注意：样本空间 Ω 中的样本点可以用符号表达，也可以用数字表达，可以理解为"状态点". 例如，对于 Ω_1，可以用 0,1 数字描述正、反两面的状态，可表示为 $\Omega_1=\{0,1\}$.

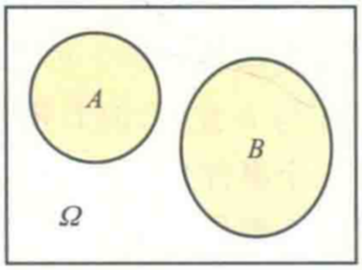

图 1.2.4　互斥事件 $AB=\varnothing$

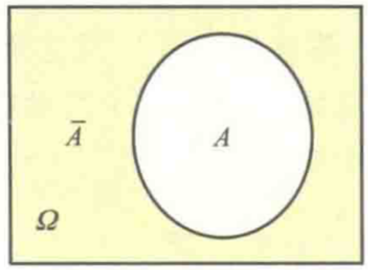

图 1.2.5　对立事件 $\overline{A}$

定义 1.3.1（事件的频率）　假设事件 A 在随机试验 E 中可以重复观察，如果事件 A 在 n 次重复试验中出现了 r 次，则称比值 $\frac{r}{n}$ 为事件 A 在 n 次重复试验中出现的频率，记为 $f_n(A)$，即 $f_n(A)=\frac{r}{n}$.

定义 1.3.2（统计概率的定义）　设 A 为试验 E 的一个事件，如果随着重复试验次数 n 的增加，事件 A 出现的频率逼近某个常数 $p(0\leqslant p\leqslant 1)$，则定义事件 A 的概率为 p，记为 $P(A)=p$.

定义 1.3.3　设试验 E 的样本空间 Ω 由 n 个样本点组成，每个样本点等可能发生. 事件 A 由 r 个样本点组成，则定义事件 A 的概率为 $\frac{r}{n}$，记为 $P(A)$，即

$$P(A)=\frac{A\text{ 中的样本点数}}{\Omega\text{ 中的样本点数}}=\frac{r}{n}$$

称这样的概率为**古典概率**.

定义 1.3.4　设随机试验 E 的样本空间 Ω 为可测（有界）的区域，事件 A 可以用 Ω 中的子区域 A 表示，即样本点落在区域 A 中，表明事件 A 发生. 如果事件 A 出现的可能性与该区域的几何测度有关，而与该区域的位置和形状无关，则称随机试验 E 为几何概型，并定义事件 A 的几何概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的几何测度}}{\Omega\text{ 的几何测度}}$$

定义 1.4.1　设 A,B 是样本空间 Ω 中的两个随机事件，如果 $P(A)>0$，则称 $\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**，记为 $P(B\mid A)$，即

$$\boxed{P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}} \tag{1.4.1}$$

称(1.4.1)式为条件概率公式.

定理 1.4.1　设有两个随机事件 A,B，如果 $P(A)>0,P(B)>0$，则

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=P(B)P(A\mid B) \tag{1.4.2}$$

称公式(1.4.2)为**乘法公式**.

虽然(1.4.2)式可以说是条件概率公式的等价变形，但其意义却大为不同. (1.4.2)式可以解释为：A,B 两个事件乘积的概率，等于先求事件 A 发生的概率，再乘以事件 B 在事件 A 已发生条件下的概率. 乘法公式方便于求解有顺序结构的复合事件的概率.

例 1.4.3　一球袋中装有 10 个球，其中 8 个红球，2 个白球. 分别以下列方式摸取球，求在下列情形下，此人前三次摸球的结果是"红红白"的概率：

（1）每次从袋中摸取一球，无放回；

（2）每次从袋中摸取一球，观其颜色后放回，再补入 2 个同色球.

解　（1）设 A_i ="第 i 次摸到红球"，$i=1,2,3$，则由乘法公式，所求的概率为

$$P(A_1A_2\overline{A}_3)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(\overline{A}_3\mid A_1A_2)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{2}{8}\approx 0.155\ 6$$

$\frac{A_8^2A_2^1}{A_{10}^3}=\frac{8\times7\times2}{10\times9\times8}=\frac{112}{720}\approx0.1556$

细心的读者会发现，这个问题也可以用古典概率的方法来解. 那条件概率方法的优势在哪里呢？

随堂测验 1.4

（2）A_i 同上假设，则由乘法公式，所求的概率为

$$P(A_1A_2\overline{A}_3)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(\overline{A}_3\mid A_1A_2)=\frac{8}{10}\times\frac{10}{12}\times\frac{2}{14}\approx 0.095\ 2$$

这个问题可以用古典概率的方法来求解吗？条件概率是改变了样本空间情形下的概率，当样本空间改变时，条件概率有着较大的优势.

拓展知识：促销商品奖项最佳设置的概率计算

定理 1.4.2 设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互斥的，$P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n$，事件 B 满足关系 $B\subset\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，则事件 B 的概率有如下计算公式：

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i) \tag{1.4.5}$$

式(1.4.5)称为全概率公式.

定理 1.4.3 设事件组 $A_1,\cdots,A_n$ 与 B 满足定理 1.4.2 的条件，且 $P(B)>0$，则在随机事件 B 发生的条件下，各事件 A_k 发生的概率为

$$P(A_k\mid B)=\frac{P(A_kB)}{P(B)}=\frac{P(A_k)P(B\mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)},\quad k=1,2,\cdots,n \tag{1.4.6}$$