韩昊辰 20214272

P197 (2)

(3)

（2）设 $\langle A, *\rangle$ 是半群，e 是左幺元且对每一个 $x\in A$，存在 $\hat{x}\in A$，使得 $\hat{x}*x=e$。

a）证明：对于任意的 $a,b,c\in A$，如果 $a*b=a*c$，则 $b=c$。

b）通过证明 e 是 A 中的幺元，证明 $\langle A, *\rangle$ 是群。

a) $\forall a\in A$，$\exists\ \hat{a}\in A$ 有：

$$\hat{a}*(a*b) = \hat{a}*(a*c)$$
$$(\hat{a}*a)*b = (\hat{a}*a)*c$$
$$e*b = e*c$$
$$b = c$$

b). $\forall x\in A$

$$\hat{x}*x=e$$
$$\Leftrightarrow (\hat{x}*x)*e = e*e = e$$
$$\hat{x}*(x*e) = e = \hat{x}*x$$

由a)：$x*e = x$ $\therefore$ e是A的右幺元

$\because$ e是左幺元

$\therefore$ e是幺元

又 $\forall x\in A$，$\hat{x}*x=e$，

$$x*\hat{x}*x = x*e = x$$
$$x*\hat{x}*x*\hat{x} = x*\hat{x} = e$$
$$\Leftrightarrow x*\hat{x}=e$$

即x含逆元

$\therefore \langle A, *\rangle$ 是群

（3）设 $\langle G, *\rangle$ 是群，对任一 $a\in G$，令 $H=\{y\mid y*a=a*y, y\in G\}$，试证明 $\langle H, *\rangle$ 是 $\langle G, *\rangle$ 的子群。

$\forall a,b,c\in H$，$\because a,b,c\in G$ $\therefore (a*b)*c = a*(b*c)$

$\therefore$ $*$在H上满足结合律

$\because e*a=a*e$ $\therefore e\in H$

$\forall a\in G$，$\exists\ y\in H$，$y*a=a*y$

对于该y，

$\because y\in G$，$\langle G, *\rangle$ 是群

$\therefore \exists\ y^{-1}\in G$，$y^{-1}*(y*a)*y^{-1} = y^{-1}*(a*y)*y^{-1}$

$$(y^{-1}*y)*(a*y^{-1}) = (y^{-1}*a)*(y*y^{-1})$$
$$e*(a*y^{-1}) = (y^{-1}*a)*e$$
$$a*y^{-1} = y^{-1}*a$$

$\therefore y^{-1}\in H$

故 $\forall y\in H$，有 $y^{-1}\in H$

$\because \forall x,y\in H$，$x*y*a = x*a*y = a*x*y$

$\therefore x*y\in H$ $\therefore$ $*$在H满足封闭性

$\therefore \langle H, *\rangle$ 是群

又 $H\subseteq G$

$\therefore \langle H, *\rangle$ 是 $\langle G, *\rangle$ 的子群