考试教室 姓名 学号 年级 专业、班 学院

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密 封 线

重庆大学《高等数学 II-2》半期考试试卷

◉ A卷 ○ B卷

2021— 2022 学年 第 2 学期

开课学院：数统 课程号：MATH10822 考试日期：20220414

考试方式：○开卷 ◉闭卷 ○其他 考试时间：120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

2.考试作弊,留校察看,毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等,属严重作弊,开除学籍。

一、 单项选择题(每小题 3 分,共 18 分)

1. 已知 $\vec{a},\vec{b}$ 均为单位向量,且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,则 $|\vec{a}-2\vec{b}|$ 为( ).C

   A. 3 B. 4 C. $\sqrt{3}$ D. 2

2. 二元函数 $z=x^3+y^3-15xy$ 在( ).B

   A. 点 $(0,0)$ 处取得极小值,点 $(5,5)$ 处取得极大值

   B. 点 $(0,0)$ 处不取得极值,点 $(5,5)$ 处取得极小值

   C. 点 $(0,0)$ 处取得极小值,点 $(5,5)$ 处不取得极值

   D. 点 $(0,0)$ 处取得极大值,点 $(5,5)$ 处取得极小值

3. 下列论述正确的是( ).A

   A. 若二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 存在,则一元函数 $f(x,y_0)$ 在点 $x=x_0$ 处连续

   B. 若二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微,则偏导数 $f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0)$ 存在~~且连续~~

   且连续

   C. 若二元函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0)$ 存在,则

   $$dz=f'_x(x_0,y_0)dx+f'_y(x_0,y_0)dy$$

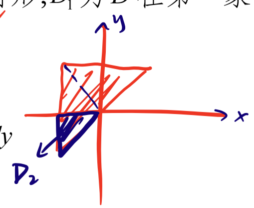
   D. 若 (x_0,y_0) 为二元函数 $z=f(x,y)$ 的一个极值点,则 $\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)=0 \\ f'_y(x_0,y_0)=0 \end{cases}$

4. 二元函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处(A).C

   A. 不连续 B. 偏导数存在

   C. 任意方向的方向导数都存在 D. 可微

5. 设区域 D 是以 $(1,1),(-1,1),(-1,-1)$ 为顶点的三角形,D_1 为 D 在第一象限的部分,则 $\iint\limits_D (xye^{x^2}+\cos x\sin y)dxdy=$( ).A

   A. $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y dxdy$ B. $2\iint\limits_{D_1} xye^{x^2}dxdy$

   C. $4\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y dxdy$ D. 0

   $2\iint\limits_{D_2}\cos x\sin y dxdy$

6. 设 $f(u)$ 可导,且 $z=xyf\left(\frac{y}{x}\right)$. 若 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy(\ln y-\ln x)$,则( ).B

   A. $f(1)=\frac{1}{2},f'(1)=0$ B. $f(1)=0,f'(1)=\frac{1}{2}$

   C. $f(1)=1,f'(1)=0$ D. $f(1)=1,f'(1)=\frac{1}{2}$

命题人： 组题人： 审题人： 命题时间： 教务处制

二、填空题(每小题 3 分,共 18 分)

7. 过点 $M(1,1,1)$ 且与直线 $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x+2y+3z-6=0 \end{cases}$ 平行的直线方程为 __$\dfrac{x-1}{-8}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{6}$__.

8. 二元函数 $z=3x^2y-y^2$ 在点 $P(2,3)$ 处沿曲线 $y=x^2-1$ 朝 x 增大方向的方向导数是 __$\dfrac{60}{\sqrt{17}}$__.

$12-6$

$(6yx,\ 3x^2-2y)\cdot(1,4)\cdot\dfrac{1}{\sqrt5}$

$(36,\ 6)$

$\dfrac{1}{\sqrt5}\cdot 36+24=60=12\sqrt5$ ✗

9. 设平面区域 D 是曲线 $x^2+y^2=2y$ 所围成的有界闭区域,则二重积分 $\iint\limits_D x^2dxdy=$ ______.

-3

10. 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt2$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 $dz\big|_{(1,0,-1)}=$ __$dx-\sqrt2dy$__.

11. 已知三点 $A(2,-1,2),B(1,2,-1),C(3,2,1)$,则垂直于点 A、B、C 所在平面的单位向量 $\vec{\boldsymbol{n}}^0=$ __$\pm\dfrac{1}{\sqrt{22}}\{3,-2,3\}$__.

-1.5

12. 设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le1,0\le z\le1\}$,则

$$\iiint\limits_\Omega[e^{z^3}\arctan(x^4y^3)+2]dV=\_\_2\pi\_\_.$$

三、计算题(每小题 7 分,共 28 分)

13. 设 $z=f(e^x\sin y,x^2+y^2)$,其中 f 具有二阶连续偏导数,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】 设 $z=f(e^x\sin y,x^2+y^2)$.

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=f_1'e^x\sin y+2xf_2'. \qquad (2\text{ 分})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'e^x\cos y+e^x\sin y[f_{11}''e^x\cos y+2yf_{12}'']+2x[f_{21}''e^x\cos y+2yf_{22}''] \quad (6\text{ 分})$$

$$=f_1'e^x\cos y+\frac12e^{2x}\sin 2yf_{11}''+2e^x(y\sin y+x\cos y)f_{12}''+4xyf_{22}''. \quad (7\text{ 分})$$

14. 求直线 $L:\begin{cases} 2x-4y+z=0 \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$ 在平面 $\pi:4x-y+z+1=0$ 上的投影直线方程.

【解】 设 π_1 为过 L 且与 π 垂直的平面.

$$\Rightarrow \pi_1:2x-4y+z+\lambda(3x-y-2z-9)=0. \qquad (2\text{ 分})$$

$\Rightarrow \pi_1:(2+3\lambda)x+(-4-\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0$, 其中

$$\overline{n_\pi}=\{4,-1,1\},\overline{n_{\pi_1}}=\{2+3\lambda,-4-\lambda,1-2\lambda\}. \qquad (4\text{ 分})$$

$$\Rightarrow (2+3\lambda)\cdot4+(-4-\lambda)\cdot(-1)+(1-2\lambda)\cdot1=0.$$

$$\Rightarrow \lambda=-\frac{13}{11}.$$

$$\Rightarrow \pi_1:17x+31y-37z+117=0. \qquad (6\text{ 分})$$

$\Rightarrow$ 直线 L 在平面 π 上的投影直线方程为

$$L:\begin{cases} 17x+31y-37z+117=0, \\ 4x-y+z+1=0. \end{cases} \qquad (7\text{ 分})$$

15. 计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega z^2dV$,其中积分区域 Ω 是由曲面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 及 $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$ 所围成的有界闭区域.

【解】设 $\Omega=\left\{(\rho,\theta,z)\middle|0\le\theta\le2\pi,0\le\rho\le\frac{\sqrt{3}}{2}R,\sqrt{R^2-\rho^2}\le z\le R-\sqrt{R^2-\rho^2}\right\}$.

(2 分)

$$\Rightarrow I=\iiint\limits_{\Omega}z^2\rho d\rho d\theta dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}d\rho\int_{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho z^2dz$$

$$=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}\rho[(\sqrt{R^2-\rho^2})^3-(R-\sqrt{R^2-\rho^2})^3]d\rho \qquad (4\text{ 分})$$

-3

$$\xlongequal{\rho=R\sin t}-\frac{2}{3}\pi R^5\int_0^{\frac{\pi}{3}}[(\cos^3t-(1-\cos t)^3]\cos t\,d(\cos t)$$

$$\xlongequal{u=\cos t}\frac{2}{3}\pi R^5\int_{\frac{1}{2}}^{1}[(u^3-(1-u)^3]u\,du$$

$$=\frac{2}{3}\pi R^5\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2u^4-3u^3+3u^2-u)du$$

$$=\frac{2}{3}\pi R^5\left[\frac{2u^5}{5}-\frac{3u^4}{4}+u^3-\frac{u^2}{2}\right]\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\frac{59}{480}\pi R^5. \qquad (7\text{ 分})$$

【注】此题用截面法计算量比较小.

16. 求由方程 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

【解】 设 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$.

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{2x-6y}{-2y-2z}=\dfrac{x-3y}{y+z},\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{-6x+20y-2z}{-2y-2z}=\dfrac{-3x+10y-z}{y+z}.\end{cases} \qquad (1\text{ 分})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{(y+z)-(x-3y)\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(y+z)^2},\\[3ex]\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\left(10-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)(y+z)-(-3x+10y-z)\left(1+\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}{(y+z)^2},\\[3ex]\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{-3(y+z)-(x-3y)\left(1+\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}{(y+z)^2},\end{cases} \qquad (3\text{ 分})$$

令 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x=3y,\\z=y.\end{cases}$ 代入原方程得 $y^2=9$. 从而

$y_1=z_1=3,y_2=z_2=-3.$ 于是驻点为 $(9,3),(9,-3)$. (4 分)

a) 在点 $(-9,-3,-3)$ 处

$$\begin{cases}A_1=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-9,-3)}=-\dfrac{1}{6},\\[3ex]B_1=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(-9,-3)}=\dfrac{1}{2},\\[3ex]C_1=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-9,-3)}=-\dfrac{5}{3}.\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A_1C_1-B_1^2=\dfrac{5}{18}-\dfrac{1}{4}>0,\\ A_1<0.\end{cases}$$

$\Rightarrow z=z(x,y)$ 在点 $(-9,-3)$ 处取得极大值 $z=-3$. (6 分)

b) 在点 $(9,3,3)$ 处，

$$\begin{cases}A_2=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(9,3)}=\dfrac{1}{6},\\ B_2=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(9,3)}=-\dfrac{1}{2},\\ C_2=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(9,3)}=\dfrac{5}{3}.\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A_2C_2-B_2^2=\dfrac{5}{18}-\dfrac{1}{4}>0,\\ A_2>0.\end{cases}$$

$\Rightarrow z=z(x,y)$ 在点 $(9,3)$ 处取得极小值 $z=3$. (7 分)

四、综合题(每小题8分,共16分)

17. 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 考察 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的可偏导性、可微性以及偏导数的连续性.

【解】 首先用定义法求函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的偏导数:

$$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\cos\dfrac{1}{(\Delta x)^2}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\times\cos\frac{1}{(\Delta x)^2}=0.$$

同理 $f_y'(0,0)=0$. 因此, $f(x,y)$ 在原点处可偏导. (3 分)

其次用定义法考察 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微分?

因为 $\displaystyle\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\Delta f-[f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y]}{\rho}$

$$=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\cos\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0^+}\rho\cos\frac{1}{\rho^2}=0,$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微. (6 分)

最后考察偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性:

在点 $(x,y)\neq(0,0)$ 处, $f_x'(x,y)=2x\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{2x}{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$，

当 (x,y) 沿直线 $y=0$ 趋于 $(0,0)$ 时，

$$2x\cos\frac{1}{x^2+y^2}=2x\cos\frac{1}{x^2}\to 0,$$

$$\frac{2x}{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^2}\text{ 不存在},$$

故 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_x'(x,y)$ 不存在. 因此, $f_x'(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.同理

$f_y'(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处也不连续.　　(8 分)

18.计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z+4)^2dxdydz$,其中

$$\Omega=\{(x,y,z)\,\big|\,|x|\le 1,|y|\le 1,|z|\le 1\}.$$

-4

【解】 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z+4)^2dxdydz$

对称性

$=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+4y^2+9z^2+16)dxdydz$　　(2 分)

轮换性

$=\iiint\limits_{\Omega}(14x^2+16)dxdydz$　　(4 分)

$=14\int_{-1}^{1}x^2dx\iint\limits_{\substack{|y|\le1\\|z|\le1}}dydz+16\times 8$　　(7 分)

67232

$=\dfrac{496}{3}.$　　(8 分)

$\frac{1}{360}(10^5-8^5+2\times4^5-2^6)$

五、证明题(每小题 7 分,共 14 分)

19.设体密度为 $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 的三维空间的几何体 Ω 是由 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 及 $x^2+y^2=z^2$ $(z\ge 0)$ 所围成的有界闭区域.证明:此几何体的质量为 $m=\frac{1}{5}\pi R^5(2-\sqrt{2})$.

【证】 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$

$=\iiint\limits_{\Omega'}r^2\cdot r^2\sin\varphi\, drd\varphi d\theta$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{R}r^4\sin\varphi dr$　　(4 分)

$=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\cdot\int_0^{R}r^4dr$

$=2\pi\cdot[-\cos\varphi]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\left[\dfrac{r^5}{5}\right]_0^1$

$=\dfrac{1}{5}\pi R^5(2-\sqrt{2}).$　　(7 分)

-5

20. 已知 $f(x,y)\in C^{(2)},D=\{(x,y)|0\le x,y\le 1\},f(1,y)=0,f(x,1)=0$. 证明:

$$\iint\limits_{D}xyf''_{xy}(x,y)d\sigma=\int_0^1dx\int_0^1f(x,y)dy.$$

【证】 $\iint\limits_{D}xyf''_{xy}(x,y)d\sigma$

$=\int_0^1dx\int_0^1xyf''_{xy}(x,y)dy$

$=\int_0^1dx\int_0^1xyd[f_x'(x,y)]$　　(2 分)

$=\int_0^1\left\{[xyf_x'(x,y)]\Big|_0^1-\int_0^1f_x'(x,y)xdy\right\}dx$

$=\int_0^1xf_x'(x,1)dx-\int_0^1\left[\int_0^1f_x'(x,y)xdy\right]dx$　　(4 分)

$=\int_0^1xd[f(x,1)]-\int_0^1dy\int_0^1xf_x'(x,y)dx$

$=\int_0^1xd[f(x,1)]-\int_0^1\left[\int_0^1xd[f(x,y)]\right]dy$

$=[xf(x,1)]\Big|_0^1-\int_0^1f(x,1)dx-\int_0^1\left\{[xf(x,y)]\Big|_0^1-\int_0^1f(x,y)dx\right\}dy$

$=f(1,1)-\int_0^1f(x,1)dx-\int_0^1f(1,y)dy+\int_0^1dy\int_0^1f(x,y)dx$　(6 分)

$\underline{\underline{f(1,1)=f(x,1)=f(y,1)=0}}$ $\int_0^1dx\int_0^1f(x,y)dy.$　　(7 分)

25.5

6

六、应用题(共 6 分)

21. 求原点到曲线$\Gamma:\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+4z^2=1 \end{cases}$的最短距离与最远距离.

【解】 设 (x,y,z) 为曲线上任一点,则原问题转化为求目标函数 $d^2=x^2+y^2+z^2$ 在双约束条件 $x+y+z=0, x^2+y^2+4z^2=1$ 下的条件极值.

令 $L(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x+y+z)+\mu(x^2+y^2+4z^2-1)$, 则

$$\begin{cases} L'_x=2x+\lambda+2\mu x=0, \\ L'_y=2y+\lambda+2\mu y=0, \\ L'_z=2z+\lambda+8\mu z=0, \\ L'_\lambda=x+y+z=0, \\ L'_\mu=x^2+y^2+4z^2-1=0. \end{cases}$$ (4 分)

解得驻点

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{\sqrt{2}}{6},-\frac{\sqrt{2}}{3}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{6},-\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{\sqrt{2}}{3}\right).$$

于是
$$\begin{cases} d_{\max}=\max\left\{\begin{array}{l} d\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),d\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right), \\ d\left(\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{\sqrt{2}}{6},-\frac{\sqrt{2}}{3}\right),d\left(-\frac{\sqrt{2}}{6},-\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \end{array}\right\}=1, \\ d_{\min}=\min\left\{\begin{array}{l} d\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),d\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right), \\ d\left(\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{\sqrt{2}}{6},-\frac{\sqrt{2}}{3}\right),d\left(-\frac{\sqrt{2}}{6},-\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \end{array}\right\}=\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

也就是说,最远距离为1,最短距离为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.　(2 分)