坐标原点的角度。

单值性 $|\psi| \leq \pi$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$$



可根据 ψ 确定波形起点的位置

当 $\omega t + \psi = 0$ **时，** $u(t) = 0$

$$t = -\frac{\psi}{\omega} \begin{cases} \psi > 0 \quad t < 0 & \textbf{起点在坐标原点左边} \\ \psi < 0 \quad t > 0 & \textbf{起点在坐标原点右边} \end{cases}$$

幅值、角频率、初相称为正弦量的三要素

例1 (1) 已知 $I_m = 10A \quad \omega = 314 rad/s \quad \psi = 60^\circ$

写出i(t)的表达式。

解： $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi) = 10\sin(314t + 60^\circ)A$

(2) 已知 $i(t) = 8.9\sin(314t - \frac{\pi}{3})A$

试确定正弦量的三要素。

解： $I_m = 8.9A \quad \omega = 314 rad/s \quad \psi = -\frac{\pi}{3}$

(3) 已知 $i(t) = 3.11\sin(6.28t + \frac{3\pi}{2})A$

解： $I_m = 3.11A \quad \omega = 6.28 rad/s$ $\boxed{\psi = \frac{3\pi}{2} - 2\pi = -\frac{\pi}{2} rad}$

2. 同频率正弦量的相位差

$$u_1(t)=U_{1m}\sin(\omega t+\psi_1)$$

$$u_2(t)=U_{2m}\sin(\omega t+\psi_2)$$

相位差:

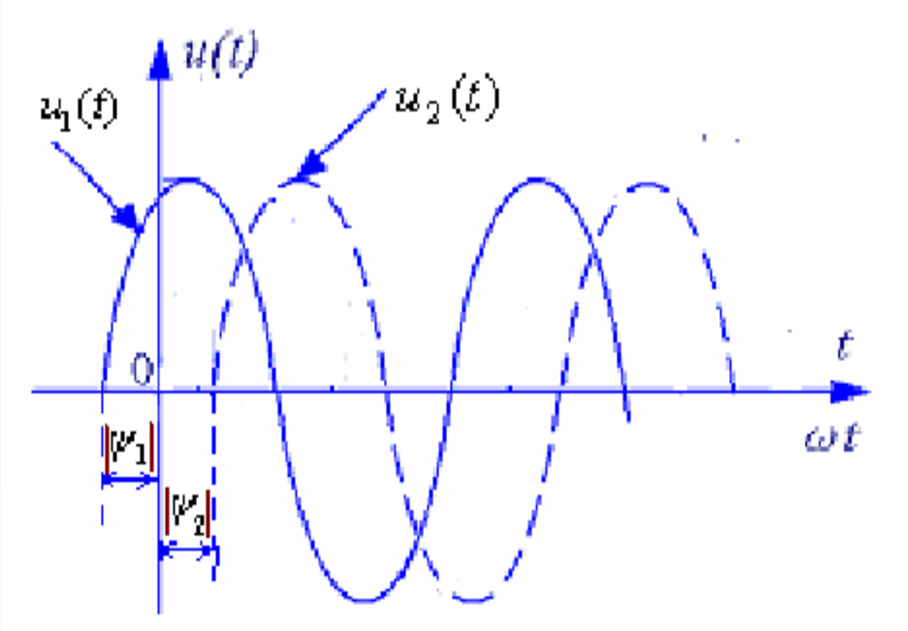
$$\boxed{\varphi=(\omega t+\psi_1)-(\omega t+\psi_2)=\psi_1-\psi_2}\qquad |\varphi|\le\pi$$

$\psi_1-\psi_2>0$，$u_1(t)$在相位上**超前**于$u_2(t)$

$\psi_1-\psi_2<0$，$u_1(t)$在相位上**滞后**于$u_2(t)$

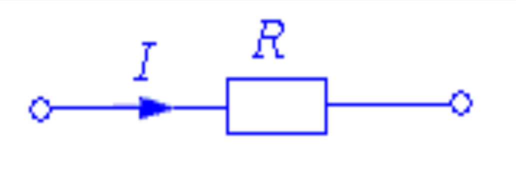
$\psi_1-\psi_2=0$，$u_1(t)$ 与$u_2(t)$ **同相**

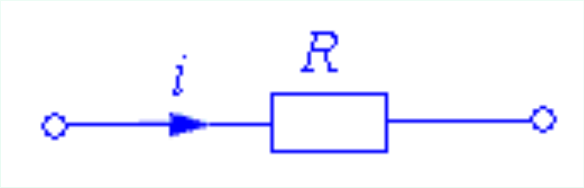
$\psi_1-\psi_2=180°$，则称$u_1(t)$ 与$u_2(t)$ **反相**



3. 正弦电流、电压的有效值

周期电流的有效值定义为与周期电流的平均作功能力等效的直流电流的值。





$$P_{DC} = RI^2\mathrm{T}$$

$$P_{AC} = \int_0^T Ri^2 dt$$

$$RI^2T = \mathrm{R}\int_0^T i^2(t)\,dt$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt}$$

有效值又可称为方均根值

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi)$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \psi) dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T}\int_0^T \frac{1 - \cos 2(\omega t + \psi)}{2} dt}$$

$$= \sqrt{\frac{I_m^2}{T}\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2(\omega t + \psi)}{4\omega}\right]_0^T} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \psi)$$

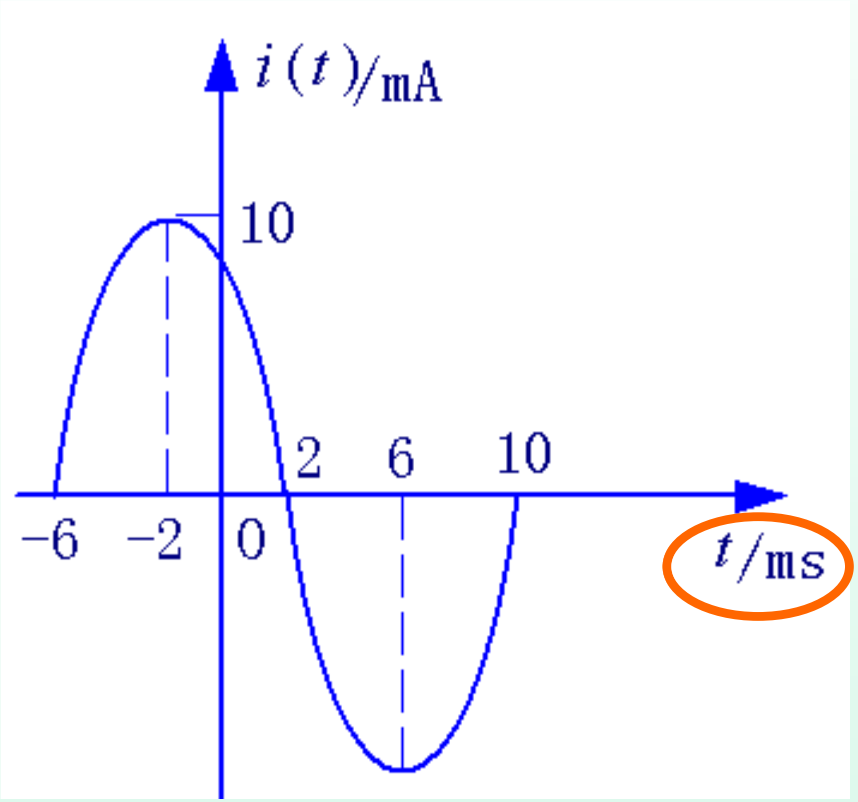
同理：$$U=\frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

$$u=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\psi)$$

交流仪器仪表的读数、电气设备铭牌上标注的额定值都是有效值

一般所说的正弦电压、电流的大小都是指有效值。

例2 根据下列波形图写出它们的正弦函数形式的瞬时值表达式。



$$16\times10^{-3}\omega=2\pi \Rightarrow \omega=\frac{10^{3}\pi}{8}$$

$$\psi=6\times10^{-3}\omega=\frac{3\pi}{4}$$

$$i=10\sin\left(\frac{10^{3}\pi}{8}t+\frac{3\pi}{4}\right)\mathrm{mA}$$

例3 计算下列各组正弦量的相位差，并指出其超前、滞后关系。

1） $u_1(t) = \sin(\omega t + 60^\circ)$ $\qquad u_2(t) = \sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$

$\varphi = 60^\circ - \frac{\pi}{3} = 0$ $\qquad u_1(t)$ 与 $u_2(t)$ 同相

2） $u_1(t) = 220\sqrt{2}\cos(314t + \frac{\pi}{3})$ $\qquad u_2(t) = 220\sqrt{2}\sin(314t + \frac{\pi}{6})$

$$u_1(t) = 220\sqrt{2}\sin(314t + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) = 220\sqrt{2}\sin(314t + \frac{5\pi}{6})$$

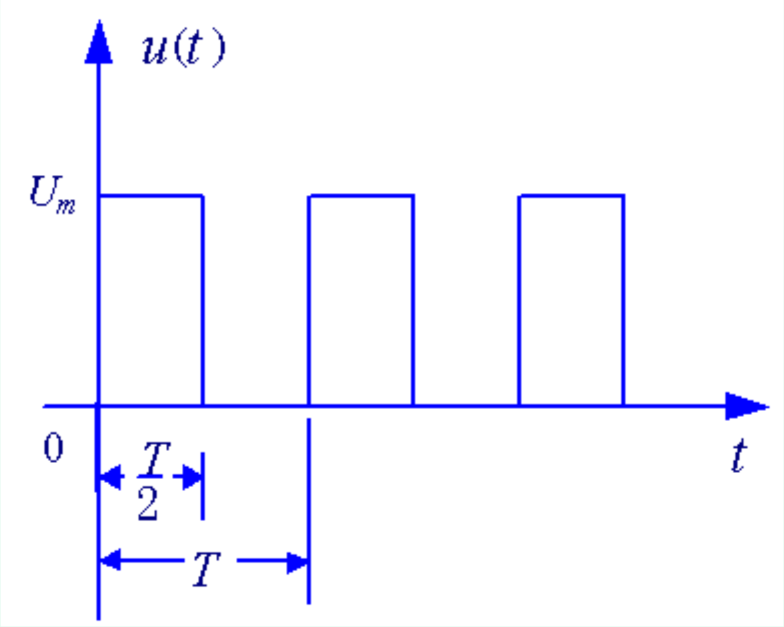
$\varphi = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ $\qquad u_1(t)$ 超前于 $u_2(t)$

3） $i_1(t) = -10\cos(1000t + 120^\circ)$ $\quad$ $i_2(t) = 5\cos(1000t - 30^\circ)$

$$i_1(t) = 10\cos(1000t + 120^\circ - 180^\circ) = 10\cos(1000t - 60^\circ)$$

$\varphi = -60^\circ + 30^\circ = -30^\circ$ $\quad$ $i_1(t)$ 滞后于$i_2(t)$

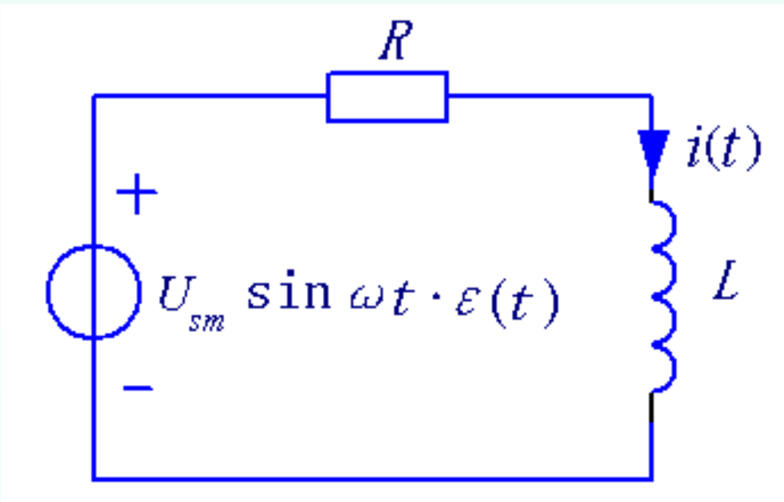
例3. 求图示周期性电压的有效值。



$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T/2} U_m^{\ 2}\,dt}=\frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

§5-2 线性电路对正弦激励的响应

正弦稳态响应



$$L\frac{di}{dt}+Ri=U_{sm}\sin\omega t \qquad t\geq 0_{+}$$

$$i(t)=i_{t}(t)+i_{f}(t)$$

$$i_{t}(t)=Ke^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_{f}(t)=I_{m}\sin(\omega t+\psi_{i})$$

$$\omega LI_m \cos(\omega t+\psi_i)+RI_m \sin(\omega t+\psi_i)=U_{sm}\sin\omega t$$

三角函数展开，整理并项，等号两端对应项系数相等：

$$\omega LI_m \cos\psi_i + RI_m \sin\psi_i = 0$$

$$RI_m \cos\psi_i - \omega LI_m \sin\psi_i = U_{sm}$$

$$\psi_i = -\arctan\frac{\omega L}{R}$$

$$I_m = \frac{U_{sm}}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}$$

$$i_f(t)=\frac{U_{sm}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\left(\omega t-\arctan\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$i(t)=Ke^{-\frac{R}{L}t}+\frac{U_{sm}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\left(\omega t-\arctan\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$K=i(0_+)+\frac{U_{sm}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\left(\arctan\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$i(t)=\left[i(0_+)+\frac{U_{sm}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\left(\arctan\frac{\omega L}{R}\right)\right]e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$+\frac{U_{sm}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\left(\omega t-\arctan\frac{\omega L}{R}\right)\qquad t\geq 0_+$$

当 $t\rightarrow\infty$ 时，电路中任一响应均为与激励源同频率的正弦量，这就是电路的正弦稳态响应(sinusoidal steady-state response)。

正弦稳态响应与电路的初始状态无关。它仅由电路参数和激励源确定

§5-3 正弦量的相量表示法

❖为什么要用相量表示正弦量?

1 微分求解繁琐，为了简化正弦电流电路的计算，避免用三角函数进行计算；

2 两个同频率正弦量之和仍是同频率的正弦量；

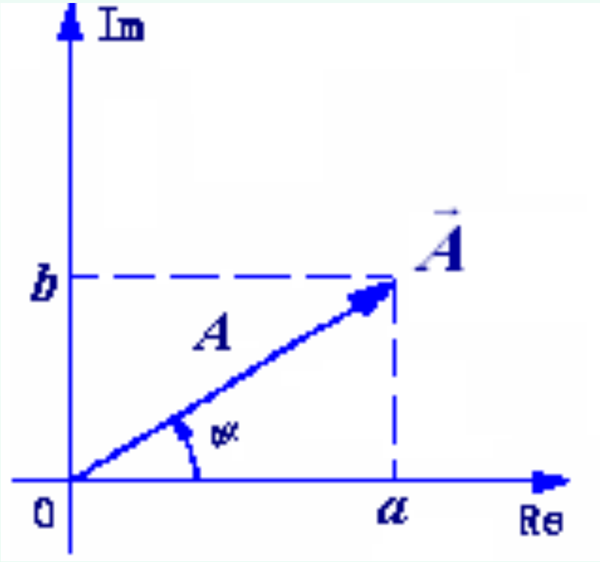
3 正弦电路中，正弦稳态响应是与激励同频率的正弦量；

❖什么是相量?

相量是把正弦量的幅值或有效值与初相集中表示的复数。

相量的本质是复数，用相量表示正弦量的基础是用复数表示正弦量。

1. 复数



$$\vec{A} = a + jb$$

$$a = |A|\cos\psi$$

$$b = |A|\sin\psi$$

$$|A| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\psi = arctg\frac{b}{a}$$

$$\vec{A} = |A|(\cos\psi + j\sin\psi)$$

$$e^{j\psi} = \cos\psi + j\sin\psi$$

(欧拉公式)

$$\vec{A} = |A|e^{j\psi}$$

$$\vec{A} = |A|\angle^{\psi}$$

2. 复数运算

$$\vec{A}_1 = A_1 e^{j\psi_1} = A_1\angle\psi_1 = a_1 + jb_1$$

$$\vec{A}_2 = A_2 e^{j\psi_2} = A_2\angle\psi_2 = a_2 + jb_2$$

1) $\vec{A}_1 \pm \vec{A}_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$

2) $\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2 = A_1 A_2 e^{j(\psi_1+\psi_2)} = A_1 A_2 \angle(\psi_1+\psi_2)$

3) $\dfrac{\vec{A}_1}{\vec{A}_2} = \dfrac{A_1}{A_2} e^{j(\psi_1-\psi_2)} = \dfrac{A_1}{A_2}\angle(\psi_1-\psi_2)$

$$j\vec{A}_1 = A_1 e^{j(\psi_1+90^\circ)} = A_1\angle(\psi_1+90^\circ)$$

$\boxed{j\text{为}90^\circ\text{旋转因子}}$

$$\frac{\vec{A}_1}{j} = A_1 e^{j(\psi_1-90^\circ)} = A_1\angle(\psi_1-90^\circ)$$