§7.2 点估计的评价标准

对于同一个未知参数, 不同的方法得到的估计量可能不同,于是提出问题

- 应该选用哪一种估计量?
- 用什么标准来评价一个估计量的好坏?

常用标准

(1) 无偏性

(2) 有效性

(3) 一致性

无偏性

定义 设 $(X_1, X_2, \boxed{?}, X_n)$ 是总体X的样本

$\overset{\boxed{?}}{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \boxed{?}, X_n)$ 是总体参数□的估计量

$E(\hat{\theta})$ 存在, 且对于任意 $\theta \in \Theta$ 都有

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

则称 $\hat{\theta}$ 是□的无偏估计量.

例1 设总体X的 k 阶矩 $\mu_k = E(X^k)$ 存在

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体X的样本,

证明: 不论 X 服从什么分布, $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$

是 μ_k 的无偏估计量.

证 由于 $E(X_i^k) = \mu_k \quad i = 1,2,\cdots,n$ 因而

$$E(A_k) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^k)$$

$$= \frac{1}{n}\cdot n\cdot \mu_k = \mu_k$$

例2 设总体 X 的期望 $E(X)$ 与方差 $D(X)$ 存在,

$(X_1, X_2, \boxed{?}, X_n)$ 是 X 的一个样本, $n > 1$. 证明

(1) $S_n^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 不是 $D(X)$ 的无偏估计量;

(2) $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 是 $D(X)$ 的无偏估计量.

证 前已证 $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \overline{X}^2$

$$E(X_i) = E(X) = \mu\,,\ \ D(X_i) = D(X) = \sigma^2$$

$$E(\overline{X}) = E(X) = \mu\,,\ \ D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

因而

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-E(\overline{X}^2)$$

$$=(\sigma^2+\mu^2)-(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)$$

$$=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2$$

故

$$E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)=\sigma^2$$

证毕.

例3 设总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0,\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad \theta>0 \text{ 为常数}$$

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 X 的一个样本

证明 $\overline{X}$ 与 $n\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 都是 θ 的无偏估计量

证 $X \sim E\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$ $\quad E(X)=\theta$

故 $E(\overline{X}) = E(X) = \theta$

$\overline{X}$ 是θ 的无偏估计量.

令

$$Z=\min\{X_1, X_2, \boxed{?}, X_n\}$$

$$F_Z(z)=1-P(X_1>z, X_2>z, \boxed{?}, X_n>z)$$

$$=1-P(X_1>z)P(X_2>z)\boxed{?}P(X_n>z)$$

$$=1-\prod_{i=1}^{n}(1-P(X_i\le z))=\begin{cases}0 & z<0\\ 1-e^{-\frac{nz}{\theta}} & z\ge 0\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}0 & z<0\\ \dfrac{n}{\theta}e^{-\frac{nz}{\theta}} & z\ge 0\end{cases}$$

即 $\quad Z\sim E\left(\dfrac{n}{\theta}\right) \qquad E(Z)=\dfrac{\theta}{n} \qquad E(nZ)=\theta$

故 nZ 是□的无偏估计量.

思考题 设总体 $X \sim N(□,□2)$,

$(X_1, X_2, \boxed{?}, X_n)$ 为 X 的一个样本

求常数 k , 使 $k\sum_{i=1}^{n}|X_i - \overline{X}|$ 为□的无偏估计量

解 $$E\left(k\sum_{i=1}^{n}|X_i - \overline{X}|\right) = k\left(\sum_{i=1}^{n}E|X_i - \overline{X}|\right)$$

注意到 $X_i - \overline{X}$ 是 $X1, X2, \ldots, Xn$ 的线性函数,

$$X_i - \overline{X} = \frac{1}{n}\left(-X_1 - X_2 \boxed{?} + (n-1)X_i - \boxed{?} - X_n\right)$$

$$E(X_i - \overline{X}) = 0, \quad D(X_i - \overline{X}) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$$X_i - \bar{X} \sim N\left(0, \frac{n-1}{n}\sigma^2\right)$$

$$E(|X_i - \bar{X}|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\frac{n-1}{n}\sigma^2}} dz$$

$$= 2\int_0^{+\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\frac{n-1}{n}\sigma^2}} dz$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma$$

故

$$E\left(k\sum_{i=1}^{n}|X_i-\overline{X}|\right)=k\left(\sum_{i=1}^{n}E|X_i-\overline{X}|\right)$$

$$=kn\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma\overset{令}{=}\sigma$$

$$\longrightarrow\quad k=\sqrt{\frac{\pi}{2n(n-1)}}$$

有效性

定义 设

$$\hat{\theta}_1 = \theta_1(X_1, X_2, \boxed{?}, X_n)$$

$$\hat{\theta}_2 = \theta_2(X_1, X_2, \boxed{?}, X_n)$$

都是总体参数▯的无偏估计量, 且

$$D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$$

则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效.

例6 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为来自密度函数为的总体的样本,

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0, \\ 0 & x \le 0 \end{cases} \qquad \theta > 0 \text{ 为常数}$$

由前面例4 可知, $\overline{X}$ 与 $n\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 都

是 θ 的无偏估计量,问哪个估计量更有效?

解 $D(\overline{X}) = \dfrac{\theta^2}{n}$, $D(n\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}) = \theta^2$

所以, $\overline{X}$ 比 $n\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 更有效.

例7(自学)

设总体期望为 $E(X)=$ □, 方差 $D(X)=$□2

$(X_1, X_2, \boxed{?}, X_n)$ 为总体X的一个样本

(1) 设常数 $c_i \neq \dfrac{1}{n}$ $i = 1,2,\boxed{?},n.$ $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i = 1.$

证明 $\hat{\mu}_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i$ 是 □的无偏估计量

(2) 证明 $\hat{\mu} = \overline{X}$ 比 $\hat{\mu}_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i$ 更有效

证： **(1)** $$E(\hat{\mu}_1) = \sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu = \mu$$

(2)

$$D(\hat{\mu}_1) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 D(X_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

而

$$1 = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} c_i c_j$$

$$< \sum_{i=1}^{n} c_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} (c_i^2 + c_j^2) = n \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i^2 > \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad D(\hat{\mu}) = \frac{1}{n}\sigma^2 < D(\hat{\mu}_1)$$

结论 算术均值比加权均值更有效.

- 一致性