将$\frac{dV}{dt}=2\ m^3/min$，$h=3\ m$代入得

$$\frac{dh}{dt}=\frac{4}{\pi(3)^2}\cdot 2=\frac{8}{9\pi}\approx 0.28(m/min).$$

总习题二

$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

1. 填空：

(1) 设对任意的 x，都有 $f(-x)=f(x)$，且 $f'(-x_0)=-k\neq 0$，则 $f'(x_0)$ = <u>k</u>.

(2) 函数 $f(x)=x|\sin x|$在点 $x=0$ 处的导数为 <u>0</u>. $\left.\sin x\cdot x\cos x\right|_{x=0}=0.$

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\geq 0,\\ 2x, & x<0,\end{cases}$ 则 $f'(x)$ = $\begin{cases}\cos x & x>0\\ 2 & x<0\end{cases}$.

(4) 设 $y=f(\sec x)$，且 $f'(x)=x$，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}$ = $\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ 2. $f(\sec x)\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ $\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(5) 在横坐标 x = $-\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$ 处曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=x^3$ 的切线相互垂直.

(6) 若 $f'(0)=1$，则极限 $\lim\limits_{-h\to 0}\frac{f(0)-f(-h)}{3h}$ = $\frac{1}{3}$ $\frac{f(0-h)-f(0)}{-h}\cdot\frac{1}{3}$

(7) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{1+x^{2n}}$，则 $f'(0)$ = $\cancel{0}$ 1

$f(x)=\begin{cases}\cdots\\ x & |x|<1\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}\cdots\\ 1 & |x|<1\end{cases}$

(8) 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 不存在的最小整数 n 是 <u>3</u>.

n:	0	1	2	3
	$\begin{cases}4x^3\\ 2x^3\end{cases}$	$\begin{cases}12x^2\\ 6x^2\end{cases}$	$\begin{cases}24x\\ 12x\end{cases}$	$\begin{cases}24\\ 12\end{cases}$

2. 若 $f(x)$ 在点 x_0 处有导数，而 $g(x)$ 在点 x_0 处导数不存在，则 $F(x)=f(x)g(x)$ 在点 x_0 处(C).

(A) ~~一定有导数~~ (B) 一定没有导数

(C) 导数可能存在 (D) ~~一定连续~~但导数不存在

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{|x^2-1|}{x-1}, & x\neq 1,\\ 2, & x=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x+1 & x>1\\ -(x+1) & x<1\end{cases}$ 则在 $x=1$ 处函数 $f(x)$ ($\cancel{B}$ A).

(A) 不连续 (B) 连续，但不可导

(C) 可导，但导数不连续 (D) 可导，且导数连续

4. 设 $f(x)$ 是奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则 $x=0$ 是 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$ 的(A).

(A) 无穷型间断点 (B) 可去间断点

(C) 连续点 (D) 振荡间断点

$f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0}$ 存在

$\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{-x\to 0^+}\frac{f(-x)}{-(-x)}=\lim\limits_{-x\to 0^+}\frac{-f(-x)}{-(-x)}=\lim\limits_{-x\to 0^+}\frac{f(-x)}{-x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}$

$(f^2(x))'=2f(x)f'(x)$

5. 设 $f(x)$ 可导，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f^2(x+\Delta x)-f^2(x)}{\Delta x}$ =(D).

(A) 0 (B) $2f(x)$

(C) $2f'(x)$ (D) $2f(x)f'(x)$

6. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，对于函数

$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ 确定 a 的值，使 $g(x)$ 在 $x=0$ 连续.

7. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1-e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x^2)}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

9. 在什么条件下，函数 $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$

(1) 在点 $x=0$ 处连续；(2) 在 $x=0$ 处可导；(3) 在点 $x=0$ 处导数连续.

10. 求下列函数的导数 y'：

(1) $y=\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$；(2) $y=\cos^2 x^3$；

(3) $y=\arctan\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$；(4) $y=\frac{1}{[\arcsin(1-x)]^2}$；

(5) $y=x^{x^x}+x^x+x$；(6) $y=a^{x^x}+x^{a^x}+x^{x^a}$；

(7) 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$，求 $f'(0)$.

11. 已知函数 $y=e^{ax}\sin bx(b\neq 0)$ 对一切 x 均满足方程 $y''+y'+y=0$，求实数 a，b.

12. 设 $\varphi(u)$ 为二阶可导函数，且 $y=\ln[\varphi(x^2)]$，求 y''.

13. 求与直线 $2x-6y+1=0$ 垂直且与曲线 $y=x^3+3x^2-5$ 相切的直线方程.

14. 在哪一点，抛物线 $y=x^2-2x+5$ 的切线与第一象限的分角线垂直?

15. (1) 求曲线 $y=\frac{x^2+1}{x+1}$ 上点 $(1,1)$ 处的切线方程；

(2) 设这条切线与 x 轴，y 轴的交点分别是 A，B，坐标原点是 O，求 $\triangle OAB$ 的面积.

16. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可微，试以 $f(a)$ 与 $f'(a)$ 表示 $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2f(x)-a^2f(a)}{x-a}$.

17. 对于函数 $f(x)$，设 $f'(0)=2$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[f\left(\frac{3}{n}\right)-f(0)\right]^2$.

18. 设 $\begin{cases}x=2t+|t|,\\ y=5t^2+4t|t|,\end{cases}$ 求当 $t=0$ 时的导数 $\frac{dy}{dx}$.

19. 设可导函数对于任意 x_1，x_2，有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，且 $f'(0)=1$，试证 $f'(x)=f(x)$.

20. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义且在 $x=0$ 处连续，又对任意 x_1，x_2 均有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$.

(1) 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续；

(2) 又设 $f'(0)=a$(常数)，证明 $f(x)=ax$.

21. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ ax^2+bx+c, & x\geq 0.\end{cases}$ 确定 a，b，c，使 $f''(0)$ 存在.

22. 设函数 $f(1+x)=af(x)$，且 $f'(0)=b(a,b\neq 0)$，问 $f'(1)$ 是否存在? 若存在求其值.

23. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，对任意 $x,y\in(-\infty,+\infty)$ 均有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$，且 $f'(0)=1$，求 $f'(x)$.

24. 已知函数 $f(x)$ 可导，且对任何实数 x，y 满足 $f(x+y)=e^xf(y)+e^yf(x)$，且 $f'(0)=e$，证明 $f'(x)=f(x)+e^{x+1}$.

25. 求直线方程，使它与曲线 $(y-2)^2=x+5$ 相切，并与该曲线在点 $(-4,3)$ 处的切线垂直.

26. 在 (a,b) 内 $f(x)$ 有定义，且对区间内任意 x_1，x_2 恒有 $|f(x_2)-f(x_1)|\leq(x_2-x_1)^2$. 求证：$f(x)$ 在该区间内是一个常数.

27. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)=0$，$f'(a)f'(b)>0$，试证方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少存在一个实根.