韩昊辰 20214272

周一

作业：P85:1,4,7,8,11,12
P92:4,5,8,12,14,16(3)

1. 若曲线 $x=\ln(1+t^2)$，$y=\arctan t$，$z=t^3$ 在点 $\left(\ln 2,-\frac{\pi}{4},-1\right)$ 处的一个切向量与 Ox 轴正向夹角为锐角，求此向量与 Oy 轴正向夹角的余弦.

切向量 $\vec{n}=(x'(t),y'(t),z'(t))$

$=\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1}{1+t^2},3t^2\right)$

该点的参数 $t_0=-1$

$\therefore$ 代入 $\vec{n}=(-1,\frac{1}{2},3)$

$\because$ 切向量与 $\vec{Ox}$ 夹锐角

$\therefore$ 取 $\vec{n'}=-2\vec{n}=(2,-1,-6)$

此时 $\cos\langle\vec{n'},(1,0,0)\rangle=\frac{2}{\sqrt{4+1+36}}>0$

则 $\cos\theta=\frac{\vec{n'}\cdot(0,1,0)}{|\vec{n'}|}=\frac{-1}{\sqrt{41}}=-\frac{\sqrt{41}}{41}$

4. 若曲线 $\begin{cases}x^2-y^2-z=0,\\x^2+2y^2+z^2=3\end{cases}$ 在点 $(1,-1,0)$ 处的切向量与 y 轴正向成钝角，求它与 x 轴正向夹角的余弦.

设切向量 $\vec{s}=\begin{vmatrix}i&j&k\\2x&-2y&-1\\2x&4y&2z\end{vmatrix}_{(1,-1,0)}=\begin{vmatrix}i&j&k\\2&2&-1\\2&-4&0\end{vmatrix}=(-4,-2,-12)$

$-2,-1,-6$

$\because \cos\langle\vec{s},(0,1,0)\rangle<0$

$\therefore \cos\theta=\cos\langle\vec{s},(1,0,0)\rangle=\frac{-2}{\sqrt{41}}$

7. 求点 $(1,-2,-5)$ 到双叶双曲面 $x^2-2y^2-4z^2=4$ 在点 $(4,2,-1)$ 处切平面的距离.

法向量 $\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)$

$=(2x,-4y,-8z)_{(4,2,-1)}$

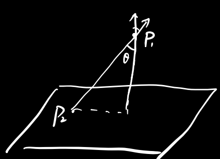
$=(8,-8,8)$

故切平面为：$(x-4)-(y-2)+(z+1)=0$

$\therefore d=|\vec{P_2P_1}|\cdot\cos\theta$

$=|\vec{P_2P_1}|\cdot\cos\langle\vec{P_2P_1},\vec{n}\rangle$

$=|\vec{P_2P_1}|\cdot\frac{\vec{P_2P_1}\cdot\vec{n}}{|\vec{P_2P_1}||\vec{n}|}$



$P_1=(1,-2,-5)$ $P_2:(4,2,-1)$

$\therefore d=\frac{(3,4,4)\cdot(1,-1,1)}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

8. 求旋转抛物面 $z=2x^2+2y^2$ 在点 $\left(-1,\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$ 处的切平面和法线方程.

设法向量 $\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)$

$=(4x,4y,-1)_{(-1,\frac{1}{2},\frac{5}{2})}$

$=(-4,2,-1)$

$\therefore$ 切平面为：$-4(x+1)+2(y-\frac{1}{2})-(z-\frac{5}{2})=0$

法线方程为：$\frac{x+1}{-4}=\frac{y-\frac{1}{2}}{2}=\frac{z-\frac{5}{2}}{-1}$

11. 求曲面 $x^2-y^2-z^2+6=0$ 垂直于直线 $\frac{x-3}{2}=y-1=\frac{z-2}{-3}$ 的切平面方程.

设该切平面在曲面上的切点为 $P(x_0,y_0,z_0)$

设法向量 $\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)$

$=(2x,-2y,-2z)_{(x_0,y_0,z_0)}$

$=(2x_0,-2y_0,-2z_0)$

易知：$\vec{n}\parallel\vec{l}\Rightarrow(2x_0,-2y_0,-2z_0)\parallel(2,1,-3)$

$\Rightarrow$ 取 $\begin{cases}x_0=t\\y_0=-\frac{1}{2}t\\z_0=\frac{3}{2}t\end{cases}$ $(t\neq0)$

又 $x_0^2-y_0^2-z_0^2+6=0\Rightarrow t^2-\frac{t^2}{4}-\frac{9}{4}t^2+6=0\Rightarrow t=\pm2$

故切平面方程为：$2t(x-t)+t(y+\frac{1}{2}t)-3t(z-\frac{3}{2}t)=0$.

$\Rightarrow\begin{cases}t=2 & 2(x-2)+(y+1)-3(z-3)=0\\t=-2 & 2(x+2)+(y-1)-3(z+3)=0\end{cases}$

12. 求曲面 $4x^2+y^2+4z^2=16$ 在点 $(1,2\sqrt{2},-1)$ 处的法线方程，并求此法线在 yz 平面上的投影.

设法向量 $\vec{n}=(8x,2y,8z)_{(1,2\sqrt{2},-1)}$

$=(8,4\sqrt{2},-8)$

则法线为：$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{z+1}{-2}$

投影为：$\begin{cases}z=-\sqrt{2}y+3\\x=0\end{cases}$

4. 求函数 $u=x^2+2y^2-z$ 在点 $M_0(1,2,9)$ 处沿过该点等值面法线方向的方向导数.

即沿该点梯度方向的方向导数.

梯度向量 $\vec{e}=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=(2x,4y,-1)_{(1,2,9)}=(2,8,-1)$

单位化 $l=\left(\frac{2}{\sqrt{69}},\frac{8}{\sqrt{69}},\frac{-1}{\sqrt{69}}\right)$

$\frac{\partial u}{\partial l}(1,2,9)=\frac{4}{\sqrt{69}}+\frac{64}{\sqrt{69}}+\frac{1}{\sqrt{69}}=\sqrt{69}$

5. 求函数 $u=\sqrt{x^2+2y^2+3z^2}$ 在点(1,1,4)处沿曲线 $\begin{cases}x=t,\\ y=t^2,\\ z=3t^3+1\end{cases}$ 在该点切线方向的方向导数.

设切向量 $\vec{s}=(t,2t,9t^2)_{(t=t_0=1)}$

$=(1,2,9)$

单位化 $\vec{e}=\left(\frac{1}{\sqrt{86}},\frac{2}{\sqrt{86}},\frac{9}{\sqrt{86}}\right)$

又 $\mathrm{grad}\,u=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2y^2+3z^2}},\frac{2y}{\sqrt{x^2+2y^2+3z^2}},\frac{3z}{\sqrt{x^2+2y^2+3z^2}}\right)_{(1,1,4)}$

$=\left(\frac{1}{\sqrt{51}},\frac{2}{\sqrt{51}},\frac{12}{\sqrt{51}}\right)$

$\therefore \frac{\partial u}{\partial \vec{e}}(1,1,4)=\frac{113}{\sqrt{4386}}$

$\frac{\partial u}{\partial(-\vec{e})}(1,1,4)=\frac{-113}{\sqrt{4386}}$

8. 求函数 $u=x+2y+3z$ 在点(1,1,1)处沿曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0,\\ 2x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 切线方向的方向导数.

设切向量 $\vec{s}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2x-3 & 2y & 2z\\ 2 & -3 & 5\end{vmatrix}_{(1,1,1)}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & 2 & 2\\ 2 & -3 & 5\end{vmatrix}=(16,9,-1)$

单位化 $\vec{e}=\left(\frac{16}{\sqrt{338}},\frac{9}{\sqrt{338}},\frac{-1}{\sqrt{338}}\right)$

$\mathrm{grad}\,u=(1,2,3)$

$\therefore \frac{\partial u}{\partial \vec{e}}(1,1,1)=\frac{31}{\sqrt{338}}=\frac{31}{13\sqrt{2}}$

$\frac{\partial u}{\partial(-\vec{e})}(1,1,1)=\frac{-31}{\sqrt{338}}=-\frac{31}{13\sqrt{2}}$

12. 求函数 $u=e^{-2y}\ln(x+z)$ 在点(e,1,0)沿曲面 $z=x^2-e^{3y-1}$ 法线方向的方向导数.

设法向量 $\vec{n}=(2x,-3e^{3y-1},-1)_{(e,1,0)}=(2e,-3e^2,-1)$

单位化得 $\vec{e}=\left(\frac{2e}{\sqrt{4e^2+9e^4+1}},\frac{-3e^2}{\sqrt{4e^2+9e^4+1}},\frac{-1}{\sqrt{4e^2+9e^4+1}}\right)$

$\mathrm{grad}\,u=\left(\frac{e^{-2y}}{x+z},-2e^{-2y}\ln(x+z),\frac{e^{-2y}}{x+z}\right)_{(e,1,0)}$

$=(e^{-3},-2e^{-2},e^{-3})$

$\therefore \frac{\partial u}{\partial \vec{e}}(e,1,0)=\frac{2e^{-2}}{\sqrt{4e^2+9e^4+1}}+\frac{6}{\sqrt{4e^2+9e^4+1}}-\frac{e^{-3}}{\sqrt{4e^2+9e^4+1}}$

$=\frac{2e^{-2}+6-e^{-3}}{\sqrt{4e^2+9e^4+1}}$

$\frac{\partial u}{\partial(-\vec{e})}(e,1,0)=\frac{-(2e^{-2}+6-e^{-3})}{\sqrt{4e^2+9e^4+1}}$

14. 求函数 $u=xy^2z^3$ 在点(1,1,1)的梯度.

$\mathrm{grad}\,u=(y^2z^3,2xyz^3,3xy^2z^2)_{(1,1,1)}=(1,2,3)$

16. 设函数 u,v 具有一阶连续偏导数. 证明:

(3) $\mathrm{grad}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,\mathrm{grad}\,u-u\,\mathrm{grad}\,v}{v^2}$;

$\mathrm{grad}\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{\partial\frac{u}{v}}{\partial x},\frac{\partial\frac{u}{v}}{\partial y},\frac{\partial\frac{u}{v}}{\partial z}\right)$

$=\left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x}v-\frac{\partial v}{\partial x}u}{v^2},\frac{\frac{\partial u}{\partial y}v-\frac{\partial v}{\partial y}u}{v^2},\frac{\frac{\partial u}{\partial z}v-\frac{\partial v}{\partial z}u}{v^2}\right)$

$=\frac{1}{v^2}\left[v\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)-u\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]$

$=\frac{v\,\mathrm{grad}\,u-u\,\mathrm{grad}\,v}{v^2}$

作业. 周三. P100. 1.2

1. 求下列函数的极值:

(1) $z=6xy-x^3-2y^2+10$;

$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=6y-3x^2=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=6x-4y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=3\\ y=\frac{9}{2}\end{cases}\end{cases}$

$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-6x \quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6 \quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-4$

1° $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ $A=0$ $B^2-AC=36>0$

故 $z(0,0)$ 不是极值

2° $\begin{cases}x=3\\ y=\frac{9}{2}\end{cases}$ $A=-18<0$ $B^2-AC=-36<0$

故 $z(3,\frac{9}{2})$ 是极大值, 为 23.5

(2) $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$.

$f_x=2e^{2x}(x+y^2+2y)+e^{2x}=e^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0$ ①

$f_y=2e^{2x}y+2e^{2x}=2e^{2x}(y+1)=0$ ②

①,②联立: $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=-1\end{cases}$

$A=f''_{xx}=e^{2x}(4x+4y^2+8y+2+2)\Big|_{\substack{x=\frac{1}{2}\\ y=-1}}=2e$

$B=f''_{xy}=8e^{2x}y+8e^{2x}\Big|_{\substack{x=\frac{1}{2}\\ y=-1}}=0$

$C=f''_{yy}=2e^{2x}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=2e$

∵ $B^2-AC=-4e^2<0$ $\quad A>0$

∴ $f(\frac{1}{2},-1)$ 为极小值，为 $-\frac{1}{2}e$

2. 求下列函数的最值：

（1）$z=2x^2+3y^2$，D：$x^2+4y^2\leqslant 4$；

$\frac{\partial z}{\partial x}=4x=0 \Rightarrow x=0$

$\frac{\partial z}{\partial y}=6y=0 \Rightarrow y=0$.

故 $(0,0)$ 为驻点

在边界 $x^2+4y^2=4$ 上

$z=6-5y^2$

$\frac{dz}{dy}=-10y=0 \Rightarrow y=0$ 此时 $x=\pm 2$

$z(0,0)=0 \quad z(\pm 2,0)=8$

∴ z 最大值为8，最小值为0

（2）$z=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}$，$D$：$1\leqslant x\leqslant 10$，$1\leqslant y\leqslant 10$.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial z}{\partial x}=y-\frac{50}{x^2}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{20}{y^2}=0\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} y=2\\ x=5.\end{cases}$$

故 $(5,2)$ 为驻点，$z(5,2)=30$

在边界处：

$z(1,1)=71 \quad z(1,10)=62 \quad z(10,1)=35$

$z(10,10)=107$

∴ $z(5,2)$ 为最小值 $=30$，$z(10,10)$ 为最大值 $=107$

作业p101，4，6

p125，7，8

4. 在椭圆 $x^2+9y^2=4$ 的第一象限部分上求一点，使椭圆在该点的切线位于两坐标轴之间的一段长度为最短，并求最短长度.

设切点为 $(2\cos\theta,\frac{2}{3}\sin\theta)$ $(\theta\in(0,\frac{\pi}{2}))$

切线为：$2\cos\theta x+6\sin\theta y=4$

与x,y交点为：$(0,\frac{2}{3\sin\theta})$ $(\frac{2}{\cos\theta},0)$

$l^2=\frac{4}{\cos^2\theta}+\frac{4}{9\sin^2\theta}$

$=\left(\frac{4}{\cos^2\theta}+\frac{4}{9\sin^2\theta}\right)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$

$=4+\frac{4}{9}+\frac{4\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{4\cos^2\theta}{9\sin^2\theta}\geqslant 4+\frac{4}{9}+2\times\frac{4}{3}=\frac{64}{9}$

$l\geqslant\frac{8}{3}$，当且仅当 $\cos^4\theta=9\sin^4\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin\theta=\frac{1}{2}$，坐标：$(\sqrt{3},\frac{1}{3})$

6. 6. 在椭球面 $x^2+4y^2+16z^2=16$ 的第一卦限部分上求一点，使椭球面在该点处的切平面与三个坐标面所围成四面体的体积为最小.

设切点 (x_0,y_0,z_0) $\quad F(x,y,z)=x^2+4y^2+16z^2-16=0$

$(F_x,F_y,F_z)=(2x,8y,32z)_{(x_0,y_0,z_0)}=(2x_0,8y_0,32z_0)$

切平面：$2x_0(x-x_0)+8y_0(y-y_0)+32z_0(z-z_0)=0$

与x,y,z分别交于 $(0,0,\frac{2x_0^2+8y_0^2+32z_0^2}{32z_0})$，$(0,\frac{2x_0^2+8y_0^2+32z_0^2}{8y_0},0)$

$(\frac{2x_0^2+8y_0^2+32z_0^2}{2x_0},0,0)$

$V=\frac{1}{6}\cdot\frac{(2x_0^2+8y_0^2+32z_0^2)^3}{2x_0\cdot 8y_0\cdot 32z_0}=\frac{32}{3x_0y_0z_0}$

令 $G(x,y,z,\lambda)=\frac{32}{3xyz}+\lambda F(x,y,z)$

$$\begin{cases} G_x'=-\frac{32}{3yzx^2}+2\lambda x=0\\ G_y'=-\frac{32}{3xy^2z}+8\lambda y=0\\ G_z'=-\frac{32}{3xyz^2}+32\lambda z=0\\ x^2+4y^2+16z^2-16=0\end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x=\frac{4\sqrt{3}}{3}\\ y=\frac{2\sqrt{3}}{3}\\ z=\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

7. 根据二重积分的性质比较下列积分的大小.

（1）$\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$.

1° $x+y>1$，∵ $(x+y)^2<(x+y)^3$

∴ $\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma < \iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$

2° $x+y<1$，∵ $(x+y)^2>(x+y)^3$

∴ $\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma > \iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$

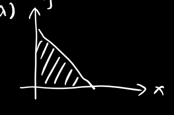
3° $x+y=1$ ∵ $(x+y)^2=(x+y)^3$

∴ $\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma = \iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$

（a）D 由直线 $x=0$，$y=0$，$x+y=1$ 所围成的闭区域；

（b）D 由圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成的闭区域.

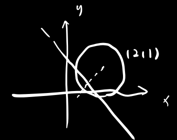
a)



易知：$x+y\leqslant 1$

∴ $\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma \geqslant \iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$

b).

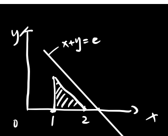


$(2,1)$ 到 $y=-x+1$ 的距离 $d=\sqrt{2}=r$.

∴ $x+y\geqslant 1$ ∴ $\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma \leqslant \iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$

(2) $\iint\limits_D \ln(x+y)\,\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\,\mathrm{d}\sigma$.

(a) D 是以点(1,0)，(1,1)，(2,0)为顶点的三角形闭区域；

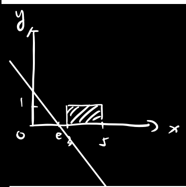


如图，$\forall (x,y)\in D$，$x+y<e$.

$\therefore \ln(x+y) > \ln^2(x+y)$

$\therefore \iint\limits_D \ln(x+y)\,d\sigma > \iint\limits_D \ln^2(x+y)\,d\sigma$

(b) $D=[3,5]\times[0,1]$.



如图，$\forall (x,y)\in D$，$x+y>e$.

$\therefore \ln(x+y) < \ln^2(x+y)$

$\therefore \iint\limits_D \ln(x+y)\,d\sigma < \iint\limits_D \ln^2(x+y)\,d\sigma$.

8. 利用二重积分的性质，估计下列积分的范围：

(1) $\iint\limits_D \sin^2 x \sin^2 y\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=[0,\pi]\times[0,\pi]$；

$0 \le \sin^2 x \sin^2 y \le 1$

$\therefore 0 \le \iint\limits_D \sin^2 x \sin^2 y\,d\sigma \le \pi^2$

(2) $\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为圆形闭区域：$x^2+y^2\leqslant 4$.

$0 \le x^2+4y^2+9 \le 4x^2+4y^2+9 \le 25$

$\therefore 0 \le \iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\,d\sigma \le 100\pi$