§2.2 离散型随机变量及其概率分布

离散型随机变量的概念

定义 若随机变量 X 的可能取值是有限多个或无穷可列多个，则称 X 为离散型随机变量

描述离散型随机变量的概率特性常用它的概率分布或分布律，即

$$P(X = x_k) = p_k, \quad k = 1,2,\boxed{?}$$

概率分布的性质

- $p_k \geq 0, \quad k = 1,2,\boxed{?}$ —————— 非负性
- $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ —————— 规范性

离散型随机变量的分布函数

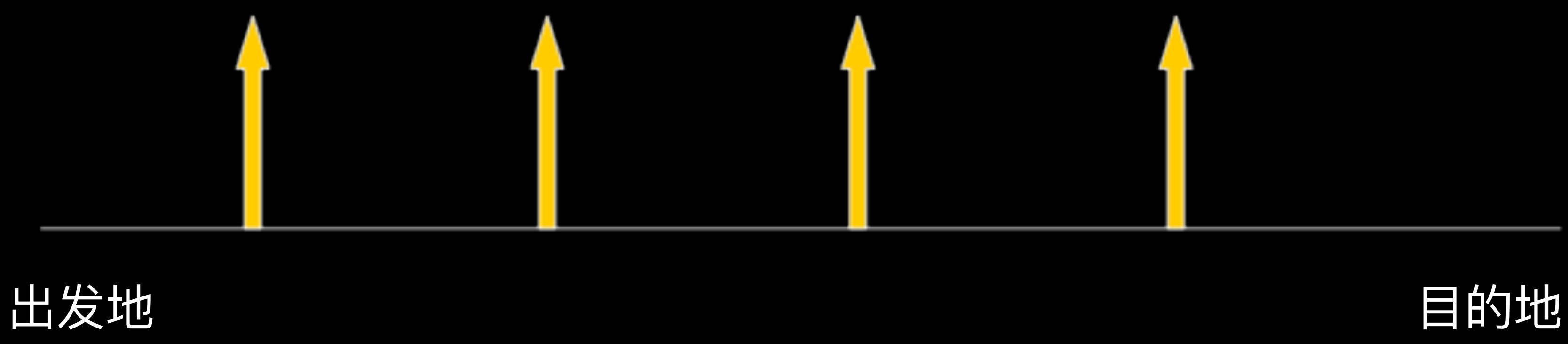
$$F(x)=P(X\le x)=P\Big(\bigcup_{x_k\le x}(X=x_k)\Big)$$

$$=\sum_{x_k\le x}P(X=x_k)=\sum_{x_k\le x}p_k$$

$$p_k=P(X=x_k)=F(x_k)-F(x_{k-1})$$

$F(x)$ 是分段阶梯函数，在 X 的可能取值 xk 处发生间断，间断点为第一类跳跃间断点，在间断点处有跃度 pk

例1 设一汽车在开往目的地的途中需经过 4 盏信号灯，每盏信号灯独立地以概率 p 允许汽车通过。令 X 表示首次停下时已通过的信号灯的盏数，求 X 的概率分布与 $p=0.4$ 时的分布函数。



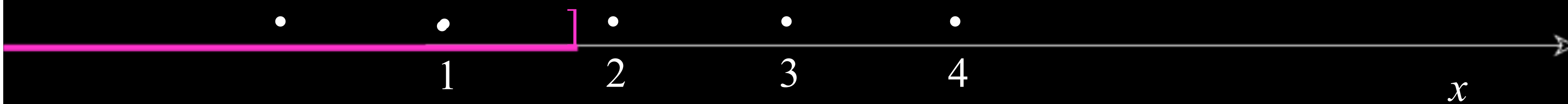
解

$$P(X=k)=p^k(1-p),\ \ k=0,1,2,3$$

$$P(X=4)=p^4,\qquad k=4$$

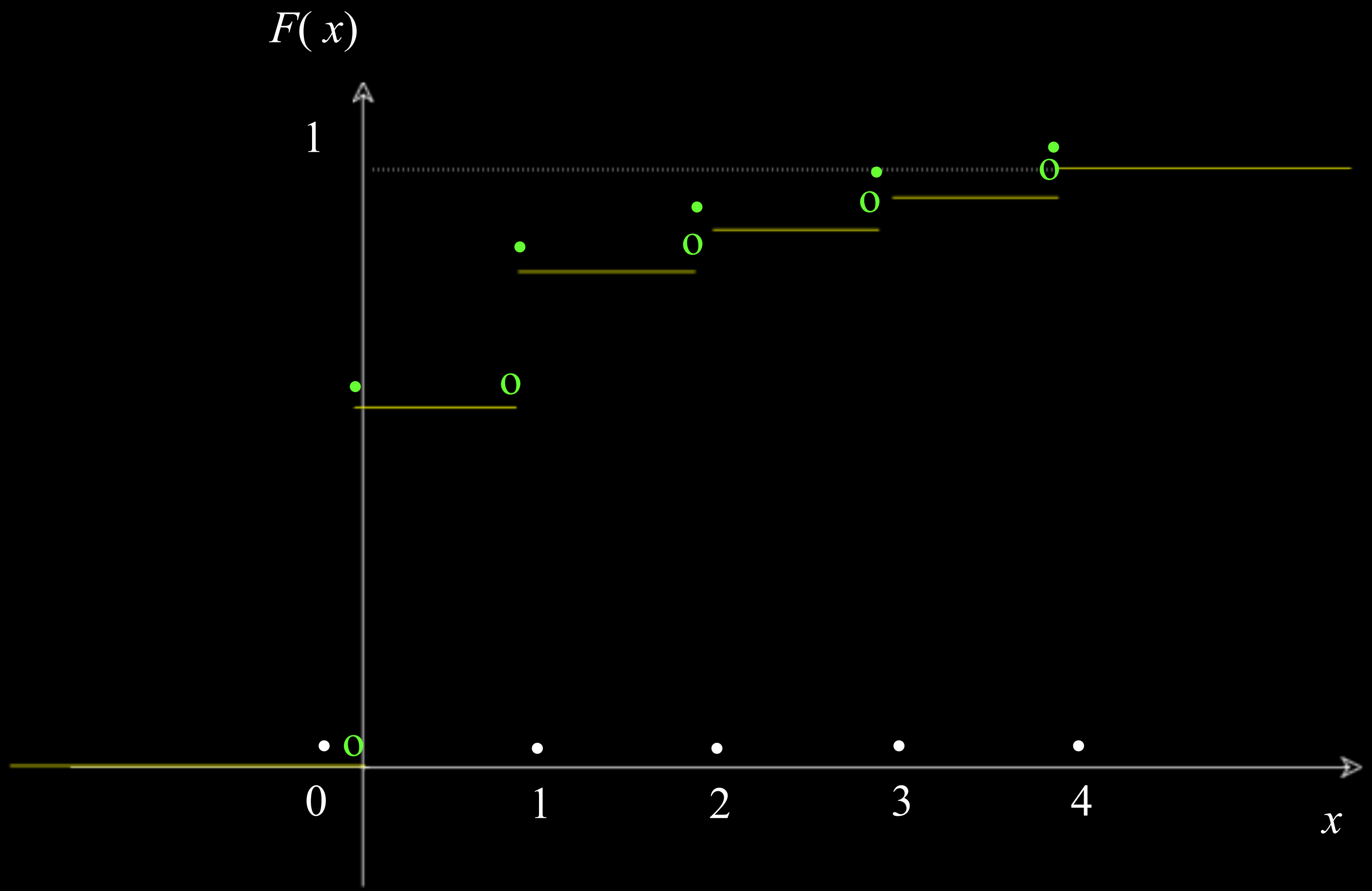
当 $p = 0.4$

k	0	1	2	3	4
p_k	0.6	0.4□0.6	0.42□0.6	0.43□0.6	0.44



x

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.6, & 0 \le x < 1 \\ 0.6 + 0.6 \times 0.4, & 1 \le x < 2 \\ 0.6 + 0.6 \times 0.4 + 0.6 \times 0.4^2, & 2 \le x < 3 \\ 0.6(1 + 0.4 + 0.4^2 + 0.4^3), & 3 \le x < 4 \\ 1 & x \ge 4 \end{cases}$$


F(x)
1
0
1
2
3
4
x

常见的离散型随机变量的分布

(1) 0 – 1 分布

$X = xk$	1	0
Pk	p	$1 - p$

$0 < p < 1$

应用场合 凡是随机试验只有两个可能的结果，常用0 – 1分布描述，如产品是否格、人口性别统计、系统是否正常、电力消耗是否超负荷等等.

注 其分布律可写成

$$P(X = k) = p^k (1 - p)^{1-k}, \quad k = 0,1$$

(2) 二项分布 $B(n,p)$

背景：n 重Bernoulli 试验中，每次试验感兴趣的事件A 在 n 次试验中发生的次数 —— X 是一离散型随机变量

若$P(A)=p$，则

$$P_n(k)=P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\boxed{?},n$$

称 X 服从参数为n,p 的二项分布，记作

$$X \sim B(n,p)$$

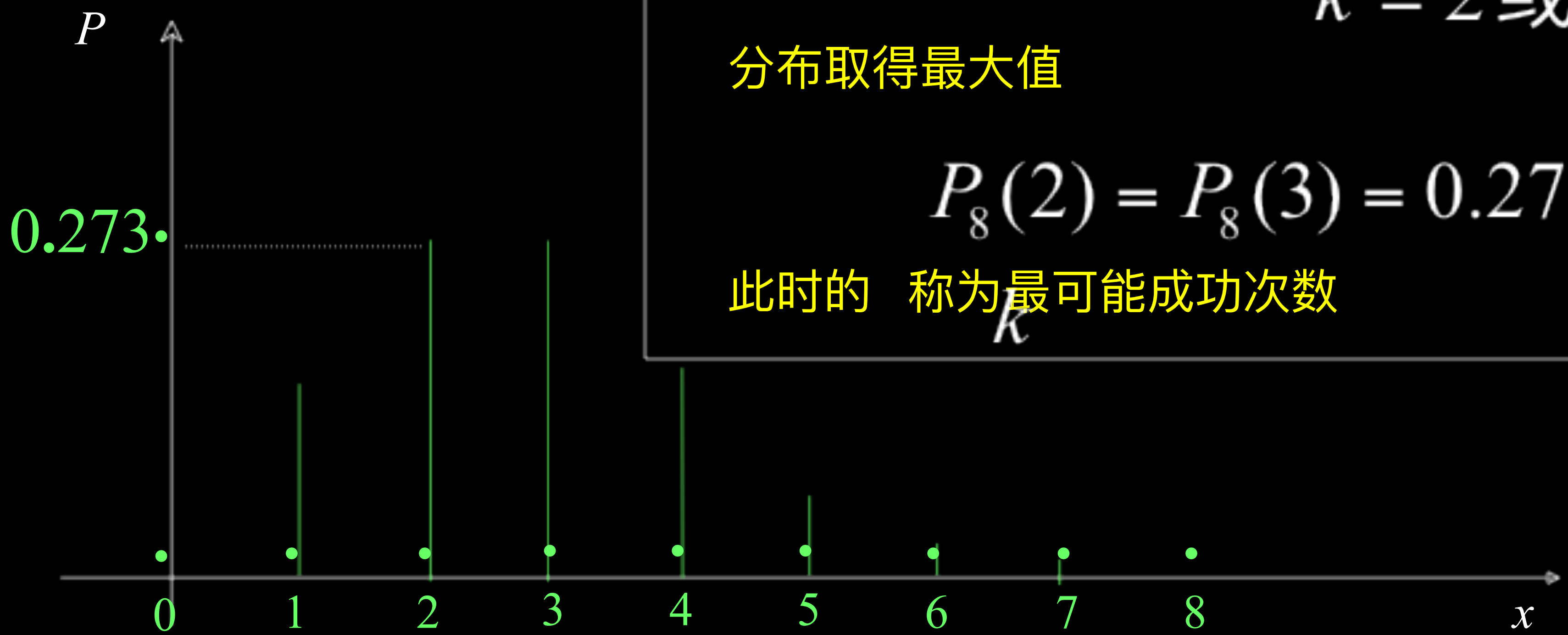
$0-1$ 分布是 $n=1$ 的二项分布

二项分布的取值情况

设 $X \sim B(8, 1/3)$

$$P_8(k) = P(X = k) = C_8^k (1/3)^k (1 - 1/3)^{8-k}, \quad k = 0, 1, \boxed{?}, 8$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
.039	.156	.273	.273	.179	.068	.017	.0024	.0000



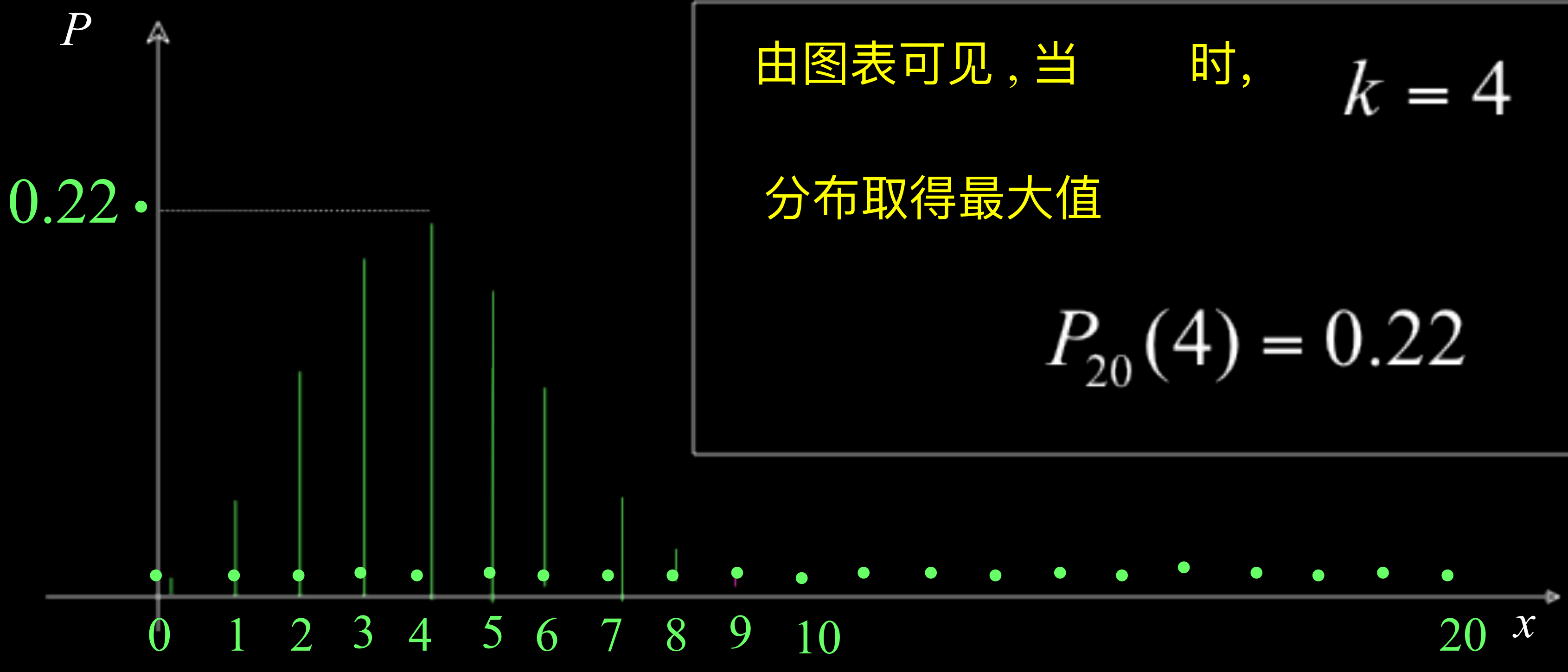
由图表可见，当 $k = 2$或3 时，分布取得最大值

$$P_8(2) = P_8(3) = 0.273$$

此时的 k 称为最可能成功次数

设 $X \sim B(20, 0.2)$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 ~ 20
.01	.06	.14	.21	.22	.18	.11	.06	.02	.01	.002	< .001



由图表可见，当 $k = 4$ 时，

分布取得最大值

$$P_{20}(4) = 0.22$$

二项分布中最可能出现次数的定义与推导

自己完成!

结论

当$(n+1)p =$ 整数时，在 $k=[(n+1)p]$与 $[(n+1)p]-1$ 处的概率取得最大值

当$(n+1)p$ □ 整数时，在 $k=[(n+1)p]$ 处的概率取得最大值

例2 独立射击5000次，每次的命中率为0.001，

求 (1) 最可能命中次数及相应的概率；

(2) 命中次数不少于2 次的概率.

解 (1) $k=[(n+1)p]=[(5000+1)0.001]=5$

$$P_{5000}(5)=C_{5000}^{5}(0.001)^{5}(0.999)^{4995}\approx 0.1756$$

(2) 令X表示命中次数，则 $X\sim B(5000,0.001)$

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-P(X=0)-P(X=1)$$

$$=1-\sum_{k=0}^{1}C_{5000}^{k}(0.001)^{k}(0.999)^{5000-k}$$

$$=0.9574$$

例2的启示?

小概率事件虽不易发生，但重复次数多了，就成大概率事件.

由此可见日常生活中“提高警惕, 防火防盗”的重要性.由于时间无限, 自然界发生地震、海啸、空难、泥石流等都是必然的，毫不奇怪.同样，人生中发生车祸、失恋、患绝症、考试不及格、炒股大亏损等都是十分正常的,大可不必怨天尤人，更不要想不开而跳楼自杀.

问题 如何计算 $P(X \geq 2500)$?

头痛

Possion 定理　设 $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$

则对固定的 k

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$k = 0,1,2,\boxed{?}$$

Poisson定理说明：若$X \sim B(n, p)$, 则当 n 较大，p 较小，而 $np = \lambda$ 适中，则可以用近似公式

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$k = 0,1,2,\boxed{?}$$

只能近似一个和项

前进一小步！

证　　记 $np_n = \lambda_n$

$$C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)\boxed{?}(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\boxed{?}\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\left(\frac{\lambda_n^{\ k}}{k!}\right)\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda_n}\cdot(-\lambda_n)\left(\frac{n-k}{n}\right)}$$

$$= e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad k = 1,2,\boxed{?}$$

结论

二项分布的极限分布是 Poisson 分布

MOOC自学：

从二项到Poisson

例3　设有同类型设备90台，每台工作相互独立，每台设备发生故障的概率都是 0.01. 在通常情况下，一台设备发生故障可由一个人独立维修，每人同时也只能维修一台设备.

请问3个人共同负责90台还是3个人各自独立负责30台设备发生故障不能及时维修的概率低?

解　(1) **设 X 为90 台设备中发生故障的台数**，则 $X \sim B(90, 0.01)$

则三个人负责90台设备发生故障不能及时维修的概率为

$$P(X>3) \approx \sum_{k=4}^{90} e^{-0.9}\frac{0.9^k}{k!} = 0.013459$$

(2) **设30台设备中发生故障的台数为**　$Y \sim B(30, 0.01)$

设 每个人独立负责30台设备，第 i 个人负责的30台设备发生故障不能及时维修为事件 A_i

则 $P(A_i)=P(Y\geq 2)\approx\sum_{k=2}^{\infty}e^{-0.3}\frac{0.3^k}{k!}=0.0369\quad i=1,2,3$

三个人各独立负责30台设备发生故障不能及时维修为事件

$$A_1\cup A_2\cup A_3$$

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-\prod_{i=1}^{3}P(\overline{A}_i)$$

$$=1-(1-0.0369)^3\approx 0.1067>0.013459$$

故 三个人共同负责90 台设备比各自负责好!

在Poisson 定理中，

$$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} > 0$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\boxed{?}\right) \\ &= e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1\end{aligned}$$

由此产生了一种离散型随机变量的概率分布

— **Poisson 分布**

(3) **Poisson 分布** $P(\lambda)$

若 $$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots$$

其中 $\lambda>0$ 是常数，则称 X 服从参数为 λ 的Poisson 分布，记作 $P(\lambda)$

应用场合

在一定时间间隔内：

电话总机接到的电话次数；
一匹布上的疵点个数；
大卖场的顾客数；
市级医院急诊病人数；
一个容器中的细菌数；
某一地区发生的交通事故的次数
放射性物质发出的粒子数；
一本书中每页印刷错误的个数；

都可以看作是源源不断出现的随机质点流，若它们满足一定的条件，则称为Poisson流，在

(4) **几何分布** ***Geo(p)***

(5) **几何帕斯卡分布** ***NB(r , p)***

作业 习题2

A组：2，5，7

B组：2

提高题 设一只昆虫所生虫卵数为随机变量 $X \sim P(\square)$, 每个虫卵发育成幼虫的概率为 p. 设各个虫卵是否能发育成幼虫是相互独立的. 求一只昆虫所生的虫卵发育成的幼虫数 Y 的概率分布.

解 昆虫 $\longrightarrow$ X个虫卵 $\longrightarrow$ Y个幼虫

已知

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\quad k=0,1,2,\boxed{?}$$

$$P(Y=m \mid X=k)=C_k^m p^m(1-p)^{k-m},$$

$$m=0,1,2,\boxed{?},k$$

$$(Y=m)\subset \boxed{?}_{k=m}^{\infty}(X=k),\quad m=0,1,2,\boxed{?}$$

$$(X=k)\cap(X=l)=\varnothing,\quad k\neq l$$

由全概率公式

$$P(Y=m)=\sum_{k=m}^{\infty}P(X=k)P(Y=m|X=k)$$

$$=\sum_{k=m}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}C_k^m p^m(1-p)^{k-m}$$

$$=e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^m}{m!}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\lambda^{k-m}}{(k-m)!}(1-p)^{k-m}$$

$$\overset{\text{令}k-m=s}{=}e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^m}{m!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\lambda^s}{s!}(1-p)^s$$

$$=e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^m}{m!}e^{\lambda(1-p)}=e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^m}{m!}$$

$$m=0,1,2,\cdots$$

故 $Y\sim P(\lambda p)$