

重庆大学《概率论与数理统计 I》课程试卷

● A卷
● B卷

2017 — 2018 学年 第二学期

开课学院: 数统学院 课程号: MATH20041 考试日期: 2018.6.10

考试方式: ● 开卷 ● 闭卷 ● 其他 考试时间: 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

考试提示

1. 严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试;
2. 考试作弊, 留校察看, 毕业当年不授学位; 请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等, 属严重作弊, 开除学籍。

分位数: $u_{0.95}=1.64$, $u_{0.975}=1.96$, $t_{0.95}(7)=1.895$, $t_{0.975}(7)=2.365$, $\chi_{0.025}^2(8)=2.18$, $\chi_{0.975}^2(8)=17.53$

一、填空题(每空3分, 共42分)

1. 已知 $P(A)=0.3$, $P(B)=0.4$, $P(B|A)=0.5$, 则 $P(A \cup B)=$ 0.55。
2. 设某地夏季天气只有三种状态: 晴天、阴天(多云)和雨天, 已知晴天的可能性是阴天的2倍, 雨天的可能性是阴天的一半, 则该地某日为雨天的概率为 1/7。
3. 据统计, 某小区在网购消费中, 食品、图书、日用品、服饰类商品的包裹数比例分别占20%, 30%, 40%, 10%。又知这四类网购商品是通过京东配送的概率分别为24%, 21%, 23%, 18%。今天有一快递送达小区的

“丰巢”快递柜, 问这个快递是京东配送的概率为 ; 开柜后发现是天天快递包裹, 问其中最有可能的是 类商品。 22.1%, 日用品

4. 某城市有三条地铁线, 各条线路独立运行, 三条线每月发生故障的次数分别服从参数为1, 2, 3的泊松分布, 则本月该城市地铁发生故障次数的期望为 6, 某月该城市发生故障为3次的概率为 $36e^{-6}$ 。

4. 设连续型随机变量 X 的分布函数为: $F(x)=\begin{cases} 1-(1+x)e^{-x} & x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$, 则

X 的密度函数为 $f_X(x)=$ $f(x)=\begin{cases} xe^{-x} & x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$, 则

$P\{X>2\}=$ $3e^{-2}$, 请写出 $Y=2X-1$ 的密度函数 $f_Y(y)=$

$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{y+1}{4}e^{-\frac{y+1}{2}} & y>-1 \\ 0 & y\leq -1 \end{cases}$ 。

5. 设二维随机变量 $(X, Y): N(3, 16; 3, 9; 0.5)$, 若 $Z=X-Y$, 则 Z 的密度函数

为 $f(z)=$ $f(z)=\frac{1}{\sqrt{26\pi}}e^{-\frac{z^2}{26}}$ $z \in R$, $E|X-Y|=$

$\sqrt{\frac{26}{\pi}}$ 。

6. X_1, X_2, \dots, X_{10} 是来自正态总体 $N(3, 4)$ 的样本, \bar{X}, S^2 为其样本均值和

样本方差, 则 $E(\sum_{i=1}^5 (X_{2i} - X_{2i-1})^2) =$ 40, $E(\bar{X}S^2) =$ 12。

7. X_1, X_2, \dots, X_{16} 是来自正态总体 $N(\mu, 4)$ 的样本, 对统计假设问题

$H_0: \mu = 1, H_1: \mu \neq 1$ 的拒绝域为 $\{|\bar{X} - 1| > 0.98\}$, 则在判断中犯弃真错误的概率为 0.05。

二、(12 分) 随机变量 X, Y 独立同分布, 且 X 的分布律为 $X: \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$,

设 $U = \max\{X, Y\}, V = \min\{X, Y\}$ 。

求: (1) (U, V) 的联合分布律;

(2) 判断 (U, V) 的独立性;

(3) 求 U, V 的协方差。

解: (1) (U, V) 有三种可能取值: (1,1), (2,1), (2,2)

$$\begin{aligned} P\{U=1, V=1\} &= P\{X=1, Y=1\} = P\{X=1\}P\{Y=1\} = \frac{4}{9} \\ P\{U=2, V=1\} &= P\{X=1, Y=2\} + P\{X=2, Y=1\} = \frac{4}{9} \\ P\{U=2, V=2\} &= P\{X=2, Y=2\} = P\{X=2\}P\{Y=2\} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

(U, V) 的联合分布律为:

V	1	2	
U			
1	4/9	0	4/9
2	4/9	1/9	5/9
	8/9	1/9	

(2) 因为 $P\{U=1, V=1\} = 4/9 \neq P\{U=1\}P\{V=1\} = 32/81$

所以 (U, V) 不独立;

$$(3) EU = 14/9, EV = 10/9, EUV = 16/9$$

$$\text{cov}(U, V) = EUV - EU \cdot EV = 4/81$$

三、(18 分) 设随机变量 (X, Y) 的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} A(y-x)e^{-y}, & -y < x < y, 0 < y < +\infty \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求: (1) 常数 A ; (2) 随机变量 X, Y 的边缘密度函数 $f_x(x), f_y(y)$;

(3) 判断 X, Y 的独立性;

(4) 求 $Z = X + Y$ 的密度函数。

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} \int_{-y}^y A(y-x)e^{-y} dx dy = 4A = 1$, 得 $A = \frac{1}{4}$ 。

$$\begin{aligned} (2) f_x(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{-x}^{+\infty} \frac{1}{4}(y-x)e^{-y} dy & x < 0 \\ \int_x^{+\infty} \frac{1}{4}(y-x)e^{-y} dy & x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(1-2x)e^x}{4} & x < 0 \\ \frac{e^{-x}}{4} & x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_{-y}^y \frac{1}{4}(y-x)e^{-y} dx & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

(3) 由 $f(x, y) \neq f(x)f(y)$, 所以不独立;

(5) 由卷积公式, $f(z-y, y) \neq 0$ 当且仅当 (y, z) 满足 $-y < z-y < y, 0 < y < +\infty$

即: $0 < z < 2y, 0 < y < +\infty$

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy = \begin{cases} \int_{\frac{z}{2}}^{+\infty} \frac{1}{4} (y-(z-y)) e^{-y} dy & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{z+1}{4} e^{-\frac{z}{2}} & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

四、(12 分) 设总体 X 的分布函数为: $F(x; \theta) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^\theta} & x > 1 \\ 0 & x \leq 1 \end{cases}$, $\theta > 1$ (未知), X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体的样本。求:

(1). 参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$; (2). 参数 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_2$ 。

解: X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \theta x^{-\theta-1} & x > 1 \\ 0 & x \leq 1 \end{cases}$

$$1) EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_1^{+\infty} x\theta x^{-\theta-1}dx = \frac{\theta}{\theta-1}$$

$$\text{令 } EX = \bar{X}, \text{ 即 } \frac{\theta}{\theta-1} = \bar{X} \text{ 解得: } \hat{\theta}_1 = \frac{\bar{X}}{\bar{X}-1};$$

2) θ 的似然函数:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \prod_{i=1}^n \theta x_i^{-\theta-1} = \theta^n (x_1 x_2 \dots x_n)^{-\theta-1} \quad x_i > 1 (i=1, 2, \dots, n)$$

当 $x_i > 1 (i=1, 2, \dots, n)$ 时, $L(\theta) > 0$ 且 $\ln L(\theta) = n \ln \theta - (\theta+1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$

$$\text{由 } \frac{d \ln(\theta)}{d\theta} = 0 \text{ 得: } \hat{\theta}_2 = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$$

五、(10 分) 据报道: 高校大学生平均每周上网时间为 8 小时。某校统计小组随机调查了该校 100 名学生, 得知他们平均每周上网时间为 6.5 小时, 样本标准差为 2 小时。设大学生每周上网时间服从正态分布, 问在显著水平 $\alpha=0.05$ 下, 能否认为该校学生每周上网时间明显低于 8 小时?

解: 由题意知, 设每周上网时间为 X , 则

$$X: N(\mu, \sigma^2) \quad \bar{x} = 6.5, \quad s = 2, \quad \alpha = 0.05 \quad n = 100.$$

设立统计假设: $H_0: \mu = 8 \quad H_1: \mu < 8$

σ^2 未知, 选择检验统计量: $T = \frac{\bar{X} - 8}{S / \sqrt{n}}$

$$\text{拒绝域 } \chi_0 = \{t | t < -t_{1-\alpha}(n-1)\} = \{t < -t_{0.95}(99)\} = \{t < -u_{0.95}\} = \{t < -1.65\}$$

$$\text{做出判断, 检验统计量的样本值 } t = \frac{6.5 - 8}{2 / \sqrt{100}} = -7.5 \in \chi_0$$

所以拒绝原假设, 该校学生上网时间明显低于 8 小时。

六、(6 分) 国内市场对某种进口原材料的需求是一随机变量 X , 据调查 $X \sim U[1000, 3000]$ (单位: 吨), 售出一吨该原材料可获利 2000 元, 积压一吨则将产生 1000 元的亏损。问进口经销商应进口多少吨货源可使得平均利润达最大?

解: 设经销商应进口 a 吨该原材料, 赢利 Y 元:

$$Y = g(X) = \begin{cases} 2a, & a \leq X \\ 2X - (a - X), & a > X \end{cases}$$

(3 分)

X 的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{2000}, \quad 1000 \leq x \leq 3000 \quad (1 \text{ 分})$$

则平均利润

$$EY = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx \quad (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{2000} \left[\int_{1000}^a (3x - a)dx + \int_a^a 2adx \right] = \frac{1}{2000} \left[-\frac{3}{2}a^2 + 7000a - \frac{3}{2} \times 1000^2 \right] \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{令 } (EY)'_a = 0, \text{ 解出 } a \approx 2333.3 \quad (t) \quad (1 \text{ 分})$$