

第八章 非正弦周期电流电路的分析

产生非正弦周期电流的原因：

- 1、激励本身为非正弦周期函数。
- 2、几个不同频率的正弦激励作用于同一线性电路。
- 3、单一频率的正弦激励作用于非线性电路。

◆对于周期性的激励与响应，可以利用傅里叶级数分解为一系列不同频率的简谐分量。

◆根据叠加定理，线性电路对非正弦周期性激励的稳态响应，等于组成激励信号的各简谐分量分别作用于电路时所产生的响应的叠加。而响应的每一简谐分量可用正弦稳态分析的相量法求得。

谐波分析法

主要内容:

- 1、周期函数分解为傅里叶级数
- 2、非正弦周期电流电路的计算
- 3、非正弦周期量的有效值、平均功率

§ 8-1 周期函数的傅里叶级数展开式

周期函数

$$f(t) = f(t + kT) \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

满足狄里赫利条件(Dirichlet condition)

傅里叶级数:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

傅里叶系数:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_1 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega_1 t dt$$

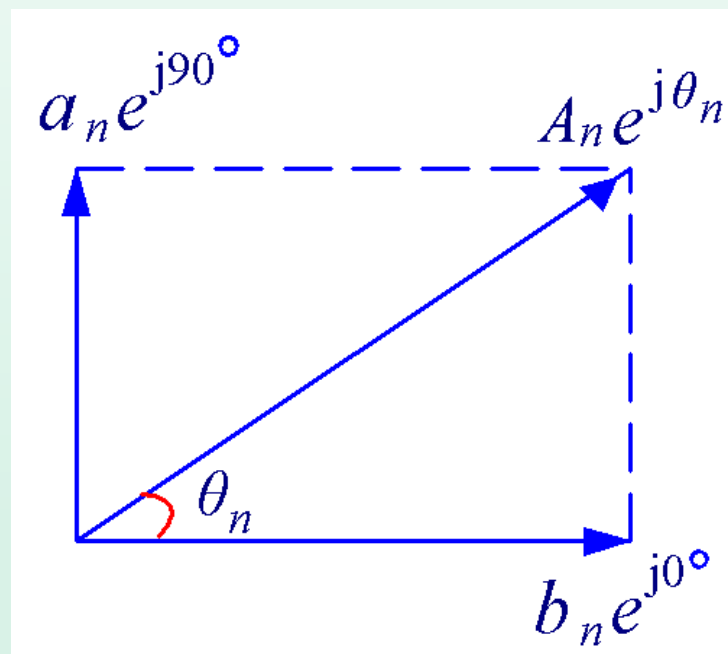
为方便, 积分
区间通常取
[0,T] 或
[-T/2, T/2]

频率相同的余弦项与正弦项合并为一个正弦函数

$$a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t = A_n \sin(n\omega_1 t + \theta_n)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\theta_n = \arctan \frac{a_n}{b_n}$$



$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_1 t + \theta_n)$$

$$\frac{a_0}{2} \quad \text{常数项 (直流分量)}$$

基波(fundamental wave)或一次谐波(first harmonic):

$$A_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1)$$

n 次谐波(n -th harmonic):

$$A_n \sin(n\omega_1 t + \theta_n) \quad (n > 1)$$

二次和二次以上的谐波可统称为高次谐波(higher order harmonic)

周期函数 $f(t)$ 可以表示为常数项与许多不同频率的简谐分量之和, 这种方法称为**谐波分析法**。

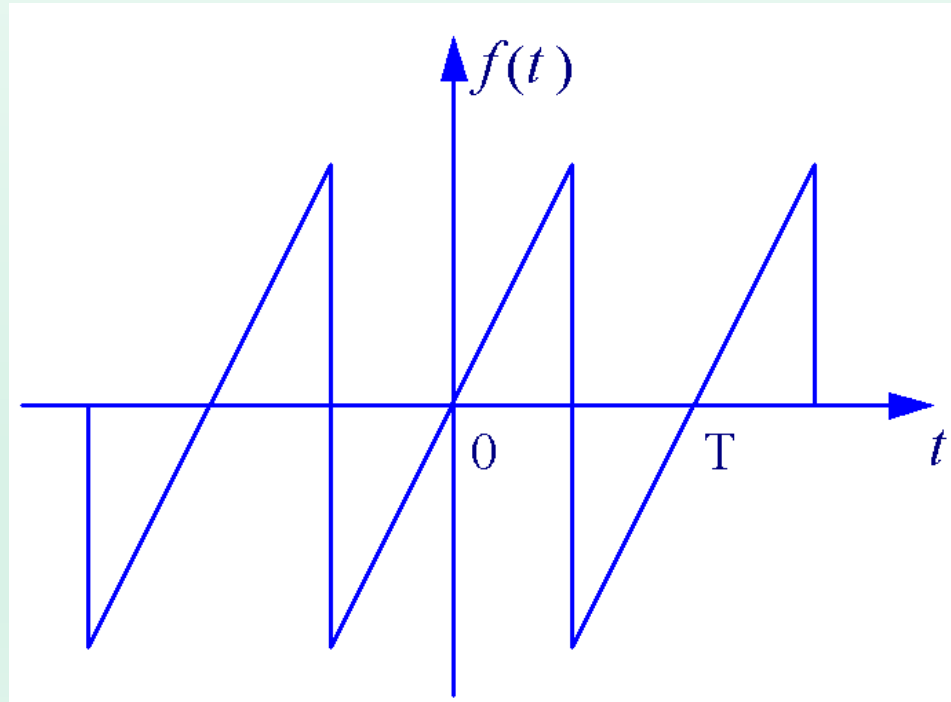
具有对称性的周期函数的傅里叶级数展开式的特点：

(1) 奇函数(odd function)：

$$f(t) = -f(-t)$$

波形特点：

- 1、奇函数的波形对称于坐标系的原点；
- 2、上下平移会破坏对称性；
- 3、左右平移会破坏对称性；



$$\frac{a_0}{2} = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n \neq 0$$

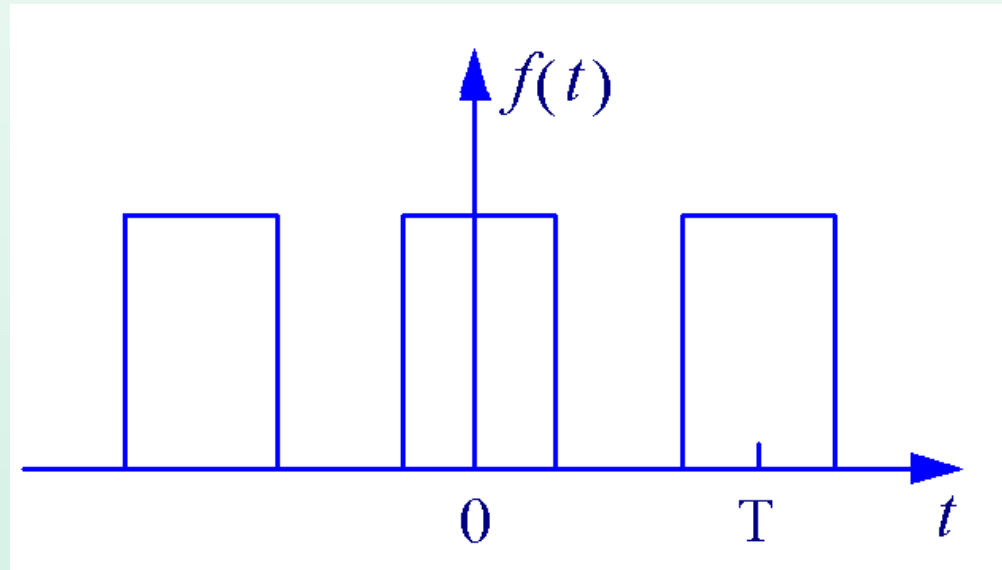
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt$$

(2) 偶函数(even function):

$$f(t) = f(-t)$$

波形特点:

- 1、偶函数的波形对称于纵轴;
- 2、上下平移仍为偶函数;
- 3、左右平移会破坏对称性;



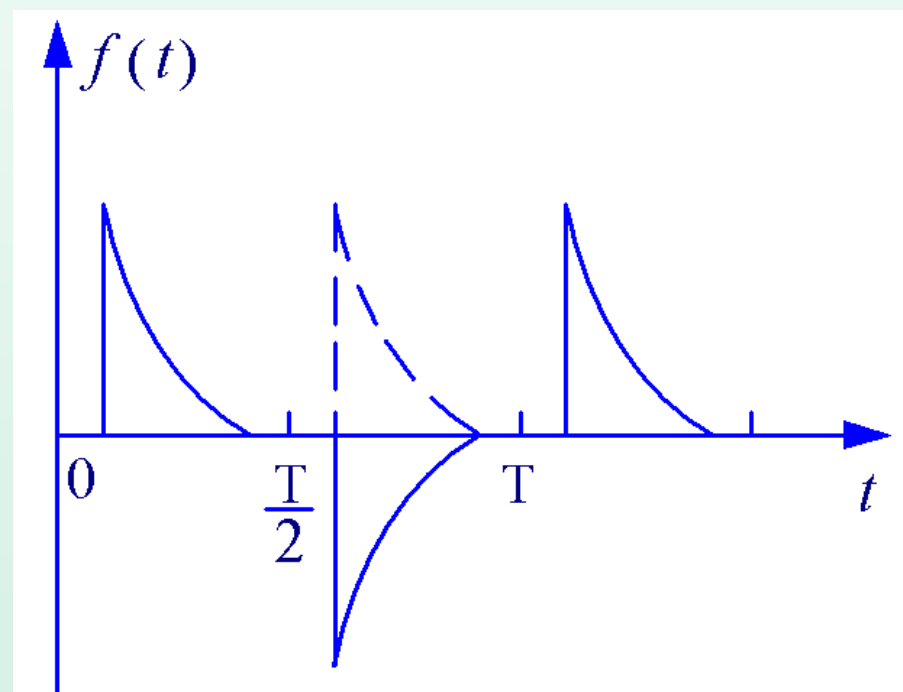
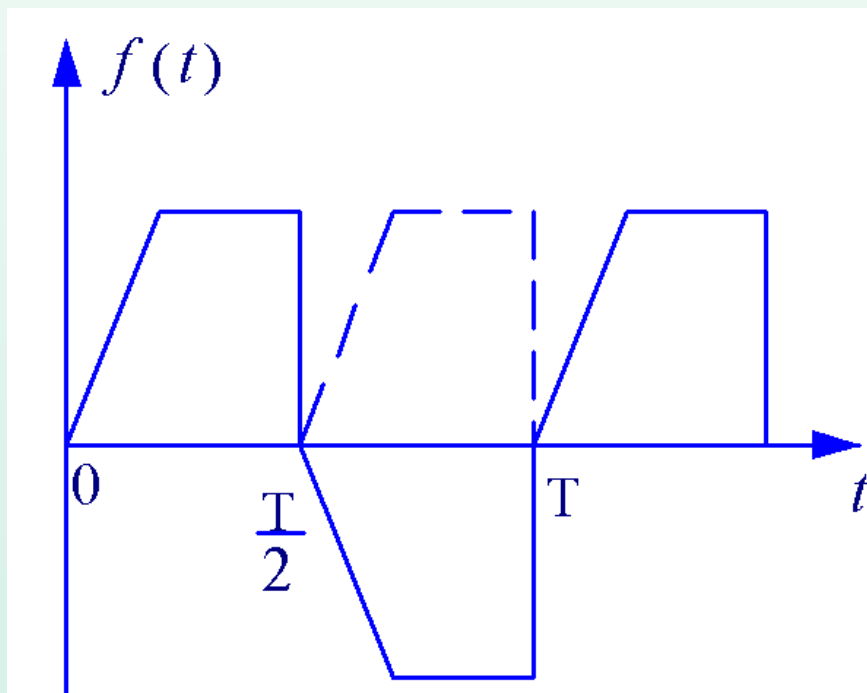
$$b_n = 0, \quad \frac{a_0}{2} \neq 0, \quad a_n \neq 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt$$

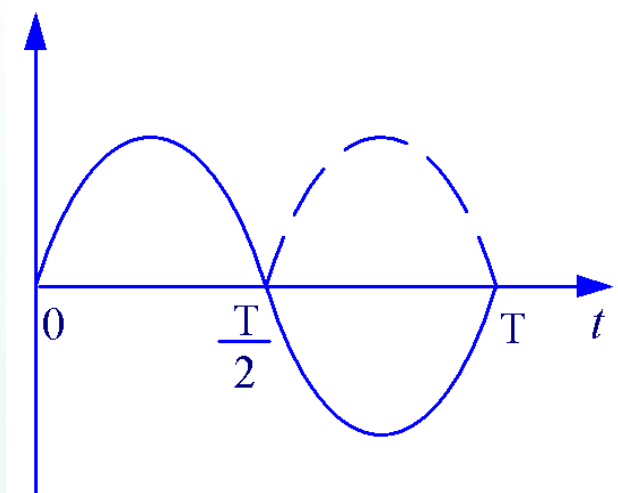
$$= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt$$

(3) 奇谐波函数(odd harmonic function) :

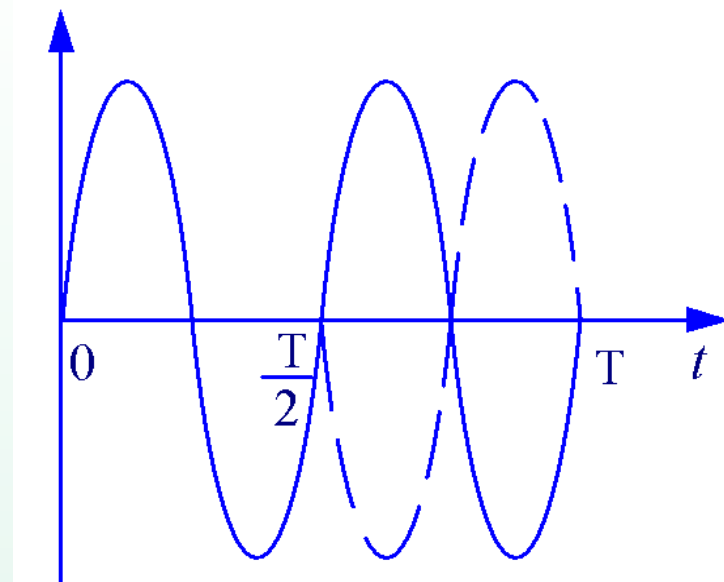
$$f(t) = -f\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$$



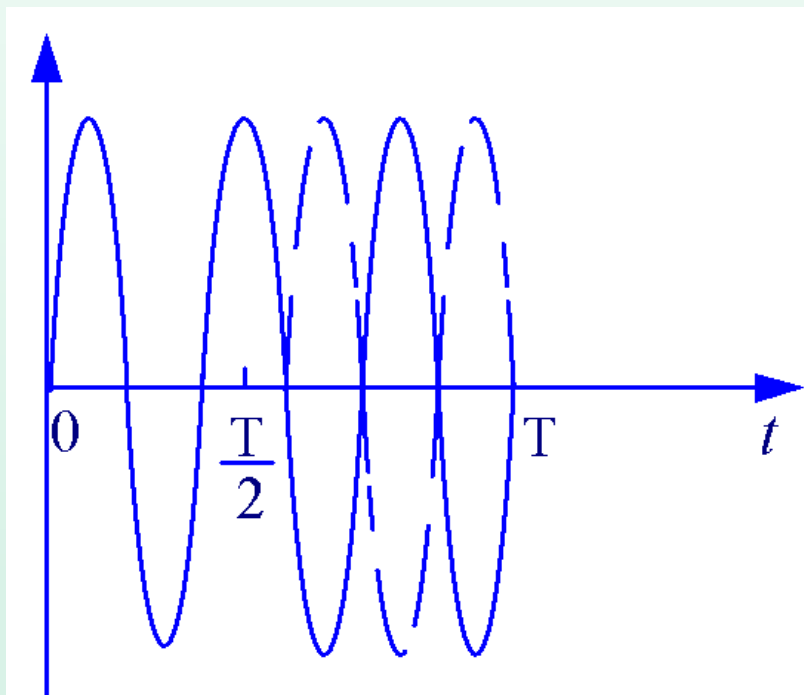
后半周对横轴的镜象是前半周的重复



一次谐波



二次谐波



三次谐波

**凡是奇次谐波，比如：1,3,5...次，均具有半波对称性：
后半周对横轴的镜象是前半周的重复**

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)]$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_1 t + \theta_n) \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

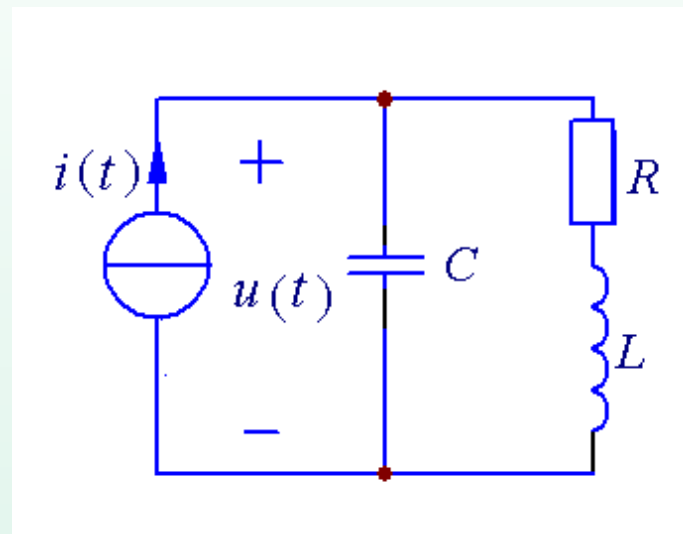
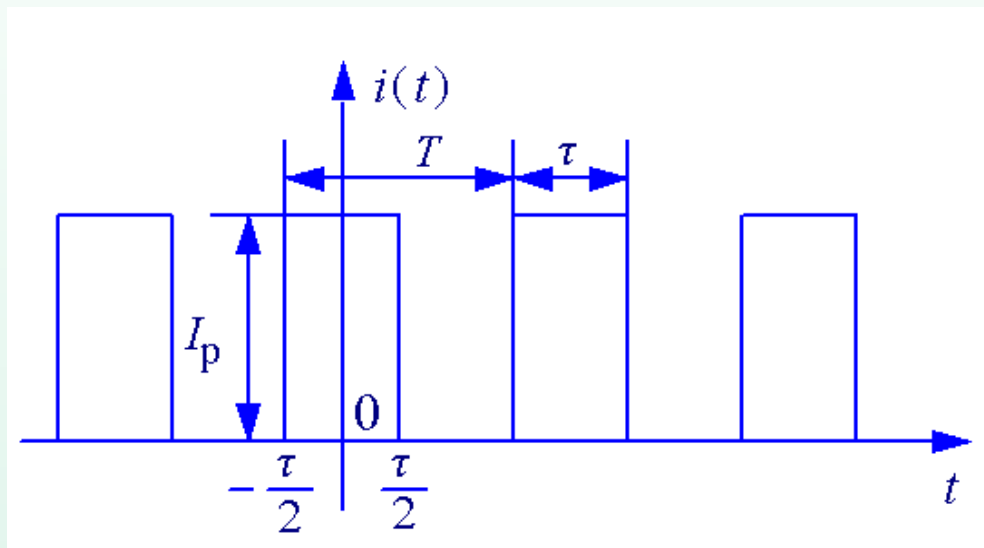
值得指出：一个周期函数是否具有半波对称性，仅决定于该函数的波形，但是，一个周期函数是否为奇函数或偶函数则不仅与该函数的波形有关，而且和时间起点的选择有关。

§ 8-2 线性电路对周期性激励的稳态响应

步骤:

- 1、将周期性激励分解为傅里叶级数;
- 2、根据叠加定理, 求每一谐波源单独作用于电路的响应;
- 3、将各谐波激励所引起的时域响应叠加起来, 即得线性电路对非正弦周期性激励的稳态响应。

例1 一个周期性矩形脉冲电流源激励一个并联谐振电路



已知：电路的参数为 $R = 20 \, \Omega$, $L = 1 \, \text{mH}$, $C = 1000 \, \text{pF}$ 。

$$T = 6.28 \, \mu\text{s}, \quad \tau = \frac{T}{2}, \quad I_p = \frac{\pi}{2} \text{mA}。$$

试求：此并联谐振电路的端电压 $u(t)$ 。

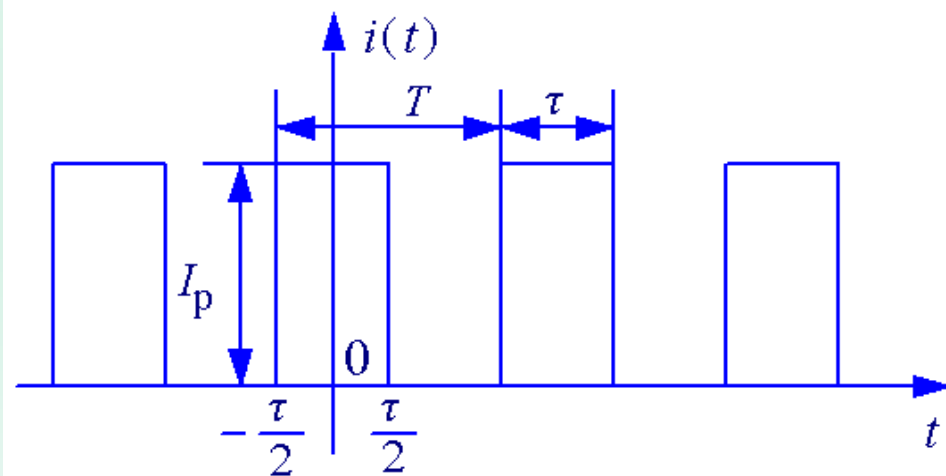
解： (1)对周期性激励电流进行谐波分析。

$$i(t) = \begin{cases} I_p & -\tau/2 < t < \tau/2 \\ 0 & -\frac{T}{2} < t < -\frac{\tau}{2} \text{ 及 } \tau/2 < t < T/2 \end{cases}$$

此函数波形具有偶函数对称性，故 $b_n=0$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} i(t) \cos(n\omega_1 t) dt$$

$$= \frac{4}{T} \int_0^{\tau/2} I_p \cos(n\omega_1 t) dt$$



$$a_n = \frac{2I_p}{n\pi} \sin\left(\frac{\tau}{T} n\pi\right)$$

$$I_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i(t) dt$$

$$= \frac{2}{T} \int_0^{\tau/2} I_p dt = \frac{\tau}{T} I_p$$

电流*i(t)*的傅里叶级数展开式为

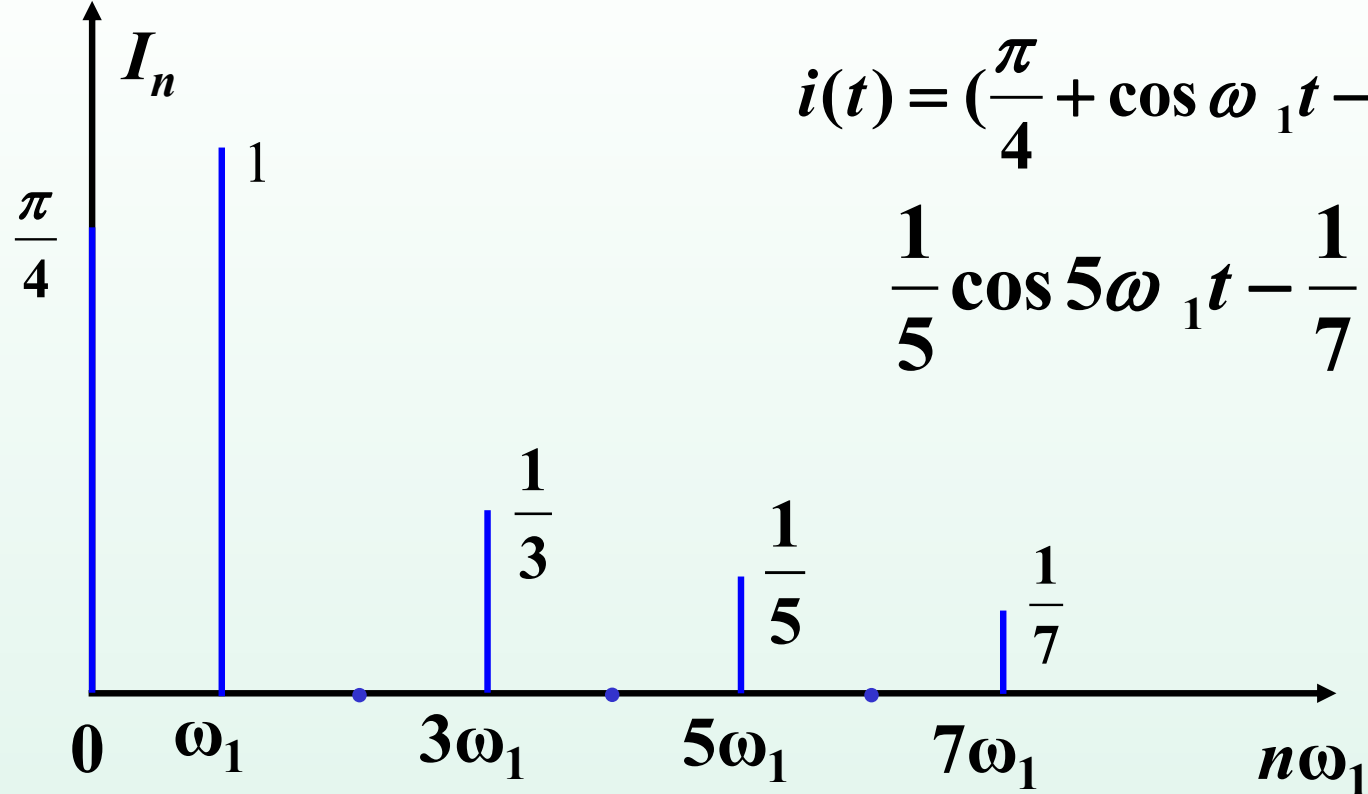
$$i(t) = \left(\frac{\pi}{4} + \cos \omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_1 t - \frac{1}{7} \cos 7\omega_1 t + \cdots \right) \text{ mA}$$

幅值频谱和相角频谱

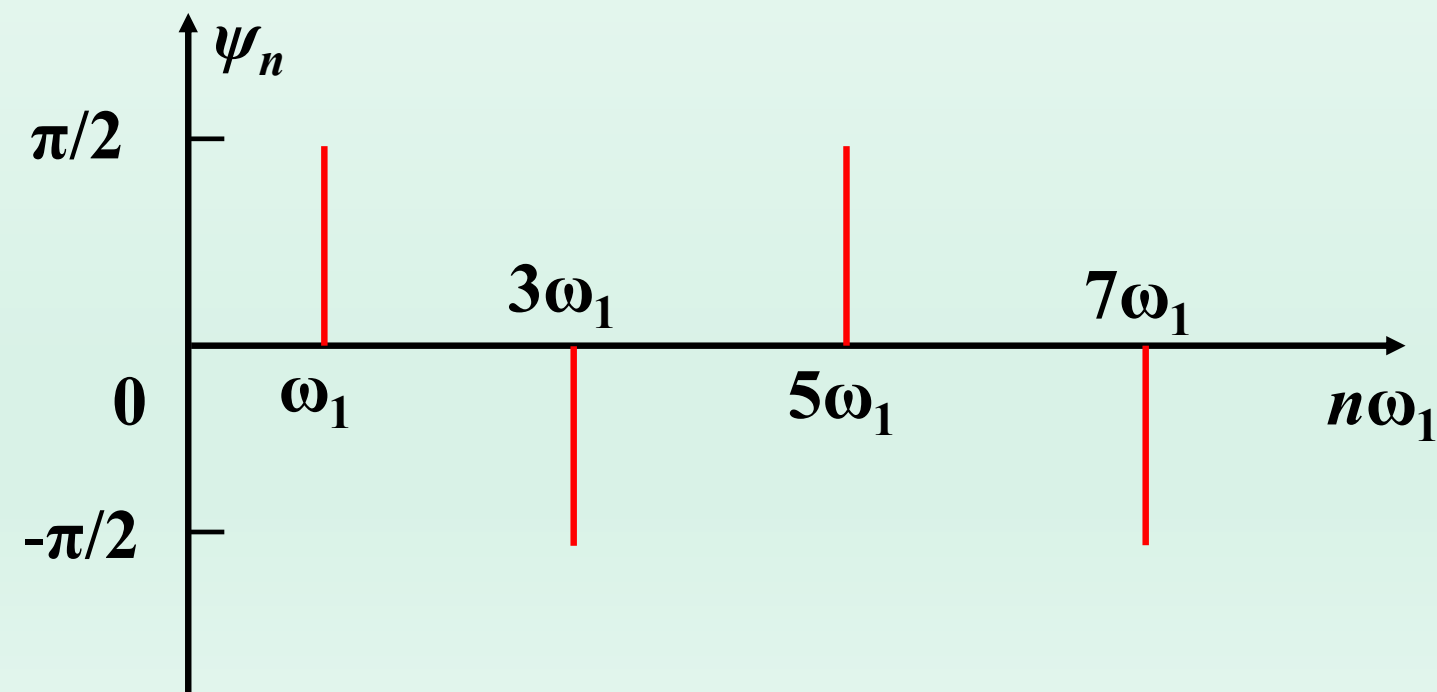
将周期信号的各谐波分量的幅值和初相分别按照它们的频率依次排列起来则构成**幅值频谱**和**相角频谱**。

频谱图可直观而清晰地表示出一个信号包含有哪些谐波分量，以及各谐波分量所占的比重和其间的相角关系，便于分析周期信号通过电路后它的各谐波分量的幅值和初相发生的变化。

$$i(t) = \left(\frac{\pi}{4} + \cos \omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_1 t - \frac{1}{7} \cos 7\omega_1 t + \cdots \right) \text{ mA}$$



幅值频谱



相角频谱

(2) 计算电路对各次谐波的端口等效阻抗

$$\begin{aligned} Z(jn\omega_1) &= \frac{\frac{1}{jn\omega_1 C} (R + jn\omega_1 L)}{\frac{1}{jn\omega_1 C} + (R + jn\omega_1 L)} \\ &= \frac{R + jn\omega_1 L}{[1 - (n\omega_1)^2 LC] + jn\omega_1 CR} \end{aligned}$$

$$Z(jn\omega_1) = \frac{20 + j10^3 n}{(1 - n^2) + j2 \times 10^{-2} n} \Omega$$

$$Z(j\omega_1) = 50 \text{ k}\Omega$$

$$Z(j3\omega_1) = 0.375e^{-j89.95^\circ} \text{ k}\Omega$$

$$Z(j5\omega_1) = 0.208e^{-j89.99^\circ} \text{ k}\Omega$$

$$Z(j7\omega_1) = 0.146e^{-j90^\circ} \text{ k}\Omega$$

(3) 求激励源的直流分量及各谐波分量单独作用时的电压响应

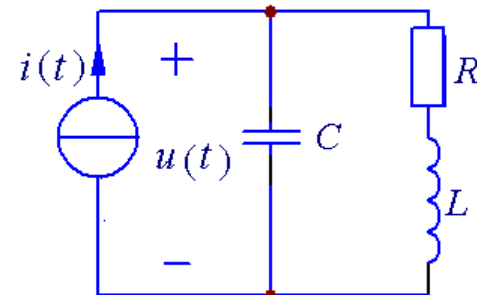
直流分量单独作用时:

$$U_0 = RI_0 = 0.02 \times \frac{\pi}{4} \text{ V} = 0.0157 \text{ V}$$

基波电流单独作用时:

$$i_1 = \sin(\omega_1 t + 90^\circ) \text{ mA} \quad \dot{I}_{1m} = 1 \angle 90^\circ \text{ mA}$$

$$\dot{U}_{1m} = Z(j\omega_1) \dot{I}_{1m} = 50 \angle 90^\circ \text{ V}$$



当3次、5次和7次谐波分别单独作用时：

$$\dot{I}_{3m} = \frac{1}{3} \angle -90^\circ \text{ mA} \quad \dot{I}_{5m} = \frac{1}{5} \angle 90^\circ \text{ mA} \quad \dot{I}_{7m} = \frac{1}{7} \angle -90^\circ \text{ mA}$$

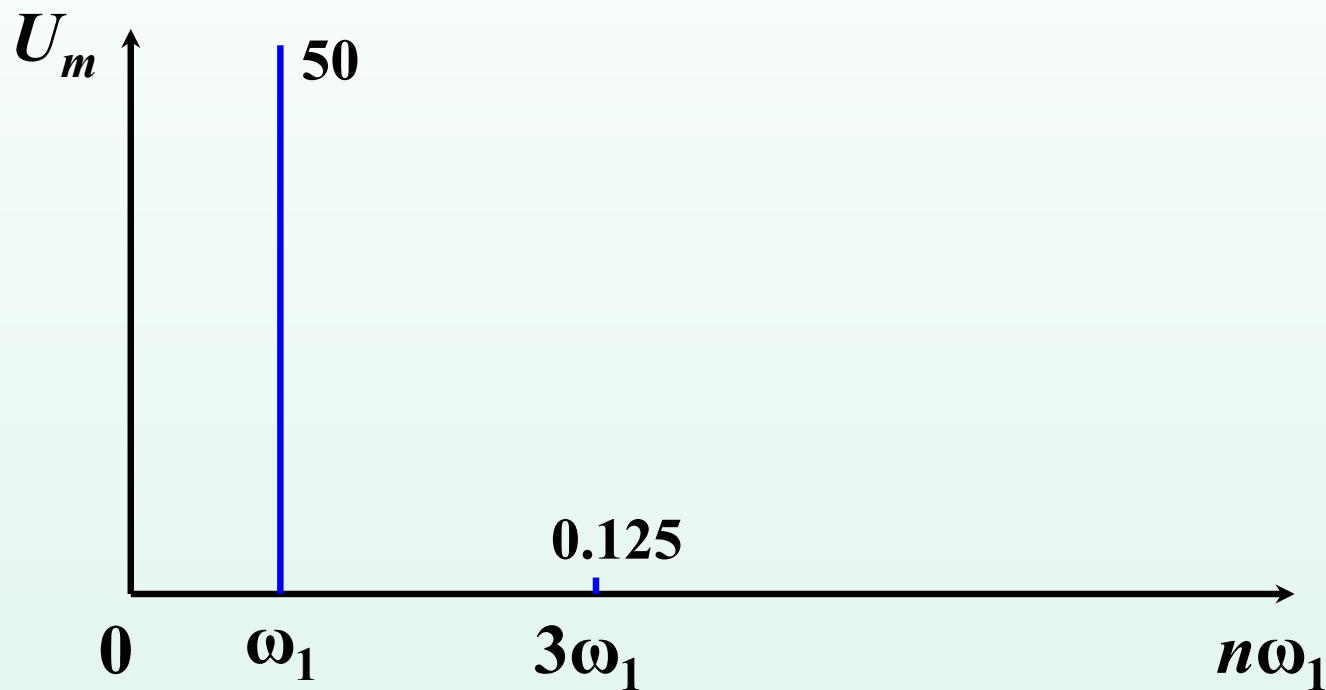
$$\dot{U}_{3m} = Z(j3\omega_1) \dot{I}_{3m} = 0.125 \angle -179.95^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_{5m} = Z(j5\omega_1) \dot{I}_{5m} = 0.0416 \angle 0.01^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_{7m} = Z(j7\omega_1) \dot{I}_{7m} = -0.0208 \text{ V}$$

(4) 将响应的直流分量及各谐波分量的时间函数式相叠加，求出电压响应

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 + u_1(t) + u_3(t) + u_5(t) + u_7(t) + \cdots \\ &= [0.0157 + 50 \sin(\omega_1 t + 90^\circ) \\ &\quad + 0.125 \sin(3\omega_1 t - 179.95^\circ) \\ &\quad + 0.0416 \sin(5\omega_1 t + 0.01^\circ) \\ &\quad - 0.0208 \sin 7\omega_1 t + \cdots] \text{ V} \end{aligned}$$



电压响应的幅值频谱中基波含量最大是由于电路对基波发生谐振。

例2

已知 $\omega = 314 \text{ rad/s}$, $R_1 = R_2 = 10 \ \Omega$, $L_1 = 0.106 \text{ H}$, $L_2 = 0.0133 \text{ H}$, $C_1 = 95.6 \ \mu\text{F}$, $C_2 = 159 \ \mu\text{F}$,

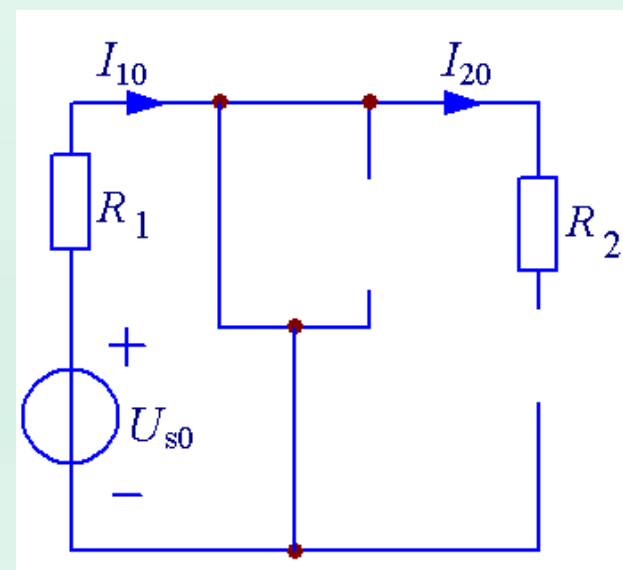
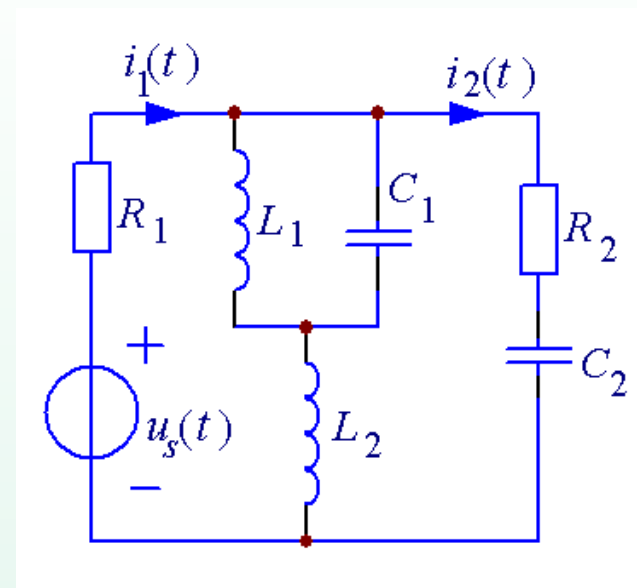
$$u_s(t) = (10 + 20\sqrt{2} \sin \omega t + 10\sqrt{2} \sin 3\omega t) \text{ V}$$

求 $i_1(t)$ 及 $i_2(t)$ 。

解: **直流分量电压单独作用:**

$$I_{10} = \frac{U_{s0}}{R_1} = 1 \text{ A}$$

$$I_{20} = 0$$



基波分量电压单独作用：

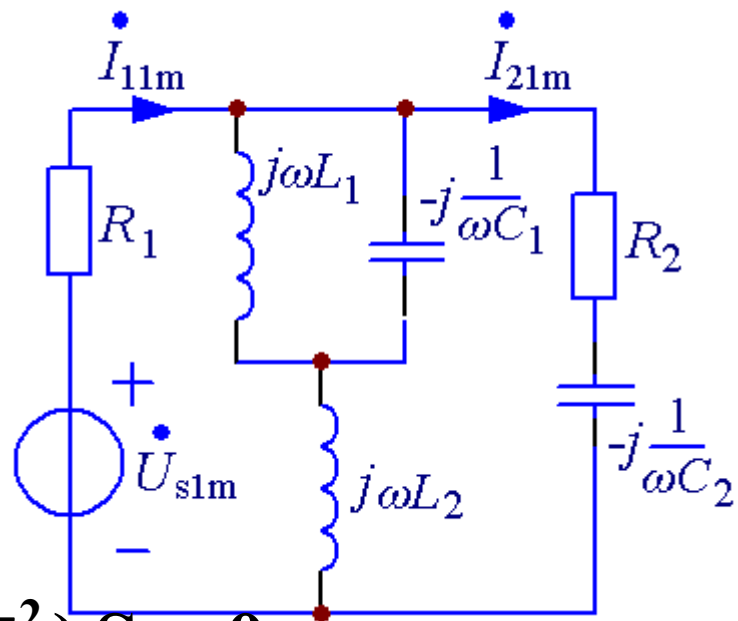
L_1 与 C_1 并联的等效导纳为

$$j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1} = j(3 \times 10^{-2} - 3 \times 10^{-2}) \text{ S} = 0$$

L_1 与 C_1 发生并联谐振，并联处相当于开路

$$\dot{I}_{11m} = \dot{I}_{21m} = \frac{\dot{U}_{s1m}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = 1 \angle 45^\circ \text{ A}$$

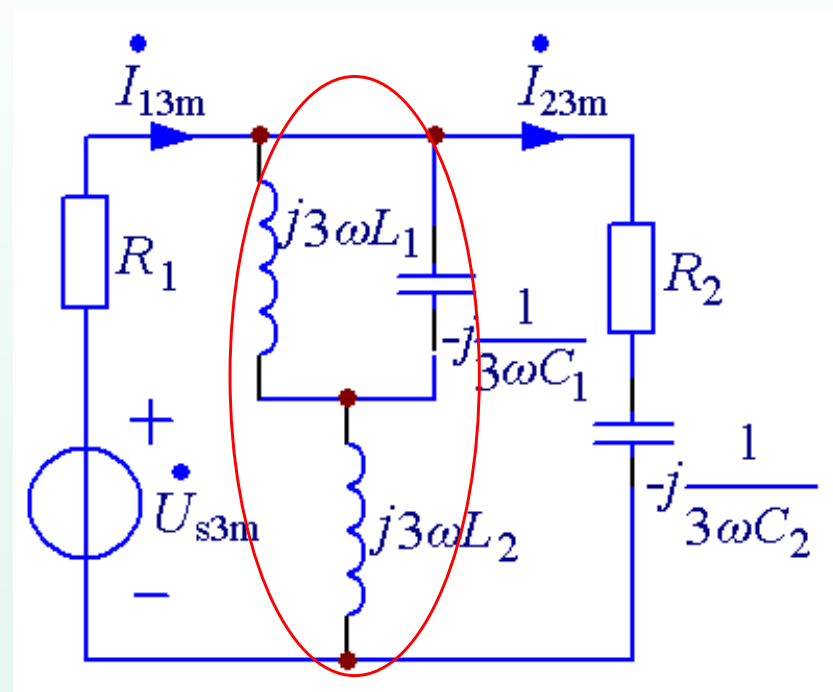
$$i_{11}(t) = i_{21}(t) = 1 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ A}$$



三次谐波分量电压单独作用:

L_1 与 C_1 并联的等效阻抗为

$$\frac{1}{j3\omega C_1 + \frac{1}{j3\omega L_1}} = -j12.5 \Omega$$



电感 L_2 在三次谐波频率下的阻抗为 $j3\omega L_2 = j12.5 \Omega$ ，所以对三次谐波而言， L_1 与 C_1 并联后再与 L_2 串联，发生串联谐振，相当于短路。

$$\dot{I}_{13m} = \frac{\dot{U}_{s3m}}{R_1} = \sqrt{2} \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{23m} = 0$$

三次谐波分量电压单独作用时响应的时域解为

$$i_{13}(t) = \sqrt{2} \sin 3\omega t \text{ A} \qquad i_{23}(t) = 0 \text{ A}$$

电路的稳态解为

$$\begin{aligned} i_1(t) &= I_{10} + i_{11}(t) + i_{13}(t) \\ &= [1 + \sin(\omega t + 45^\circ) + \sqrt{2} \sin 3\omega t] \text{ A} \end{aligned}$$

$$i_2(t) = I_{20} + i_{21}(t) + i_{23}(t) = 1 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ A}$$

注意：

(1) 当激励函数中的直流分量单独作用时，电容相当于开路，电感相当于短路。

(2) 当激励函数中的各谐波分量分别作用时，电感和电容对不同频率的谐波所呈现的阻抗(或导纳)也不同。

(3) 激励函数中的各次谐波分别作用时求得的频域响应，必须变成时域响应才能进行叠加，而不可用它们的相量进行加减。

谐波分析法所涉及的理论：

- 1、傅里叶级数展开
- 2、相量分析
- 3、叠加原理

谐波分析法的注意事项：

- 1、电路中的感抗、容抗是频率的函数，应注意分析电路在某次谐波下是否发生谐振；
- 2、应用叠加定理，响应的直流分量和各次谐波分量应在时域中进行叠加；

§ 8-3 非正弦周期电流和电压的有效值·平均功率

➤ 有效值

周期电流*i(t)*的有效值为

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [i(t)]^2 dt}$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{nm} \sin(n\omega_1 t + \theta_n)$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left[I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{nm} \sin(n\omega_1 t + \theta_n) \right]^2 dt}$$

$$(1) \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 dt = I_0^2$$

$$(2) \frac{1}{T} \int_0^T I_{nm}^2 \sin^2(n\omega_1 t + \theta_n) dt = \frac{I_{nm}^2}{2}$$

$$(3) \frac{1}{T} \int_0^T 2I_0 \cdot I_{nm} \sin(n\omega_1 t + \theta_n) dt = 0$$

$$(4) \frac{1}{T} \int_0^T 2I_{nm} I_{pm} \sin(n\omega_1 t + \theta_n) \sin(p\omega_1 t + \theta_p) dt = 0 (p \neq n)$$

周期电流*i(t)*的有效值可按下式计算：

$$I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} I_{nm}^2}$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2}$$

➤ 非正弦周期电流电路中的平均功率

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt$$

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{nm} \sin(n\omega_1 t + \alpha_n)$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{nm} \sin(n\omega_1 t + \beta_n)$$

$$(1) \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 dt = U_0 I_0$$

$$(2) \frac{1}{T} \int_0^T U_{nm} I_{nm} \sin(n\omega_1 t + \alpha_n) \sin(n\omega_1 t + \beta_n) dt$$

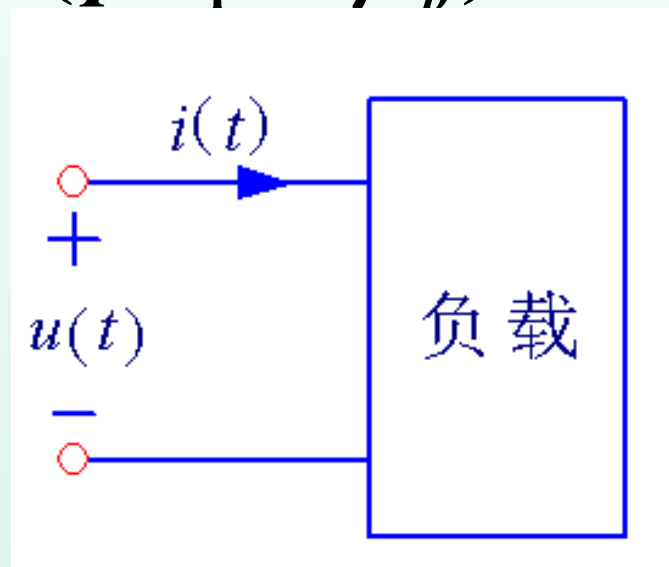
$$= \frac{1}{2} U_{nm} I_{nm} \cos(\alpha_n - \beta_n) = U_n I_n \cos \varphi_n$$

$$(3) \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_{nm} \sin(n\omega_1 t + \beta_n) dt = 0$$

$$(4) \frac{1}{T} \int_0^T I_0 U_{nm} \sin(n\omega_1 t + \alpha_n) dt = 0$$

$$(5) \frac{1}{T} \int_0^T U_{nm} I_{pm} \sin(n\omega_1 t + \alpha_n) \sin(p\omega_1 t + \beta_n) dt = 0 \quad (p \neq n)$$

二端网络吸收的平均功率



$$P = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_n = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n$$

非正弦周期电流电路的功率因数 λ 仍定义为平均功率 P 与视在功率 UI 之比，即

$$\lambda = \frac{P}{UI}$$

例1. 已知一无源二端口网络的端口电压和电流分别为

$$u(t) = [141 \sin(\omega t - \frac{\pi}{4}) + 84.6 \sin 2\omega t + 56.4 \sin(3\omega t + \frac{\pi}{4})] \text{ V}$$

$$i(t) = [10 + 56.4 \sin(\omega t + \frac{\pi}{4}) + 30.5 \sin(3\omega t + \frac{\pi}{4})] \text{ A}$$

试求：(1) 电压、电流的有效值；

(2) 网络消耗的平均功率和网络的功率因数。

解：

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{U_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} U_{nm}^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \times (141^2 + 84.6^2 + 56.4^2)} = 122.9 \text{ V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{I_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} I_{nm}^2} \\ &= \sqrt{10^2 + \frac{1}{2} \times (56.4^2 + 30.5^2)} = 46.4 \text{ A} \end{aligned}$$

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + P_3$$

$$\because P_0 = 0, P_2 = 0$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{141 \times 56.4}{2} \cos\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{56.4 \times 30.5}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 860.1 \text{ W} \end{aligned}$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{860.1}{122.9 \times 46.4} = 0.151$$