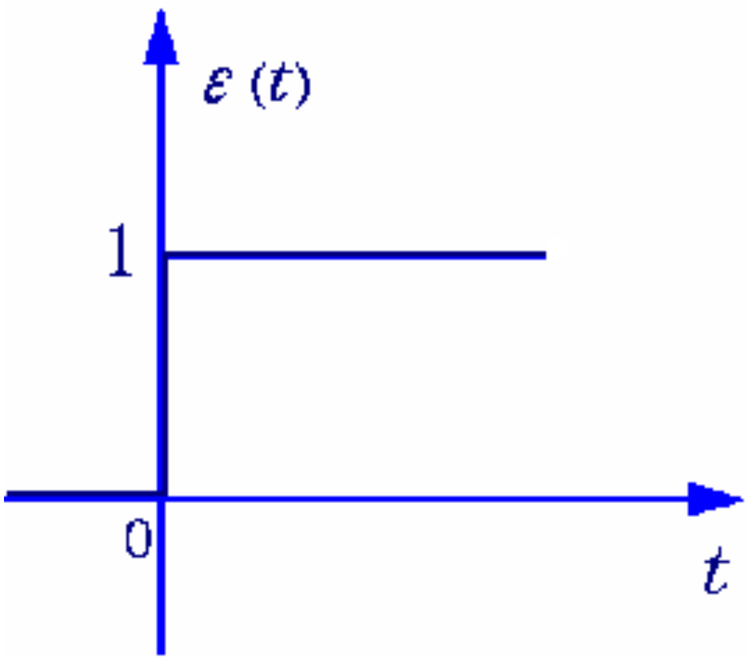
§ 3–4 单位阶跃函数

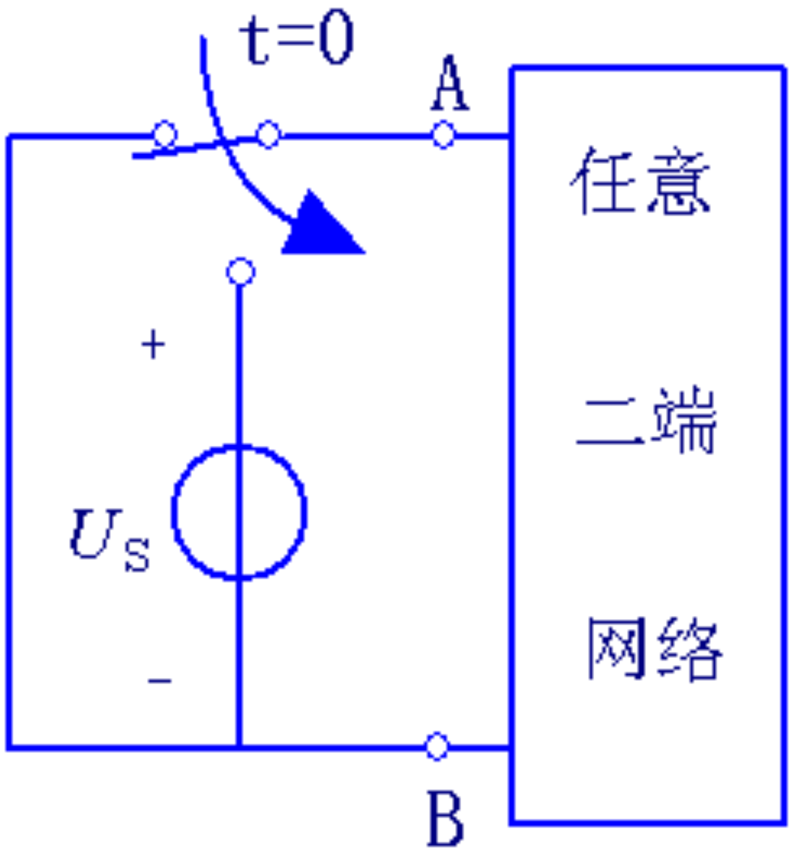
1. 定义

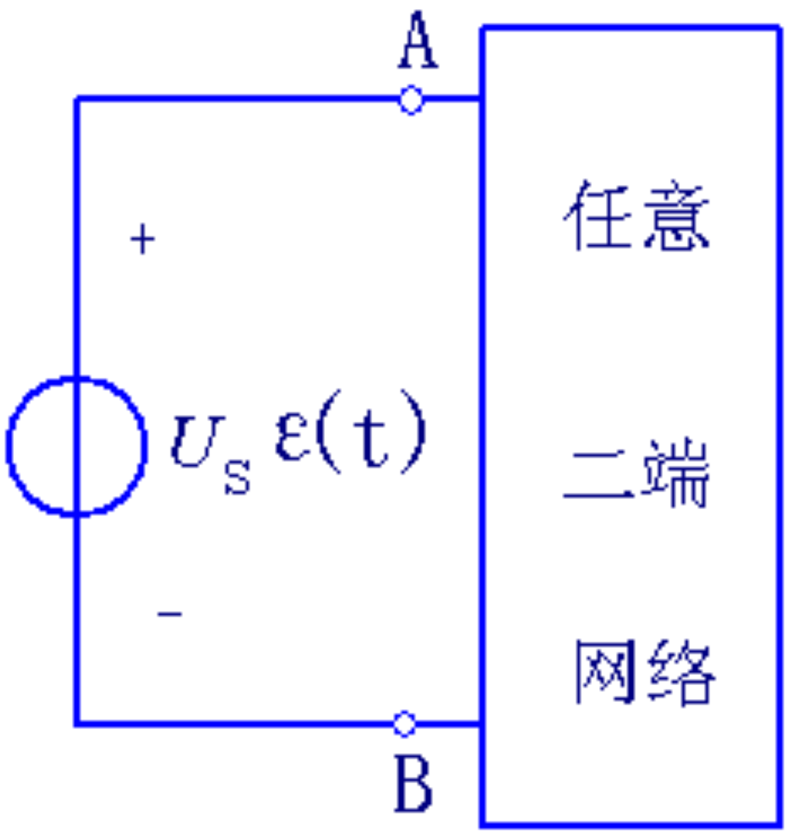
$$\varepsilon(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$



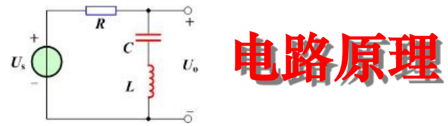
$t = 0$，发生跳变，函数值不确定，比如：取0.5

§ 3–4 单位阶跃函数



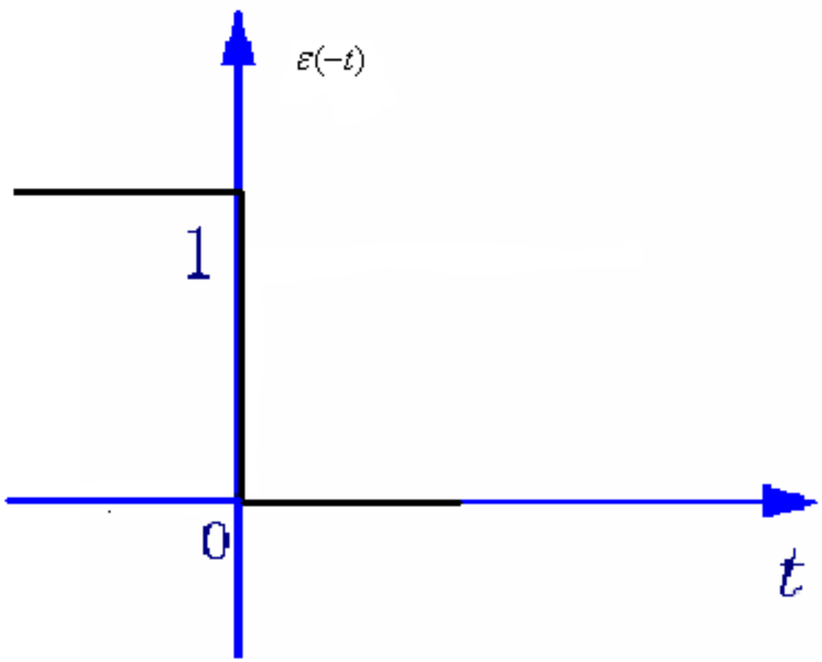


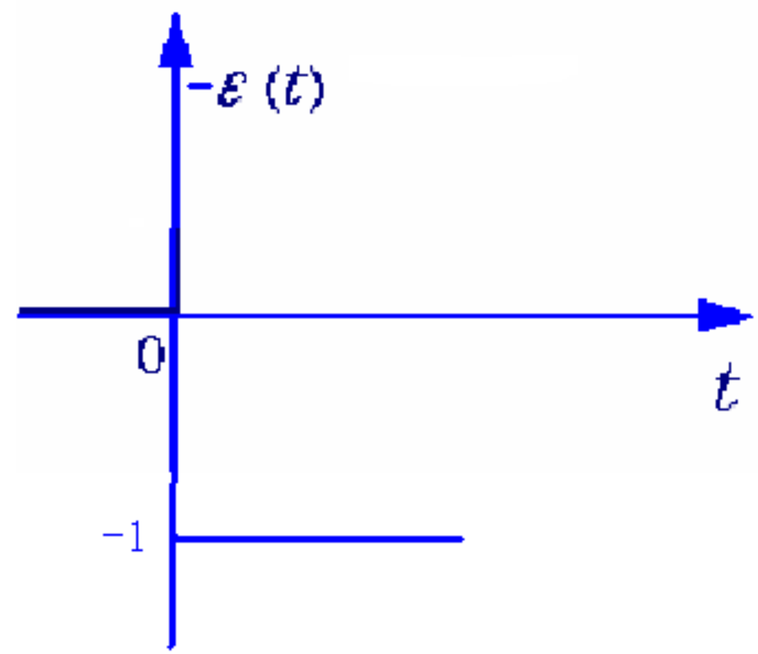
$\varepsilon(t)$ 的物理模型



§ 3–4 单位阶跃函数

$\varepsilon(-t),-\varepsilon(t)$ 的波形

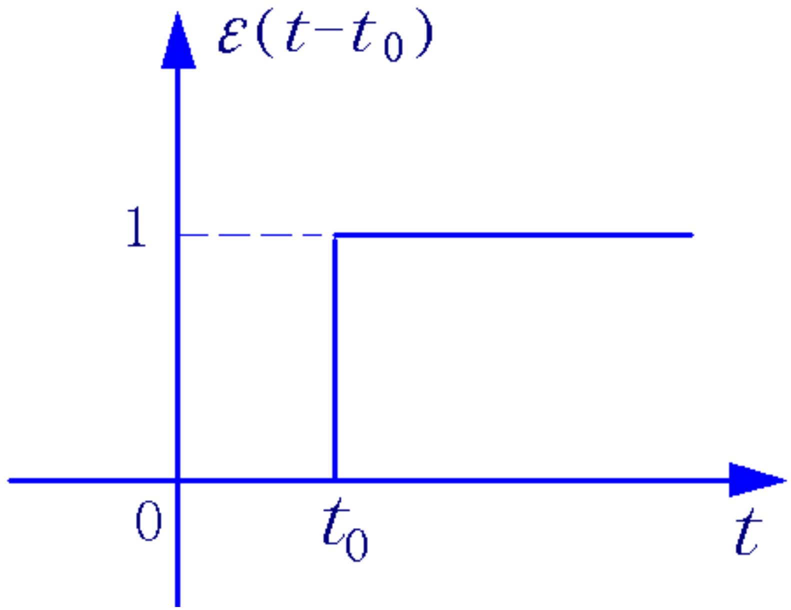


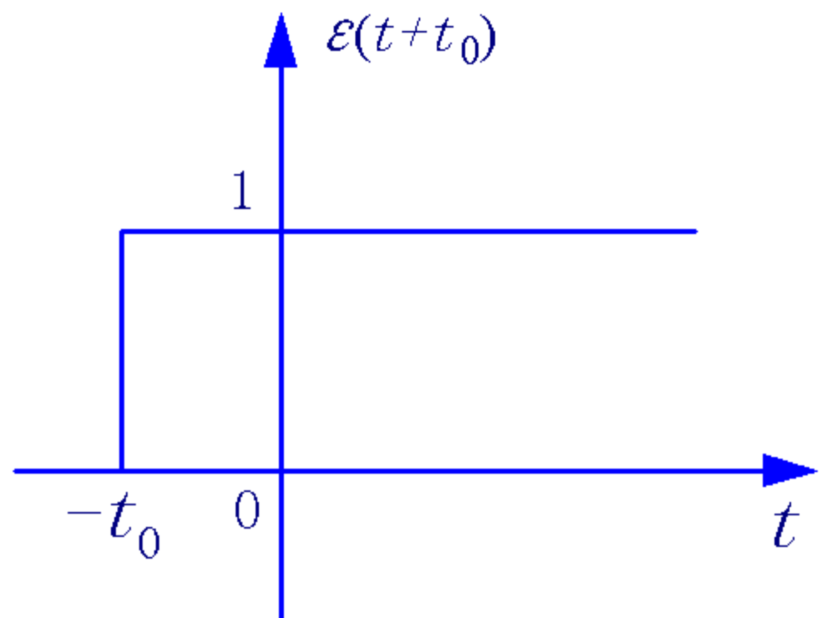


§ 3–4 单位阶跃函数

$$\varepsilon(t-t_0)=\varepsilon(t')=\begin{cases}1 & t'>0\,(\text{即}\,t>t_0)\\ 0 & t'<0\,(\text{即}\,t<t_0)\end{cases}$$

$$t_0>0$$





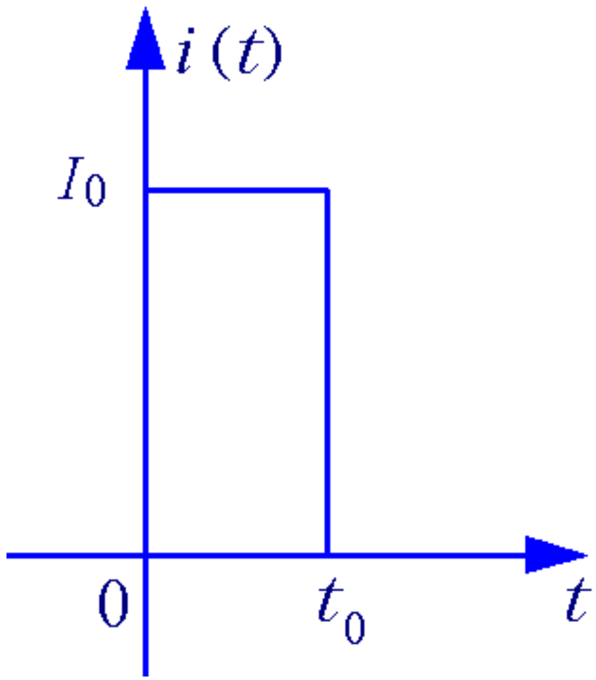
§ 3–4 单位阶跃函数

$$f(t)\varepsilon(t)=\begin{cases} f(t) & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

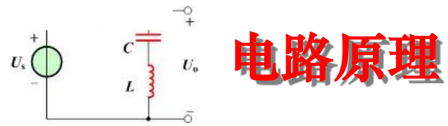
$$f(t)\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases} f(t) & t>t_0 \\ 0 & t<t_0 \end{cases}$$

§3–4 单位阶跃函数

例1. 矩形脉冲(rectangular pulse)函数

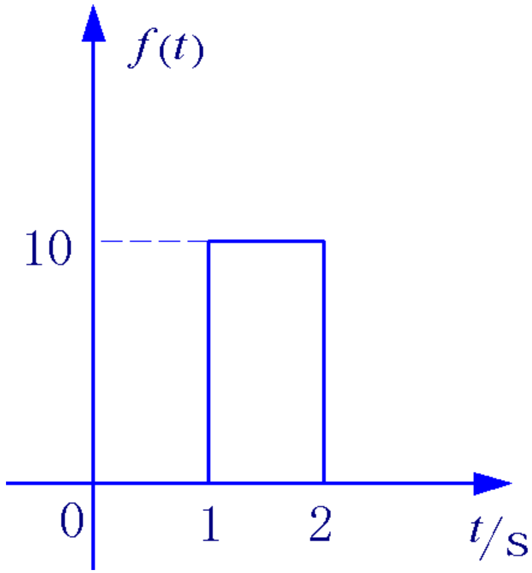


$$i(t) = I_0\varepsilon(t) - I_0\varepsilon(t - t_0)$$

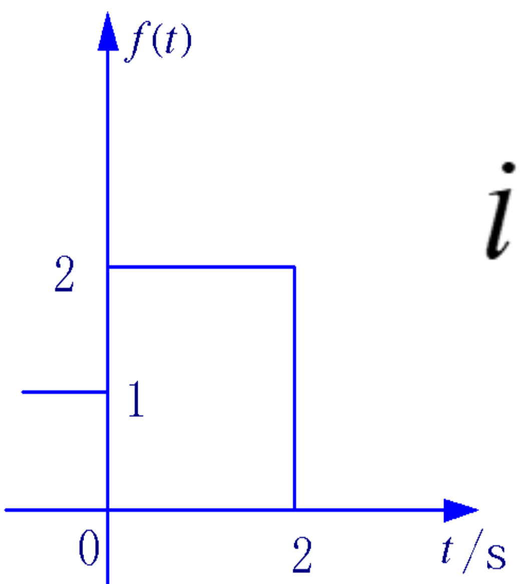


§ 3–4 单位阶跃函数

例2. 试写出下图的时间函数表达式$f(t)$



$$i(t)=10\varepsilon(t-1)-10\varepsilon(t-2)$$



$$i(t)=\varepsilon(-t)+2\varepsilon(t)-2\varepsilon(t-2)$$

§3–5 动态电路的输入-输出方程

一、动态电路

含有**动态元件**(即储能元件)的电路。

§ 3–5 动态电路的输入-输出方程

二、输入 - 输出方程

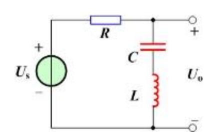
输入： 作为输入激励的电压或者电流简称输入。

—— $f(t)$ 如：电压源、电流源

输出： 作为待求响应的电压或者电流简称输出。

—— $r(t)$ 如：待求响应，任意电压或电流

输入 - 输出方程： 联系输入变量和输出变量之间关系的单一变量的微分方程。



§ 3–5 动态电路的输入-输出方程

动态电路时域分析步骤：

1）根据KVL、KCL和元件的VCR列写电路的微积分方程组；

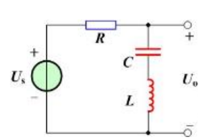
2）导出以某一变量表示的微分方程；

输入-输出方程

3）根据换路前和换路后瞬刻的电路，确定电路的初始状态和解微分方程时所需的初始条件；

4）求解微分方程；

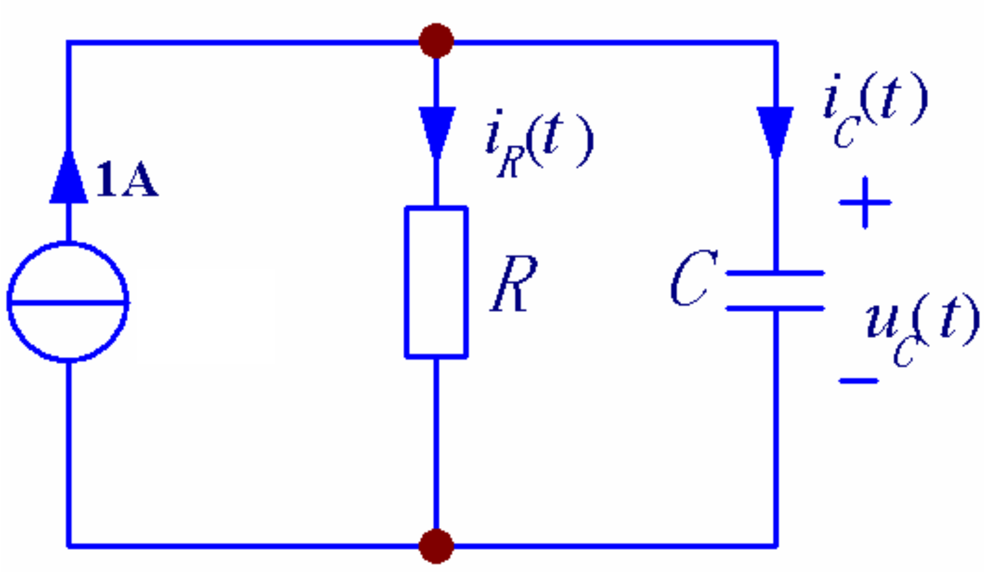
5）对求出的解进行分析，归纳出带结论性的、具有普遍意义的概念。



电路原理

§ 3–5 动态电路的输入-输出方程

例1.列写图示电路的输入 - 输出方程

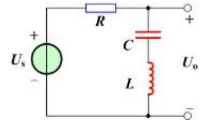


◆以$u_c(t)$为输出

$$C\frac{du_c(t)}{dt}+\frac{u_c(t)}{R}=1$$

$$\frac{du_c(t)}{dt}+\frac{1}{RC}u_c(t)=\frac{1}{C}$$

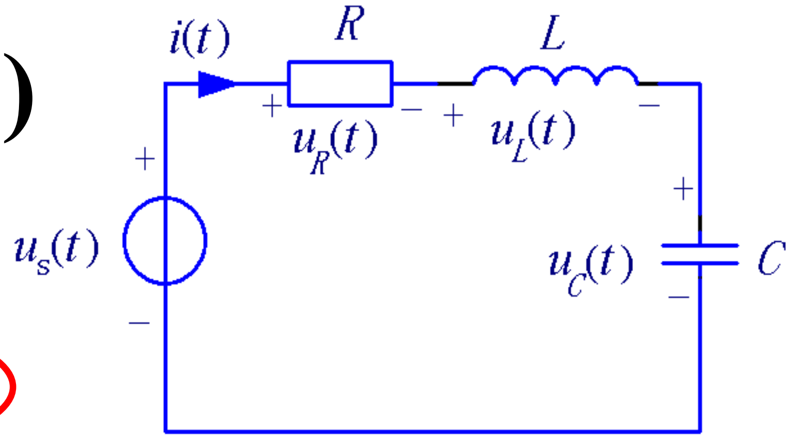
电路中含有一个独立的储能元件，所列方程为一阶微分方程



§ 3–5 动态电路的输入-输出方程

例2.列写图示电路的输入 - 输出方程

$$Ri(t)+\cancel{L}\frac{di(t)}{dt}+u_c(t)=u_s(t)$$



◆以$u_s(t)$为输入、$u_c(t)$为输出

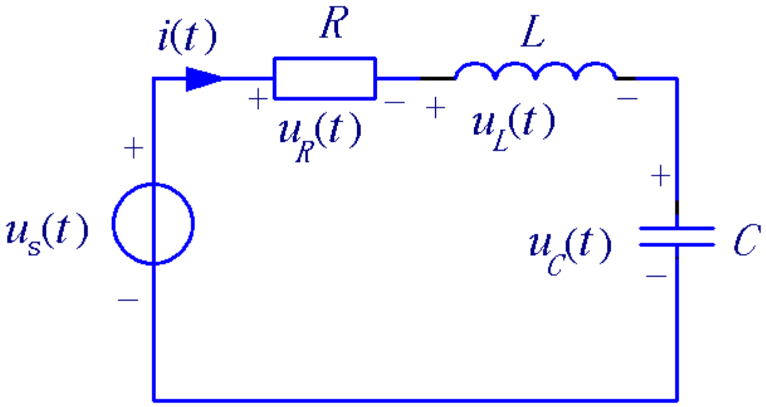
$$i(t)=C\frac{du_c(t)}{dt}$$

$$\frac{d^2u_c(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du_c(t)}{dt}+\frac{1}{LC}u_c(t)=\frac{1}{LC}u_s(t)$$

§ 3–5 动态电路的输入-输出方程

$$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}+u_c(t)=u_s(t)$$

◆以$u_s(t)$为输入、$i(t)$为输出



$$u_c(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(t')dt'$$

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{LC}i(t)=\frac{1}{L}\frac{du_s(t)}{dt}$$

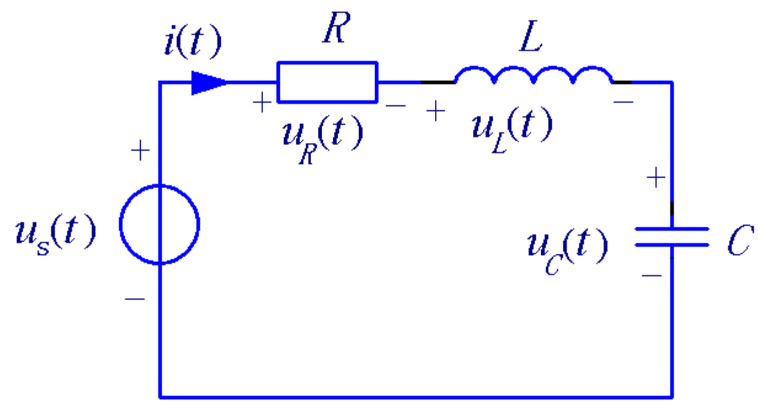
§ 3–5 动态电路的输入-输出方程

$$\frac{d^2u_c(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du_c(t)}{dt}+\frac{1}{LC}u_c(t)=\frac{1}{LC}u_s(t)$$

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{LC}i(t)=\frac{1}{L}\frac{du_s(t)}{dt}$$

◆**特征方程：**

$$\boxed{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=0}$$



电路中含有两个独立的储能元件，所列方程为二阶微分方程

§3–5 动态电路的输入-输出方程

小结

1.输入-输出方程的一般形式

$$\frac{d^n r(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}r(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dr(t)}{dt}+a_0 r(t)$$
$$=b_m\frac{d^m f(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}f(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{df(t)}{dt}+b_0 f(t)$$

2.方程的阶数等于电路中独立储能元件的个数。

§3–5 动态电路的输入-输出方程

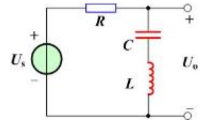
小结

3. 针对同一个电路，采用不同的变量作为求解变量，所得到的微分方程所对应的特征方程均相同。

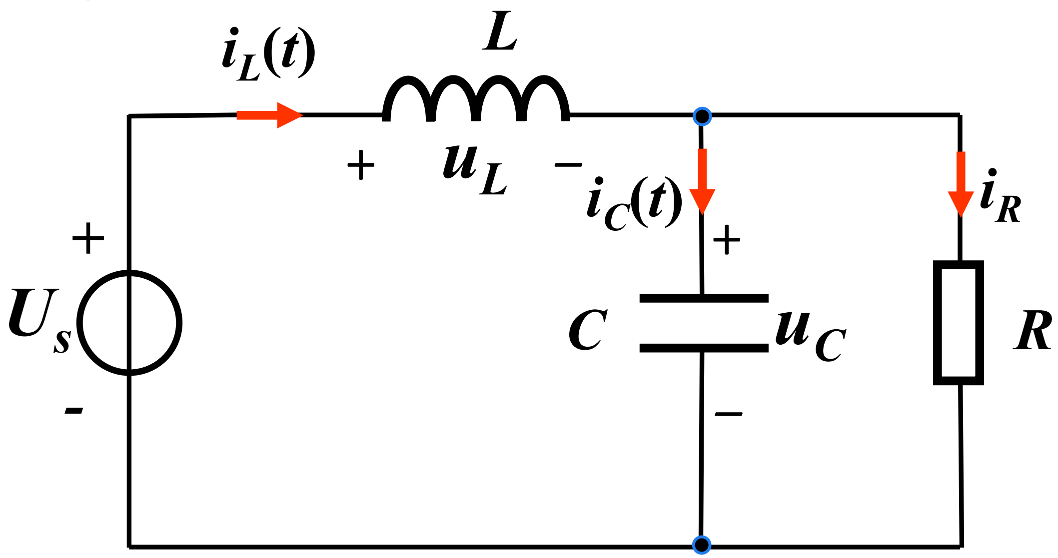
4. 特征方程只与电路自身的参数和结构有关。

$$s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=0$$

5. 输入 - 输出方程是n阶微分方程，则相应的电路称为n阶电路。



练习

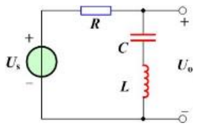


$u_s(t)$为输入，$u_C(t)$为输出

$$L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}+u_C(t)=u_s(t)$$

$$i_L(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{u_C(t)}{R}$$

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+u_C(t)=u_s(t)$$

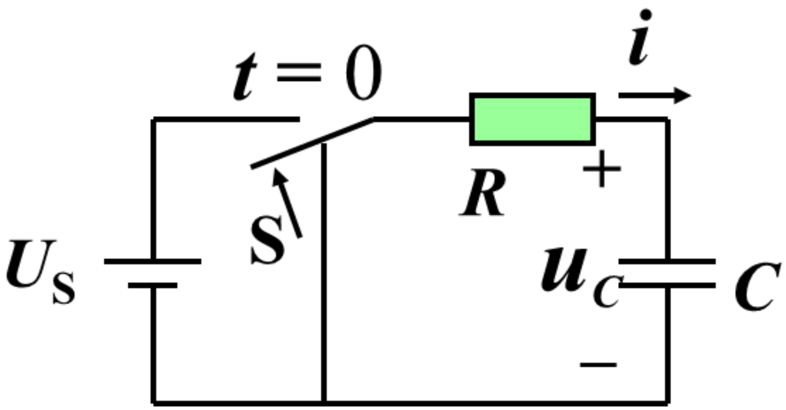


§ 3–6 初始状态和初始条件

1. 什么是电路的过渡过程

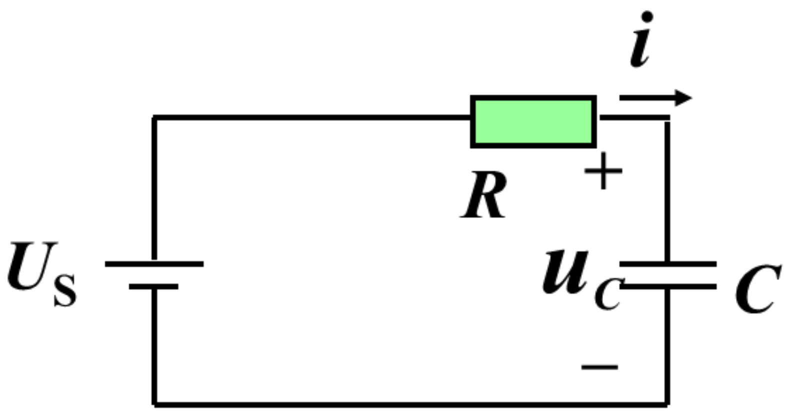
稳态分析

稳定状态



S未动作前

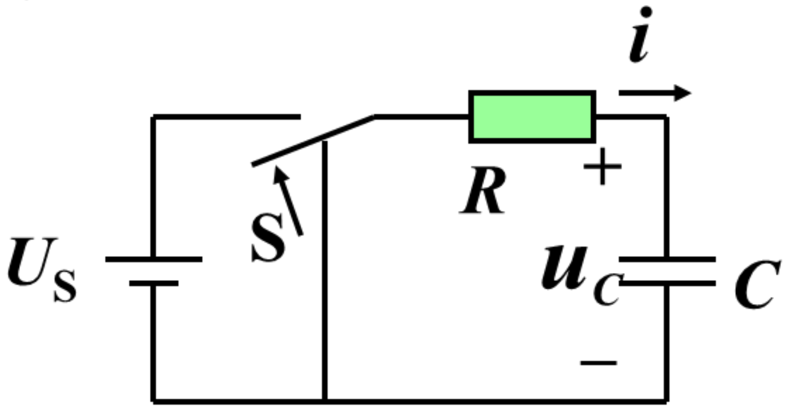
$i = 0$ ， $u_C = 0$

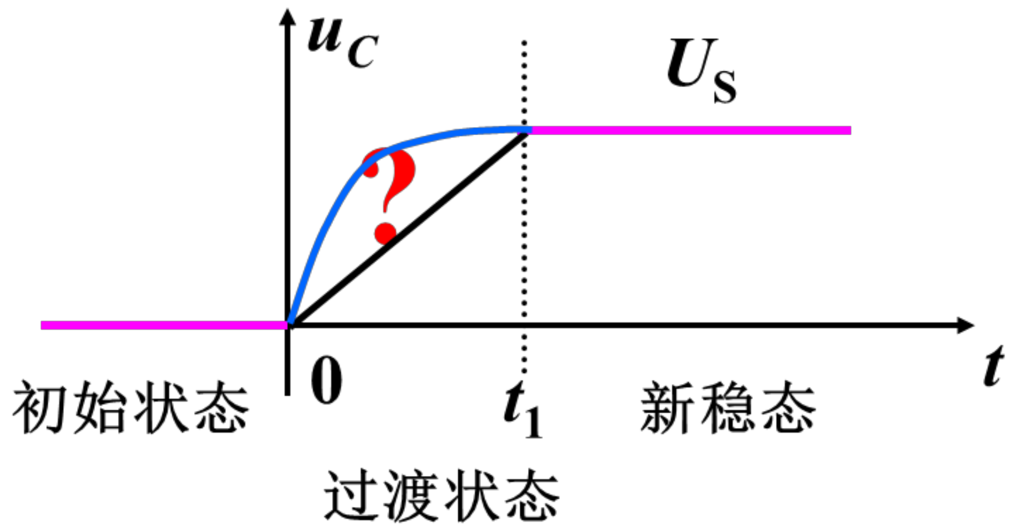


S接通电源后很长时间

$i = 0$ ， $u_C = U_S$

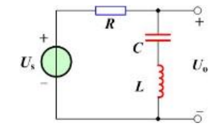
§ 3–6 初始状态和初始条件





过渡过程： 电路由一个稳态过渡到另一个稳态需要经历的过程。

过渡状态（瞬态、暂态）



§ 3–6 初始状态和初始条件

2. 过渡过程产生的原因

（1）电路内部含有储能元件 L 、M、 C

能量的储存和释放都需要一定的时间来完成。

$$p = \frac{\Delta w}{\Delta t}$$

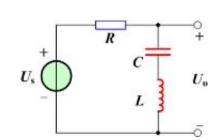
（2）电路结构发生变化

换路： 电路与电源的接通、切断

电路参数的突然改变

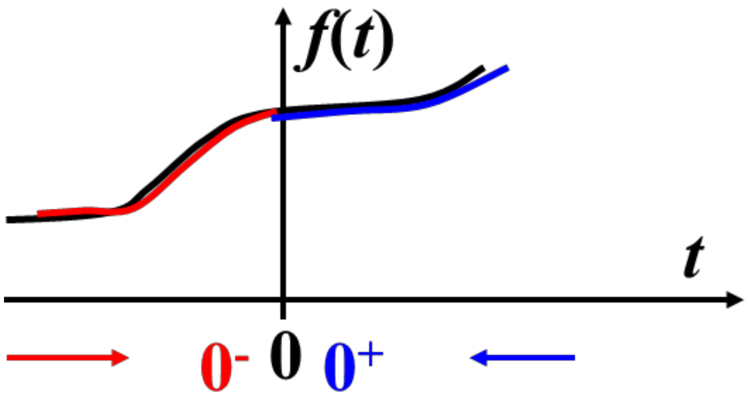
电路联接方式的突然改变

激励源的突然改变



§ 3–6 初始状态和初始条件

3、$t=0^+$与$t=0^-$的概念

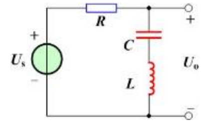


换路在 t=0时刻进行

0^- $t=0$ 的前一瞬间

0^+ $t=0$ 的后一瞬间

$$f(0^-)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} f(t) \qquad f(0^+)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t)$$



§ 3–6 初始状态和初始条件

二. 换路定则

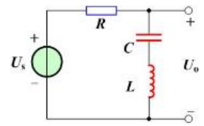
$$u_C(t) = u_C(0_-) + \frac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i_C dt$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) + \frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i_C dt$$

当电容电流为有限值时

$$u_C(0_+) = u_C(0_-)$$

$$q(0_+) = q(0_-)$$



§ 3–6 初始状态和初始条件

$$i_L(t) = i_L(0_-) + \frac{1}{L}\int_{0_-}^{t} u_L dt$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+} u_L dt$$

当电感电压为有限值时

$$\boxed{\begin{aligned} i_L(0_+) &= i_L(0_-) \\ \psi(0_+) &= \psi(0_-) \end{aligned}}$$

§3–6 初始状态和初始条件

独立的$u_c(0_-)$、$i_L(0_-)$或$q(0_-)$、$\Psi(0_-)$的数值的集合称为电路的**原始状态**(initial state)

独立的$u_c(0_+)$、$i_L(0_+)$或$q(0_+)$、$\Psi(0_+)$的数值集合称为电路的**初始状态**(original state)

注意：

零状态(zero state)是零原始状态(zero original state)的简称.

§3–6 初始状态和初始条件

三. 求初始值

◆在电容电压与电感电流不跳变的情况下，电路的初始状态可根据电路的原始状态求得；

◆电路中其它电压、电流的初始值可根据换路后的电路和电容电压、电感电流的初始值，以及独立源在$t = 0_+$时的激励值，应用电路的基尔霍夫定律和元件的电压电流关系求出。

§ 3–6 初始状态和初始条件

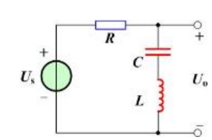
求初始值的具体步骤：

1）由换路前 $t=0_-$ 时刻的电路（一般为稳定状态）求 $u_C(0_-)$ 或 $i_L(0_-)$；

2）由换路定律得 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$；

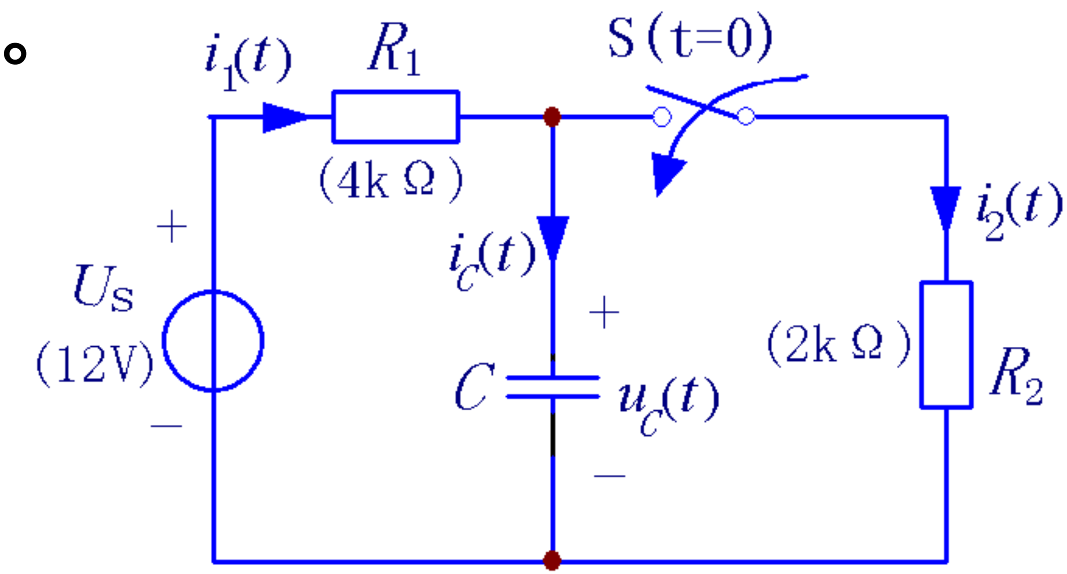
3）画 $t=0_+$ 时刻的等效电路： 电容用电压源替代，电感用电流源**替代**（取 0_+ 时刻值，方向与原假定的电容电压、电感电流方向相同）；

4）由 0_+ 电路求所需各变量的 0_+ 值。



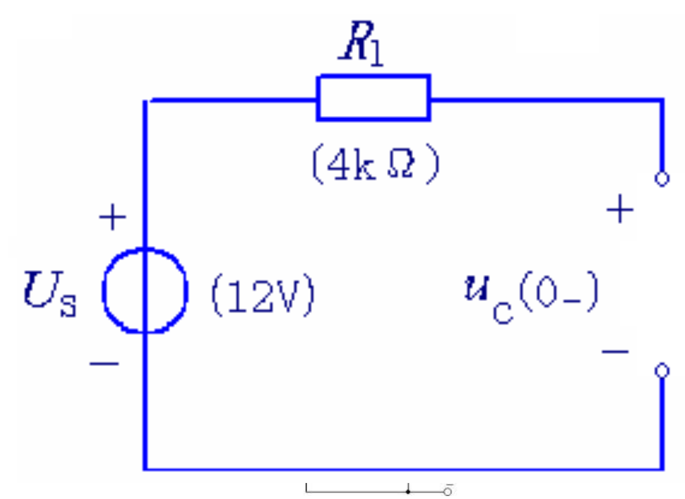
§ 3–6 初始状态和初始条件

例1 开关闭合前电路已工作了很长时间，求开关闭合后电容电压的初始值$u_c(0_+)$及各支路电流的初始值$i_1(0_+)$、$i_2(0_+)$、$i_c(0_+)$。

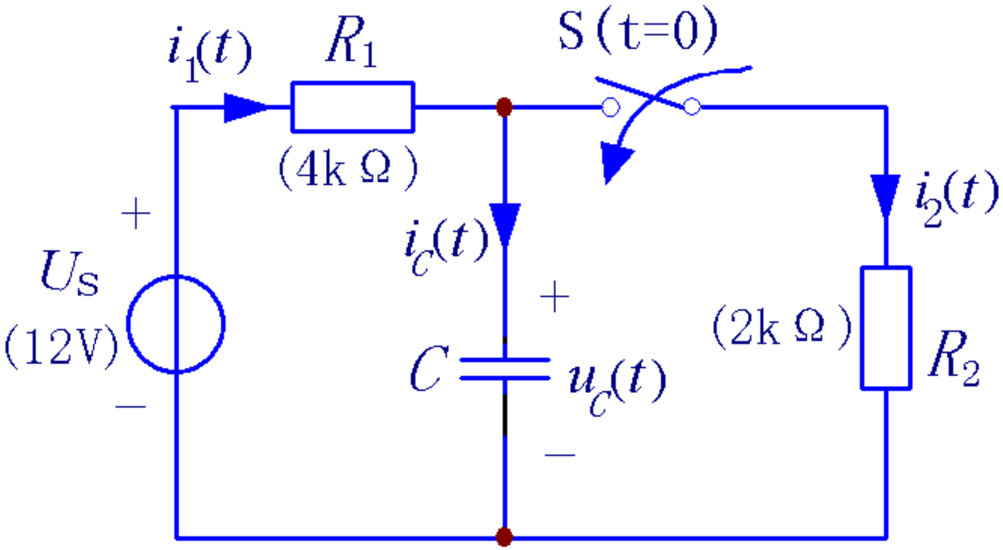


解： 1） $t = 0\_$ 时

$$u_c(0\_) = 12\ \mathrm{V}$$

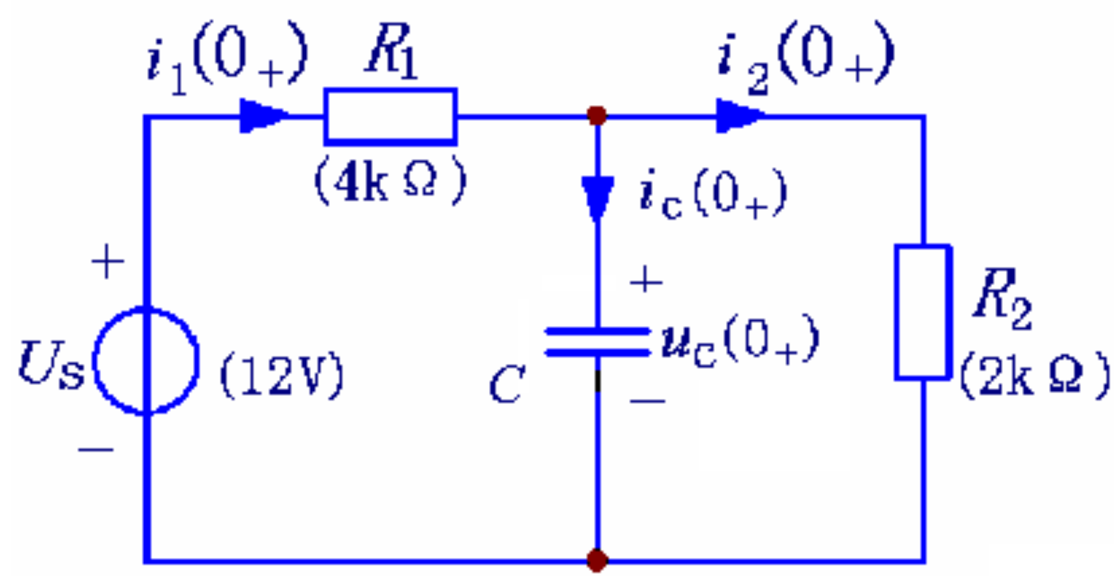


§ 3–6 初始状态和初始条件



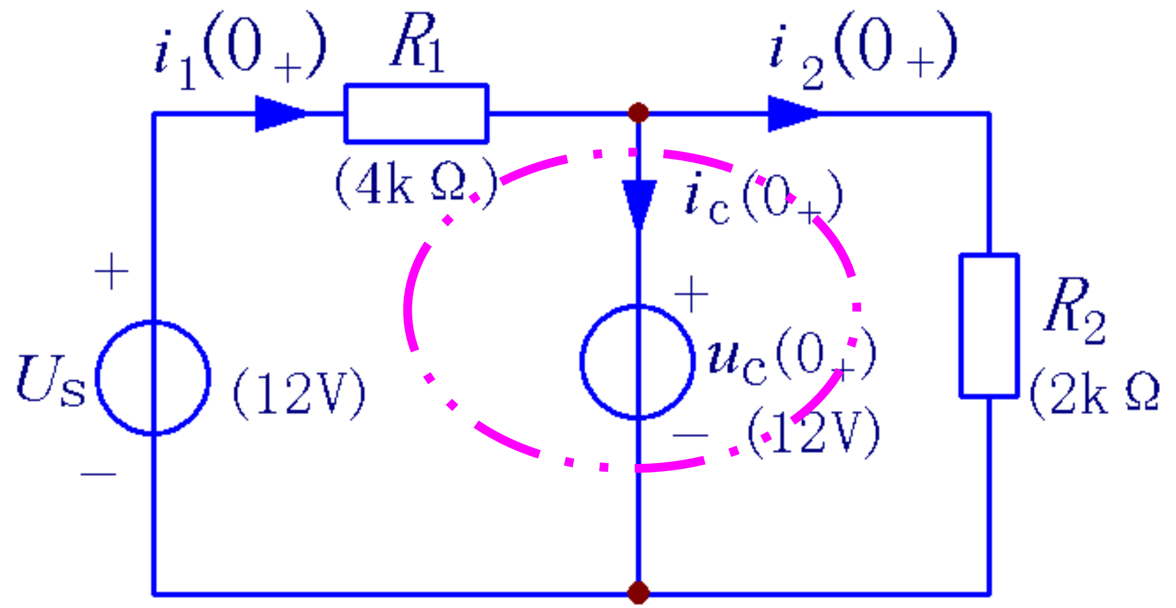
2） 根据换路定则

$$u_c(0_+) = u_c(0_-) = 12\ \text{V}$$



§ 3–6 初始状态和初始条件

3） $t=0_+$时



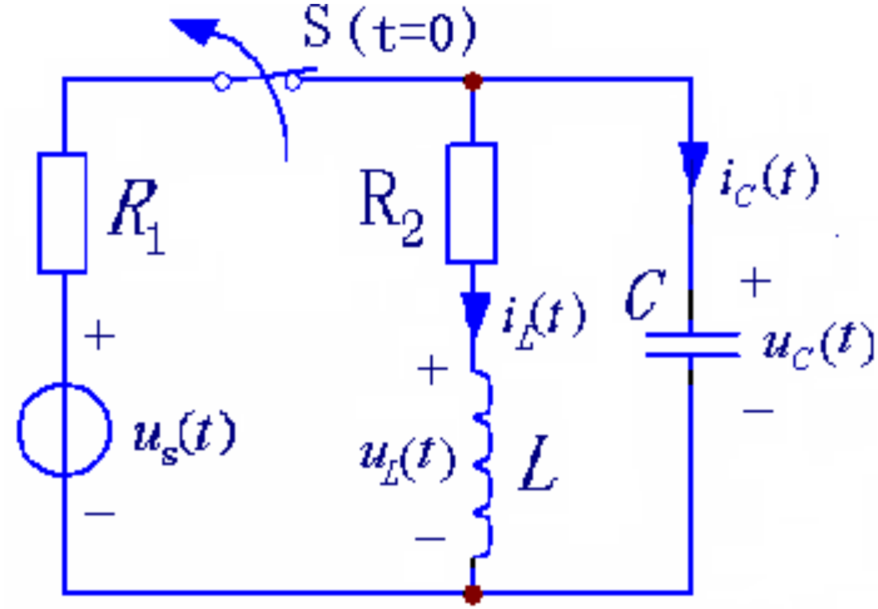
$$i_1(0_+)=\frac{U_s-u_c(0_+)}{R_1}=0\ \text{A}$$

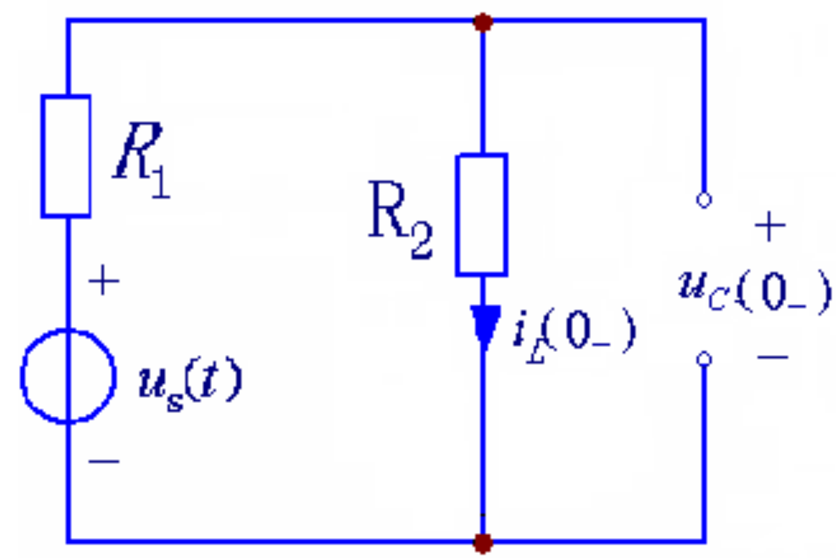
$$i_2(0_+)=\frac{u_c(0_+)}{R_2}=6\ \text{mA}$$

$$i_c(0_+)=i_1(0_+)-i_2(0_+)=-6\ \text{mA}$$

§ 3–6 初始状态和初始条件

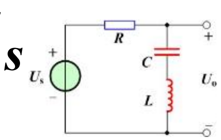
例2. 开关断开前电路已工作了很长时间，求开关断开后的$i_L(0_+)$、$u_L(0_+)$、$u_C(0_+)$、$i_C(0_+)$和$i_{R2}(0_+)$。





解： 1） $t = 0\_$ 时

$$i_L(0\_) = \frac{u_s}{R_1 + R_2} \qquad u_C(0\_) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_s$$



电路原理

§ 3–6 初始状态和初始条件

2）根据换路定则

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{u_s}{R_1 + R_2}$$

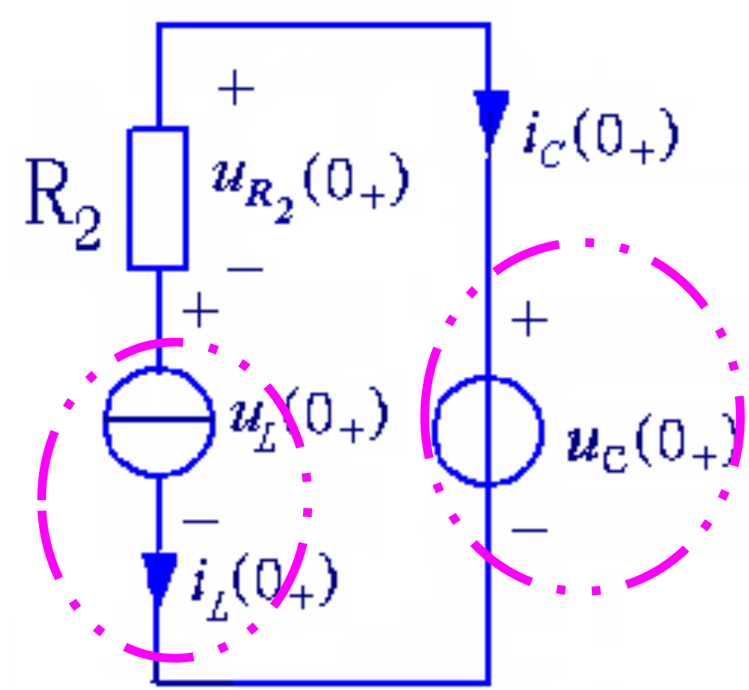
$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_s$$

3）$t = 0_+$时的电路

$$i_C(0_+) = -i_L(0_+) = -\frac{u_s}{R_1 + R_2}$$

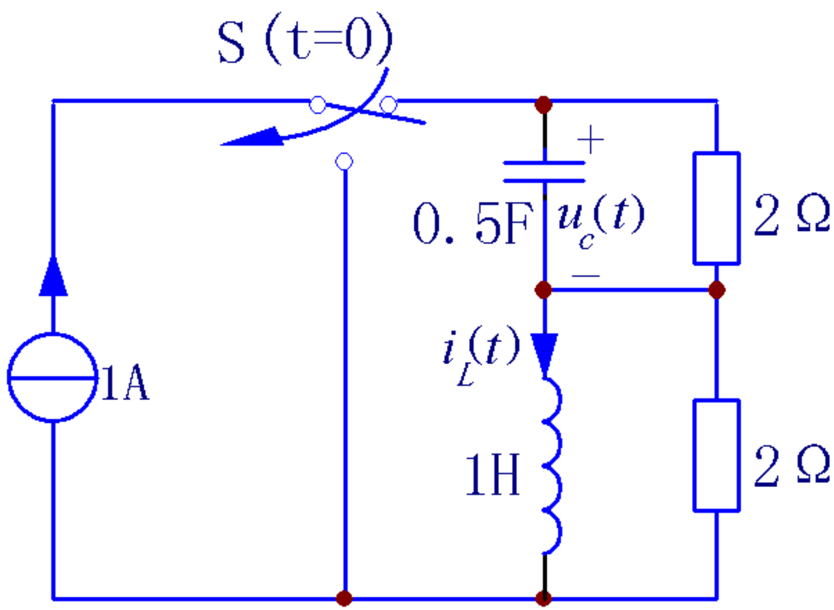
$$u_{R_2}(0_+) = R_2 i_L(0_+) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_s$$

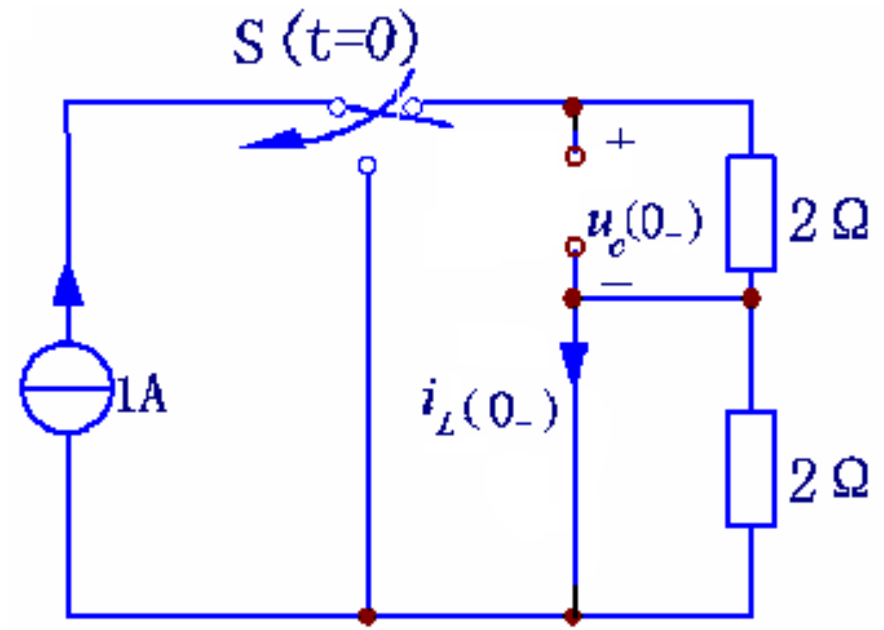
$$u_L(0_+) = -u_{R_2}(0_+) + u_C(0_+) = 0$$



§ 3–6 初始状态和初始条件

例3. 开关断开前电路已工作了很长时间，求开关断开后的$i_L(0_+)$、$u_C(0_+)$、$i_L'(0_+)$和$u_C'(0_+)$。





解： 1） $t = 0\_$ 时

$$i_L(0\_) = 1A \qquad u_C(0\_) = 2V$$

§ 3–6 初始状态和初始条件

2） 根据换路定则

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1A$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 2V$$

3） $t = 0_+$时的电路

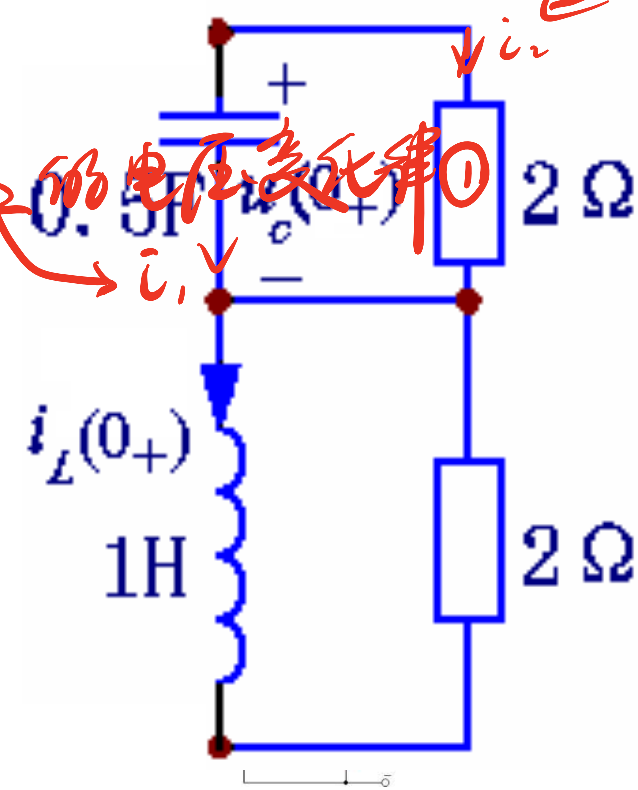
$$\boxed{0.5\frac{du_C}{dt} = -\frac{u_C}{2}}$$

①号电阻上的电流即为C上的电压变化律①

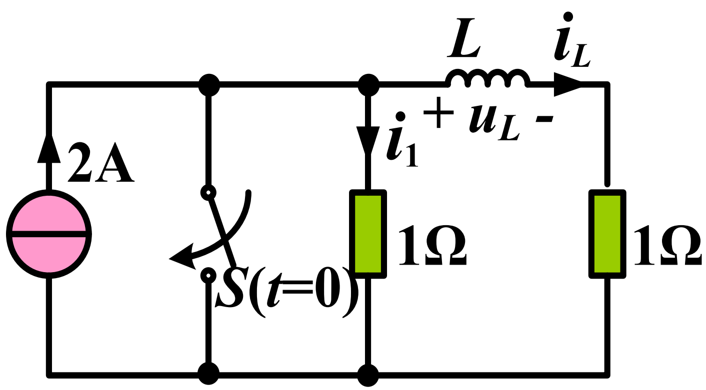
$$\frac{du_C}{dt}\Big|_{0_+} = -u_C(0_+) = -2V/s$$

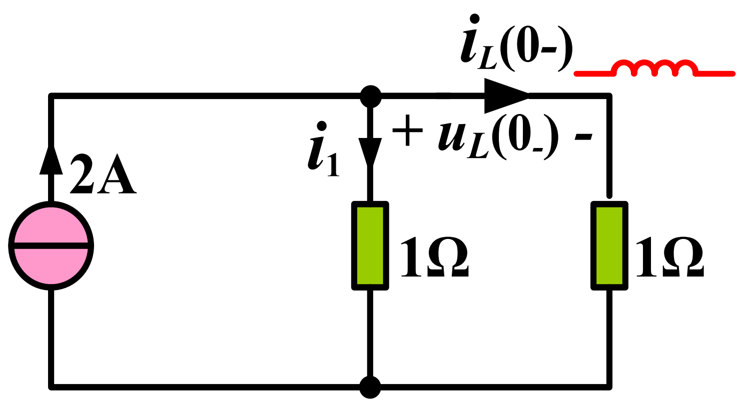
$$\boxed{1\frac{di_L}{dt} = -2i_L}$$

$$\frac{di_L}{dt}\Big|_{0_+} = -2i_L(0_+) = -2A/s$$



例2. t=0时，闭合开关S，试求开关切换前和转换后瞬间的电感电流和电感电压。





t=0_时的等效电路

解： 1) $t = 0_-$ 时

$$i_L(0_-) = 1\text{A}$$

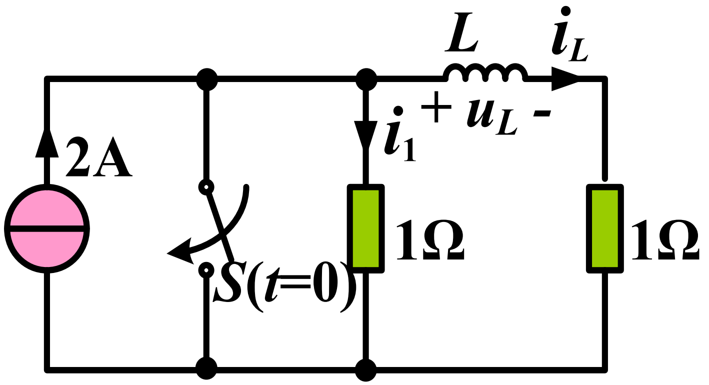
$$u_L(0_-) = 0\text{V}$$

2) 根据换路定则

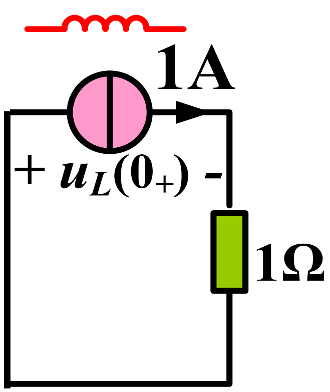
$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1\text{A}$$

§ 3–6 初始状态和初始条件 · 例题

3） $t=0_+$时　$u_L(0_+)=?$



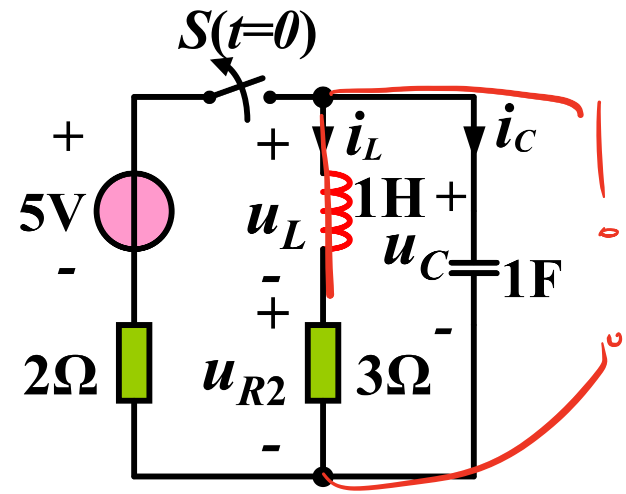
$$u_L(0_+) = -1\times 1 = -1\text{V}$$



$t=0_+$时的等效电路

§ 3–6 初始状态和初始条件 · 例题

例3. 开关断开前电路已处于稳态，求开关断开后的$i_L(0_+)$、$u_L(0_+)$、$u_C(0_+)$、$i_C(0_+)$和$u_{R2}(0_+)$ 。

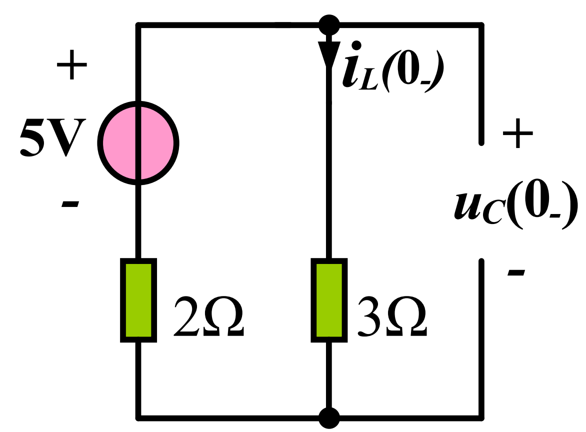


二阶电路

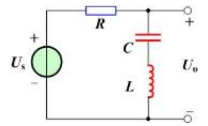
解： 1) $t = 0_-$ 时

$$i_L(0\_) = 1A$$

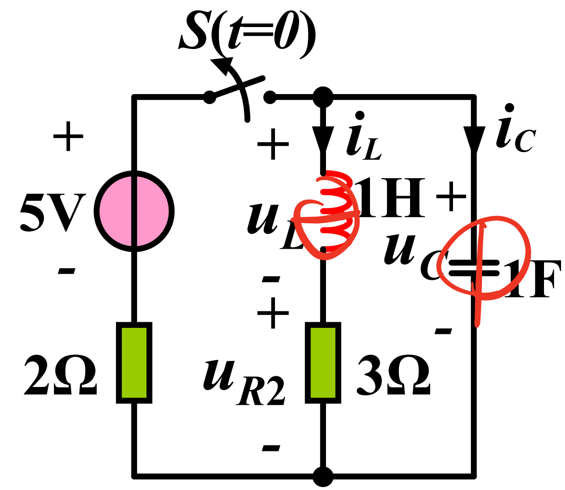
$$u_C(0\_) = 3V$$



t=0_时的等效电路



§ 3–6 初始状态和初始条件 · 例题



2) 根据换路定则

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1\text{A}$$

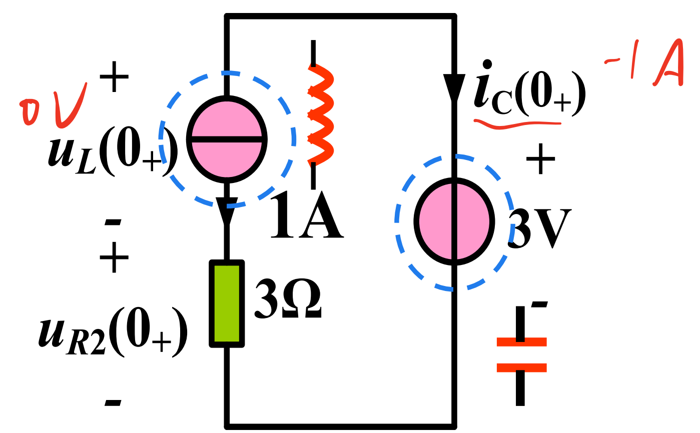
$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 3\text{V}$$

3） $t = 0_+$时的电路

$$i_C(0_+) = -i_L(0_+) = -1\text{A}$$

$$u_{R_2}(0_+) = R_2 i_L(0_+) = 3\text{V}$$

$$u_L(0_+) = -u_{R_2}(0_+) + u_C(0_+) = 0$$



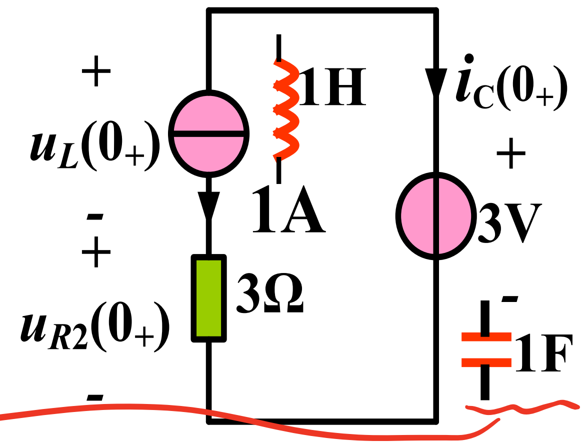
t=0$_+$时的等效电路

电路原理

§ 3–6 初始状态和初始条件 · 例题

3） $t=0_+$时的电路

$$i_C(0_+)=-i_L(0_+)=-1\text{A}$$



u_C'?

$t=0_+$时的等效电路

$$u_C'(0_+)=?$$

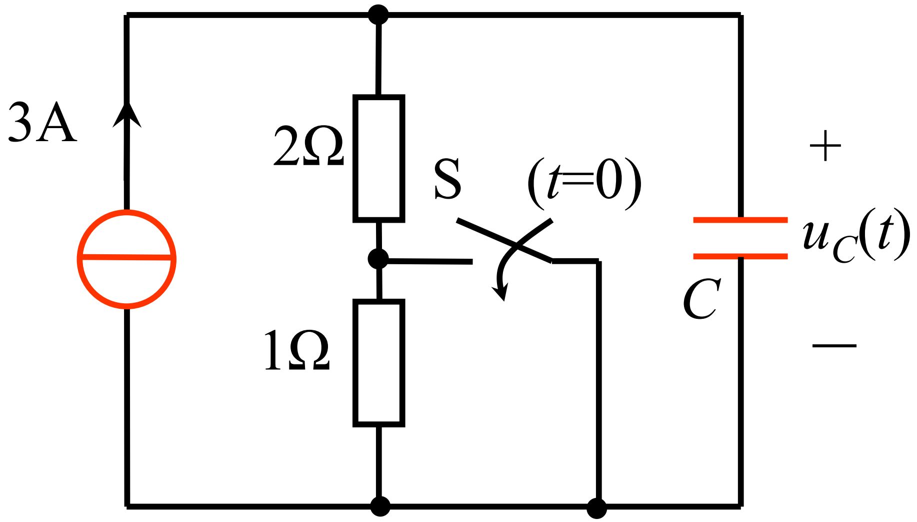
$1\times\frac{du}{dt}=-1=u'$

$$u_C'(0_+)=\frac{i_C(0_+)}{C}=-1\text{V/s}$$

在0_+时刻等效电路求解

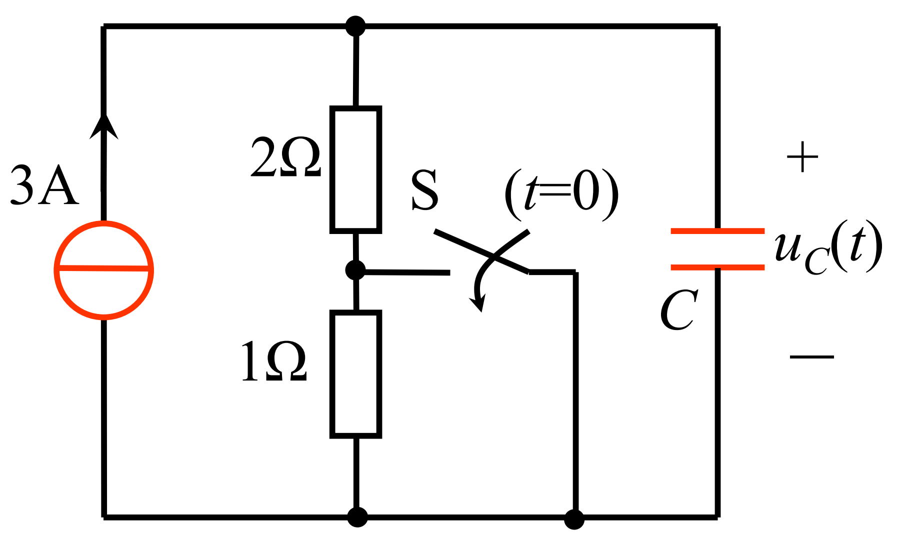
§ 3–6 初始状态和初始条件 · 练习1

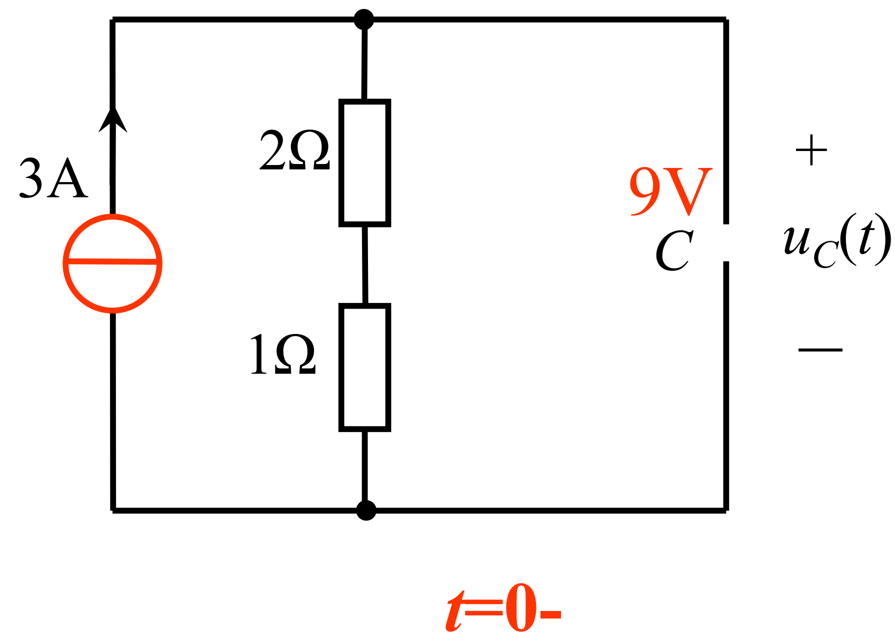
图所示电路在换路前处于稳定状态，开关S在t=0时闭合，求电容电压的初始值$u_C(0_+)$。



§ 3–6 初始状态和初始条件 · 练习1

$u_C(0_+)$

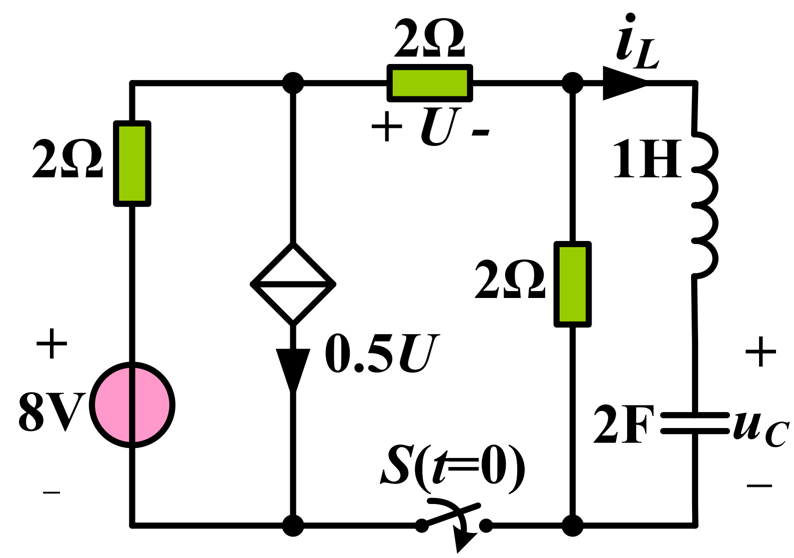




$$u_C(0_+)= u_C(0_-)=9\text{V}$$

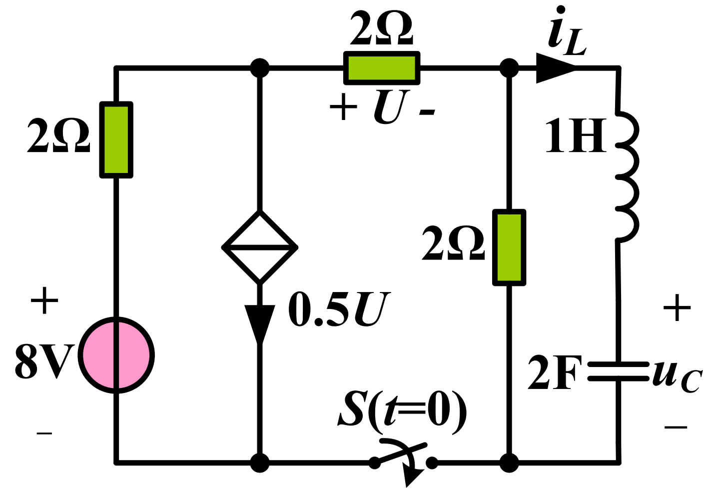
§3–6 初始状态和初始条件·练习2

练习. 开关断开前电路已工作了很长时间，求开关闭合后的 $i_L(0_+)$、$u_C(0_+)$、$i_L'(0_+)$和$u_C'(0_+)$ 。



§ 3–6 初始状态和初始条件·练习2

练习. 开关断开前电路已工作了很长时间，求开关闭合后的 $i_L(0_+)$、$u_C(0_+)$、$i_L'(0_+)$和$u_C'(0_+)$ 。



解： 1) $t = 0_-$ 时

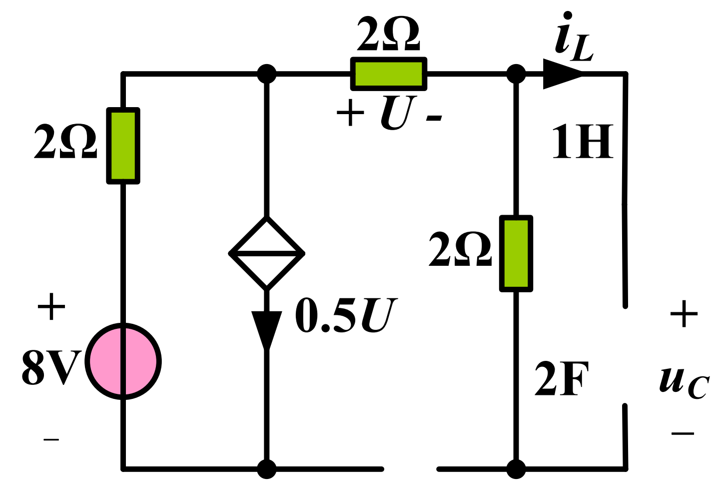
$$i_L(0_-) = 0\text{A}$$

$$u_C(0_-) = 0\text{V}$$

2) 根据换路定则

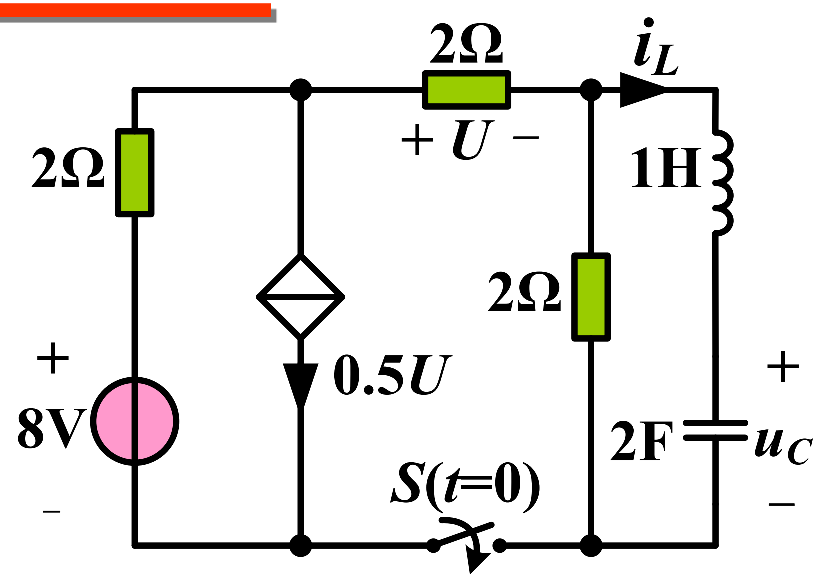
$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0\text{A}$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0\text{V}$$



§ 3–6 初始状态和初始条件·例题

3） $t=0_+$时的电路



$$i_L(0_+)=0\text{A}$$

$$u_C(0_+)=0\text{V}$$

$$2U+2U=8$$

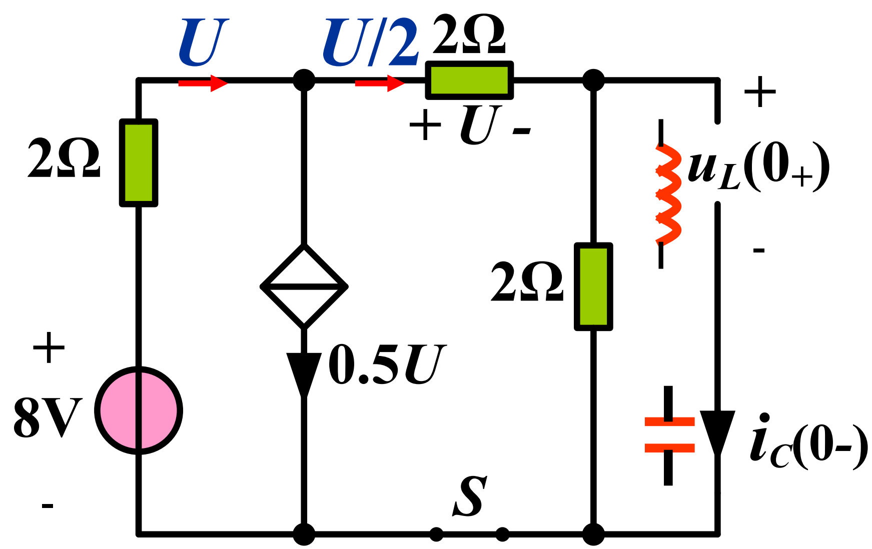
$$u_L(0_+)=U=2\text{V}$$

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0_+}=u_L(0_+)=2$$

$$i_L'(0_+)=2\text{A/s}$$

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0_+}=i_C(0_+)=0$$

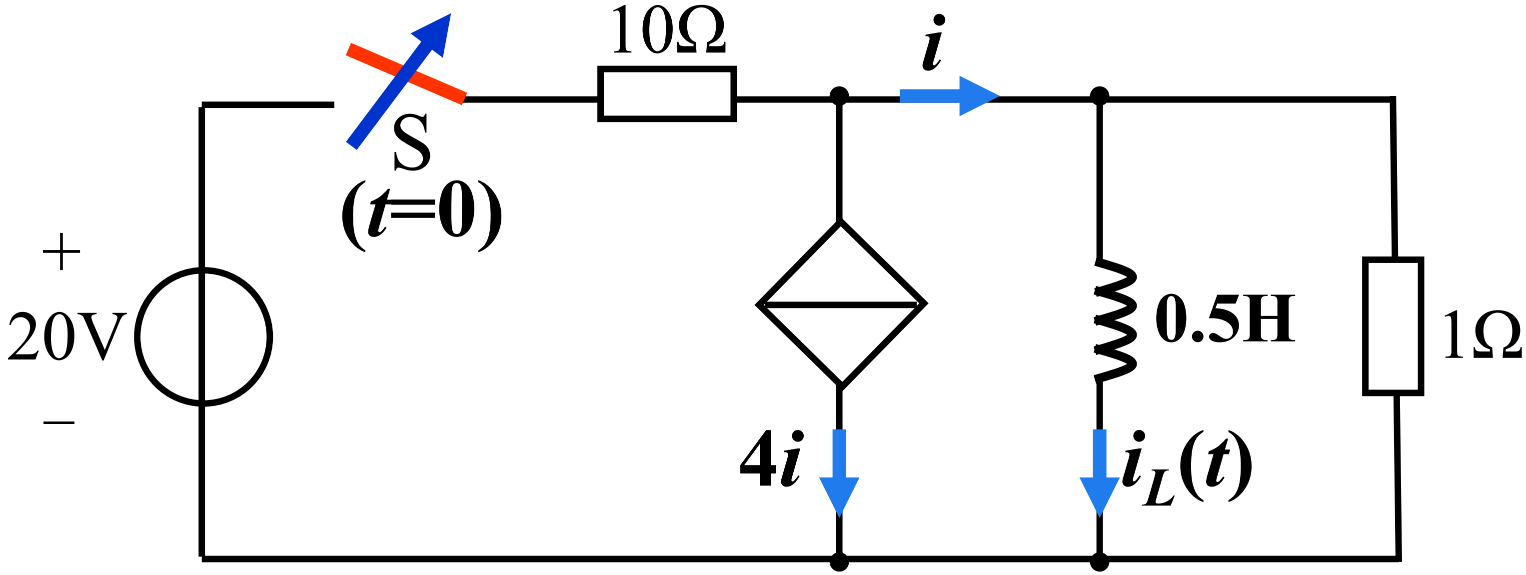
$$u_C'(0_+)=0\text{V/s}$$



$t=0_+$时的等效电路

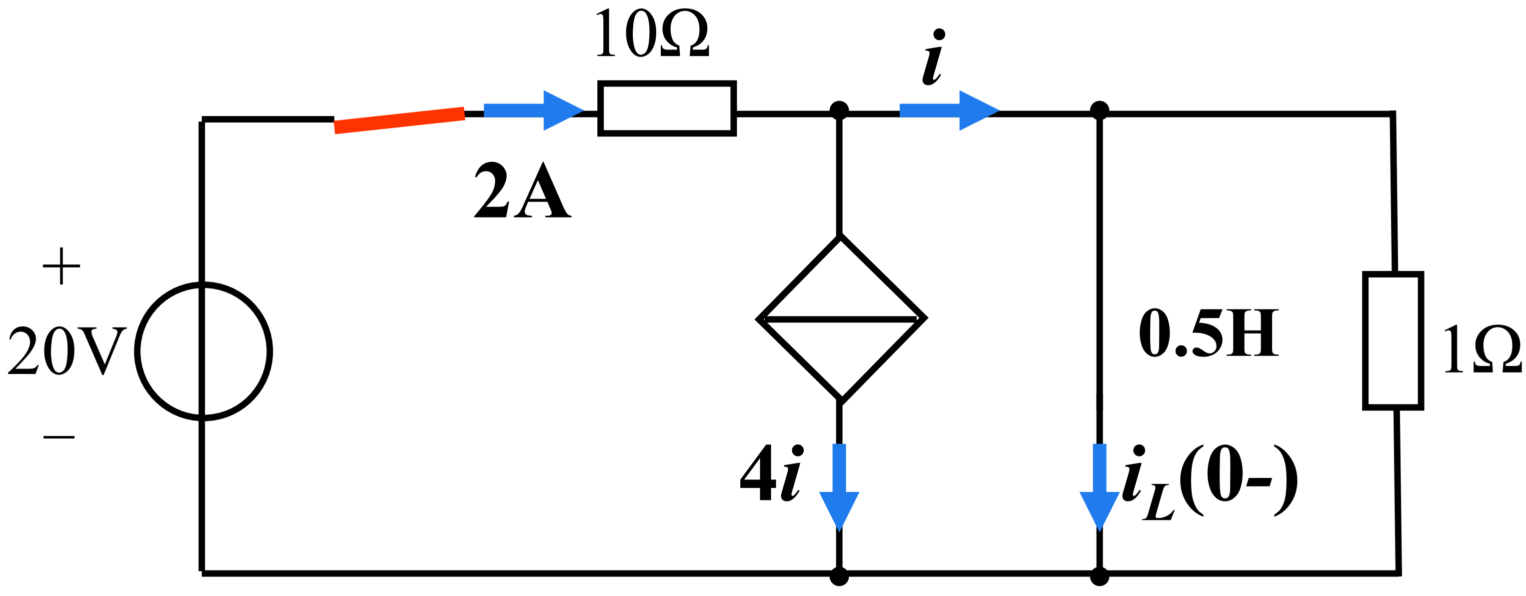
§ 3–6 初始状态和初始条件 · 练习3

图所示电路在换路前处于稳定状态，开关S在t=0时断开，求电感电流的初始值$i_L(0_+)$。



§3–6 初始状态和初始条件 · 练习3

图所示电路在换路前处于稳定状态，开关S在t=0时断开，求电感电流的初始值$i_L(0_+)$。



t=0-