- 数理逻辑
  - 命题逻辑的基本概念
  - 命题逻辑等值演算
  - 命题逻辑的推理理论
  - 谓词逻辑基本概念
  - 谓词逻辑等值演算与推理
- 集合论
  - 集合
  - 关系
  - 函数
- 代数系统简介
  - 代数系统简介：群、环、域
- 图论
  - 图的基本概念
  - 几种特殊的图

? 1-1 命题及其表示方法

? 1- 1. 1 **命题**

- 能够判断真假的陈述句

? 1- 1. 2 **命题的分类**

- 原子（简单）命题
- 复合命题

? 1- 1. 3 **命题的表示方法**

- 命题常量
- 命题变元/ 原子变元

? 1-2 联结词

? 1- 2. 1 **否定**(Negation) ┐

? 1- 2. 2 **合取**(Conjunction) ∧

? 1- 2. 3 **析取**(Disjunction) ∨

? 1- 2. 4 **条件**(蕴涵联结词Conditional) →

? 1- 2. 5 **双条件**(等值联结词Biconditional) ↔

命题逻辑

- 命题及其表示
- 联结词
- 命题公式与翻译
- 真值表与等价公式
- 重言式与永真蕴含式
- 其它联结词
- 对偶与范式
- 推理理论

1-3命题公式与翻译

1-3. 1 合式公式

- 递归定义

1-3. 2 翻译

- 仅当、除非
- 条件分句间用合取

1-4真值表与等价公式

1-4. 1 真值表

- n个变元多少种不同赋值情况
- n个变元多少个不同真值表

1-4. 2 等价公式

- 真值表法
-

等值演算：摩根律、吸收率、蕴涵等值式、假言易位、分配率……

? 1-5重言式与永真蕴含式

? 1-5. 1 命题公式的分类

- 重言式、矛盾式、可满足式

? 1-5. 2 重言式与矛盾式的性质

- 幂等律
- 合式公式置换变元，仍是重言式
- A? B的充要条件A? B为重言式

? 1-5. 3 永真蕴含式

- 真值表法、等值演算法
- 分析法：直接分析、间接分析

? 1-6 其他联接词

? 1-6. 1 异或、与非、或非、条件否定

- 异或：交换律、结合律、分配率、等值否定
- 与非：和取否定、P↑ P?

  ┐P、(P↑ Q)↑ (P↑ Q)?

  P∧Q、(P↑ P)↑ (Q↑ Q) ? P∨Q

? 1-6. 1 最小联接词组

- {┐，∧}； {┐，∨}； {┐，→}； {↑ }；{↓ }

? 1-7 对偶与范式

? 1-7. 1 对偶与对偶原理

- 对偶(∨, ∧)、(0, 1) 对换
- 对偶原理：若A? B，则A*? B*；若A? B，则B*? A*。

? 1-7. 2 析取范式与合取范式

- 概念：文字、简单合（析)取式、析（合)取范式
- 求析(合)取范式的步骤：1.化简为┐, ∨, ∧；2. 处理外层的┐（摩根律）；

  3. 处理内层∨ （∧）,分配律

? 1-7. 3 主析取范式与主合取范式

- 概念：小项、大项、主析（合）取范式
- 求主析(合)取范式的步骤：1. 化为一般范式；2. 去掉永假（真)项

  3. 消去重复项；4添加缺少的变量：Pi ∨ ┐Pi （Pi ∧ ┐Pi）
- 两类范式的联系：┐mi? Mi；同一命题公式的两类主范式编号互为补集

1-8 推理理论

1-7. 4 主析（合）取范式的应用

- 判断公式的成真赋值与成假赋值、判断公式类型
- 判断公式的等价关系、判断公式的永真蕴含关系
- 解决实际问题

1-8. 1 常用证明方法

- 概念：前提、有效结论
- 方法：真值表法、等值演算、主范式法、分析法（直接证法、间接证法）

1-7. 2 直接证法

- P原则、T原则。永真蕴含结论I、等价结论E
- 注意：证明过程中写出的命题公式的真值均为1

1-7. 2 间接证法

- CP原则，归谬法

离散数学

第二章 谓词逻辑 总结

? 谓词逻辑：将原子命题拆为**客体与谓词**两部分

- 如果仅仅是简单的拆分，那么谓词逻辑并不会比多很多内容，只是将一些结构相似的命题统一形式表示而已
  - 概念、表示、命题函数、个体域、全总个体域
- **量词:**谓词逻辑中的新内容全部围绕量词展开
  - 概念：全称量词、存在量词
  - 翻译：特性谓词X，全称量词中"X→ "，存在量词中"X ? "
  - 约束：约束部分、作用变元、辖域、自由变元、约束变元

xP(x)∧Q(x)

量词:

- 概念、翻译、约束

  - 对约束变元的换名

    - 范围：指导变元、辖域内的该变元
    - 注意：换位作用域内没有出现过的
    - 注意2：约束变元受束于前方最近量词

  - 对自由变元的代入

    - 范围：所有该自由变元
    - 注意：不能与任何已有变元相同

- 合适公式：相比命题逻辑的合式公式多了关于量词一条
- 等价公式：量词否定、辖域收缩扩张、量词分配、量词消去

$xP(x) \wedge Q(x)$

谓词等价公式

1. 量词否定等价公式

① ? $xA(x)$? x?$A(x)$　　② ? $xA(x)$? x?$A(x)$

3. 辖域扩张与收缩

① $x(A(x)$?$B)$? $xA(x)$?B　　$x(A(x)$?$B)$? $xA(x)$?B

② $x(A(x)$?$B)$? $xA(x)$?B　　$x(A(x)$?$B)$? $xA(x)$?B

③ $x(A(x)$?$B)$? $xA(x)$?B　　$x(A(x)$?$B)$? $xA(x)$?B

④ $x(B$?$A(x))$? B? $xA(x)$　　$x(B$?$A(x))$? B? $xA(x)$

4. 量词分配等值式

① $x(A(x)$?$B(x))$? $xA(x)$? $xB(x)$

② $x(A(x)$?$B(x))$? $xA(x)$? $xB(x)$

5. 消去量词等价式　若给定个体域 $D=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

① $xA(x)$? $A(a_1)$?$A(a_2)$?…?$A(a_n)$　　② $xA(x)$? $A(a_1)$?$A(a_2)$?…?$A(a_n)$

量词:

- 概念、翻译、约束

对约束变元的换名

- 范围：指导变元、辖域内的该变元
- 注意：换位作用域内没有出现过的
- 注意2：约束变元受束于前方最近量词

对自由变元的代入

- 范围：所有该自由变元
- 注意：不能与任何已有变元相同

- 合适公式：相比命题逻辑的合式公式多了关于量词一条
- 等价公式：量词否定、辖域收缩扩张、量词分配、量词消去

- 永真蕴含式：3个公式、4个规则、一个图

谓词永真蕴含式

1. xA(x)∨ xB(x) ? x(A(x)∨B(x))
2. x(A(x)∧B(x)) ? xA(x)∧ xB(x)
3. xA(x)→ xB(x) ? x(A(x)→B(x))
4. 全称指定规则（US规则）：

   x P(x) ? P(c) x是客体变元，c是任意客体常元
5. 存在推广规则（EG规则）：

   P(c ? xP(x) x是客体变元，c是某个客体常元
6. 存在指定规则（ES规则）：

   xP(x) ? P(c) x是客体变元，c是假设的一个客体常元
7. 全称推广规则（UG规则）：

   如果所有客体c都满足P(c)，那么记作 P(x) ? x P(x)，

"""xyÛP"(x,y)   yx P(x,y)

ßß

$"$xyP(x,y)   xy P(x,y)

ßß

"$"$xyP(x,y)   yx P(x,y)

ß   ß

$$ÛP$$xy(x,y)   xy P(x,y)

量词：

- 概念、翻译、约束

对约束变元的换名

- 范围：指导变元、辖域内的该变元
- 注意：换位作用域内没有出现过的
- 注意2：约束变元受束于前方最近量词
- 合适公式：多了关于量词一条
- 等价公式：量词否定、辖域收缩扩张、量词分配、量词消去

对自由变元的代入

- 范围：所有该自由变元
- 注意：不能与任何已有变元相同

- 永真蕴含式：3个公式、4个规则、一个图
- 前束范式：引入量词之后的规范形式

前束范式

前束范式定义

- 定义：量词——非否定、最前面；作用域——整个公式
- 步骤：

1. 否定深入（量词否定等价公式）
2. 改名、代入
3. 量词前移（辖域扩张、量词分配）

前束析取范式、前束合取范式

离散数学

第二章 谓词逻辑总结

量词：

- 概念、翻译、约束
  - 对约束变元的换名
    - 范围：指导变元、辖域内的该变元
    - 注意：换位作用域内没有出现过的
    - 注意2：约束变元受束于前方最近量词
  - 对自由变元的代入
    - 范围：所有该自由变元
    - 注意：不能与任何已有变元相同
  - 合适公式：多了关于量词一条
  - 等价公式：量词否定、辖域收缩扩张、量词分配、量词消去
- 永真蕴含式：3个公式、4个规则、一个图
- 前束范式：引入量词之后的规范形式
- 谓词演算推理原则
  - US、SG、ES、EG
  - 注意US到UG的限制，不能由ES引入自由变量

知识点选绊

真值表

命题公式翻译

命题等价公式演算

其他连接词
及最小联接词组

对偶和范式

命题推理理论

谓词公式翻译

谓词等价公式演算

前束范式

谓词推理理论

集合论部分总结

集合

- 3- 1 集合的概念和表示法
- 3- 2 集合的运算
- 3- 4 序偶与笛卡尔积
- 3- 5 关系及其表示
- 3- 6 关系的性质
- 3- 7 复合关系和逆关系
- 3- 8 关系的闭包运算
- 3- 9 集合的划分与覆盖
- 3- 10 等价关系与等价类
- 3- 11 相容关系
- 3- 12 序关系

函数

- 4.1 函数的基本概念
- 4.2 复合函数与逆函数

集合论部分总结

集合

- 3-1 集合的概念和表示法
- 3-2 集合的运算
- 3-4 序偶与笛卡尔积
- 3-5 关系及其表示
- 3-6 关系的性质
- 3-7 复合关系和逆关系
- 3-8 关系的闭包运算
- 3-9 集合的划分与覆盖
- 3-10 等价关系与等价类
- 3-11 相容关系
- 3-12 序关系

函数

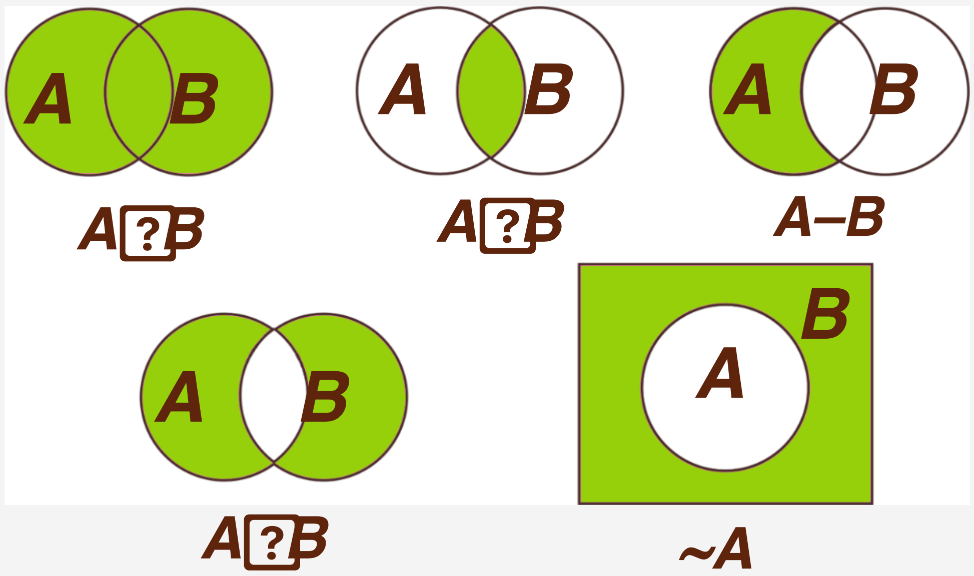
- 4.1 函数的基本概念
- 4.2 复合函数与逆函数

3- 1 集合的概念和表示法

- 集合的概念：
- 集合的表示法：
  - 列举法、叙述法
- 集合的关系：
  - 相等、子集、真子集
  - 空集、全集、幂集

3- 2 集合的运算

- 交集、并集、相对补集、
- 绝对补集、对称差



- 集合运算等价公式

? 3- 4 序偶和笛卡尔积

- 序偶的概念和表示

  <x, y> <x,y,z>=<<x,y>,z>

  <<x,y>,z> ≠ <x,<y,z>>

- 笛卡尔积
- A?B={<x,y>|x?A?y?B}
- ?不满足交换律、结合律
- 与?、?满足分配率
- 若A? ?则A?B?A?C ? B?A?C?A ?B?C
- A?C ? B?D ? A?B?C?D.
- A?B=?? A=??B=?

? 3-5 关系及其表示

? 3-5. 1 关系

- 关系：序偶的集合
- 定义域、值域、域

? 3-5. 2 一些特殊关系

- 空关系、恒等关系、全域关系
- 关系的交并补差还是关系

? 3-5. 3 关系的表示

- 序偶集合形式
- 关系矩阵M_R
- 关系图G_R

? 3-6 关系的性质

? 自反性

- $x ? A$,有$<x,x$ $?R$

? 反自反性

- $x ? A$,有$<x,x$ $?R$

? 对称性

- 若$<x,y$ $?R$则$<y,x$ $?R$

? 反对称性

- 若$<x,y$ $?R$,且$x?y$, 则$<y,x$ $?R$

? 传递性

- 若$<x,y$ $?R$ 且$<y,z$ $?R$ 则$<x,z$ $?R$

? 3-7 复合关系和逆关系

? 3-7. 1 概念

- $R ? S=$

$\{(<x, z>|\ y(<x, y> ? S ? <y,z> ? R)\}$

- $R^c = \{<y,x>|<x,y> ? R\}$

? 3-7. 2 性质

- $(F^c)^c=F$、 $\mathrm{dom}\, F^c= \mathrm{ran}\, F$
- $(F?G)?H = F?(G?H)$、$(F?G)^c = G^c?F^c$
- $F?(G \cup H) = F?G \cup F?H$
- $F?(G \cap H)\ ?\ F?G \cap F?H$
- $(R_1 \cup R_2)^c = R_1{}^c \cup R_2{}^c$
- $(R_1 \cap R_2)^c = R_1{}^c \cap R_2{}^c$
- $(R_1 - R_2)^c = R_1{}^c - R_2{}^c$、$(\sim R)^c = \sim R^c$

? 3-8 关系的闭包运算

? 自反(对称或传递)闭包的定义

- R 是自反的(对称的或传递的)
- R?R?
- 对A上任何包含R的自反(对称或传递)关系R?有R??R??
- 包含R满足自反(对称或传递)的最小集合

? 闭包的构造方法

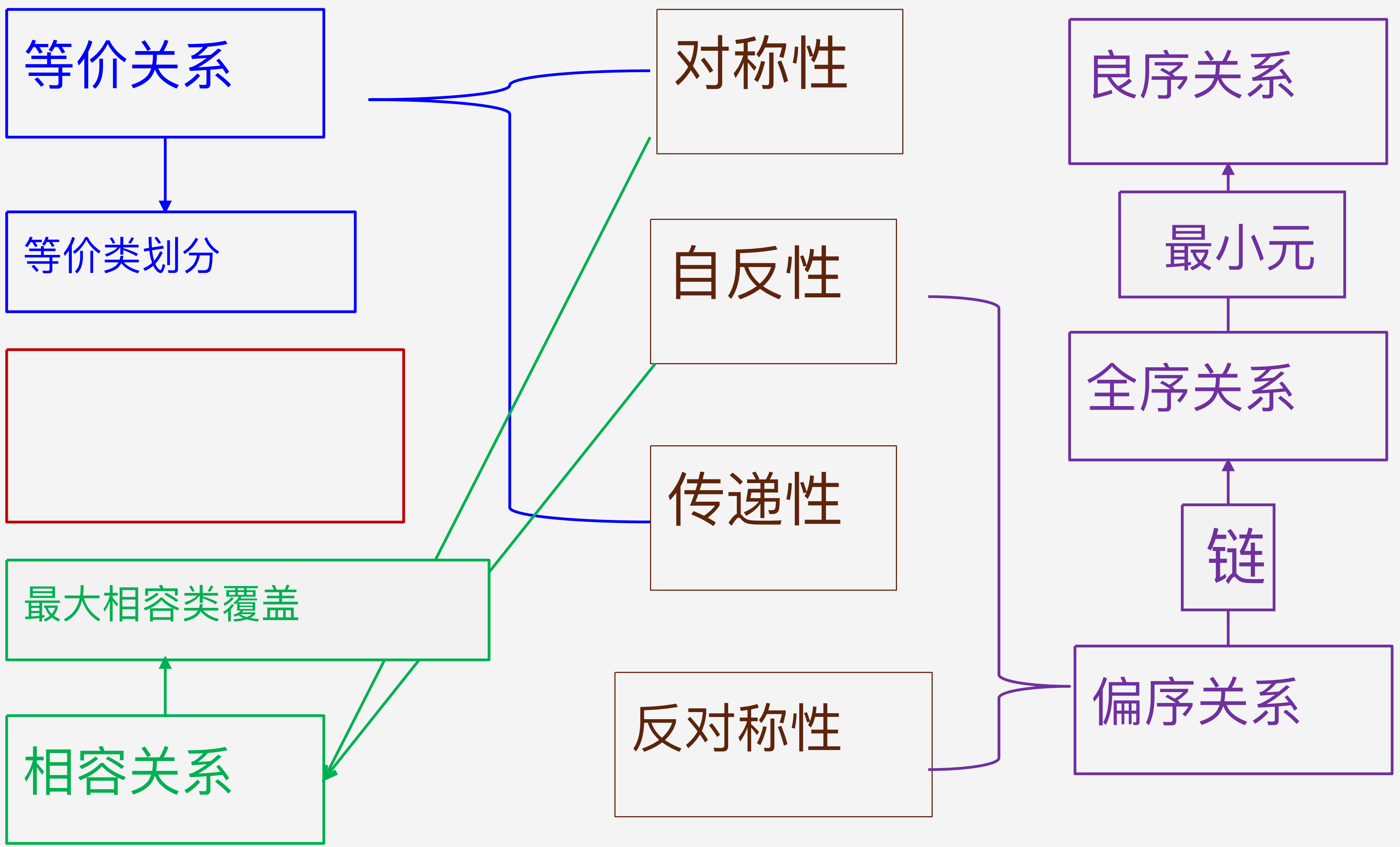
- $r(R)=R\cup I_A$
- $s(R)=R\cup R^c$
- $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup \ldots$

? 闭包的性质

- **A**?B, 则r(A) ?r(B), s(A) ?s(B), t(A) ?t(B),
- **rt(R)** =tr(R), **sr(R)** = rs(R), **st(R)** ?ts(R)

主要内容：

- 函数：X到Y的关系，满足：
  1. 定义域是X
  2. 单值性：每个x有唯一y与之对应
- 特殊函数类(Special functions)
  1. 单射：不同的x对应不同y
  2. 满射：每个y都有x与之对应
  3. 一一映射：既是满射又是单射


等价关系
等价类划分
最大相容类覆盖
相容关系
对称性
自反性
传递性
反对称性
良序关系
最小元
全序关系
链
偏序关系

知识点选绊

集合

笛卡尔积运算

关系的表示

复合关系和逆关系

自反、对称闭包

传递闭包及wallshall

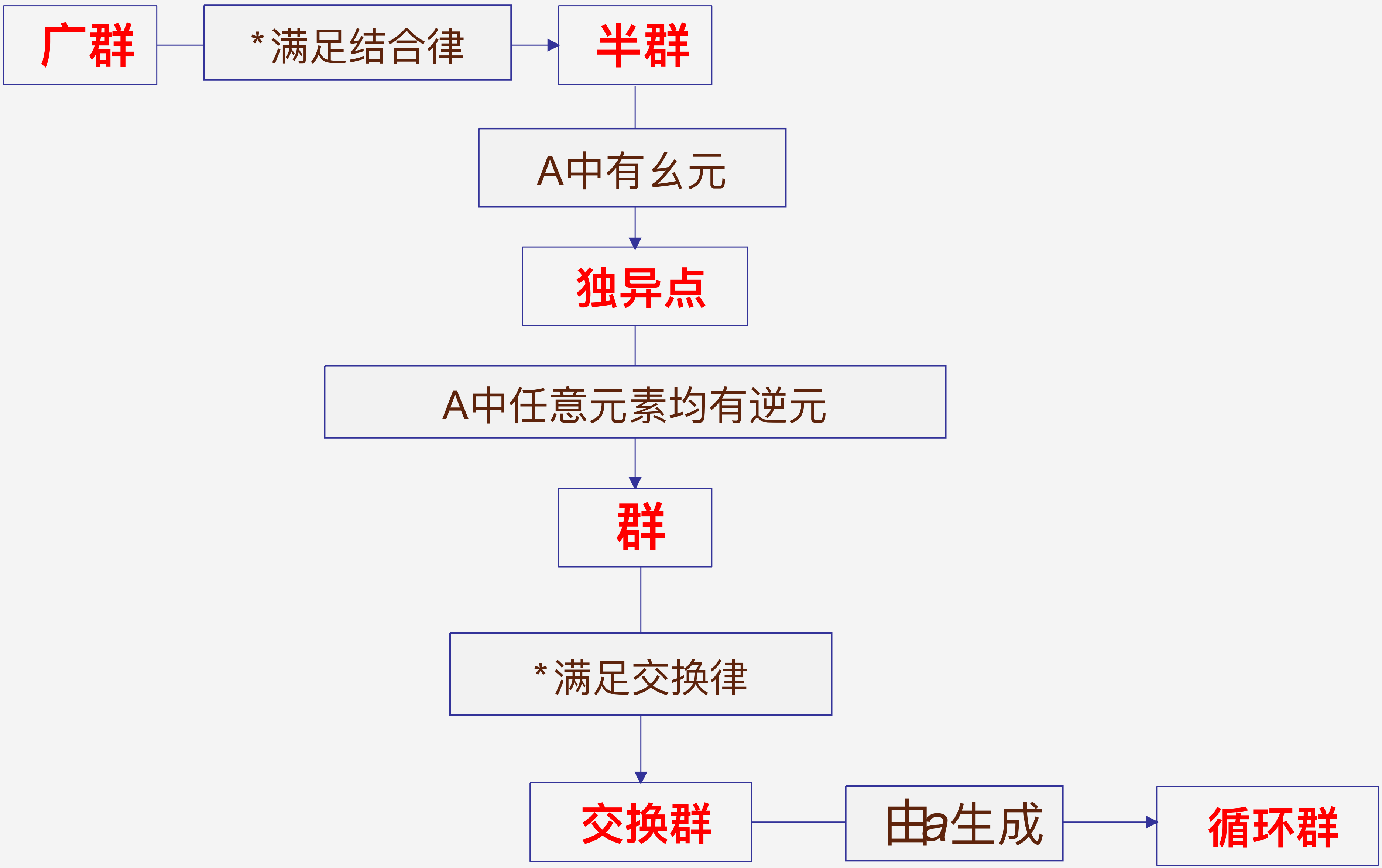
等价关系

相容关系

序关系

函数

本章内容回顾



上节内容回顾

? 陪集

设H是G的子群，$a\in G$. 令$Ha=\{h*a \mid h\in H\}$, 称Ha是子群H在G中的右陪集. 称a为Ha的代表元素.

? 拉格朗日定理

- $R=\{<a,b>\mid a\in G, b\in G$ 且 $a^{-1}*b\in H\}$，则R是G上的等价关系，且$[a]_R=aH$.
- 拉格朗日（Lagrange）定理：设$<G,*>$是有限群，$<H,*>$是$<G,*>$的子群，则$|G|=|H|\cdot[G:H]$

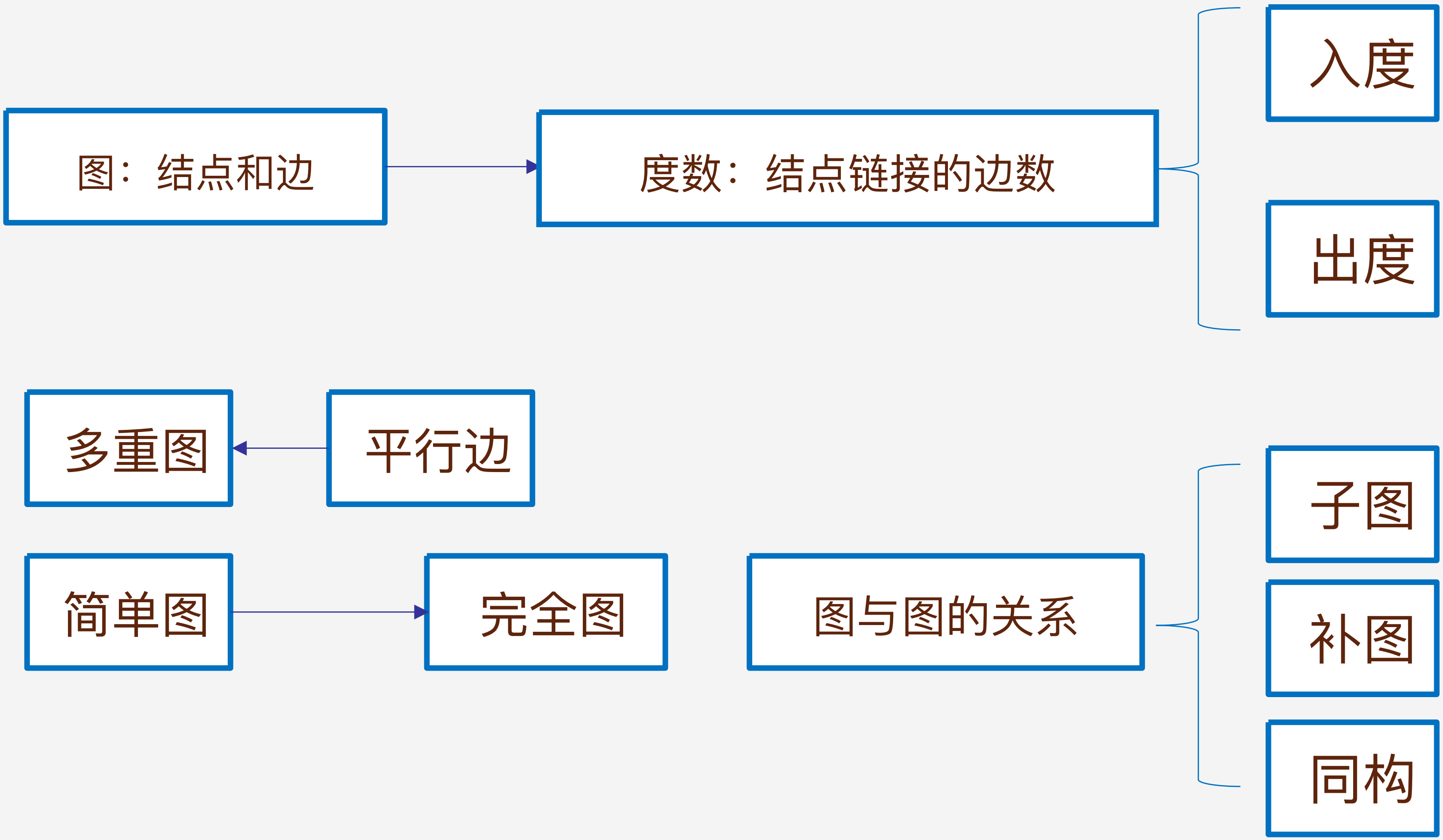
上节内容回顾

- 由拉格朗日定理可知：
  - 素数阶的群都是循环群
  - 4阶群只有两种：Klein群、4阶循环群
- 思考：6阶群一共有多少种？

知识点选绊

- 半群相关证明
- 群的性质
- 子群的判定
- 交换群和循环群
- 陪集的计算
- 同余关系
- 同态与同构
- 拉格朗日定理
- 环同态
- 整环与域

本章内容回顾：



本章内容：

概念

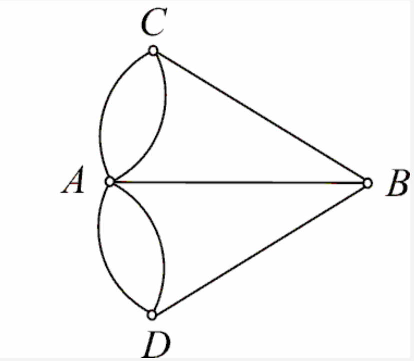
- 邻接矩阵
- 距离矩阵
- 可达性矩阵（连通矩阵）
- 关联矩阵

性质

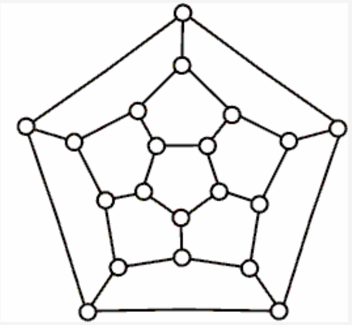
- 邻接矩阵幂次的意义

本章内容：

- 欧拉图



- 哈密顿图



欧拉图相关定理（充要条件）

(1) 无向图G是**欧拉图**当且仅当

G连通且**无奇度数顶点**.

(2) 无向图G是**半欧拉图**当且仅当

G 连通且**恰有两个奇度顶点**.

(3) 有向图D是**欧拉图**当且仅当

D是强连通的且每个顶点的**入度都等于出度**.

(4) 有向图D是**半欧拉图**当且仅当

D是单向**连通的**，且D中恰有**两个奇度顶点**，其中一个的入度比出度大1,另一个的出度比入度大1，而其余顶点的入度都等于出度.

本章内容：

n个结点的图，若两结点连通，则距离不超过n- 1

路与回路

- 通路、回路、简单通路

（无向）连通图

$k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

- 连通、连通分支、连通图
- 点割集、割点、点连通度
- 边割集、割边、边连通度

割点的充要条件

有向连通图

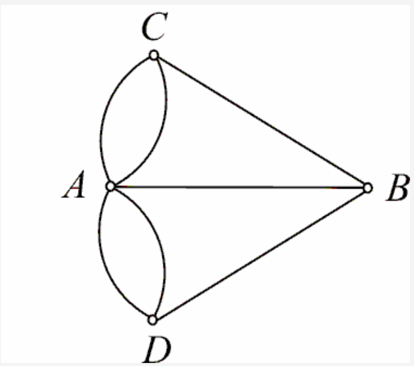
强连通图所有节点的回路

- 可达、单侧连通、强连通、弱连通、
- 强分图、弱分图、单侧分图

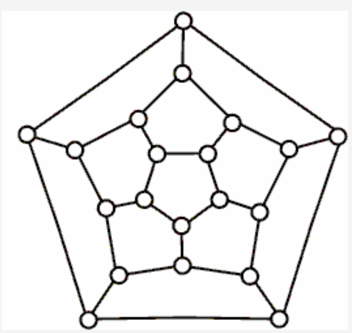
每个结点位于且仅位于一个强分图

? 本章内容：

? 欧拉图



? 哈密顿图



哈密尔顿图相关定理（必要条件）

无向图$G=<V,E>$是哈密顿图，
对于任意S?V且S? ?均有 $W(G\ \ S)$?S.

推论 无向图$G=<V,E>$是半哈密顿图，
对于任意的S?V且S? ?均有$W(G\ \ S)$?$S+1$

（充分条件）

设G是n阶无向简单图，若对于任意不相邻的顶点v_i,v_j，均有 $d(v_i)+d(v_j)$?$n\ \ 1$则G 中存在哈密顿通路.

推论 设G为n (n?3) 阶无向简单图，若对于 G
中任意两个不相邻的顶点v_i,v_j，均有$d(v_i)+d(v_j)$?n则G
中存在哈密顿回路，从而G为哈密顿图.

本章内容

平面图的对偶图

- 对偶图、自对偶图
- 对偶图仍是平面图

着色问题

- 韦尔奇鲍威尔法
- $x(K_n)=n$
- 至少有三个结点的平面图，必有一个结点u，使得deg(u)≤5
- 任意平面图G最多是5-色的

上节内容

平面图的概念

- 平面图、面、边界、次数、无限面
- 2度同构

平面图的性质

- 面的次数和是边数的两倍
- $v-e+r=2$
- 若$v \geq 3$，则$e \leq 3v-6$

平面图的判定

- 不含K_5和$K_{3,3}$的2度同构子图

上节内容

根树

- 有向树、根树、根、叶
- 父亲、儿子、祖先、后裔、兄弟
- m叉树、完全m叉树（定理）、正则m叉树
- 通路长度、内部通路长度、外部通路长度

相关定理

- 完全m叉树，i个分枝点，t个树叶，

  有$(m-1)i=t-1$

最优树

(1)无回路的连通图；

(2)无回路且$e=v-1$（其中e为边数，v为结点数）；

(3)连通且$e=v-1$；

(4)无回路且增加一条新边，得到一个且仅一个回路；

(5)连通且删去任何一个边后不连通；

(6)每一对结点之间有一条且仅一条路。

上节内容

树

- 树、树叶、内点、森林、
- 树的等价定义（6个）
- 一棵树最少有两片树叶

生成树

- 生成树、树枝、弦、树杈、最小生成树
- 连通图一定含有生成树
- 回路与生成树的补有公共边
- 边割集与生成树有公变
- 求最小生成树的Kruskal算法

知识点选绊

子图、补图

连通度相关证明和计算

强连通、单侧连通

邻接矩阵

关联矩阵

欧拉图

哈密尔顿图

平面图及着色

树、最小生成树

根树、最优树