证：循环群的任意子群也是循环群

设 $\langle G, * \rangle$ 是循环群，a 为生成元

$\langle S, * \rangle$ 为其子群

∃最小正整数 m 有 $a^m \in S$

对于 $\forall x \in S$，$\exists l$，$a^l = x$ 且 $l = km + t$

其中 $k > 0$，$t \in [0, m)$

即 $(a^m)^k * a^t = x$

$$a^t = (a^m)^{-k} * x \in S$$

∵ m 是使 $a^m \in S$ 成立的最小正整数

∴ $t = 0$

∴ $\forall x \in S$ 有 $(a^m)^k = x$.

∴ $\langle S, * \rangle$ 是循环群.

$\langle G, * \rangle$, $|G| = n$

$\forall x \in G$, x阶数为k

x生成的子循环群 $\langle \{e, x, x^2, \ldots, x^{k-1}\}, * \rangle = \langle S, * \rangle$

是$\langle G, * \rangle$的子群

$\therefore$ 由拉格朗日定理: $n | k$