$S(b)=\int_1^b \frac{1}{x}dx=\ln b.$

$\lim\limits_{b\to+\infty} S(b)=+\infty$

定义：$\int_a^{+\infty} f(x)dx \xlongequal{f(x)\in C[a,+\infty)} \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 收敛 发散

$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \xlongequal{f(x)\in C(-\infty,b]} \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \xlongequal{f(x)\in C(-\infty,+\infty)} \int_{-\infty}^{c}+\int_c^{+\infty}$ 两个积分均收敛 称 $\int_{-\infty}^{+\infty}$ 收敛.

一. 积分区间为无穷区间

引例 考察位于 $y=\frac{1}{x^2}$ 下，x轴之上，而夹在 $x=1$ 及 $x=b$ 之间区域的面积.

解：$S(b)=\int_1^b \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_1^b=(1-\frac{1}{b})$

$\lim\limits_{b\to+\infty} S(b)=1.$ $\int_1^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b f(x)dx$

例. $\int_0^{+\infty} x e^{-x}dx=-\int_0^{+\infty} x\,de^{-x}$

$=-\left[x e^{-x}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$

$=-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}$

$=1$

例 $I_n=\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$

$=-\int_0^{+\infty} x^n de^{-x}$

$=-\left[x^n e^{-x}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-x} n x^{n-1}dx$

$=nI_{n-1}$

$=n(n-1)I_{n-2}$

$=\cdots=n(n-1)\cdots2\cdot1=n!$

例 $I=\int_a^b \frac{1}{(x-a)^q}dx$

(1) $q\le0$ 时，该积分为常义积分，$I=\left[\frac{1}{1-q}(x-a)^{1-q}\right]_a^b=\frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}$

(2) $q>0$ 时，该积分为无界函数的广义积分

$q\ne1$ 时，$I=\left[\frac{1}{1-q}(x-a)^{1-q}\right]_a^b=\begin{cases}\frac{1}{1-q}(b-a)^{1-q}, & 1-q>0\Leftrightarrow q<1\\ \infty, & 1-q<0\Leftrightarrow q>1\end{cases}$

$q=1$ 时 发散.

作业 P247. 1.奇.3.5.