第四章 一阶电路和二阶电路

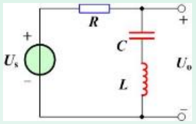
本章着重讨论一阶线性电路的

零输入响应

零状态响应

全响应

关键是掌握三要素法。



§4-1 一阶电路的零输入响应

一阶电路（first order circuit):

描述电路方程是一阶微分方程的电路，一般情况下电路中只含有一个储能元件。

一阶电路可分为:

- 一阶*RC*电路
- 一阶*RL*电路

零输入响应（zero input response r_{zi}）

换路后无输入激励的作用，电路中的响应是由储能元件的非零原始状态而引起的。

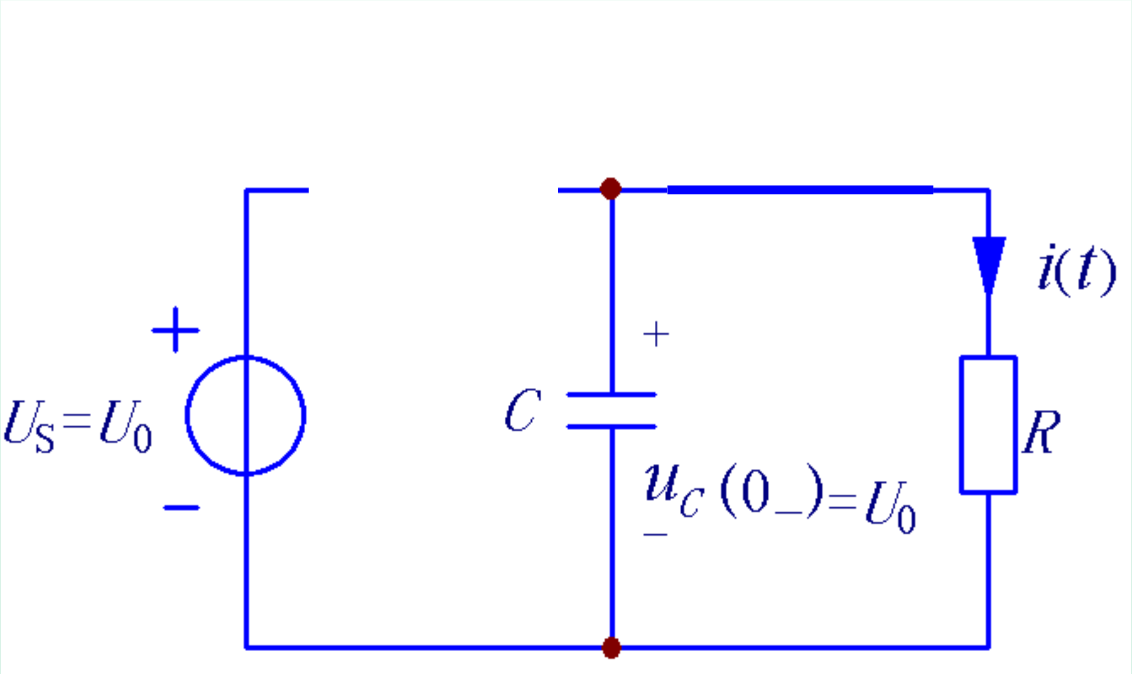
➢ 一阶*RC*电路的零输入响应

定性分析：

$u_c(0_+)=u_c(0_-)=U_0$　　　0

$i(0_-)=0$

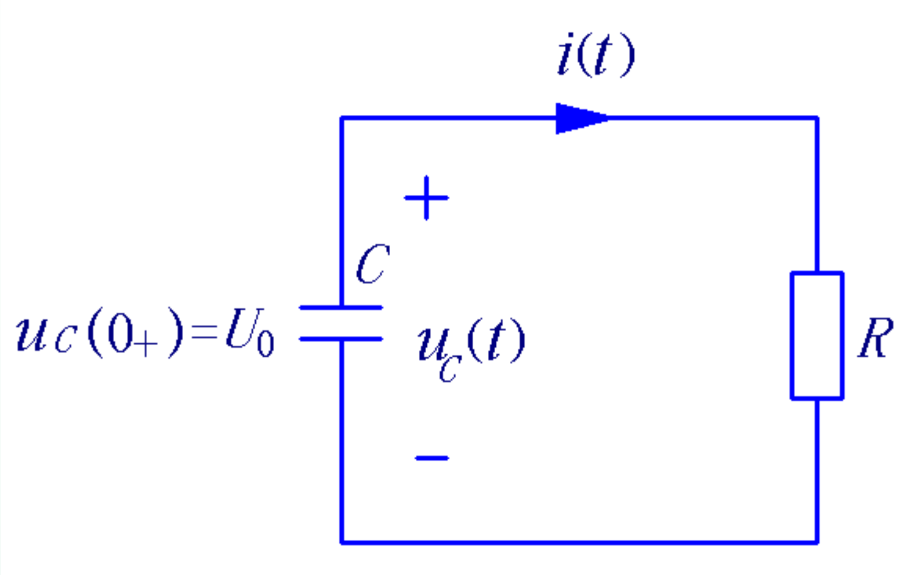
$i(0_+)=U_0/R$　　　0



带电电容的放电过程

从能量的观点说明

定量分析：



$t>0$时电路的微分方程

$$RC\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=0$$

$$u_c(0_+)=u_c(0_-)=U_0$$

特征方程为

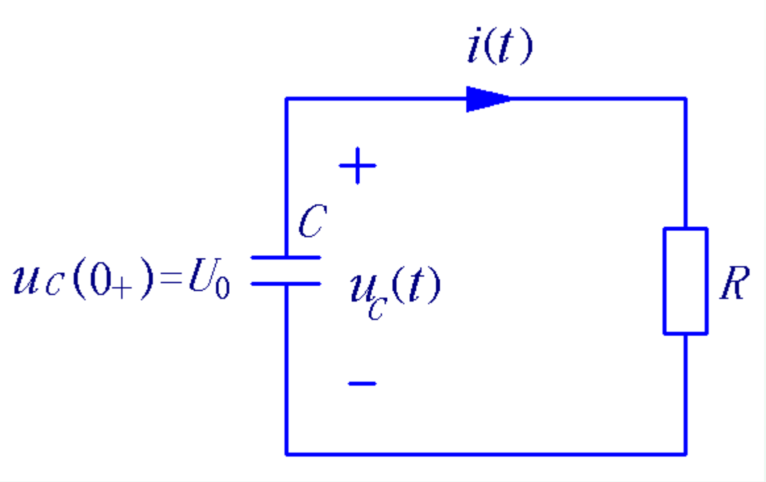
$$RCs+1=0$$

特征根为

$$s=-\frac{1}{RC}$$

通解为

$$u_c(t) = Ae^{st} = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$



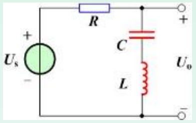
代入初始条件得 $A = U_0$

零输入响应

$$u_c(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geq 0_+$$

$$i(t) = \frac{u_c(t)}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geq 0_+$$

$$i(t) = -C\frac{du_c}{dt} = -C\frac{d}{dt}\left(U_0 e^{-\frac{t}{RC}}\right) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geq 0_+$$



电路原理

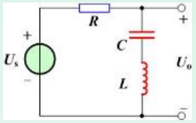
电路的时间常数(time constant)

$$\tau = RC \qquad (\text{单位：s})$$

1、 具有时间的量纲；

2、 由电路的结构和参数决定；

3、 同一个电路，不同的电压或电流响应的时间常数相同；

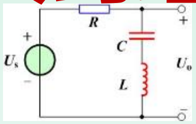


τ的物理意义：表示零输入响应衰减到原值的0.368倍所需的时间。

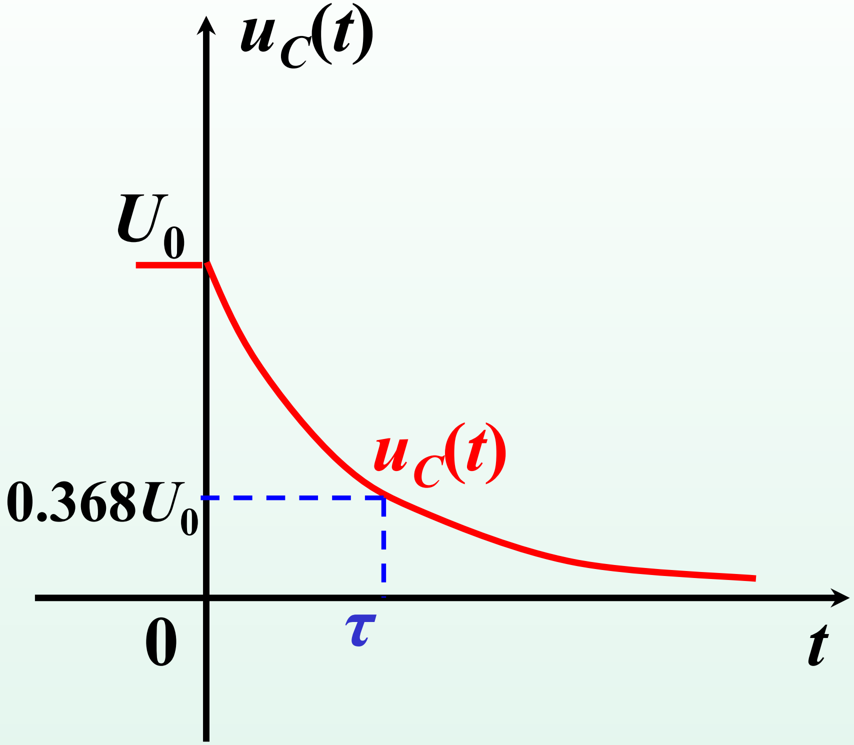
t	τ	2τ	3τ
$U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$	$U_0 e^{-1}=0.368U_0$	$U_0 e^{-2}=U_0 e^{-1} e^{-1}$ $=0.368\times0.368U_0$ $=0.135U_0$	$U_0 e^{-3}=U_0 e^{-1} e^{-2}$ $=0.368\times0.135U_0$ $=0.05U_0$

4τ	5τ
$U_0 e^{-4}=U_0 e^{-1} e^{-3}$ $=0.368\times0.05U_0$ $=0.0184U_0$	$U_0 e^{-5}=U_0 e^{-1} e^{-4}$ $=0.368\times0.0184U_0$ $=0.0068U_0$

时间常数 τ 愈小，放电过程进行得愈快，暂态过程需要的时间越短；反之， τ 愈大，放电过程进行得愈慢，暂态过程需要的时间越长。**工程上认为，大约经过4τ—5τ后暂态过程结束。**

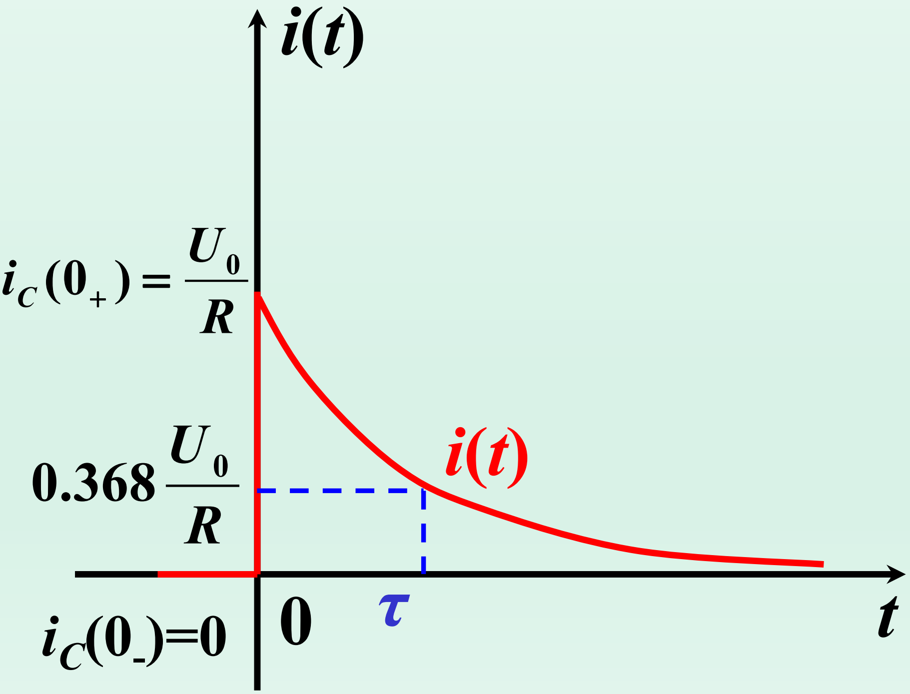


电路原理



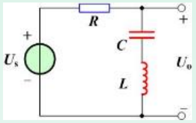
$$u_c(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geq 0_+$$

电压曲线



$$i(t) = \frac{u_c(t)}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geq 0_+$$

电流曲线



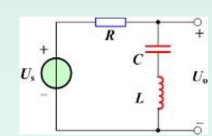
电路原理

讨论：

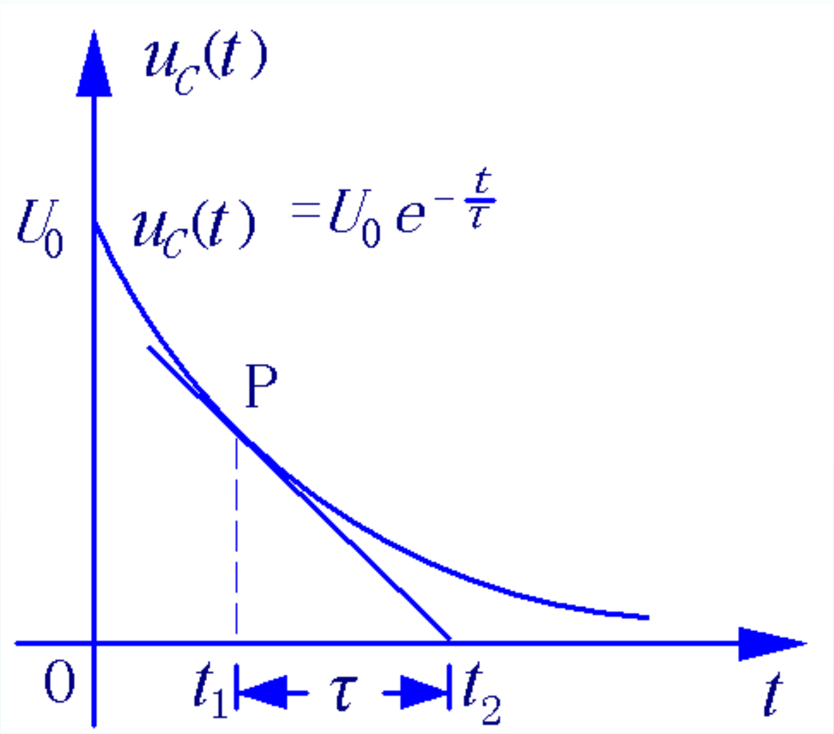
U_0一定的情况下：

C一定，q一定
- R大，i小，衰减越慢；
- R小，i大，衰减越快；

R一定，i一定
- C大，q大，衰减越慢；
- C小，q小，衰减越快；



时间常数的图解计算



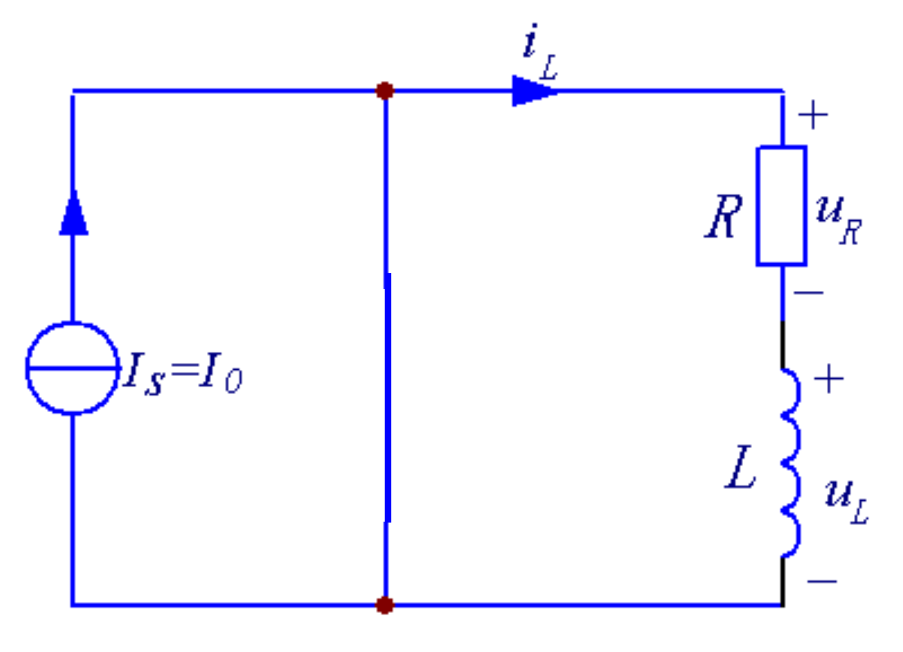
$$\left.\frac{du_c}{dt}\right|_{t=t_1} = \left.\frac{d}{dt}\left(U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right|_{t=t_1}$$

$$= -\frac{U_0}{\tau} e^{-\frac{t_1}{\tau}} = -\frac{u_c(t_1)}{\tau}$$

整个放电过程中电阻吸收的能量为

$$\int_0^\infty i^2(t) R\,dt = R\int_0^\infty \left(\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 dt = \frac{1}{2} C U_0^2 = W_C(0_+) = W_C(0_-)$$

➢一阶RL电路的零输入响应



定性分析：

$i_L(0_+)= i_L(0-)=I_0$ 　 0

$u_L(0_-)=0$

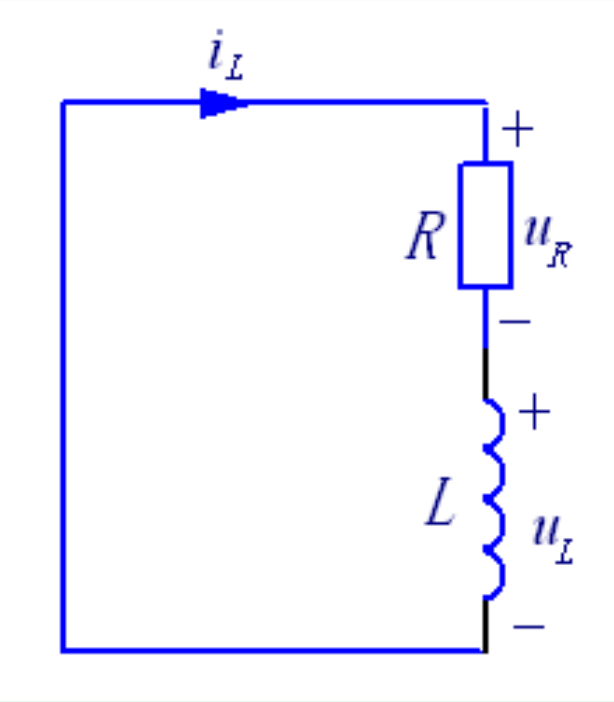
$u_L(0_+)= - u_R(0_+)=-RI_0$

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0_+} = \frac{u_L(0_+)}{L} = -\frac{RI_0}{L} < 0$$

磁场消失的过程　　　　从能量的观点解释

定量分析：

$t>0$时电路的微分方程



$$L\frac{di_L(t)}{dt}+Ri_L(t)=0$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=I_0$$

与一阶RC电路的微分方程比较

$$RC\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=0$$

$$\frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)=0$$

$$u_c(0_+)=u_c(0_-)=U_0$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=I_0$$

由置换对偶量可得

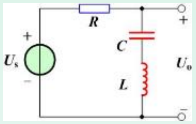
$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \qquad t \geq 0_+$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{R}{L}t} = -Ri_L(t) \qquad t \geq 0_+$$

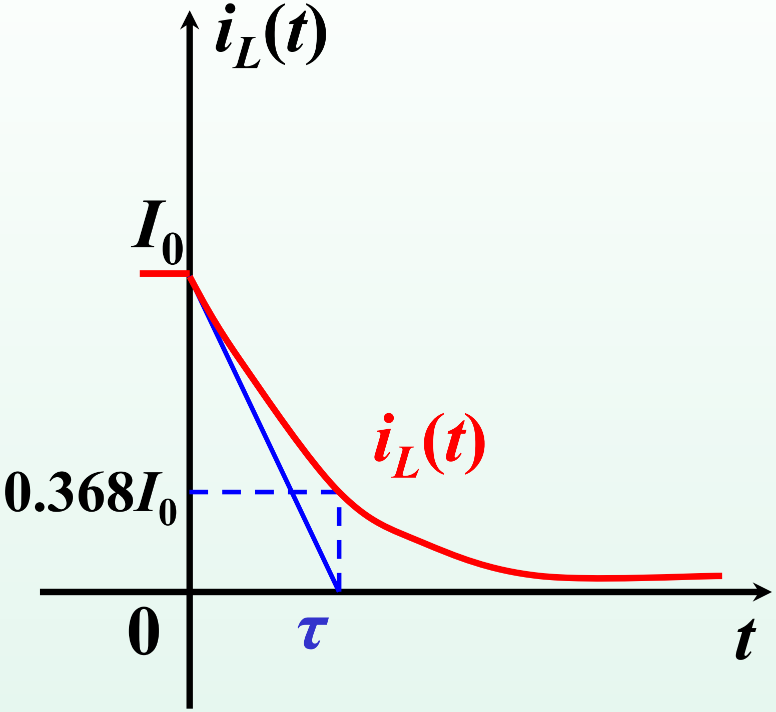
电路的时间常数

$$\tau = \frac{L}{R} = GL$$

*RL*电路和*RC*电路的时间常数也是对偶的。

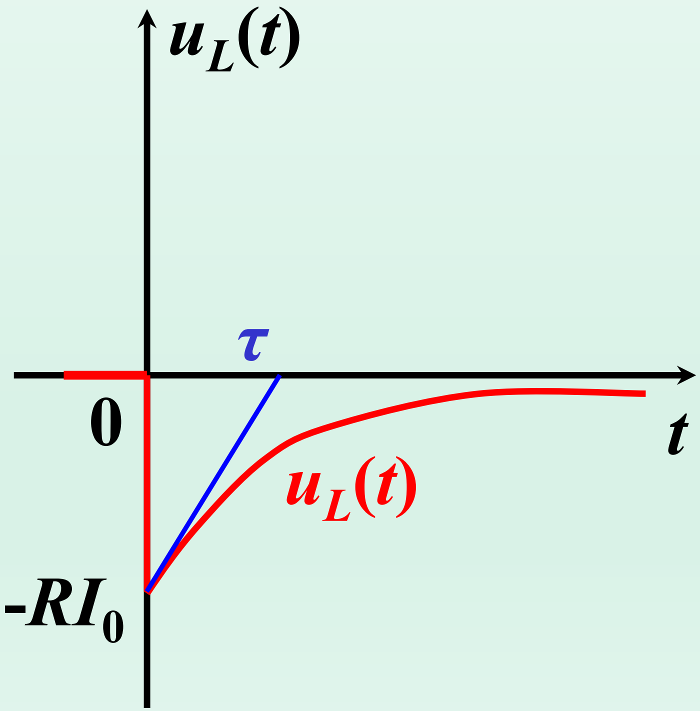


电路原理



$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \qquad t \ge 0_+$$

电流曲线



$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$= -RI_0 e^{-\frac{R}{L}t} = -Ri_L(t) \qquad t \ge 0_+$$

电感电压曲线

电路原理

小结：

一阶电路零输入响应的一般形式

$$r(t) = r(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t \geq 0_+$$

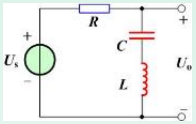
$$\tau = R_{eq}C \qquad \tau = L / R_{eq}$$

·只要求出了响应的初始值和电路的时间常数τ，就可根据此式写出电路的零输入响应。

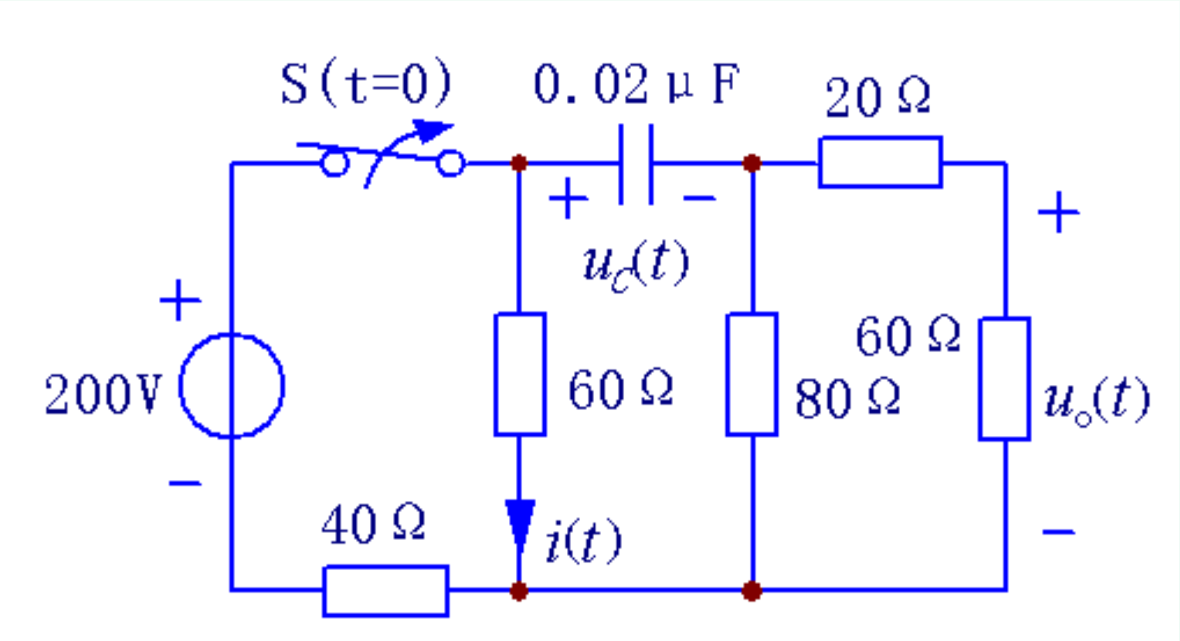
·同一电路中的不同变量具有相同的时间常数

·如电路的初始状态扩大k倍，则零输入响应也应扩大同样的倍数

插入动画



例1. 图示电路在换路前已工作了很长时间，求换路后的零输入响应$i(t)$和$u_o(t)$



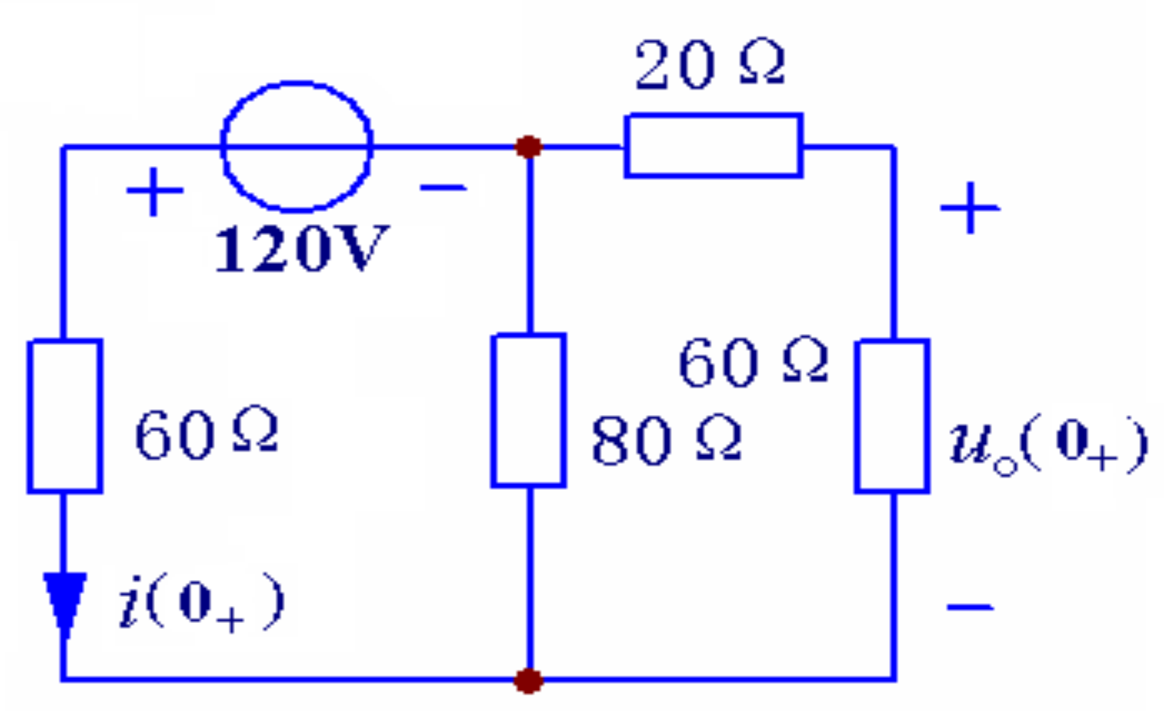
解：

1)

$$u_c(0_-)=\left(\frac{200}{60+40}\times 60\right)\text{V}=120\ \text{V}$$

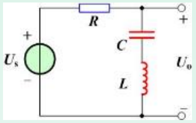
$$u_c(0_+)=u_c(0_-)=120\ \text{V}$$

2）$t=0_+$的电路

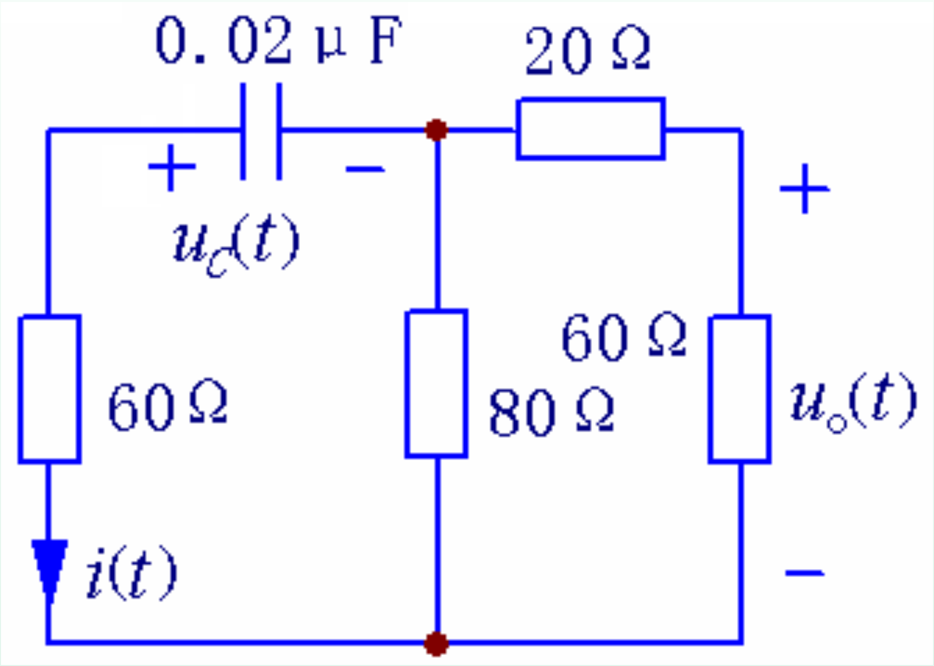


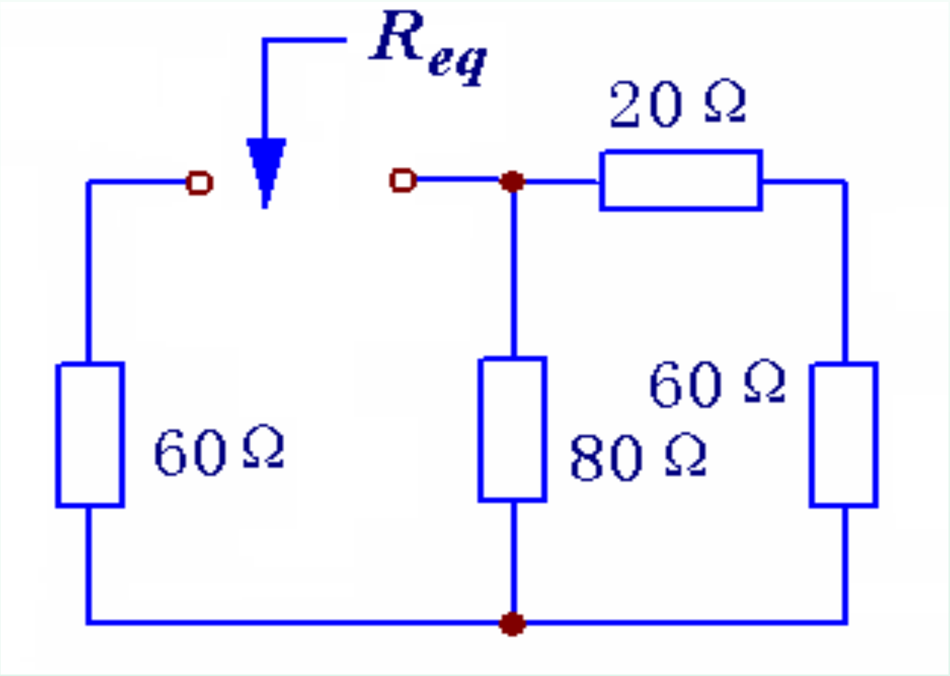
$$i(0_+)=\frac{120}{60+40}=1.2A$$

$$u_o(0_+)=-1.2\times 0.5\times 60=-36V$$



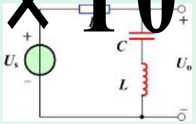
3）求τ





$$R_{eq} = 60 + 40 = 100\Omega$$

$$\tau = R_{eq}C = 100 \times 0.02 \times 10^{-6} = 2 \times 10^{-6} s$$

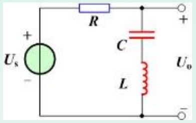


4）各零输入响应的表达式

$$i(t) = i(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 1.2 \times e^{-5\times10^5 t} A$$

$$u_o(t) = u_o(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = -36 \times e^{-5\times10^5 t} V$$

$$(t > 0_+)$$



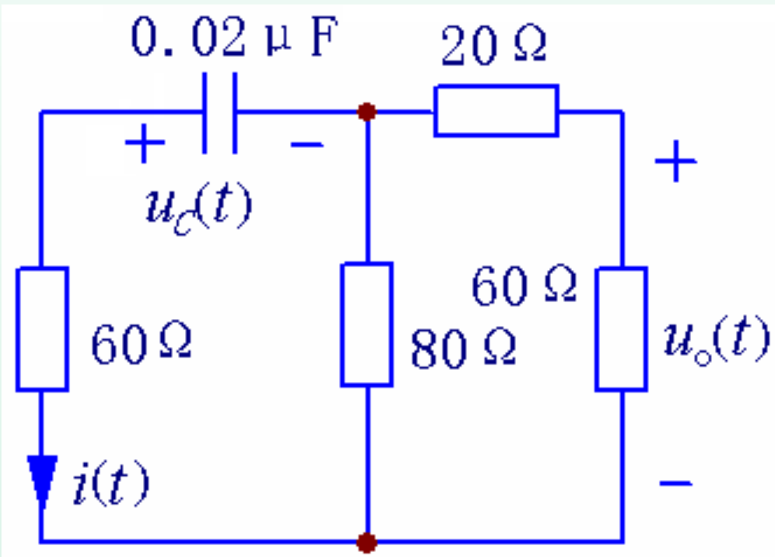
解二

1) $u_c(0_+) = u_c(0_-) = 120\ \text{V}$

2) $\tau = R_{eq}C = 2\times 10^{-6}\ s$

3) $u_C(t) = u_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 120\times e^{-5\times 10^5 t}\ V$

$(t \ge 0_+)$



$$u_o(t) = -0.5\times i(t)\times 60$$

$$= -36\times e^{-5\times 10^5 t}\ V$$

$(t \ge 0_+)$

$$i(t) = -C\frac{du_C(t)}{dt}$$

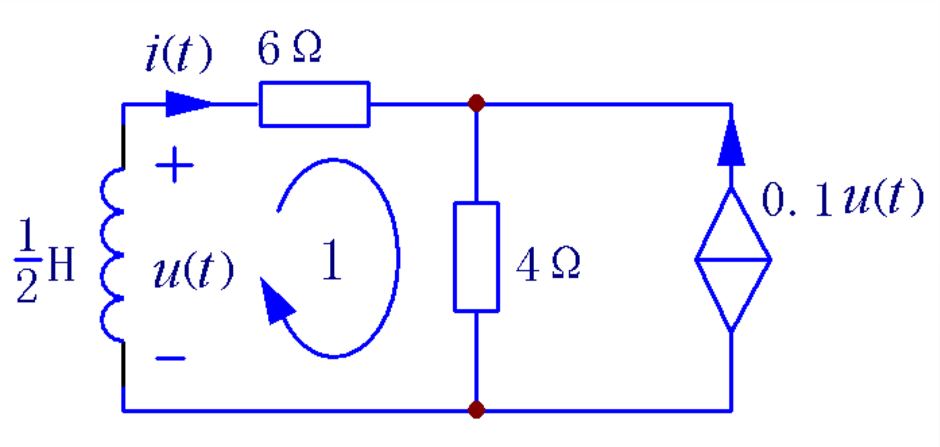
$$= -0.02\times 10^{-6}\times 120\times(-5\times 10^5)e^{-5\times 10^5 t}$$

$$= 1.2e^{-5\times 10^5 t}\ A$$

$(t \ge 0_+)$

电路原理

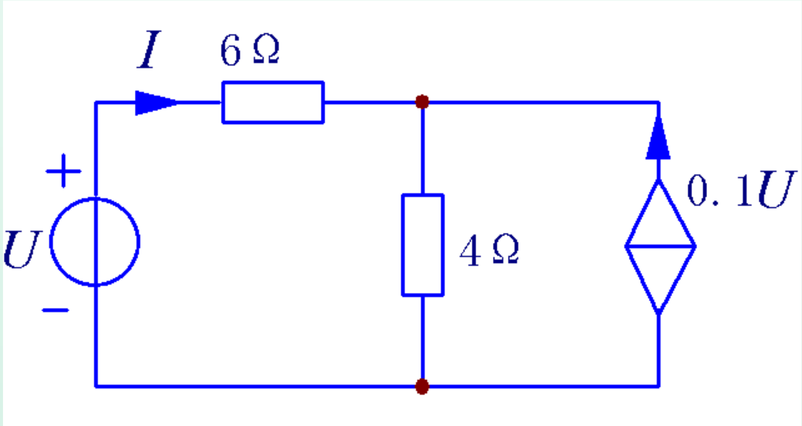
例2　在图示电路中，已知$i(0_+)$=150 mA，求$t>0$时的响应$u(t)$。



解法一见书上例4-1-2

解法二：

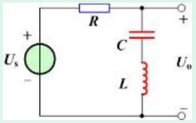
计算R_{eq}的电路



$$U = 6I + 4(I + 0.1U)$$

$$R_{eq} = \frac{U}{I} = \frac{50}{3}\Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = 0.03\ S$$

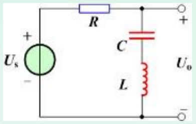


电感电流为

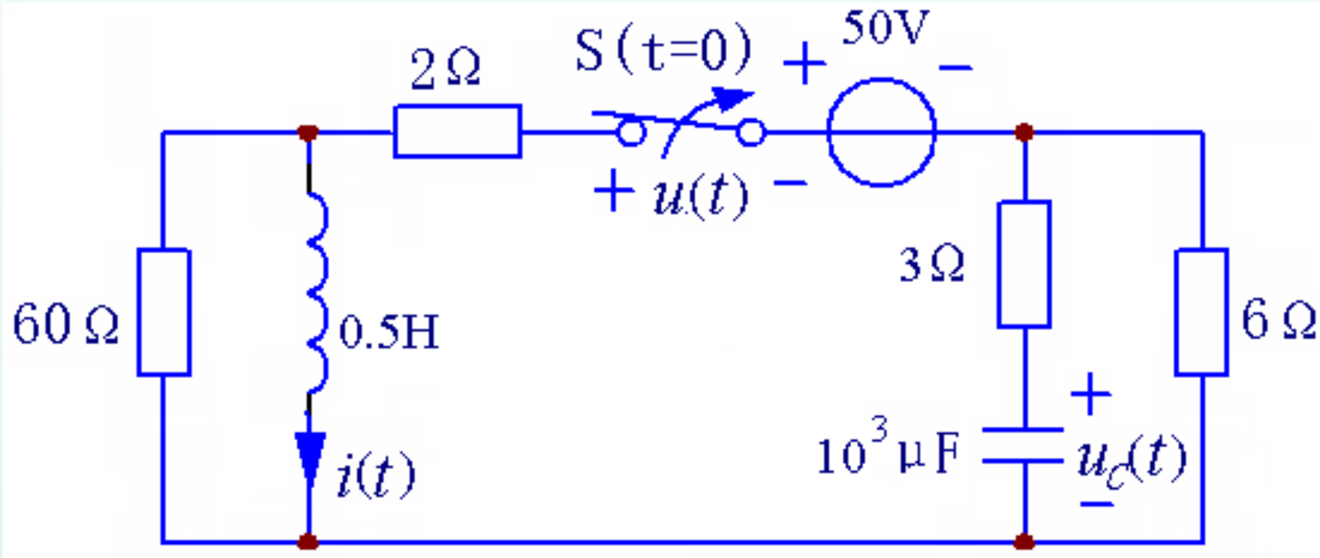
$$i_L = i_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 150e^{-\frac{100}{3}t}\ \mathrm{mA} \qquad t \geq 0_+$$

电感电压为

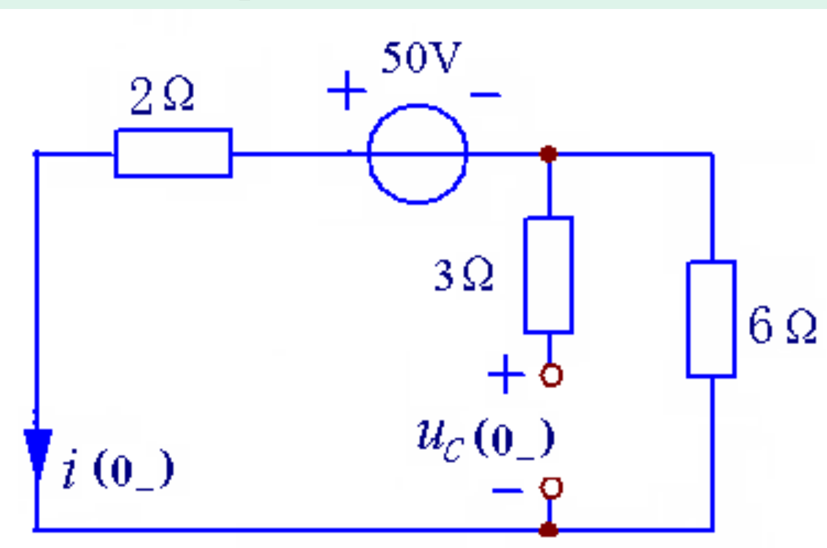
$$u(t) = -L\frac{di}{dt} = 2.5e^{-\frac{100}{3}t}\ \mathrm{V} \qquad t \geq 0_+$$



例3. 图示电路在换路前已工作了很长时间，求换路后的$u_c(t)$、$i(t)$和$u(t)$。



解:1） t=0-时



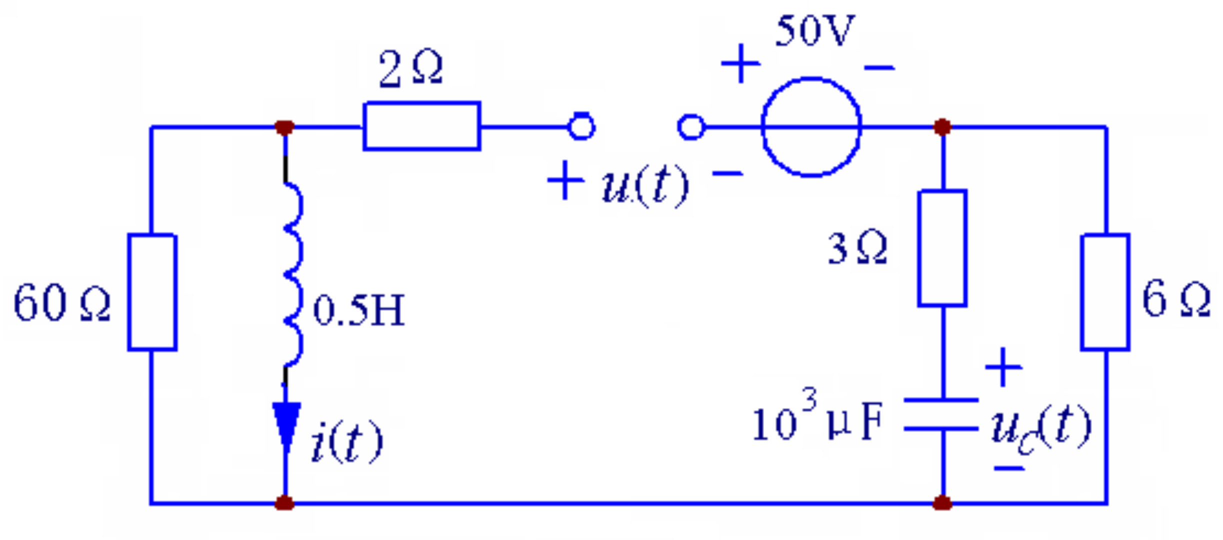
$$i(0\_)=\frac{50}{2+6}=6.25A$$

$$u_c(0\_)=-6\times 6.25=-37.5\text{ V}$$

2）由换路定则：

$$i(0_+) = i(0_-) = 6.25\,A \qquad u_c(0_+) = u_c(0_-) = -37.5\ \mathrm{V}$$

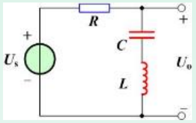
3）t≥0_+ 时



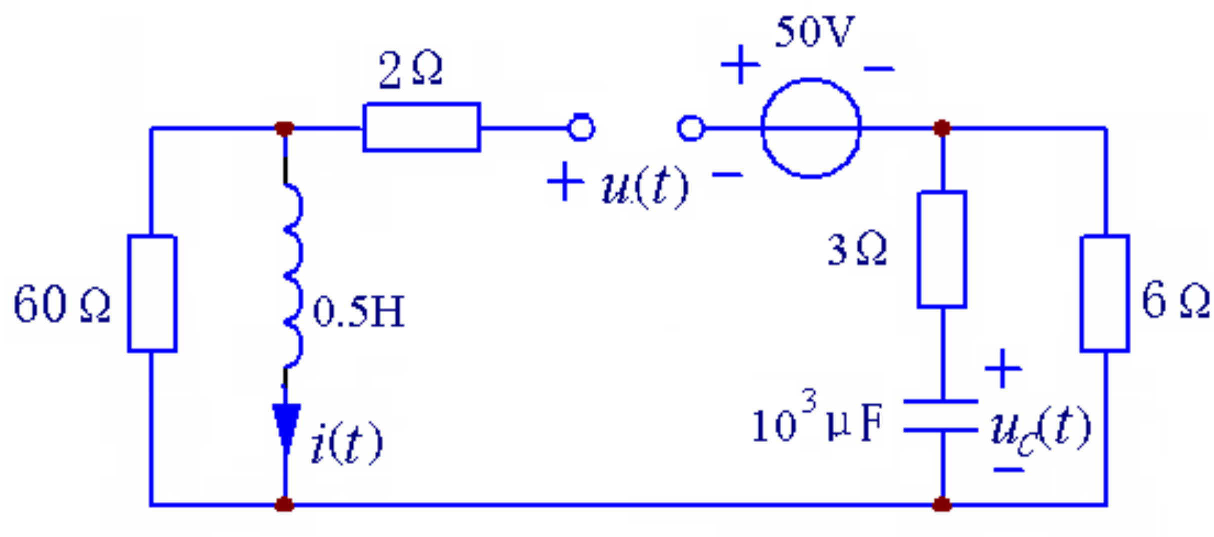
◆**RL电路的时间常数**

$$\tau_1 = \frac{0.5}{60} = \frac{1}{120}s$$

$$i(t) = i(0_+)e^{-\frac{t}{\tau_1}} = 6.25e^{-120t}A \qquad t \geq 0_+$$



电路原理



◆RC电路的时间常数

$$\tau_2 = 10^3 \times 10^{-6} \times (3+6)$$
$$= 9 \times 10^{-3}\, s$$

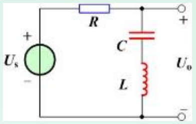
$$u_C(t) = u_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau_2}} = -37.5e^{-\frac{1000}{9}t}V \qquad t \geq 0_+$$

$$u(t) = -60i(t) - \frac{6}{9}u_C(t) - 50$$

$$= -375e^{-120t} - 50 + 25e^{-\frac{1000}{9}t}V \qquad t \geq 0$$

课堂练习：

P_{143}： 4-1-1 4-1-3



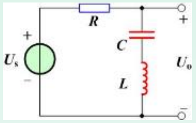
§ 4-2　一阶电路的阶跃响应

- **阶跃响应(step response)：**

电路在单位阶跃电压或单位阶跃电流激励下的零状态响应称为单位阶跃响应，简称阶跃响应

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

zero state response，简称为：r_{zs}



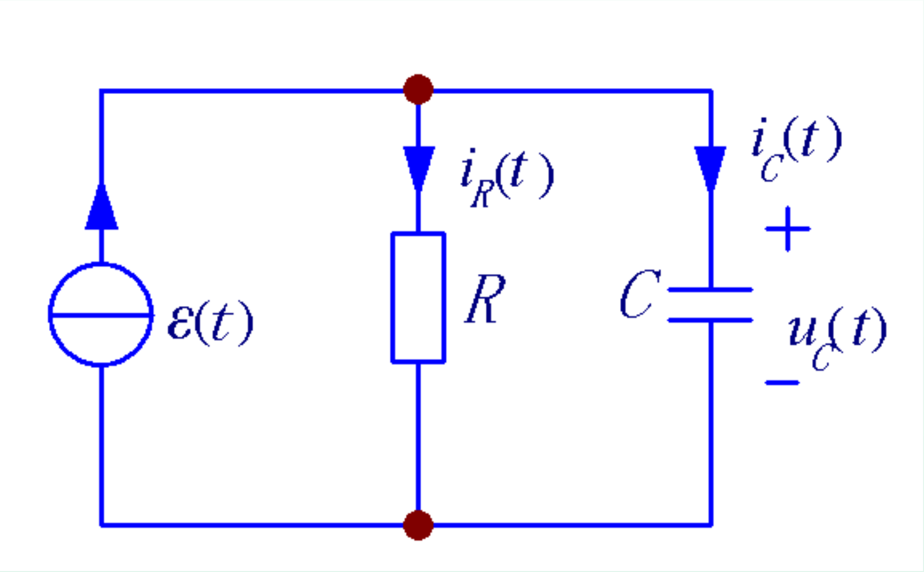
一. 一阶*RC*电路的阶跃响应

定性分析:

$u_c(0_+)=u_c(0_-)=0 \nearrow \mathrm{R}$

$i_c(0_+)=1 \searrow 0$

$i_R(0_+)=0 \nearrow 1$



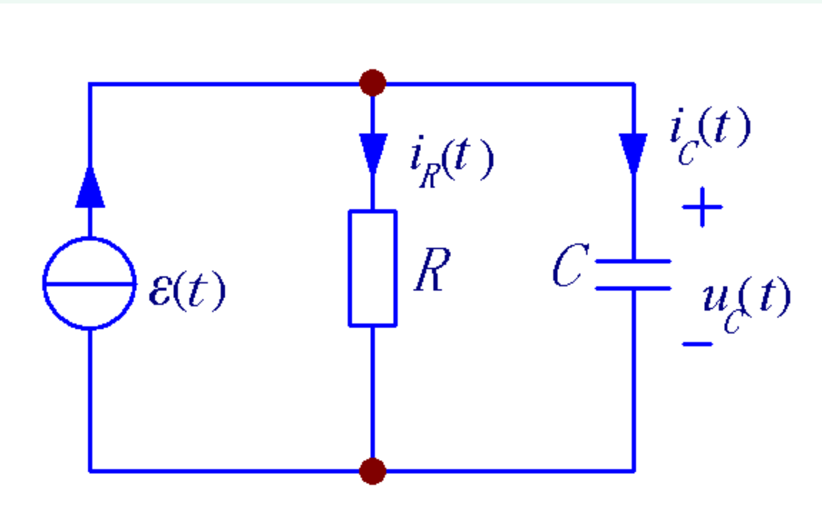
$$\left.\frac{du_c}{dt}\right|_{t=0_+}=\frac{1}{c}i_c(0_+)=\frac{1}{c}>0$$

电容的充电过程

定量分析

$$u_c(0_-) = 0$$

$$i_R(0_-) = i_C(0_-) = 0$$



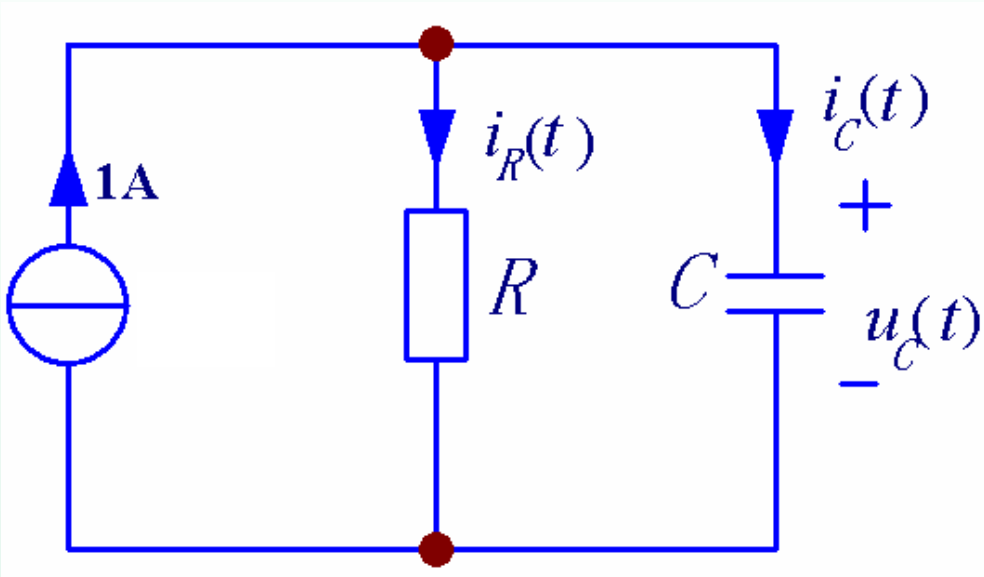
$$u_c(0_+) = u_c(0_-) = 0$$

$$i_R(0_+) = \frac{u_c(0_+)}{R} = 0$$

$$i_C(0_+) = \varepsilon(0_+) = 1A$$

在$t=0_+$时刻电容相当于短路

当$t>0$时



$$C\frac{du_c(t)}{dt}+\frac{u_c(t)}{R}=1$$

$$\frac{du_c(t)}{dt}+\frac{1}{RC}u_c(t)=\frac{1}{C}$$

$$u_c(0_+)=u_c(0_-)=0$$

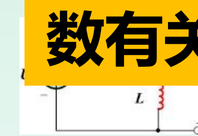
一阶非齐次微分方程解的一般形式：

常系数非齐次微分方程的通解 = 齐次微分方程的通解 + 任一特解

$$u_c(t)=u_{ct}(t)+u_{cf}(t)$$

强制分量：其函数形式与输入函数有关

自由分量：其函数形式与输入函数无关



$u_{ct}(t)$为对应齐次微分方程的通解

$$\frac{du_c(t)}{dt}+\frac{1}{RC}u_c(t)=0$$

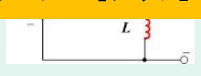
$$u_{ct}(t)=Be^{-\frac{t}{RC}}$$

自由分量：其函数形式与输入函数无关

$u_{cf}(t)$的形式与输入激励相同，则为一常数，设：

$$u_{cf}(t)=K$$

强制分量：其函数形式与输入函数有关



$$\frac{du_c(t)}{dt}+\frac{1}{RC}u_c(t)=\frac{1}{C}$$

将$u_{cf}(t)=K$带入上式得：

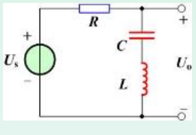
$$K=R$$

其通解为：

$$u_c(t)=u_{ct}(t)+u_{cf}(t)=Be^{-\frac{t}{RC}}+R$$

代入初始条件 $u_c(0_+)=u_c(0\_)=0$ 得：

$$B=-R$$



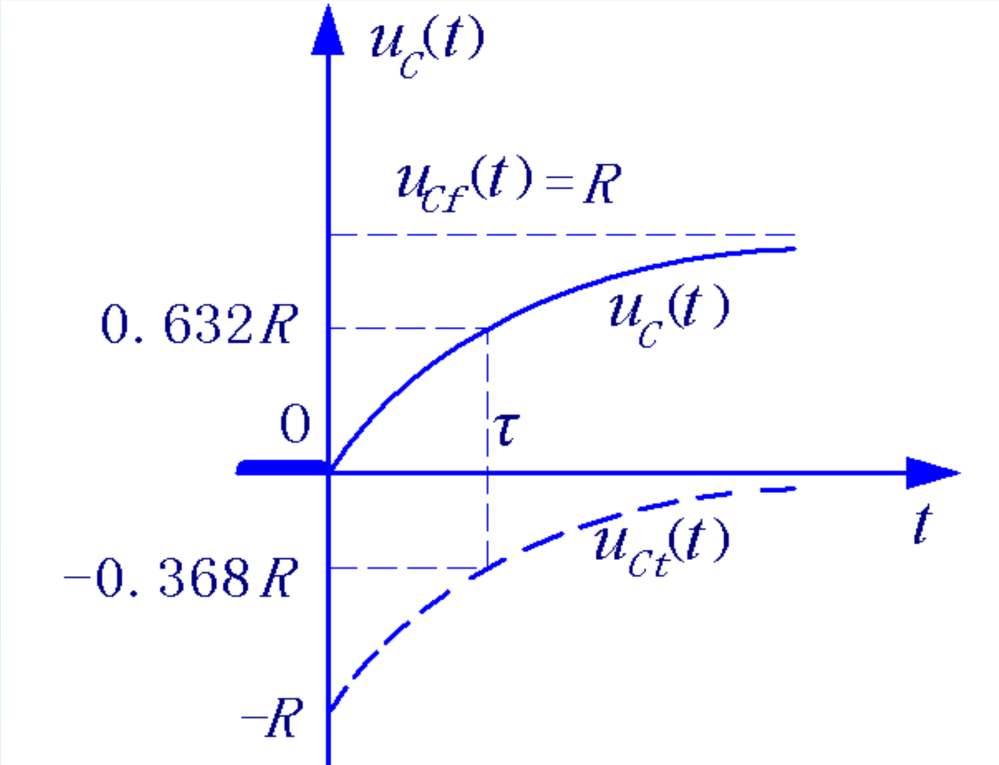
电路原理

电容电压的阶跃响应为

$$u_c(t) = R(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

$$u_c(t) = u_{cf}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t)$$

电容电压曲线



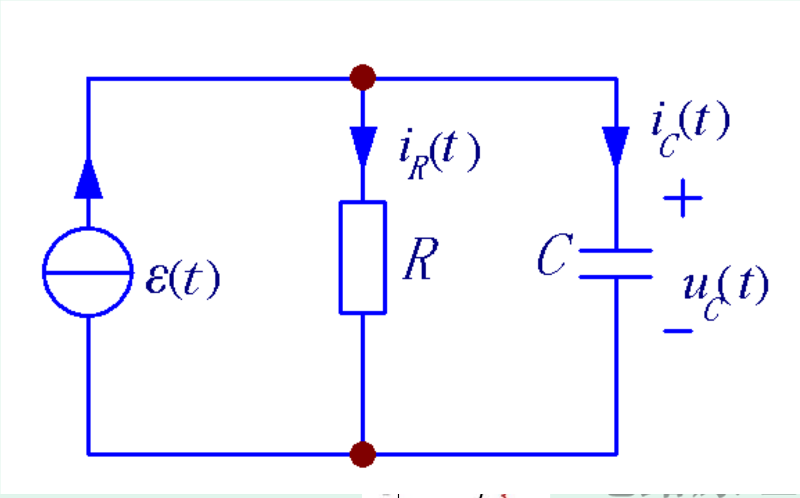
$$u_c(t) = u_{ct}(t) + u_{cf}(t)$$

自由分量　　强制分量

$$u_c(t) = -Re^{-\frac{t}{RC}} + R$$

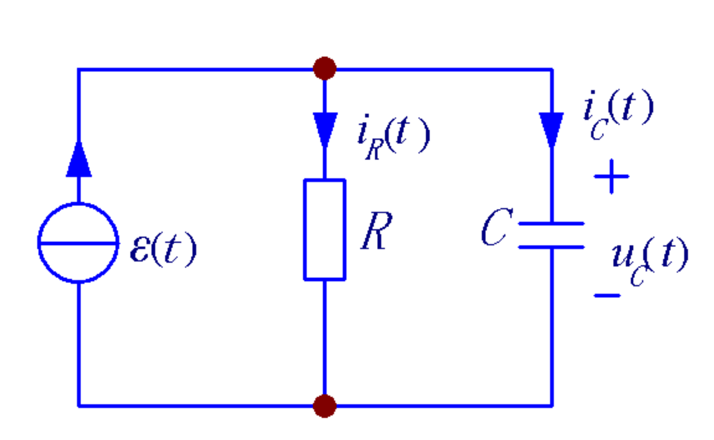
暂态分量　　稳态分量 (t→∞)

当输入激励为常数时，自由分量就是暂态分量，强制分量就是稳态分量。否则不能这样对应。



电阻电流为

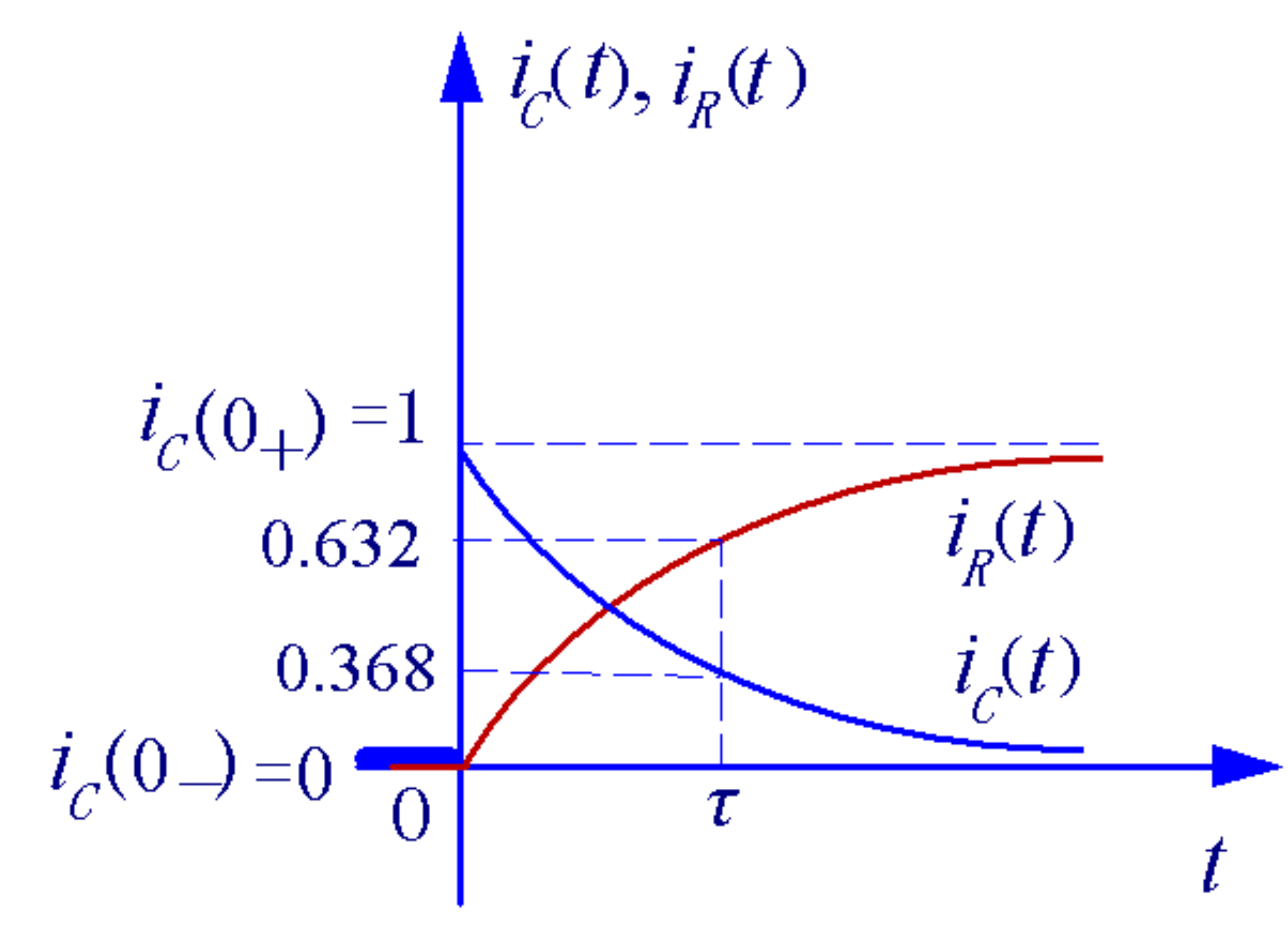
$$i_R(t)=\frac{u_c(t)}{R}=(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$



电容电流为

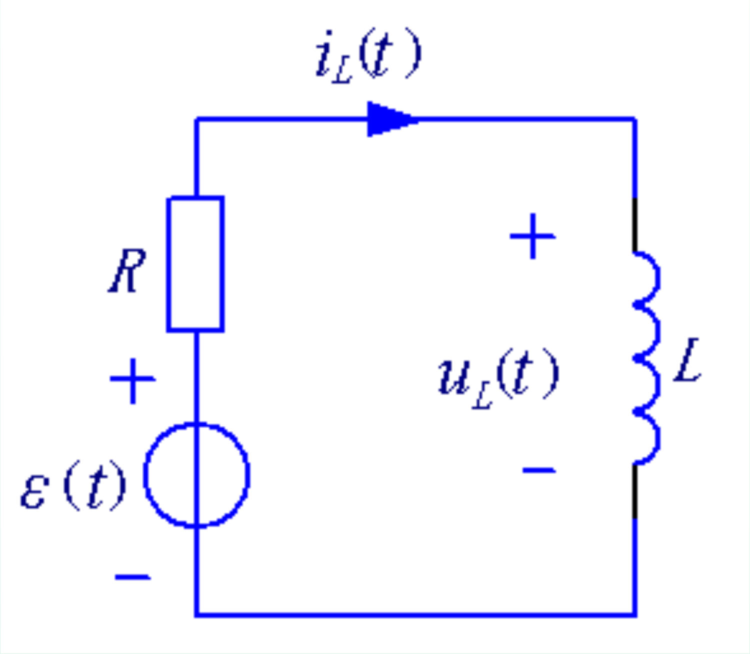
$$i_c(t)=\varepsilon(t)-i_R(t)=e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

电容电流和电阻电流曲线



二. 一阶*RL*电路的阶跃响应

定性分析：



因为$\varepsilon(0_-)=0$

$$i_L(0_-)=0=i_L(0_+) \nearrow \frac{1}{R}$$

$$u_L(0_+)=1 \searrow 0$$

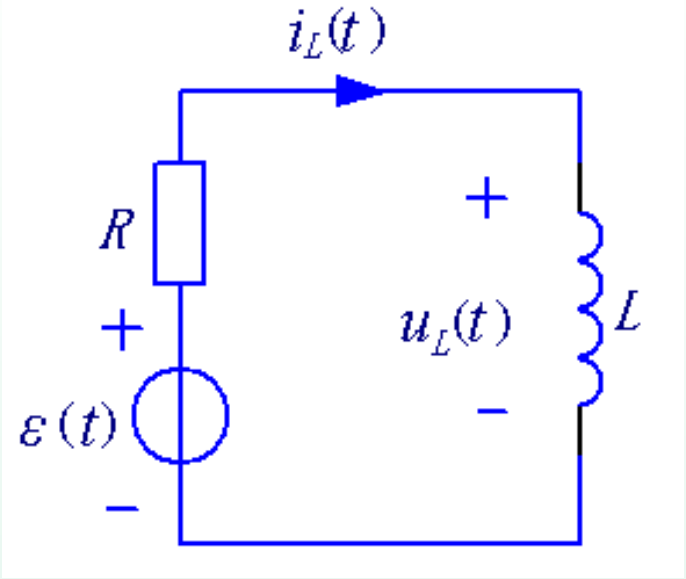
$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0_+} = \frac{u_L(0_+)}{L} = \frac{1}{L} > 0$$

磁场建立的过程

定量分析：

$$Ri_L + L\frac{di_L}{dt} = \varepsilon(t)$$

$t > 0$



$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L}i_L = \frac{1}{L}$$

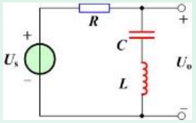
$$\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u_c(t) = \frac{1}{C}$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$$

$$U_c(0_+) = U_c(0_-) = 0$$

与*RC*电路的方程对比，由对偶关系可得

$$i_L(t) = \frac{1}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})\varepsilon(t)$$



电感电流的阶跃响应为

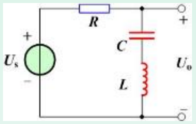
$$i_L(t) = \frac{1}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})\varepsilon(t)$$

$$\boxed{i_L(t) = i_{Lf}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t)}$$

电感电压的阶跃响应为

$$u_L(t) = L\frac{d}{dt}[\frac{1}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})\varepsilon(t)]$$

$$= e^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)$$



电路原理

小结：

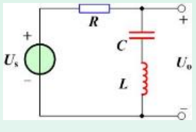
一阶电路阶跃响应中的电容电压和电感电流可表示为：

$$\boxed{r_{zs}(t)=r_f(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t)}$$

其中r_f分别对应于时间t趋于无穷大时（即电路再次处于稳定状态时）的电容电压和电感电流

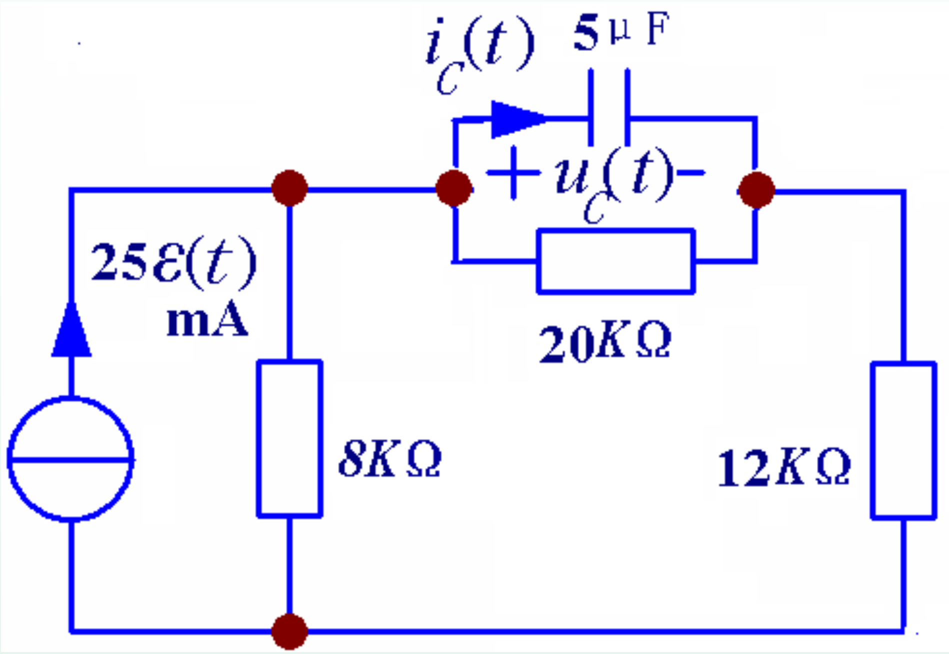
$$\tau=R_{eq}C \qquad \tau=L/R_{eq}$$

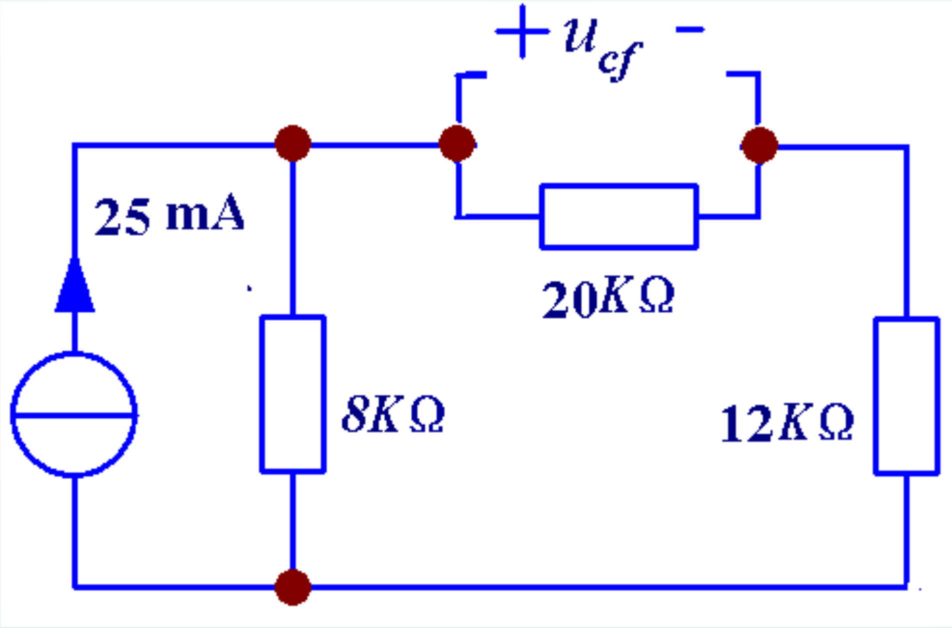
电路的其他响应根据KVL、KCL以及元件的VCR关系计算。



电路原理

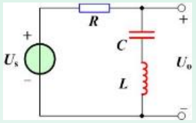
例1. 已知$u_C(0_-)=0$，求$u_C(t)$ 和$i_C(t)$ 。





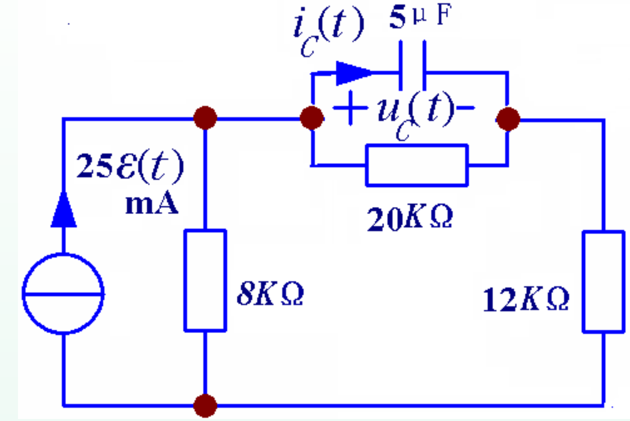
解：1）求u_{cf} （t→∞）

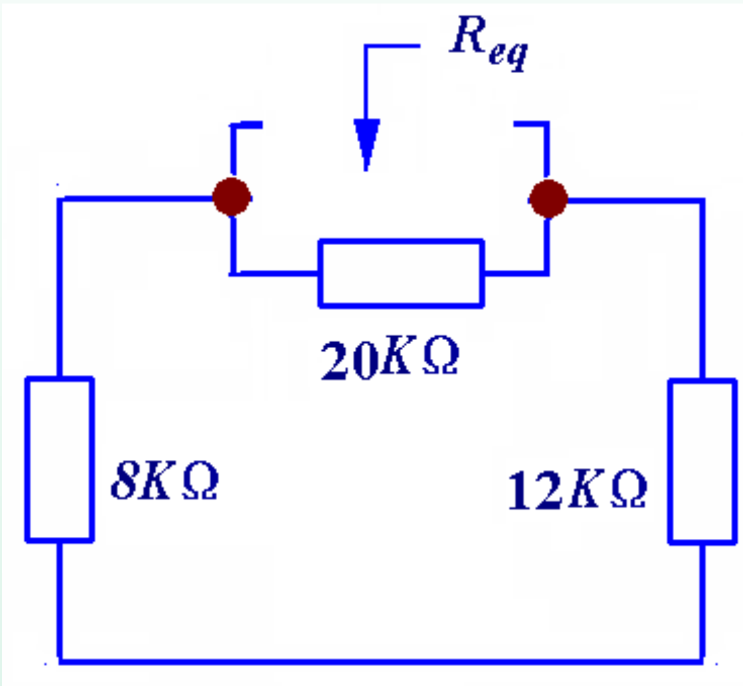
$$u_{cf}=25\times10^{-3}\times\frac{8}{8+32}\times20\times10^{3}=100V$$



电路原理

2） 求τ





$$R_{eq}=20//(8+12)=10K\Omega$$

$$\tau=CR_{eq}$$

$$=5\times10^{-6}\times10\times10^{3}=5\times10^{-2}s$$

3）

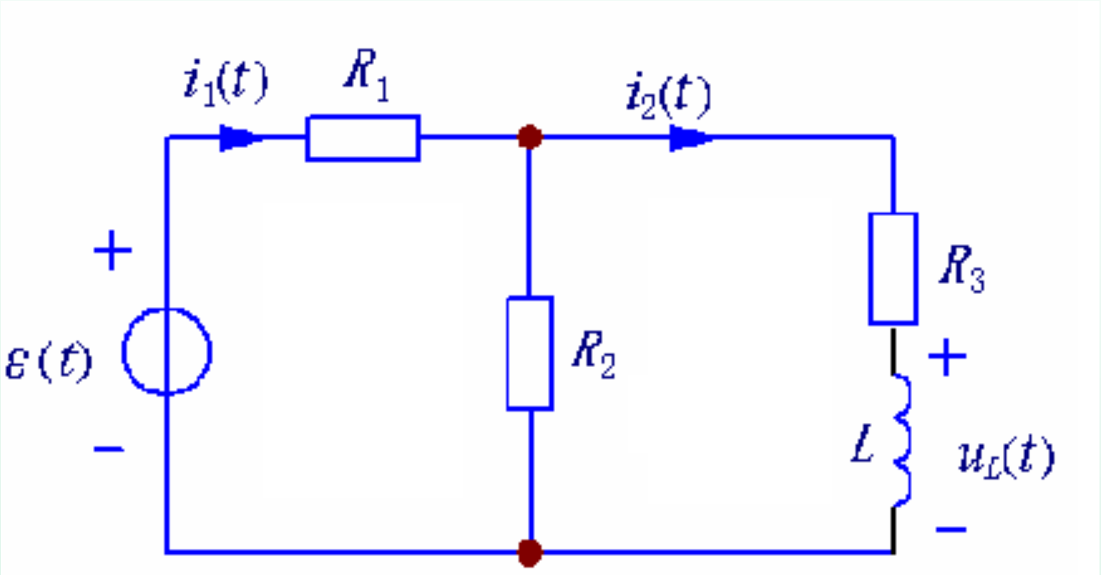
$$u_c(t)=u_{cf}(t)(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t)$$

$$=100(1-e^{-20t})\varepsilon(t)V$$

$$i_c(t)=5\times10^{-6}\times\frac{d}{dt}[100(1-e^{-20t})\varepsilon(t)]=0.02e^{-20t}\varepsilon(t)A$$

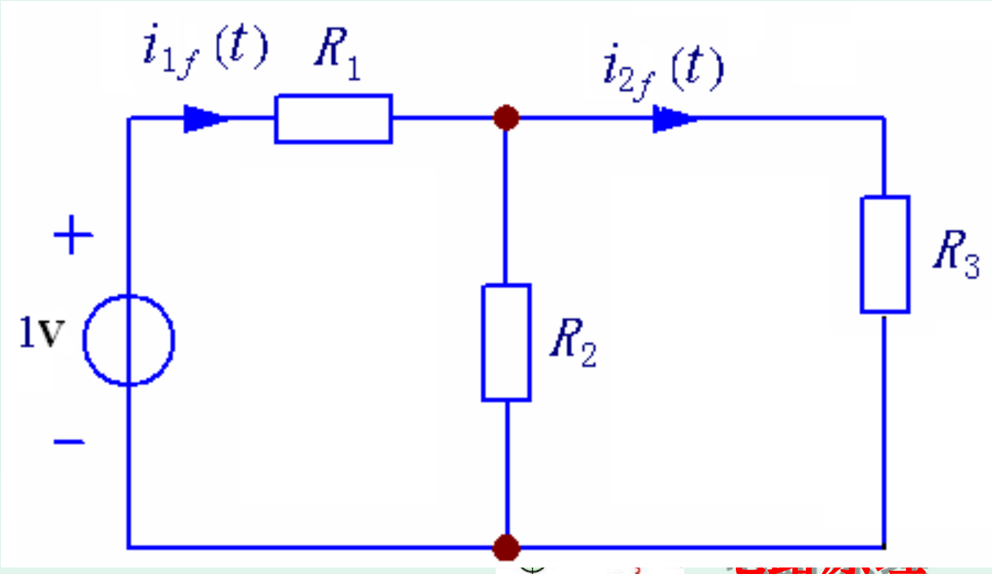
电路原理

例2. 在图示电路中，已知R_1=8 Ω，R_2=8 Ω，R_3=6 Ω，L=1 H，求在单位阶跃电压激励下的阶跃响应$i_2(t)$与$u_L(t)$。

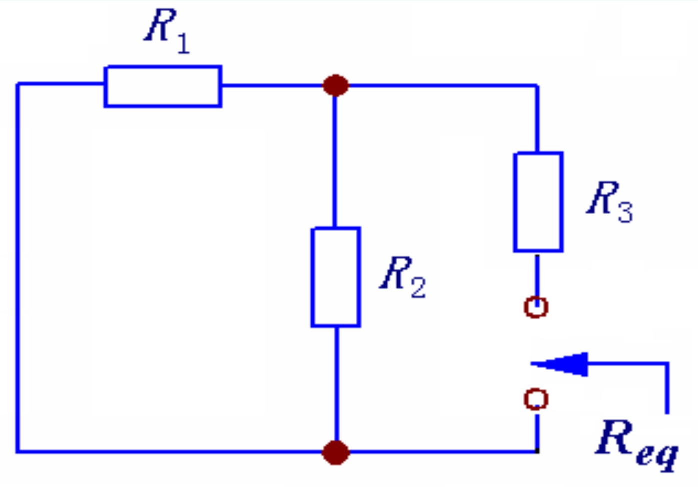


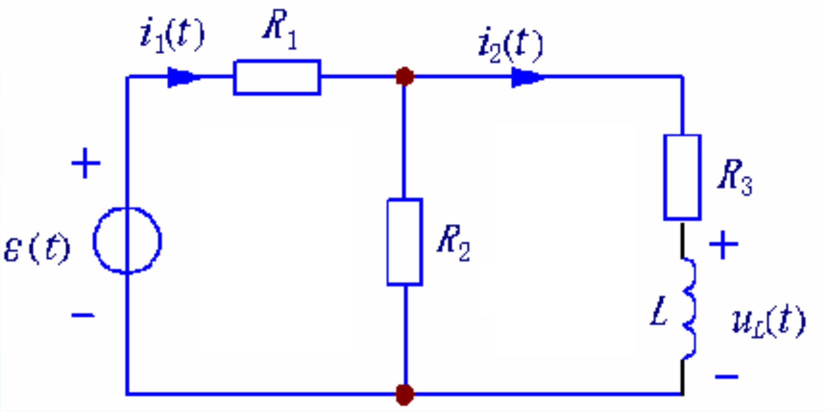
解：1） 求i_{2f} （t→∞）

$$i_{2f}=\frac{1}{\frac{8\times 6}{8+6}+8}\times\frac{8}{8+6}=0.05A$$



2） 求τ





$$R_{eq} = R_3 + R_1 // R_2$$

$$= 6 + 4 = 10\Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{1}{10}\mathrm{S}$$

电路原理

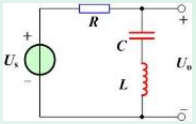
3) 电感电流的阶跃响应为

$$i_2(t) = 0.05(1 - e^{-10t})\varepsilon(t)\ \mathrm{A}$$

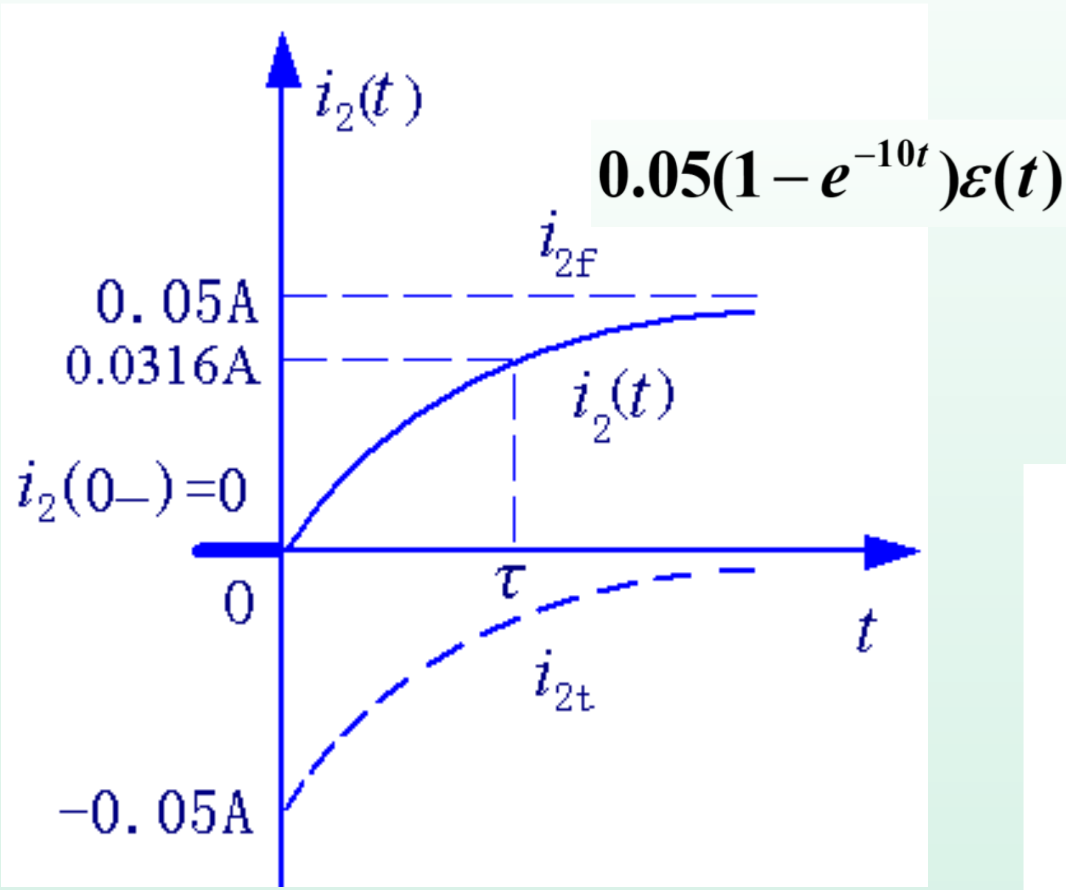
电感电压的阶跃响应为

$$u_L(t) = L\frac{di_2}{dt} = 0.5e^{-10t}\varepsilon(t) + (0.05 - 0.05e^{-10t})\delta(t)$$

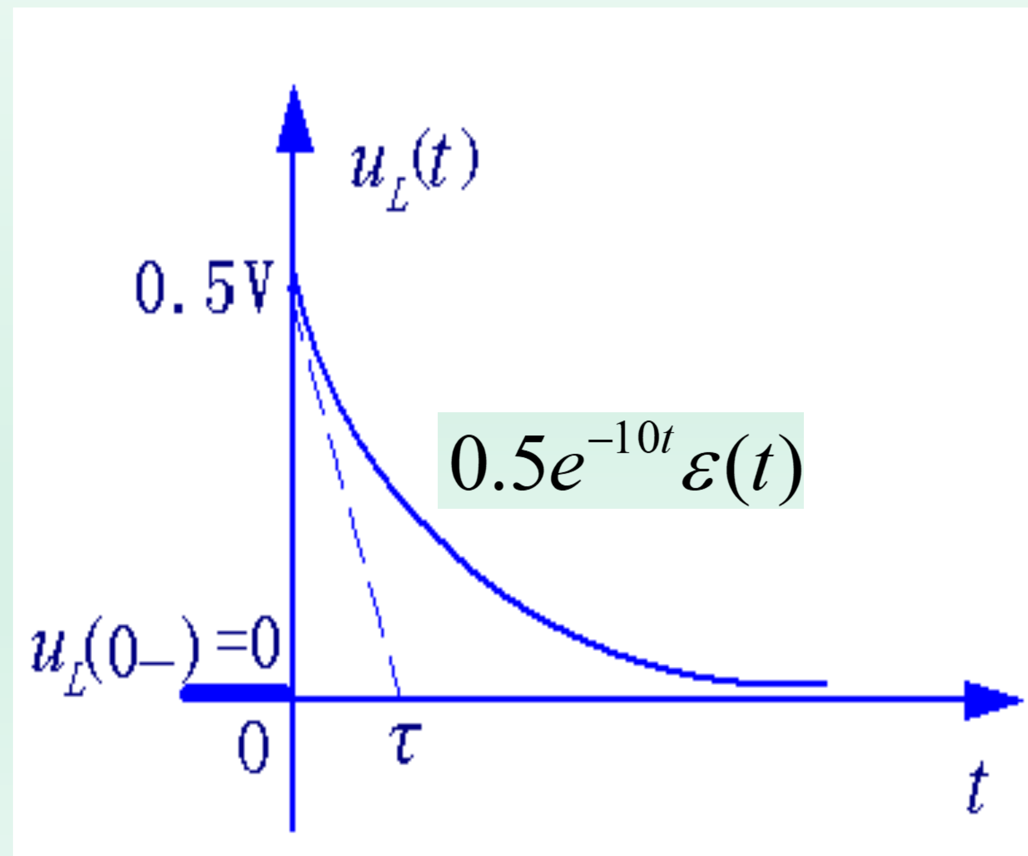
$$= 0.5e^{-10t}\varepsilon(t)\ \mathrm{V}$$



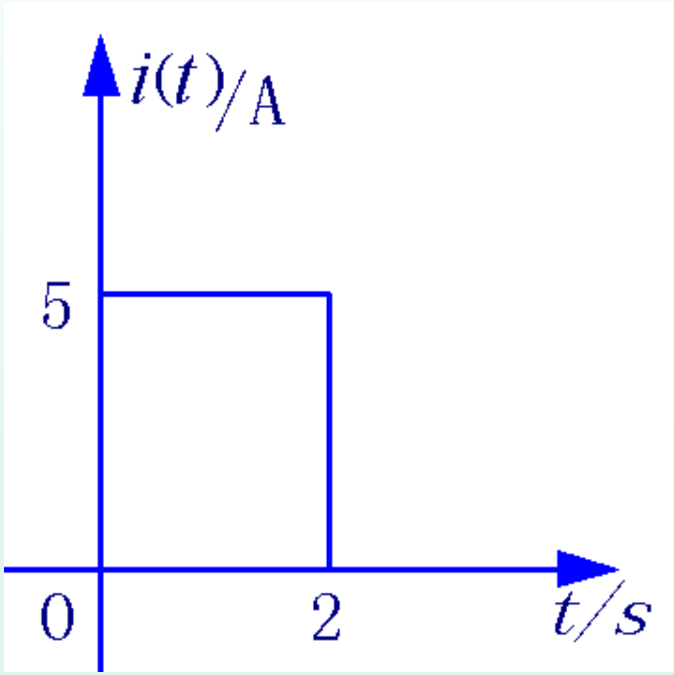
电感电流波形

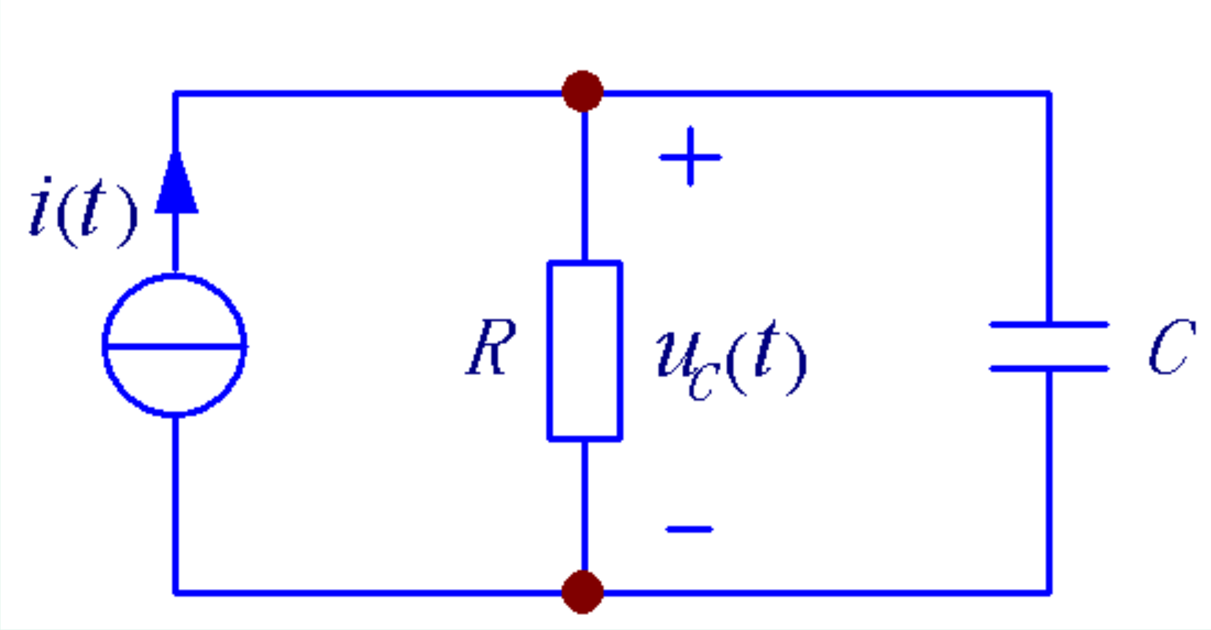


电感电压波形



例3. 图示RC并联电路的电流源的电流是一个矩形脉冲,求零状态响应$u_c(t)$。



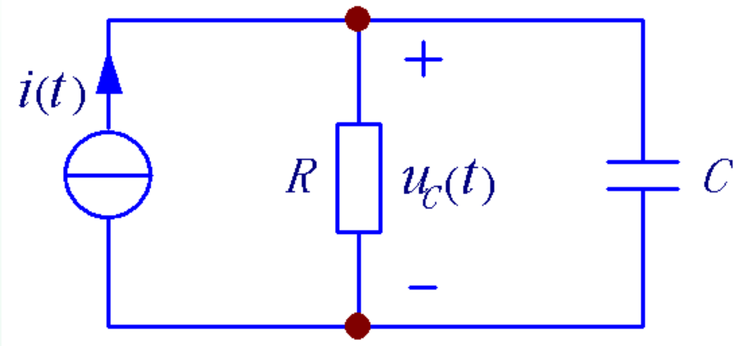


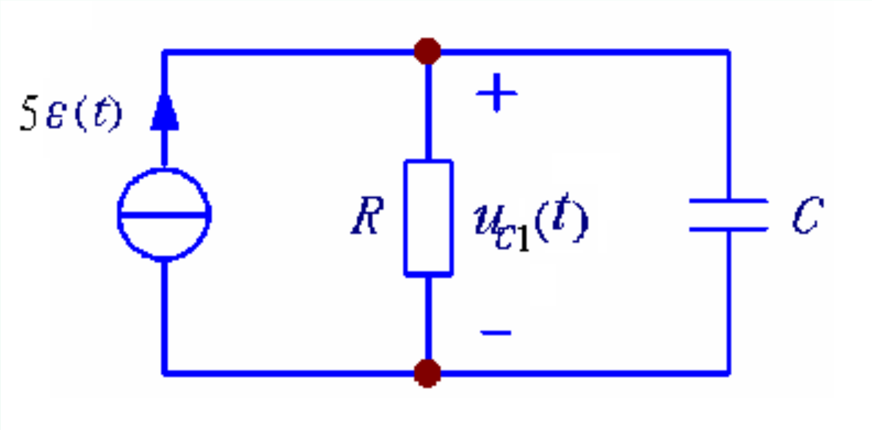
解法一

1）矩形脉冲电流的阶跃函数表达式

$$i(t) = 5\varepsilon(t) - 5\varepsilon(t-2)$$

2）考虑在$i(t)=5\varepsilon(t)$ 作用下电容电压的阶跃响应

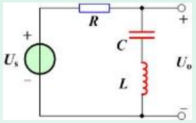




$$u_{cf}=5R$$

$$\tau=RC$$

$$u_{c1}(t)=5R\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\varepsilon(t)$$



3）由于电路是线性电路，满足齐次性。

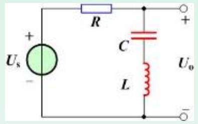
故在 $i(t) = -5\varepsilon(t-2)$ 作用下电容电压的阶跃响应为

$$u_{C2}(t) = -5R\left(1 - e^{-\frac{t-2}{RC}}\right)\varepsilon(t-2)$$

4）根据线性电路的叠加原理，待求的零状态响应为

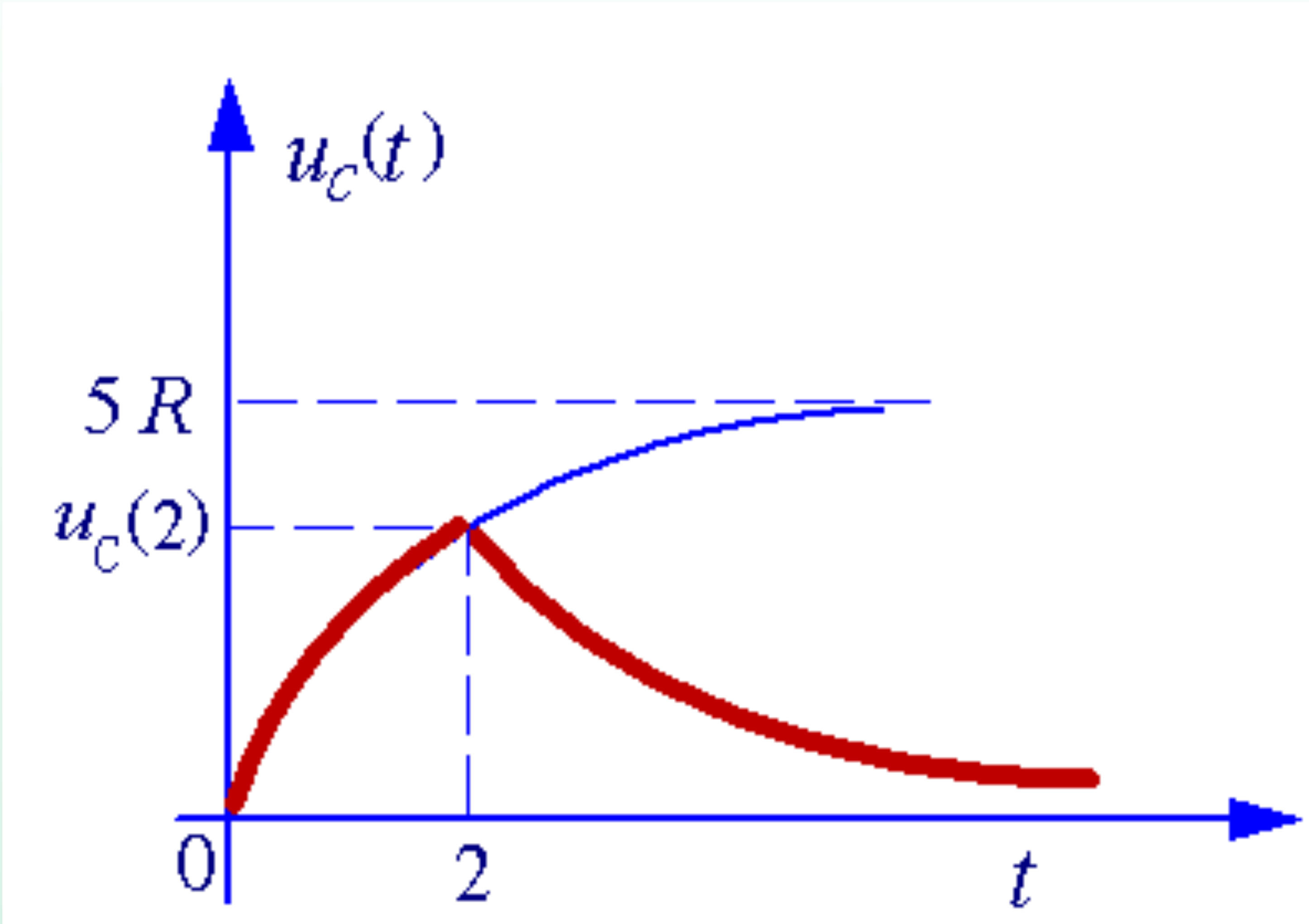
$$u_c(t) = u_{c1}(t) + u_{c2}(t)$$

$$= 5R\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\varepsilon(t) - 5R\left(1 - e^{-\frac{t-2}{RC}}\right)\varepsilon(t-2)$$



电路原理

电容电压的波形



$$u_c(t)=u_{c1}(t)+u_{c2}(t)$$

$$=5R\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\varepsilon(t)-5R\left(1-e^{-\frac{t-2}{RC}}\right)\varepsilon(t-2)$$

电路原理

解法二：分段计算

1）在0<t<2s的时间区间，为**零状态响应**

$$u_c(t) = 5R\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \qquad 0 < t < 2s$$

2）在t >2s的时间区间，为**零输入响应**

$$u_C(t) = u_C(2_+)e^{-\frac{t-2}{RC}} = 5R(1 - e^{-\frac{2}{RC}})e^{-\frac{t-2}{RC}}$$

$$t > 2s$$