第五章　定积分

一、教学目标与基本要求

1、理解定积分的概念和基本性质，使学生牢固掌握定积分概念，理解定积分是一种和式极限，对定积分解决问题的思想有初步体会。

2、理解变上限定积分定义的函数及其求导定理，掌握牛顿-莱布尼茨公式。通过学习，使学生更深入理解定积分和不定积分，微分和积分间的联系。

3、掌握定积分的换元法与分部积分法

4、了解广义积分的概念并会计算广义积分。

5、了解定积分的近似计算法。

6、理解定积分的来源，几何及物理意义，为以后学习其他专业课程打下基础掌握用定积分表达和计算一些几何量与物理量（平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、变力作功、引力、压力及函数的平均值等）

二、教学内容及学时分配：

第一节	定积分的概念与性质	2 学时
第二节	微积分基本公式	2 学时
第三节	定积分的换元法和分部积分法	3 学时
第四节	反常积分	2 学时

三、教学内容的重点及难点：

1、 重点：定积分的概念和性质。微积分基本定理，积分的换元积分法。广义积分。

2、难点：定积分概念的规则。定积分的换元积分法和分步积分法的运用

四、教学内容的深化和拓宽：

1、 无穷限反常积分的审敛法

2 、无界函数的反常积分的审敛法

3 、Γ 函数

五、思考题与习题

六、教学方式（手段）

本章主要采用讲授新课的方式。

第一节　定积分的概念与性质

一、定积分的概念

引例 1 曲边梯形的面积

在生产实际中，常常需要计算不规则图形的面积，如测量河流的流量，需要知道河床截面面积。又如抛物型容器的剖面面积等。这些图形均可化为通过求曲边梯形的面积而得到。

曲边梯形：它由四条边围成。其中三条边是直线，三条直边中有两条边相互平行，第三条与前两条边垂直叫做底边，第四条边是一条曲线弧叫曲边，这条边与任意一条垂直于底边的直线至多只有一个交点。

前面的图形均可化为求曲边梯形的面积。

下面讨论曲边梯形面积的求法：设曲边梯形是由 $[a,b]$ 上非负连续函数 $y=f(x)$，　直线 $x=a,x=b,y=0$ 围成。

如果 $f(x)=$ 常数，曲边梯形退化为矩形，矩形面积=底×高；

如果 $f(x)\neq$ 常数，$f(x)$ 随 x 的改变而改变，不能直接用矩形的面积的公式，由于 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是连续的，在 $[a,b]$ 上的一个很小区间上，$f(x)$ 的变化也很小，可以近似地看作不变。据此思路，可用下面方法求曲边梯形的面积。

(1)分割：在区间[a, b]中任意插入若干个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

把[a, b]分成 n 个小区间 $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots[x_{n-1},x_n]$

每个小区间的长度依次为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$　.

过每一个分点作平行于 y 轴的直线段, 把曲边梯形分成 n 个窄曲边梯形.

(2)取近似：在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，以 $[x_{i-1},x_i]$ 为底，$f(\xi_i)$ 为高的矩形面积为 $f(\xi_i)\Delta x_i$，用它近似代替以 $[x_{i-1},x_i]$ 为底的小曲边梯形的面积。Δx_i 越小，其近似程度越高。

(3)求和：n 个窄的曲边梯形面积的近似值之和就为曲边梯形面积的近似值

曲边梯形的面积 $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$　　　　　　　　（1）

(4)取极限：容易看出，插入的分点越多，Δx_i 越小，$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 越接近曲边梯形的面积。为此，我们要求小区间长度的最大者趋于 0，（1）的极限即为曲边梯形的面积。即令 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n\}$，则 $A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

引例 2 变速直线运动的路程

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$$

引例 3 非均匀细棒的质量

$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta x_i$$

引例 4 变力沿直线作功

设物体在变力 $F = F(x)$ 作用下沿直线（假定为 x 轴）从点 $x = a$ 移动到点 $x = b$ ($a < b$)，且力的作用方向与物体的运动方向一致，$F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续，求力 $F(x)$ 所作的功 W。

如果力是常力，由物理学知

功＝力×距离

但现在的力 $F(x)$ 不是常力、而是随 x 的改变而变化的，故不能直接应用常力作功的公式计算。解决这个问题的方法类似于前面求曲边梯形的面积与求变速直线运动的路程的方法。$W = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i$

上面几个例子，尽管实际意义各不相同，但都归结为求相同结构的和式的极限，我们撇开这些问题的实际意义，抓住它们在数量上的共性，加以概括就得到定积分的定义。

定义：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 上任意插入 $n-1$ 个分点：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

把区间$[a,b]$分成n个子区间$[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$，其长度为：

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad i=1,2,\cdots,n$$

在每个子区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点ξ_i $(x_{i-1}\le\xi_i\le x_i)$，作乘积$f(\xi_i)\Delta x_i$（$i=1,2,\cdots,n$），并作和$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，记$\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，如果不论对区间$[a,b]$怎样分法，也不论在区间$[x_{i-1},x_i]$上点$\xi_i$怎样选取，只要当$\lambda\to 0$时，和$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$总趋于确定的极限值$I$，则称函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，并称此极限值$I$为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分(Definite integral)，记为$\int_a^b f(x)dx$，即

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (1\cdot 7)$$

其中，$f(x)$称为被积函数，x称为积分变量，$f(x)dx$称为被积表达式，a与b分别称为积分下限与积分上限，$[a,b]$为积分区间，和$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$称为$f(x)$在$[a,b]$的**积分和**

定积分这一定义，最初是由黎曼(Riemann)给出的，所以在这种意义下的定积分也称**黎曼积分**，和$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$称为**黎曼和**，函数$f(x)$在$[a,b]$可积也称为**黎曼可积**。

有了定积分定义后，前面三个实际问题都可以用定积分来表示。

注：定积分就是累加，定积分的定义体现有限到无限、量变到质变的过程。在现实生活中很多都与积分思想有关，如积分卡，挣钱的过程，学习的过程，人一天一天过日子的过程等都体现积分的思想。

关于定积分定义的几点说明：

(1) 在定义中，$\lambda\to 0$表示所有子区间的长度都趋于零，因而子区间的个数$n\to\infty$，但我们不能用$n\to\infty$来代替$\lambda\to 0$。这是因为对区间的分割是任意的，$n\to\infty$并不能保证$\lambda\to 0$。

板书$\lambda\to 0\Rightarrow\Delta x_i\to 0\Rightarrow n\to\infty$，但$n\to\infty$不能推出$\lambda\to 0$）

(2)对于区间$[a,b]$的不同分法和$\left[x_{i-1},x_i\right]$上点ξ_i的不同选取将有不同的和式。定义要求：无论对区间$[a,b]$怎样分法，也无论ξ_i怎样选取，当$\lambda\to 0$时，所有这些和式都趋于同一个极限值I，这时才能说$f(x)$在区间$[a,b]$上可积(或定积分存在)。**当$f(x)$可积时，若用定义求定积分，常将区间等分，ξ_i取小区间的端点。**

一般地，对于$\int_a^b f(x)dx$，将$[a,b]$区间 n 等分，取ξ_i为小区间的右端点，则$\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n},\xi_i=x_i=a+\dfrac{i(b-a)}{n},i=1,2,\cdots,n$，（若取左端点，则$i=0,1,2,\cdots,n-1$）

从而$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(a+\dfrac{i(b-a)}{n})\dfrac{b-a}{n}$

特别地：$\int\limits_0^1 f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\dfrac{i}{n})\dfrac{1}{n}$

例 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n})=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+i}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\dfrac{1}{n}=\int_0^1\dfrac{1}{1+x}dx=\ln 2$

（3）定积分是一个和式的极限，极限值是一个确定的数值，它仅与被积分函数$f(x)$和积分区间$[a,b]$有关，而与积分变量用什么字母表示无关，即

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du$$

正如表达式$\sum\limits_{i=1}^{10}\dfrac{1}{i^2},\sum\limits_{n=1}^{10}\dfrac{1}{n^2},\sum\limits_{R=1}^{10}\dfrac{1}{R^2},\sum\limits_{n=2}^{11}\dfrac{1}{(n-1)^2}$都表示和$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{10^2}$一样。

（4）为了以后的方便，规定：

当$a=b$时，　　$\int_a^a f(x)dx=0$

当$a>b$时，　　$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

定积分的定义提到不论对$[a,b]$怎样划分，也无论ξ_i怎样选取，当$\lambda\to 0$时，所有这些和式的极限都存在，称此极限值为$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分，那么$f(x)$满足怎样的条件，这些和式的极限才存在呢？这就是我们下面要讨论的可积条件。

定理 1(可积的必要条件)：若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，则$f(x)$在$[a,b]$

上有界。

证: 用反证法. 假设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界, 则对于区间 $[a,b]$ 的任意分割

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

函数 $f(x)$ 至少在一个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$　$(1 \le i \le n)$ 上是无界的, 于是, 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上一定可以选取一点 ξ_i, 使得 $\left| f(\xi_i)\Delta x_i \right|$ 任意大, 从而可使 $\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right|$ 任意大. 这样一来, 积分和就不可能有极限, 故函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积。这与函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积相矛盾，所以，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

然而，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界并不是可积的充分条件。

例 4： 证明狄利克雷⌒函数

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x\text{ 为有理数} \\ 0 & x\text{ 为无理数} \end{cases}$$

在任意区间 $[a,b]$ 上都不可积。

证：用分点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ 将区间 $[a,b]$ 任意分成 n 个子区间，若取 ξ_i 为子区间 $[x_{i-1}, x_i]$　$(i = 1,2,\cdots,n)$ 中的有理数，则 $D(\xi_i) = 1$，

从而
$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a$$

若取 ξ_i 为子区间 $[x_{i-1}, x_i]$　$(i = 1,2,\cdots,n)$ 中的无理数，则 $D(\xi_i) = 0$

从而
$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i = 0$$

由于积分和的极限分别为 $b - a$ 和 0，所以 $D(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上不可积。　▲

下面给出可积的充分条件。

定理２：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

⌒ 狄利克雷（Dirichlet,P.G.L. 1805—1859），德国数学家，解析数论的创始人。他在分析、数论、位势论等方面作出了重大贡献。

定理３： 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

定理 4： 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调有界，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

由于这三个定理的证明已超过本书的要求，故这里略去。

二、定积分的几何意义：

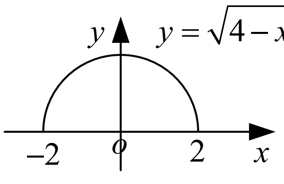
（1）若在区间 $[a,b]$ 上函数 $f(x)\ge 0$，则 $\int_a^b f(x)dx$ 在几何上表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a,x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积 A，如图 1·4 所示，即 $\int_a^b f(x)dx=A$

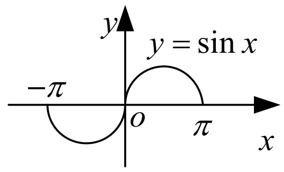
（2）若在区间 $[a,b]$ 上函数 $f(x)\le 0$，此时定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 在几何上表示曲边梯形面积 A 的负值，即 $\int_a^b f(x)dx=-A$。

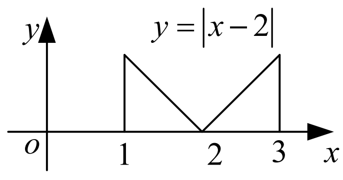
因由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a,x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形在 x 轴的下方。这时 $f(\xi_i)\le 0$，$\Delta x_i>0$，从而 $f(\xi_i)\Delta x_i\le 0$，由定积分的定义知 $\int_a^b f(x)dx\le 0$.

（3）若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上变号，则定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 在几何上表示介于曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a,x=b$ 与 x 轴之间各部分面积的代数和，x 轴上方图形的面积带“+”号，x 轴下方图形的面积带“−”号，即 $\int_a^b f(x)dx=A_1-A_2+A_3$。

例: 用定积分的几何意义计算 $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=2\pi$，$\int_{-\pi}^{\pi}\sin xdx=0$，$\int_1^3|x-2|dx=1.$





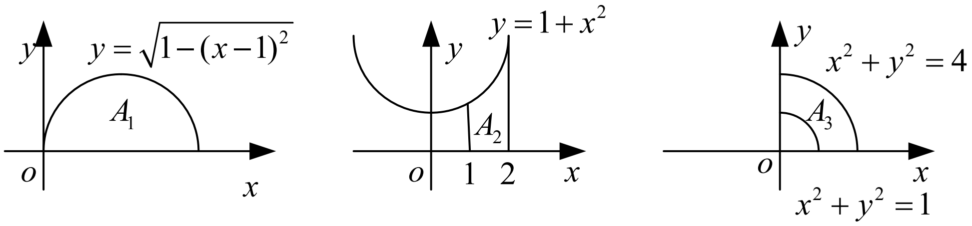


解: 因为被积函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ 的图形是圆心在原点，半径为 2 的上半圆（图 1·7），由定积分的几何意义可知：$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$ 的值等于由曲线 $y=\sqrt{4-x^2}$ 与 x 轴从 -2 到 2 一段所围成的半圆形的面积，即

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2=2\pi$$

同理可知：$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx=0$，$\int_{1}^{3}|x-2|dx=1.$

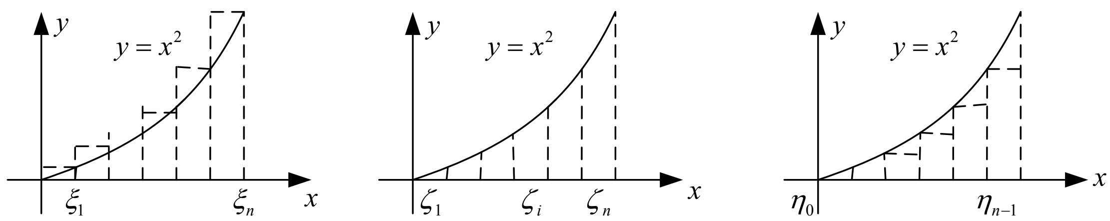
例 把下列图中的阴影部分的面积用定积分表示。



$$A_1=\int_0^2\sqrt{1-(x-1)^2}dx, A_2=\int_1^2(1+x^2)dx, A_3=\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx-\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$$

例 6：利用定义计算定积分$\int_0^b x^2dx\ (b>0)$。

解：因$f(x)=x^2$在$[0,b]$上连续，该积分可积，所以，积分值与区间的分法及点ξ_i的取法无关。



为了方便，n等分区间$[0,b]$，设为$0=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，分点为$x_i=\frac{ib}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$，子区间$[x_{i-1},x_i]$的长度$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\frac{b}{n}\quad(i=1,2,\cdots,n)$，取$\xi_i=x_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$，于是得积分和式：

$$\int_0^b x^2dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2b^2}{n^2}\cdot\frac{b}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})=\frac{b^3}{3}$$

利用：$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

另：若取η_i为区间的左端点，即$\eta_i=x_i=\frac{ib}{n},i=0,1,\cdots,(n-1)$

同理$\int_0^b x^2dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n-1}f(\eta_i)\Delta x_i=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{i^2b^2}{n^2}\cdot\frac{b}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b^3}{6}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})=\frac{b^3}{3}$

再：若取ζ_i为$\left[x_{i-1},x_i\right]$内部的一点，则有

$$\frac{1}{3}b^3\leftarrow\sum_{i=0}^{n-1}f(\eta_i)\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_i)\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\to\frac{1}{3}b^3$$

也有$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\zeta_i)\Delta x_i=\frac{1}{3}b^3.$　　<u>**该例也说明积分定义中的**</u>ξ<u>**与取法无关**</u>。

利用定积分定义求定积分是繁的，我们有其它方法来计算定积分。我们可用定积分的定义求极限

例 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)=\int\limits_0^1\sin\pi xdx=\frac{2}{\pi}.$　　或

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin xdx=\frac{2}{\pi}.$$

例 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sin\frac{\pi}{n}+\frac{1}{n+1/2}\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\frac{1}{n+1/n}\sin\frac{n}{n}\pi\right)=\lim\limits_{n\to\infty}I_n$

解：先利用夹逼准则，再由定积分的定义可求此极限。

$$\frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi i}{n}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi i}{n}\le I_n\le\frac{1}{n+1/n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi i}{n}=\frac{n^2}{n^2+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi i}{n}$$

$$\frac{2}{\pi}=\int_0^1\sin\pi xdx=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi i}{n}\le\lim_{n\to\infty}I_n\le\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi i}{n}=\int_0^1\sin\pi xdx=\frac{2}{\pi}$$

练习：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}(p>0)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^p=\int_0^1x^pdx=\frac{1}{p+1}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+\cos\frac{x}{n}+\cos\frac{2x}{n}+\cdots+\cos\frac{(n-1)x}{n})=\frac{1}{x}\int_0^x\cos tdt=\frac{\sin x}{x}$

二、 定积分的性质

根据定积分的定义及极限的运算法则，可以推得定积分的下列性质。

性质 1：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则 $kf(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上也可积，且

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad （k\text{ 为常数}）$$

证：$\int_a^b kf(x)dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i = k\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)dx$ ▲

此性质表明被积函数的常数因子可以提到积分号外面。

性质 2：若函数 $f(x)$、$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)\pm g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上也可积，且 $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

证：

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)\pm g(\xi_i)]\Delta x_i \\ &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i \\ &= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

综合式（2·1）与式（2·2）知定积分具有线性性质，即

$$\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx \quad （\alpha、\beta\text{ 为常数}） \qquad （2·3）$$

并可推广到有限个函数的情形，即有限个函数的线性组合的定积分等于各函数的定积分的线性组合。

性质 3 $\int_a^b 1dx = b-a$

性质 4（对区间的可加性）：设函数 $f(x)$ 在有限闭区间 I 上可积，$a,b,c\in I$，则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

证：

（1）当 $a<c<b$ 时，（如图 2.1(a)）

因为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，所以不论怎样分割区间 $[a,b]$ 积分和式的极限都不变，因此在分割区间 $[a,b]$ 时，可以使 c 永远是一个分点，于是，$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分和等于区间 $[a,c]$ 上的积分和加区间 $[c,b]$ 上的积分和，即

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i$$

令$\lambda \to 0$时，上式两端同时取极限，即得

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

（2）当$a<b<c$时，（如图 2.1(a)）

由(1)已证的结果，有

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

移项 $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$$

因为 $$-\int_b^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx$$

所以 $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

（3）当a,b,c的大小关系为其它情行时，用同样的方法可以证明。 ▲

性质 5(定积分的保号性)：若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，且$f(x)\ge 0$，$x\in[a,b]$，则$\int_a^b f(x)dx \ge 0$。 <u>隐含</u> $(a\le b)$

证：因为函数$f(x)\ge 0$，$x\in[a,b]$

从而，$f(\xi_i)\ge 0\ (i=1,2,3,\cdots,n)$，又$\Delta x_i > 0\ (i=1,2,3,\cdots,n)$

所以 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ge 0$， 故$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ge 0$ ▲

由性质 4 可得下面两个推论:

推论 1 (比较定理)：若函数$f(x),g(x)$在区间$[a,b]$上可积，且$f(x)\le g(x)$，$x\in[a,b]$，则 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$ （ $a\le b$ ）

证：因为$g(x)-f(x)\ge 0$，由性质 4 得：$\int_a^b [g(x)-f(x)]dx \ge 0$，再由性质 2 便得到所要证明的不等式。 ▲

推论２：若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，则$|f(x)|$在区间$[a,b]$上也可积（证略），且 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$ （ $a\le b$ ）

证：因为$-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|$由性质 1 及推论 1 得

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$

即 $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$ ▲

性质 6(估值定理)：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，且 $m \le f(x) \le M$，$x \in [a,b]$，则 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ （$a \le b$）

证：因为 $m \le f(x) \le M$，由性质 1 及推论 1 得

$$m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx$$

注意 $\int_a^b dx = \int_a^b 1 \cdot dx$, 由定积分定义易知:

$$\int_a^b dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0}(b-a) = b-a$$

于是得 $$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$ 。 ▲

性质 7（积分中值定理）: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在区间 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ（可以改为开区间内存在一点），使得

$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ $(a \le \xi \le b)$ 。　　　　该式称为积分中值公式

证：由性质 5，有 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

由闭区间上连续函数的介值定理知，在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (a \le \xi \le b)$$

即 $$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \qquad (a \le \xi \le b)$$

积分中值公式在几何上表明, 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 则在区间 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ, 使得以区间 $[a,b]$ 为底边、以曲线 $y = f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积恰好等于同一底边而高为 $f(\xi)$ 的面积。

定义　称 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 为连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的**平均值**。

***性质 8（推广的积分中值定理）**：设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，则在区间 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \qquad (2\cdot5)$$

证：由于 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，不妨设 $g(x)\ge 0$，$x\in[a,b]$；因为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M 和最小值 m，即

$$m \le f(x) \le M \qquad x\in[a,b]$$

于是
$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$$
由性质 1 和推论 1 得
$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx \qquad (2\cdot6)$$

若 $\int_a^b g(x)dx = 0$，由上述不等式知：$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$，此时任取 $\xi\in[a,b]$，都有式(2·5)都成立.

若 $\int_a^b g(x)dx > 0$，那么用 $\int_a^b g(x)dx$ 去除（2·6）式各项，得

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$$

由闭区间上连续函数的介值定理知，在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = f(\xi) \qquad (a\le\xi\le b)$$

从而有
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \qquad (a\le\xi\le b)$$ ▲

前面假定 $g(x)\ge 0$ 时证明了式（2·5）。如果 $g(x)\le 0$，类似可证。在公式（2·5）中，令 $g(x)\equiv 1$，便得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \qquad (a\le\xi\le b)$$
这就是积分中值公式。

例 估计下列各积分的值

1. $\int_1^2 x^4 dx$

解：先求出 $f(x)=x^4$ 在 $[1,2]$ 上的最大值、最小值（显然可积），

因 $f'(x)=4x^3>0, x\in[1,2]$，即 $f(x)=x^4$ 在 $[1,2]$ 上单调增加，所以 $m=f(1)=1, M=f(2)=16.$ 故

$$1=1\cdot(2-1)\le\int_1^2 x^4dx\le 16(2-1)=16$$

2. $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x\arctan x dx$

解：令 $f(x)=x\arctan x, x\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right], f'(x)=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}>0$，

所以 $m=f(1/\sqrt{3})=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{18}\pi, M=f(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi.$

故 $\frac{\pi}{9}\le\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x\arctan x dx\le\frac{2}{3}\pi.$

3. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx$

解:设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，先求 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值 M 和最小值 m。由于 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续, 且 $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{(x-\tan x)\cos x}{x^2}<0 \quad x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

（或令 $g(x)=x\cos x-\sin x\Rightarrow g'(x)=-x\sin x<0\Rightarrow g(x)<g(\pi/4)<0$）

所以，$f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调减小, 于是 $m=f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$，$M=f(\frac{\pi}{4})=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

由性质 5, 得
$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

即
$$\frac{1}{2}\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{\sqrt{2}}{2}$$

例 证明不等式 $\frac{3}{e^4}<\int_{-1}^{2}e^{-x^2}dx<3$

证：令 $f(x)=e^{-x^2}, x\in[-1,2]$，则由 $f'(x)=-2xe^{-x^2}=0$ 得 $x=0$，

故 $f(-1)=\dfrac{1}{e}, f(0)=1=M, f(2)=\dfrac{1}{e^4}=m$

从而 $\dfrac{3}{e^4}=\dfrac{1}{e^4}[3-(-1)]<\int_{-1}^{2}e^{-x^2}dx<1\cdot[3-(-1)]=3$

例 比较积分 $\int_0^1 xdx$ 与 $\int_0^1 \ln(1+x)dx$ 谁大？

解：令 $f(x)=x-\ln(1+x), x\in[0,1]$，则 $f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}>0, x\in[0,1]$

所以当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0\Rightarrow x>\ln x$，故 $\int_0^1 xdx>\int_0^1 \ln(1+x)dx$

例 比较积分 $\int_{1/3}^{1}\sqrt{x}\ln xdx$ 与 $\int_{1/3}^{2/3}x\ln xdx$ 的大小。

解：$\int_{1/3}^{1}\sqrt{x}\ln xdx-\int_{1/3}^{2/3}x\ln xdx=\int_{1/3}^{2/3}\sqrt{x}\ln xdx+\int_{2/3}^{1}\sqrt{x}\ln xdx-\int_{1/3}^{2/3}x\ln xdx$

$$=\int_{1/3}^{2/3}(\sqrt{x}-x)\ln xdx+\int_{2/3}^{1}\sqrt{x}\ln xdx<0$$

例 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可微，且满足条件 $f(1)=2\int_0^{1/2}xf(x)dx$，

试证：$\exists\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

证明：设 $F(x)=xf(x)$（思路：在 $[0,1]$ 内找到两点 a,b 使 $F(a)=F(b)$，利用罗尔中值定理即证，首先 a,b 不会都取区间端点 0，1，因为 $F(0)=0, F(1)=f(1)$，可考虑在区间内部取一点）。

由积分中值定理知 $\exists\eta\in(0,\dfrac{1}{2})$，使 $f(1)=2\int_0^{1/2}xf(x)dx=2\int_0^{1/2}F(x)dx=F(\eta)$

而 $F(1)=f(1)=F(\eta)$，在 $[\eta,1]$ 上使用罗尔中值定理，

$\exists\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$ 使 $F'(\xi)=0$，得证。

练习题

例（2008 年）（Ⅰ）证明积分中值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则至少一点 $\eta\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\eta)(b-a)$；

（Ⅱ）若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数，且满足 $\varphi(2)>\varphi(1),\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx$，至少存在一点 $\xi\in(1,3)$，使得 $\varphi''(\xi)<0$.

证明：（Ⅰ）因函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，由最值定理存在 M,m，使

$$m\le f(x)\le M\Rightarrow m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)\Rightarrow m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M$$

由介值定理知，存在 $\eta\in[a,b]$，使得 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(\eta)$

（Ⅱ）由(Ⅰ)知，至少存在一点 $\eta\in[2,3]$，使 $\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx=\varphi(\eta),2<\eta\le3.$

对 $\varphi(x)$ 在 $[1,2]$ 和 $[2,\eta]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，并注意到

$\varphi(1)<\varphi(2),\varphi(\eta)<\varphi(2)$，得

$$\varphi'(\xi_1)=\frac{\varphi(2)-\varphi(1)}{2-1}>0,1<\xi_1<2，\quad\varphi'(\xi_2)=\frac{\varphi(\eta)-\varphi(2)}{\eta-2}<0,2<\xi_2<\eta$$

在 $[\xi_1,\xi_2]$ 对导函数 $\varphi'(x)$ 应用拉格朗日中值定理，有

$$\varphi''(\xi)=\frac{\varphi'(\xi_2)-\varphi'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0,\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(1,3)$$

考点：最值定理，介值定理，积分中值定理，拉格朗日中值定理。

例（2010 年）（Ⅰ）比较 $\int_0^1|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|dt(n=1,2,\cdots)$ 的大小，说明理由；

（Ⅱ）记 $u_n=\int_0^1|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n dt(n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

解：（Ⅰ）当 $0\le t\le1$ 时，因为 $\ln(1+t)\le t$，所以 $|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n\le t^n|\ln t|$，

因此 $\int_0^1|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n dt\le\int_0^1 t^n|\ln t|dt$ 。

（Ⅱ）由（Ⅰ）$0\le u_n=\int_0^1|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n dt\le\int_0^1 t^n|\ln t|dt$

$$=-\int_0^1 t^n \ln t dt = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \ln t d(t^{n+1}) = \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2}$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 t^n \left|\ln t\right| dt = 0$，故$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

例（2011 年）设$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x dx, J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x dx, K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x dx$，则$I,J,K$的大小关系为【B】

（A）$I<J<K$　　（B）$I<K<J$　　（C）$J<I<K$　　（D）$K<J<I$

解：当$x\in(0,\pi/4)$时，$\sin x<\cos x<\cot x \Rightarrow I<K<J$

例（2018）设$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx, K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$，

则（　）

(A) $M>N>K$　　(B) $M>K>N$

(C) $K>M>N$　　(D) $K>N>M$

【答案】(C)

【解析】因$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{(1+x)^2}{1+x^2}+\frac{(1-x)^2}{1+x^2}\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2dx=\pi$

又$\frac{1+x}{e^x}<1<1+\sqrt{\cos x}$，于是

$$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx=K$$

从而$K>M>N$。

一、内容要点

1、 定积分问题举例

（1）曲边梯形的面积　（2）变速直线运动的路程

2、 定积分定义

3、 定积分概念的意义

定积分概念具有广泛的直观背景，在各种科技领域中有大量实际问题，都可归结为教学上的定积分问题，这些问题再应用中有详细讨论。

4、定积分的存在定理

连续或在区间上只有有限个第一类间断点，则定积分存在。

5、 定积分的性质

（1）　线性性 （2）可加性 （3）单调性 （4）估值性 （5）定积分中值定理

二、教学要求与注意点

教学要求：正确理解定积分的概念极其简单性质。

注意点：

(1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$　(2) $\int_a^a f(x)dx = 0$　(3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(4) 定积分的几何意义　（5） 用定义计算 $\int_0^1 x^2 dx$

第二节　微积分基本公式

由本章第一节的讨论可以看到，利用定积分的定义来计算定积分是相当困难的。如果每个定积分都这样去计算，那么定积分的应用必将受到很大的限制。因此，我们必须寻求定积分的简便计算方法。为此，在本节我们将揭示定积分与微分以及定积分与不定积分之间的内在联系，从而导出计算定积分的准确而简便的方法，这就使得定积分的概念真正具有理论和实际价值。

为了说明定积分与微分之间内在的、本质的联系，下面从变速直线运动谈起。

一、变速直线运动中位置函数与速度函数的联系

设一物体作变速直线运动，在时刻t物体所在位置为$s(t)$，速度为$v(t)$。

由定积分定义前的引例知，物体从时刻$t=a$到时刻$t=b$所经过的路程等于速度函数$v(t)$在区间$[a,b]$上的定积分$\int_a^b v(t)dt$。另一方面，这段路程又等于位置函数$s(t)$在区间$[a,b]$上的增量$s(b)-s(a)$，于是有

$$\int_a^b v(t)dt = s(b)-s(a) \quad (3.1), \quad \text{又因为} \quad v(t)=s'(t)$$

所以　$$\int_a^b s'(t)dt = s(b)-s(a) \qquad (3\cdot2)$$

上式（3.1）说明，函数$v(t)$在$[a,b]$的定积分等于它的原函数在$[a,b]$上增量。

在一定条件下，这一事实具有普遍性，本节将证明：

若$F(x)$是$f(x)$的原函数，则$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

在（3·1）式中，将积分上限b换为x得

$$\int_a^x v(t)dt = s(x)-s(a)$$

这里x是任何大于a而小于b的数，这样两边都是x的函数，两边对x求导，得

$$\frac{d}{dx}\int_a^x v(t)dt = s'(x) = v(x) \qquad (3\cdot3)$$

上式表明了积分与微分之间的互逆关系。

对于速度和路程而言，（3·2）式和（3·3）式都成立。但是，舍去速度、路程这些特殊的、具体的内容，它们是否存在普遍性呢？ 事实上，我们可以证明（下面就将得到证明），如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，那么，函数$f(x)$在区间$[a,b]$上就满足关系式（3·2）和式（3·3）。

二、积分上限的函数及其导数

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，x 为 $[a,b]$ 上的任意一点，则 $f(x)$ 在区间 $[a,x]$ 上也连续，故 $f(x)$ 在区间 $[a,x]$ 上可积，即定积分 $\int_a^x f(x)dx$ 存在，式中 x 既表示定积分的上限，又表示积分变量。由于定积分与积分变量用什么符号无关，因此，该定积分也常记为 $\int_a^x f(t)dt$。当定积分上限 x 在 $[a,b]$ 任取一值时，定积分 $\int_a^x f(t)dt$ 就有一个确定的的值与之对应，所以，$\int_a^x f(t)dt$ 是上限 x 的函数，记为 $\Phi(x)$，即 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt \quad a\le x\le b$，这个函数 $\Phi(x)$ 称为**积分上限的函数**。

关于积分上限函数 $\Phi(x)$ 具有下面的重要性质

定理 1（微积分基本定理）：如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则积分上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，且导数为

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \qquad a\le x\le b \tag{3·4}$$

证：要证 $\Phi'(x)=f(x)$，即证 $\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=f(x)$

因为 $\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$

$$=\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt+\int_x^a f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt$$

（根据积分中值定理）$=f(\xi)\Delta x \qquad \xi$ 在 x 与 $x+\Delta x$ 之间

于是
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)=\lim_{\xi\to x}f(\xi)=f(x)$$

即
$$\Phi'(x)=f(x)$$

由 x 的任意性得知, $\Phi'(x)=f(x)\ (a\le x\le b)$, 当 x 取 a 或 b 时，以上 $\Delta x\to 0$ 改为 $\Delta x\to 0^+$ 或 $\Delta x\to 0^-$。　▲

定理 1 的重要意义在于：一方面揭示了微分与积分之间的联系，它表明积分上限函数对上限的导数等于被积函数在上限处的值。另一方面，由这个定理容易得到原函数存在的一个充分条件。

定理 2：函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数。

从而有 $\int f(x)dx=\Phi(x)+C=\int_a^x f(t)dt+C$

这个定理在积分学中占有重要地位：一方面它肯定了原函的存在；（前面在讲不定积分时，给出了一个原函数的存在定理：若 $f(x)$ 在某区间上连续，则在此区间上原函数一定存在，但没有给出证明，在这里我们就证明了）另一方面，它揭示了原函数 $\Phi(x)$ 与不定积分 $\int f(x)dx$ 、定积分 $\int_a^x f(t)dt$ 之间的关系。

由定理 1, 容易得到下面的两个推论：

推论 1：设函数 $f(x)$ 在某区间 $[a,b]$ 上连续，当 $x\in[\alpha,\beta]$ 时 $v(x)$ 可导，且 $v(x)\in[a,b]$，则

$$\frac{d}{dx}\int_a^{v(x)} f(t)dt=f[v(x)]v'(x)\qquad x\in[\alpha,\beta]\tag{3·5}$$

证：将 $\int_a^{v(x)} f(t)dt$ 视为由 $\int_a^v f(t)dt$ 与 $v=v(x)$ 复合而成的复合函数。根据复合函数求导法则，得

$$\frac{d}{dx}\int_a^{v(x)} f(t)dt=\frac{d}{dv}\int_a^v f(t)dt\cdot\frac{dv}{dx}=f(v)v'(x)=f[v(x)]v'(x)\qquad\blacktriangle$$

推论 2：设函数 $f(x)$ 在某区间 $[a,b]$ 上连续，当 $x\in[\alpha,\beta]$ 时，$u(x)$ 、 $v(x)$ 可导，$u(x),v(x)\in[a,b]$，则

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt=f[v(x)]v'(x)-f[u(x)]u'(x)\qquad x\in[a,b]\tag{3·6}$$

证：任取 $c\in[a,b]$，则：

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt=\int_{u(x)}^{c} f(t)dt+\int_c^{v(x)} f(t)dt=\int_c^{v(x)} f(t)dt-\int_c^{u(t)} f(t)dt$$

两边对 x 求导，由推论 1 即得所要证明的结论。　▲

例 1：求下列各函数的导数：

（1） $f(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$；　　（2） $f(x)=\int_0^{x^2}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt$；

（3） $f(x)=\int_0^x\left[\int_0^t \ln(1+u^2)du\right]dt$　　（4） $\int_{\sin x}^{\cos x}\cos\pi t^2 dt$

解（4） $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos\pi t^2 dt=\cos\left(\pi\cos^2 x\right)\cdot(-\sin x)-\cos\left(\pi\sin^2 x\right)\cdot\cos x$

$=\cos\left(\pi\sin^2 x\right)\cdot\sin x-\cos\left(\pi\sin^2 x\right)\cdot\cos x=(\sin x-\cos x)\cos\left(\pi\sin^2 x\right)$

例　已知参数方程$\begin{cases} x=\int_0^t \sin u du \\ y=\int_0^t \cos u du \end{cases}$，求$\frac{dy}{dx}$.

例　设$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases} x=\cos t^2 \\ y=t\cos t^2-\int_1^{t^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u du \end{cases}$确定，求$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$在$t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$的值。

解：$\frac{dx}{dt}=-2t\sin t^2,\frac{dy}{dt}=\cos t^2-2t^2\sin t^2-\frac{1}{2t}\cos t^2\cdot 2t=-2t^2\sin t^2$

故$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=t$，$\frac{d^2y}{dx^2}=1\cdot\frac{1}{dx/dt}=\frac{1}{-2t\sin t^2}$

于是$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$，$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

例　方程$\int_0^y e^t dt+\int_0^x \cos t dt=0$确定了$y$是$x$的函数，求$\frac{dy}{dx}$.

例　设$\int_0^x (x-t)f(t)dt=1-\cos x$，证明$\int_0^{\pi/2} f(t)dt=1$.（已知等式两边求导）

这里$\boxed{\text{注意比较}}$写法：

$$x\int_a^{x^2} f(x)dx,\ \int_a^{x^2} xf(t)dt,\ \int_a^{x^2} xf(x)dx,\ \int_a^{x^2} tf(t)dt$$

$$\frac{d}{da}\int_a^b f(x)dx,\ \frac{d}{db}\int_a^b f(x)dx,\ \frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx,\ \frac{d}{dx}(x\int_a^b f(x)dx)$$

例　设$\Phi(x)=\int_a^x (x-t)^2 f(t)dt$，证明$\Phi'(x)=2\int_a^x (x-t)f(t)dt$.

例　设$x>0$时，$f(x)$可导，且$f(x)=1+\int_1^x \frac{1}{x}f(t)dt$，求$f(x)$.

将已知等式先变形为$xf(x)=x+\int_1^x f(t)dt$，再求导，并注意$f(1)=1$.

$f(x)=\ln x+1$.

例 2：求 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\int_0^{x^2} t^{\frac{3}{2}}dt}{\int_0^x t(t-\sin t)dt}$

解：这是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，应用洛必达法则来计算。

$$\lim_{x\to0+}\frac{\int_0^{x^2} t^{\frac{3}{2}}dt}{\int_0^x t(t-\sin t)dt}=\lim_{x\to0+}\frac{\left(\int_0^{x^2} t^{\frac{3}{2}}dt\right)'}{\left(\int_0^x t(t-\sin t)dt\right)'}-$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{x^3\cdot 2x}{x(x-\sin x)}=\lim_{x\to0+}\frac{2x^3}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{6x^2}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{12x}{\sin x}=12$$

例 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}{x^2}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-e^{-\cos^2 x}(-\sin x)}{2x}=\dfrac{1}{2e}.$

例（教材） 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x\sqrt{1+t^4}dt}{x^3}$

解：由积分中值定理知，分子趋于无穷大，故极限是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的未定式，应用洛必达法则来计算.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\sqrt{1+t^4}dt}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^4}}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{x^4}+1}=\frac{1}{3}$$

例 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan x}dx}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin x}dx}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sqrt{\tan\sin x}\cos x}{\sqrt{\sin\tan x}\sec^2 x}=1$

用等价或用重要极限

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{\tan\sin x}\cos x}{\sqrt{\sin\tan x}\sec^2 x}=\lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{\tan\sin x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\tan x}\cdot\frac{\tan x}{\sin\tan x}}\cos^3 x=1$$

例 设函数 f（x）在[0，+∞）内连续，并且 f（x）>0 ，证明：$F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ 在（0，+∞）内为单调增加函数。

证：$F'(x)=\left[\int_0^x f(t)dt\right]^{-2}\left[xf(x)\cdot\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt\cdot f(x)\right]$

$$=\frac{f(x)}{(\int_0^x f(t)dt)^2}\left[x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt\right]$$

只须证明 $x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=g(x)>0$

方法 1：$g(x)=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=\int_0^x (x-t)f(t)dt>0$

方法 2：$g(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt=(x-\xi)f(\xi)\cdot x>0,\ \ 0<\xi<x.$

方法 3：令 $g'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)>0, x\in(0,+\infty)$

$g(x)>g(0)=0\Rightarrow F'(x)>0\Rightarrow F(x)$ 单增。

三、牛顿---莱布尼兹公式(Newron-Leibniz)

牛顿（１６４２－１７２７）：英国物理学家、数学家、天文学家。他的重大发明有微积分、万有引力定律、力学三大定律和光谱分析.

莱布尼茨（１６４６－１７１６）：德国数学家、哲学家、自然科学家、微积分的创始人之一.

由定理 1 容易证明下面的重要结论，它给出了在一定条件下，用原函数计算定积分的公式。

定理２：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$　　**（微积分基本公式）**　　（3·7）

证：已知函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，因为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，由定理 1 知，$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，所以这两个原函数之间只相差一个常数 C，即

$$\Phi(x)=F(x)+C \qquad a\le x\le b$$

也就是 $$\int_a^x f(t)dt=F(x)+C \qquad a\le x\le b$$

在上式中令 $x=a$，得到 $C=-F(a)$，

从而有 $$\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$$

在上式中令 $x=b$，便得到 $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

进一步有：$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = \left[F(x)\right]_a^b = \left[F(x)+C\right]_a^b = \left[\int f(x)dx\right]_a^b$　　▲

公式（3·7）进一步揭示了**定积分**与**原函数**或**不定积分**之间的联系。

它表明：（1）一个连续函数在 $[a,b]$ 上的定积分等于被积函数的任一原函数在积分区间 $[a,b]$ 上的增量。从而把求定积分的问题转化为求原函数或不定积分的问题，这就给定积分的计算提供了一个有效而又简便的计算方法。

（2）利用 N-L 公式及拉氏定理可以证明积分中值定理。

$$\begin{cases} \int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \\ F(b)-F(a) = F'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a) \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a),\quad a<\xi<b$$

反之，用积分中值定理和 N-L 公式可证拉氏中值定理，事实上

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$，（N-L 公式）

$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) = F'(\xi)(b-a), \xi\in(a,b)$（积分中值定理）

从而 $F(b)-F(a) = F'(\xi)(b-a)$（拉格朗日中值定理）

（3）前面的（2）换一种方式叙述是：积分中值定理是一个具体函数在拉格朗日中值定理下的不同表现形式

事实上，$\int_a^x f(u)du$ 在 $[a,b]$ 上用拉氏中值定理得，

$$\int_a^b f(u)du - \int_a^a f(u)du = f(\xi)(b-a) \Rightarrow \int_a^b f(u)du = f(\xi)(b-a), a<\xi<b$$

而拉格朗日中值定理也是积分中值定理的不同表现形式：

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

积分中值定理 $\int_a^b f(u)du = f(\xi)(b-a), a<\xi<b$ 可表为 $F(b)-F(a) = F'(\xi)(b-a)$

下面举几个利用公式（3·7）来计算定积分的简单例子。

例 计算下列定积分

公式（3·7）先后由牛顿和莱布尼茨建立。

(1) $\int_{0}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3}$

(2) $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_{1}^{\sqrt{3}} = \frac{7\pi}{12}$

(3) $\int_{0}^{3} \frac{1}{x^2+9} dx = \left[\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}\right]_{0}^{3} = \frac{\pi}{12}$

(4) $\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{1+e^x} dx = [\ln(e^x+1)]_{-1}^{1} = 1$

(5) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_{-2}^{-1} = -\ln 2$

(6) $\int_{-1}^{1} |x| dx = 1,$

(7) $\int_{0}^{3} |x^2-3x+2| dx$

(8) $\int_{0}^{\pi/4} \tan\theta d\theta = \int_{0}^{\pi/4} (\sec^2\theta - 1) d\theta = 1 - \frac{\pi}{4}$

(9) 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, 0 \le x < 1 \\ e^{-x}, 1 \le x < 3 \end{cases}$, 计算 $\int_0^3 f(x)dx$

解：由于被积函数 $f(x)$ 是分段函数，因此定积分要分段计算，于是有

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{x}dx + \int_1^3 e^{-x}dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - [e^{-x}]_1^3 = \frac{2}{3} - 0 - (e^{-3} - e^{-1}) = \frac{2}{3} - e^{-3} + e^{-1}$$

例 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n(n+3n)}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3n}{n}}}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{i}{n}}} = \frac{1}{3}\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx = \frac{2}{3}$$

注：$[0,3]$ 区间 $3n$ 等分。

例 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x, & 0 \le x \le \pi \\ 0, & x < 0, 或 x > \pi \end{cases}$，求 $\Phi(x) = \int_0^x f(t)dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的表达式。

例 6：设 $f(x) = \begin{cases} 2x, 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{2}, 1 < x \le 2 \end{cases}$，求 $\Phi(x) = \int_0^x f(t)dt$ 在区间 $[0,2]$ 上的表达式。

解：由于函数 $f(x)$ 是分段函数，因此 $\Phi(x)$ 的表达式要分段考虑，于是有

当$0\le x\le 1$时，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x 2tdt=\left[t^2\right]_0^x=x^2$

当$1<x\le 2$时，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^x f(t)dt=\left[t^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}t\right]_1^x=\frac{1}{2}(x+1)$

所以 $\Phi(x)=\begin{cases} x^2, 0\le x\le 1 \\ \frac{1}{2}(x+1), 1<x\le 2 \end{cases}$

例 设$f(x)=x^3-\int\limits_0^a f(x)dx, a+1\ne 0$，求$\int\limits_0^a f(x)dx.$ $\qquad \dfrac{a^4}{4(a+1)}$

例 7: 证明积分中值定理中的ξ可在开区间(a,b)内取得。即如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则在(a,b)内至少存在一点ξ，使得

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$$

证明: 设$F(x)=\int_a^x f(x)dx \quad (a\le x\le b)$是$f(x)$的一个原函数，由牛顿-莱布尼茨公式:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

根据定理 1，$F(x)$在区间$[a,b]$上可导，从而$F(x)$在区间$[a,b]$上满足拉格朗日中值定理的条件，故在开区间(a,b)内至少存在一个点ξ，使得

$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)$$

即

$$F(b)-F(a)=f(\xi)(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a) \qquad a<\xi<b \qquad \blacktriangle$$

例 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)>0$，又

$$F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt+\int\limits_b^x \frac{1}{f(t)}dt \qquad x\in[a,b]$$

证明:（1）$F'(x)\ge 2$;

（2） 方程$F(x)=0$在区间(a,b)内有唯一实根。

例 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(x)$非负，证明: $\exists\xi\in(0,1)$使得$\xi f(\xi)=\int\limits_\xi^1 f(x)dx.$

证：取$F(x)=x\int_1^x f(t)dt$，易知$F(x)$在$[0,1]$上满足罗尔定理条件，故结论成立。

例 检验下列积分应用 Newton-Leibniz 公式的正确性。

1. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1}=-2<0$（按积分的性质应大于 0）

2. $\int_0^{2\pi}\frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right]_0^{2\pi}=0$，

不正确，被积函数在$x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$处不连续。

3. $\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}(\arctan\frac{1}{x})=\left[\arctan\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}>0$，不正确。

例 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$

证明：当$x\in[0,1]$时，$0\le\frac{x^n}{1+x}\le x^n\Rightarrow 0\le\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\le\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$

由夹逼准则知：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=0$

例 设$f(x)$在$[0,b]$上连续单增，求证当$0<a\le b$时，有

$$\int_a^b xf(x)dx\ge\frac{b}{2}\int_0^b f(x)dx-\frac{a}{2}\int_0^a f(x)dx$$

证：令$F(t)=\int_a^t xf(x)dx-\frac{t}{2}\int_0^t f(x)dx+\frac{a}{2}\int_0^a f(x)dx, a\le t\le b$

$F'(t)=\frac{1}{2}tf(t)-\frac{1}{2}\int_0^t f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^t f(t)dx-\frac{1}{2}\int_0^t f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^t[f(t)-f(x)]dx$

因$f(x)$在$[0,b]$上单增，所以当$x\le t$时，$f(x)\le f(t)$，即有

$$F'(t)\ge 0\Rightarrow F(b)\ge F(a)=0$$

另：函数$F(x)$在$[a,b]$上用拉格朗日中值定理，也可得到：

$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)\Rightarrow F(b)=\frac{b-a}{2}\int_0^{\xi}[f(\xi)-f(x)]dx, a<\xi<b$$

又因$f(x)$在$[0,b]$上单增，所以当$x\le\xi$时，$f(x)\le f(\xi)$，故$F(b)\ge 0$.

练习题

1.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续单增，证明 $\int_0^1 xf(x)dx \ge \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx$。

（上一例子的特殊情形，对应于 $a=0,b=1$）

2. 设 $F(x)=\int_0^x (2t-x)f(t)dt, f(x)$ 可导，且 $f'(x)>0$，则___________ C

A $F(0)$ 是极大值；B $F(0)$ 是极小值；C $F(0)$ 不是极值，但 $(0,F(0))$ 是曲线 $F(x)$ 的拐点坐标；D $F(0)$ 不是极值，但 $(0,F(0))$ 也不是曲线 $F(x)$ 的拐点坐标。

解：$F(x)=2\int_0^x tf(t)dt - x\int_0^x f(t)dt \Rightarrow F'(x)=xf(x)-\int_0^x f(t)dt \ge 0$

$F''(x)=xf'(x)\begin{cases} <0, & x<0 \\ >0, & x>0 \end{cases}$，所以 $F(0)$ 不是极值点，但 $(0,F(0))$ 是拐点。

3.设 $f(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 上单调减少的连续函数，试证明：$\int_0^x (x^2-3t^2)f(t)dt \ge 0$

证明：令 $F(x)=\int_0^x (x^2-3t^2)f(t)dt = x^2\int_0^x f(t)dt - 3\int_0^x t^2 f(t)dt$

$F'(x)=2x\int_0^x f(t)dt - 2x^2 f(x) = 2x^2[f(\xi)-f(x)], 0<\xi<x$

或 $F'(x)=2x\int_0^x f(t)dt - 2x^2 f(x) = 2x\int_0^x [f(t)-f(x)]dt$

由 $f(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 上单调减少，均可得到 $F(x)$ 单增，故 $F(x)\ge F(0)=0$

4.设有连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=x+x^2\int_0^1 f(x)dx + x^3\int_0^2 f(x)dx$，求 $f(x)$.

解：$f(x)=x+Ax^2+Bx^3$

故 $A=\int_0^1 (x+Ax^2+Bx^3)dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}A+\frac{1}{4}B$

$B=\int_0^2 (x+Ax^2+Bx^3)dx = 2+\frac{8}{3}A+4B$

解得 $A=\frac{3}{8}, B=-1$，故 $f(x)=x+\frac{3}{8}x^2-x^3$

5.设可微函数 $f(x)$ 在 $x>0$ 上有定义，其反函数为 $g(x)$，且满足 $\int_1^{f(x)} g(t)dt = \frac{1}{3}(x^{\frac{3}{2}}-8)$，试求 $f(x)$

解：等式两端对 x 求导有 $g(f(x))f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x} \Rightarrow xf'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

于是 $f(x)=\sqrt{x}+C$，并注意到：当 $f(1)=1$ 时 $0=\int_1^{f(x)} g(t)dt = \frac{1}{3}(x^{\frac{3}{2}}-8) \Rightarrow x=4$

即有 $f(4)=1$，从而 $C=-1$，所以 $f(x)=\sqrt{x}-1$.

一、内容要点

1、　变速直线运动中位置函数与速度函数之间的联系

2、　积分上限函数　　$\int_a^x f(t)dt$

3、　积分上限函数的导数　　$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

4、　牛顿—莱布尼兹公式　　$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

5、　举例

二、教学要求与注意点

教学要求：正确理解定积分的概念极其简单性质，掌握定积分基本定理，会用牛顿—莱布尼兹公式计算定积分

注意点：牛顿—莱布尼兹公式的条件

第三节　定积分的换元法和分部积分法

由上节的讨论可知，根据牛顿—莱布尼茨公式，可以将计算定积分的问题转化为不定积分的计算，而计算不定积分有换元积分法和分部积分法。因此，定积分也相应地有换元积分法和分部积分法。

一、定积分的换元积分法

下面这个定理给出了用换元法计算定积分的方法。

定理 1：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，若函数 $x=\varphi(t)$ 满足下列条件：

（1）$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上具有连续导数；

$x = \sin t$

$a=0 \quad b=\frac{1}{2}$

（2）$\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$，且当 t 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上变化时，$x=\varphi(t)$ 的值在区间 $[a,b]$ 上变化，则

$\sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$\sin\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \frac{5\pi}{6}$.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \tag{4·1}$$

$\varphi(t)$的值在$[0,\frac{1}{2}]$上变化？$(t\in[0,\frac{5\pi}{6}])$.

$[0,1]$

（4·1）式称为换元积分公式。

证：由定理条件可知，（4·1）式两端的被积函数都是连续的，因此，它们的原函数都存在，所以，（4·1）式两端的定积分都可用牛顿-莱布尼茨公式来计算。设 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

又对于 $F(x)$ 与 $x=\varphi(t)$ 的复合函数 $F[\varphi(t)]$，于是有

$$\frac{dF[\varphi(t)]}{dt} = F'[\varphi(t)]\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t)$$

这说明 $F[\varphi(t)]$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数，因此有

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)] = F(b)-F(a)$$ （证两边等于中间）

故

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad ▲$$

应用换元公式时要注意：

（1）用变量代换 $x=\varphi(t)$ 将变量 x 换成新变量 t 时，要将 x 的积分限 a,b 换成 t 的积分限 α,β；

（2）与不定积分的换元法不同的是，在求出 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的原函数 $\Phi(t)$ 后，不必把 $\Phi(t)$ 变换成 x 的函数，只要把新变量 t 的上、下限代入 $\Phi(t)$ 后相减即可。

例　$\int_0^{\pi/2}\cos^5 x\sin x dx = -\int_0^{\pi/2}\cos^5 x d\cos x = [-\frac{1}{6}\cos^6 x]_0^{\pi/2} = \frac{1}{6}$

或 $\int_0^{\pi/2}\cos^5 x\sin x dx \underset{-\sin x dx = dt}{\overset{\cos x = t}{=}} \int_1^0 t^5(-dt) = \left[-\frac{1}{6}t^6\right]_1^0 = \frac{1}{6}$

或，因 $\int\cos^5 x\sin x dx = -\frac{1}{6}\cos^6 x + C$，则 $\int_0^{\pi/2}\cos^5 x\sin x dx = \left[-\frac{1}{6}\cos^6 x + C\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}$

例 1：计算 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

解：令 $x = \sin t$，则 $dx = \cos t dt$，且当 $x = 0$ 时，$t = 0$；当 $x = \frac{1}{2}$ 时，$t = \frac{\pi}{6}$，

于是：$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$

$\boxed{\text{问题}}$：当 $x = 0 \to x = \frac{1}{2}$ 时，是否可取 $t = 2\pi \to t = 2\pi + \pi/6$

是否可取 $t = \pi \to t = \pi - \pi/6$

是否可取 $t = 0 \to t = \pi - \pi/6$。均可以。

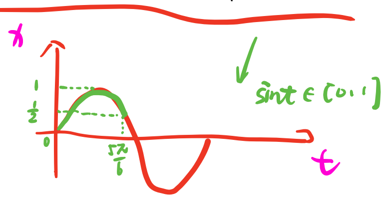
$= \int_0^{\frac{5\pi}{6}}\frac{\sin^2 t}{|\cos t|}\cdot\cos t dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}}\sin^2 t$

$= \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}}$

$= \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$



例：计算 $\int_0^{\ln 2} e^x\sqrt{e^x - 1}dx = \frac{2}{3}$

方法 1：凑微分法；方法 2：代换 $e^x = t$；方法 3：$\sqrt{e^x - 1} = t$

例 4：计算 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x}\ dx$。

解：$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x}\ dx = \int_0^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}} x|\cos x|dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}} x\cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}} x(-\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}} x d(\sin x) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}} x d(\sin x)$

$$=\left[\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{2}{5}-\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{5}$$

例 $\int_0^1 (x-1)^{10}x^2dx \overset{x-1=t}{=} \int_{-1}^0 t^{10}(t-1)^2dt$

例 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx \overset{\sqrt{e^x-1}=t}{=} \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}dt=2-\frac{\pi}{2}$

例 5（奇、偶函数定积分的性质）：设 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上连续，试证：

（1）$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_0^a [f(-x)+f(x)]dx$

（2）当 $f(x)$ 为偶数时，$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$；

（3）当 $f(x)$ 为奇数时，$\int_{-a}^a f(x)dx=0$

证：因为　$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$

对于积分 $\int_{-a}^0 f(x)dx$ 作代换 $x=-t$，得：

$$\int_{-a}^0 f(x)dx=-\int_a^0 f(-t)dt=\int_0^a f(-t)dt=\int_0^a f(-x)dx$$

从而

(1) 对任何函数有 $\int_{-a}^a f(x)dx=\int_0^a f(-x)dx+\int_0^a f(x)dx=\int_0^a [f(-x)+f(x)]dx$

(2)若 $f(x)$ 为偶数，$f(-x)=f(x)$，于是 $f(-x)+f(x)=2f(x)$，则

$$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$$

(3)若 $f(x)$ 为奇数，$f(-x)=-f(x)$，于是 $f(-x)+f(x)=0$，则：$\int_{-a}^a f(x)dx=0$

例 $\int_{-5}^5 \frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}dx=0$，　$\int_{-a}^a \ln\frac{1+x}{1-x}dx=0$　（被积分函数均为奇函数）

例 $\int_{-a}^a (x+\cos x)^2dx$（被积函数部分具有奇偶性）

例 $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1}{1+\sin x}dx=\int_0^{\pi/4}(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x})dx=2\int_0^{\pi/4}\sec^2 xdx=2$

例 $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}dx=\int_0^{\pi/4}(\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}+\frac{\cos^2 x}{1+e^{x}})dx=\int_0^{\pi/4}\cos^2 xdx=\frac{1}{8}(\pi+2)$

例 $\int_{-1}^1\frac{1}{1+x^2}dx=2\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}$

另：$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx \overset{x=\frac{1}{t}}{=} -\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t^2}dt \Rightarrow 2\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=0 \Rightarrow \int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=0$

（错误在于代换）

例 8（周期函数定积分的性质）：设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，a 为任意实数，试证 $\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)dx$（取 $a=-\frac{T}{2}$）

证：由于 $\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_T^{a+T}f(x)dx$

因此只需证明 $\int_T^{a+T}f(x)dx+\int_a^0 f(x)dx=0$，即证：$\int_T^{a+T}f(x)dx=\int_0^a f(x)dx$

作变量代换 $x=t+T$。从而有 $\int_T^{a+T}f(x)dx=\int_0^a f(t+T)dt=\int_0^a f(t)dt$

故 $\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$ ▲

<u>**此例说明**</u>，周期为 T 的连续函数，在任意一长度为 T 的区间上的积分值均相等，而与区间的起点无关。即有 $\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)dx=\cdots$

例 连续函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的奇函数，则 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 是以 T 为周期的偶函数。

证明：因 $\varphi(T+x)=\int_0^{T+x}f(t)dt=\int_0^T f(t)dt+\int_T^{T+x}f(t)dt=\int_T^{T+x}f(t)dt$

$\underline{\underline{u=T-t}}\int_0^x f(T-u)(-du)=-\int_0^x f(-u)du=\int_0^x f(u)du=\varphi(x)$

又 $\varphi(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt \overset{t=-u}{=} \int_0^x f(-u)(-du)=\int_0^x f(u)du=\varphi(x)$，故得证。

结论：奇函数的导函数为偶函数；偶函数的导函数为奇函数；周期函数的导函数为周期函数，且周期不变。奇函数 $f(x)$ 的原函数 $\int_a^x f(x)dx$ 为偶函数；偶函数 $f(x)$ 的原函数 $\int_0^x f(x)dx$ 为奇函数, 但 $\int_a^x f(x)dx$ 不一定是奇函数。

例 A：设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，试证

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(\sin x)+f(\cos x)\right]dx$；

（2）$\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$

证：(1) <u>从积分区间、被积函数入手，分析要证等式，找出变量代换</u>。

令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，

从而　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left[\sin(\frac{\pi}{2}-t)\right]dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

(2) 令 $x=\pi-t$，从而

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=-\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f[\sin(\pi-t)]dt=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt-\int_0^{\pi} tf(\sin t)dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx-\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx$$

移项合并后得　$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

$\boxed{\text{推广}}$：$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$，作代换 $x+t=a+b$（不变限代换）

注： 通过变量代换使所求积分循环回原积分也是求定积分的方法之一

例 利用上式计算积分：

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x}$$

$$=-\frac{\pi}{2}[arctg(\cos x)]_0^{\pi}=-\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{4}$$

例 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{3+\cos^2 x}dx=-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right]_0^{\pi}=\frac{\sqrt{3}}{18}\pi^2$

例 证明 $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$，并计算积分值。

证明：利用上面结论容易验证等式成立。

法 1：$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{(\sin x+\cos x)+(\sin x-\cos x)}{\sin x+\cos x}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}dx-\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{\pi}{4}-[\ln(\sin x+\cos x)]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}$$

法 2：$2I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx+\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2}\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}$

例 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx \underline{\underline{x+t=\frac{\pi}{4}}} \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left[1+\tan(\frac{\pi}{4}-t)\right]dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left[1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right]dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\ln 2-\ln(1+\tan t)]dt\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

例 证明 $\int_0^4 e^{x(4-x)}dx=2\int_0^2 e^{x(4-x)}dx.$

证明：$\int_0^4 e^{x(4-x)}dx=\int_0^2 e^{x(4-x)}dx+\int_2^4 e^{x(4-x)}dx$，后一式作代换 $4-x=t$

推广：$\int_0^{2a} f(x)dx=\int_0^a [f(x)+f(2a-x)]dx$，其中 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 连续。

证：$\int_0^{2a} \;=\int_0^a \;+\int_a^{2a}$　，后一积分作代换 $x=2a-t$。

例 B 证明 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\pi\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$,其中 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续。

例 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\pi\left[\arctan(\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}$（与前面结论同）

问题：下面做法谁对？或者均错？

用例 A 结论:

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin^2 x}{1+\cos x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos x)dx=\frac{\pi^2}{2}$$

用例 B 结论：

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin^2 x}{1+\cos x}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)dx=\pi(\frac{\pi}{2}-1)$$

直接用分部分积分

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin^2 x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\pi}(x-x\cos x)dx=\frac{1}{2}\pi^2-\int_0^{\pi}xd\sin x=\frac{1}{2}\pi^2+2$$

例 设函数 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, & x\ge 0 \\ \dfrac{1}{1+\cos x}, & -1\le x<0 \end{cases}$，计算 $\int_1^4 f(x-2)dx.$

解：$\int_1^4 f(x-2)dx\overset{x-2=t}{=}\int_{-1}^2 f(t)dt=\int_{-1}^0\frac{1}{1+\cos x}dx+\int_0^2 te^{-t^2}dt=\tan\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}.$

（前一积分用倍半角公式，或分子分母同乘 $1-\cos x$，或三角代换）

例 已知 $f(2x+1)=xe^x$，求 $\int_3^5 f(x)dx.$（作代换 $2x+1=t$）

例　确定下列积分的符号：

（1）$\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx$；　　　　（2）$\int_{-2}^2 x^3 2^x dx$

（1）$\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx$（后一式作代换 $u=x-\pi$）

$$=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\int_0^{\pi}\frac{\sin(\pi+u)}{\pi+u}dx=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin x}{x(\pi+x)}dx>0$$

（2）$\int_{-2}^{2} x^3 2^x dx = \int_{-2}^{0} x^3 2^x dx + \int_{0}^{2} x^3 2^x dx = \int_{0}^{2} x^3 (2^x - 2^{-x}) dx > 0$

或直接利用对称区间上定积分的结论。

例　设 $f(x)$ 为连续函数，且 $\int_0^x tf(x-t)dt = \int_0^x \sin t dt$，求 $\int_0^{\pi/2} f(x)dx.$

解：令 $x-t=u$，则 $\int_0^x tf(x-t)dt = \int_x^0 (x-u)f(u)(-du) = x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du$

即有：$x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du = \int_0^x \sin t dt$

两边求导得：$\int_0^x f(u)du = \sin x \Rightarrow \int_0^{\pi/2} f(u)du = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$

例　设 $f(x)$ 连续，且 $f(0) \neq 0$，求极限 $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$（2005 年研二）

解：$A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(u)du}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(u)du + xf(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}{\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du + f(x)} = \frac{f(0)}{f(0)+f(0)} = \frac{1}{2}$$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$，或 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\(\xi\to 0)}}\dfrac{1}{x}f(\xi)\cdot x = f(0)$

定积分的分部积分法

设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续导数，我们熟知乘积函数的导数公式　$(uv)'=u'v+uv'$

移项得　$uv'=(uv)'-u'v$

对上式两端在区间 $[a,b]$ 积分，有 $\int_a^b uv'dx=\int_a^b (uv)'dx-\int_a^b u'vdx$

于是有　$\int_a^b uv'dx=[uv]_a^b-\int_a^b u'vdx$　（4·2）

或写为　$\int_a^b udv=[uv]_a^b-\int_a^b vdu$　（4·3）

公式（4·2）、（4·3）就是**定积分的分部积分公式**。

例 10：计算定积分 $\int_0^1 \arctan xdx$。

解：设 $u=\arctan x, dv=dx, du=\dfrac{1}{1+x^2}dx, v=x$，于是

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan xdx &= \left[x\arctan x\right]_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx\\ &=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1\\ &=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}\end{aligned}$$

例：计算定积分 $\int_0^\pi (x\sin x)^2dx$

解：$\int_0^\pi (x\sin x)^2dx=\int_0^\pi x^2\dfrac{1-\cos 2x}{2}dx=\dfrac{1}{6}\pi^3-\dfrac{1}{4}\int_0^\pi x^2d\sin 2x$

$$=\frac{1}{6}\pi^3-\frac{1}{4}\left[x^2\sin 2x\right]_0^\pi+\frac{1}{4}\int_0^\pi \sin 2x\cdot 2xdx$$

$$=\frac{1}{6}\pi^3-\frac{1}{4}\int_0^\pi xd\cos 2x=\frac{1}{6}\pi^3-\frac{1}{4}\left[x\cos 2x\right]_0^\pi+\frac{1}{4}\int_0^\pi \cos 2xdx$$

$$=\frac{1}{6}\pi^3-\frac{1}{4}\pi$$

例　计算定积分 $\int_{1/e}^{e}\left|\ln x\right|dx=2(1-\dfrac{1}{e})$

例　设 $f(x)=\int_\pi^x\dfrac{\sin t}{t}dt$，求 $\int_0^\pi f(x)dx.$

解：由已知 $f'(x)=\dfrac{\sin x}{x}, f(\pi)=0$

所以$\int_0^{\pi} f(x)dx = \left[xf(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} xf'(x)dx = -\int_0^{\pi} \sin x dx = -2$

例（2018 年研数一）设函数$f(x)$具有 2 阶连续导数，若曲线$y=f(x)$过点$(0,0)$且与曲线$y=2^x$在点$(1,2)$处相切，则$\int_0^1 xf''(x)dx=$__________

解：由题意$f(0)=0, y'\big|_{x=1}=\left[2^x\ln 2\right]_{x=1}=2\ln 2=f'(1), y(1)=2=f(1)$

$$\int_0^1 xf''(x)dx=\int_0^1 xdf'(x)=\left[xf'(x)\right]_0^1-\int_0^1 f'(x)dx=f'(1)-\left[f(x)\right]_0^1=2\ln 2-2$$

例 10：证明定积分公式

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & n\text{为偶数}\\ \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3} & n\text{为奇数}\end{cases}\qquad (n>1)$$

证：由本节例 7（1），得

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$$

根据分部积分公式，得

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}xd(-\cos x)$$

$$=\left[-\sin^{n-1}x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xd(\sin^{n-1}x)=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^{n-2}xdx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}xdx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}xdx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

移项合并得递推公式 $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$

因为　　$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\dfrac{\pi}{2}$；　　$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=1$

所以，由递推公式得到；

（1）当n为偶数时：

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}=\cdots=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0=\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

（2）当n为奇数时：

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}=\cdots=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1=\frac{(n-1)!!}{n!!}$$ ▲

例 $\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx\overset{x=\sin t}{=\!=\!=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n tdt=$

例 计算$\int_0^{\pi}\cos^5\frac{x}{2}dx$

解 设$\frac{x}{2}=t,dx=2dt$;当$x=0$时,$t=0$;当$x=\pi$时,$t=\frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^{\pi}\cos^5\frac{x}{2}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 tdt=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{15}$$

例 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sin\frac{\pi}{n}+2\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+n\sin\frac{n\pi}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\sin\frac{i\pi}{n}$

$$=\int_0^1 x\sin\pi xdx=\frac{1}{\pi}$$

例 $\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx=\left[x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right]_0^3-\int_0^3\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}dx$

$$=\pi-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{t^2dt}{1+t^2}=\pi-[t-\arctan t]_0^{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$

例 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\frac{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x(1+\tan\frac{x}{2})^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sec^2\frac{x}{2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\tan\frac{x}{2}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^xd\tan\frac{x}{2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\tan\frac{x}{2}dx$$

$$=\left[e^x\tan\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\tan\frac{x}{2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\tan\frac{x}{2}dx=e^{\frac{\pi}{2}}$$

$\boxed{\text{练习题}}$:

例 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$

解：记$a_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$

$$\ln a_n=\ln\frac{1}{n}+\frac{1}{n}[\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots+\ln(n+n)]$$

$$=\frac{1}{n}\{[\ln(n+1)-\ln n]+[\ln(n+2)-\ln n]+\cdots+[\ln(n+n)-\ln n]\}$$

$$=\frac{1}{n}[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})]$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n=\int_0^1\ln(1+x)dx=\int_0^1\ln(1+x)d(x+1)=2\ln 2-1$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{4}{e}$$

例 $\int_0^\pi(x\sin x)^2dx=\int_0^\pi x^2\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{6}\pi^3-\frac{1}{4}\pi$

例 设$f(x)$在$[0,a]$上二阶可导，且$f''(x)>0$，证明$\int_0^a f(x)dx\ge af(\frac{a}{2})$.

证 1 将$f(x)$在$x_0=\frac{a}{2}$展为一阶泰勒公式

$f(x)=f(\frac{a}{2})+f'(\frac{a}{2})(x-\frac{a}{2})+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{a}{2})^2$，$\xi$介于$\frac{a}{2}$与$x$之间

$\ge f(\frac{a}{2})+f'(\frac{a}{2})(x-\frac{a}{2})$

两边从 0 到a积分，有

$$\int_0^a f(x)dx\ge af(\frac{a}{2})+f'(\frac{a}{2})\int_0^a(x-\frac{a}{2})dx=af(\frac{a}{2})+f'(\frac{a}{2})\left[\frac{1}{2}(x-\frac{a}{2})^2\right]_0^a=af(\frac{a}{2}).$$

证 2 $F(x)=\int_0^x f(t)dt-xf(\frac{x}{2})$在$[0,a]$用中值定理，可得

$F(a)-F(0)=F'(\xi)a$，即

$\int_0^a f(x)dx-af(\frac{a}{2})=a\left[f(\xi)-f(\frac{\xi}{2})-\frac{\xi}{2}f'(\frac{\xi}{2})\right]$，其中$0<\xi<a$

$=a\left[f'(\xi_1)\frac{\xi}{2}-\frac{\xi}{2}f'(\frac{\xi}{2})\right]=a\left[f'(\xi_1)-f'(\frac{\xi}{2})\right]\frac{\xi}{2}$，其中$\frac{\xi}{2}<\xi_1<\xi$

$=af''(\xi_2)(\xi_1-\frac{\xi}{2})\frac{\xi}{2}\ge 0$，其中$\frac{\xi}{2}<\xi_2<\xi_1$

证 3 因为$f''(x)>0, x\in[0,a]$，故函数$f(x)$的图形在$[0,a]$上是凹的。容易求得$f(x)$在点$(\frac{a}{2}, f(\frac{a}{2}))$处的切线方程为$y=f(\frac{a}{2})+f'(\frac{a}{2})(x-\frac{a}{2})$。由于凹弧在曲线上任一点处的切线的上方，故有$f(x)\ge f(\frac{a}{2})+f'(\frac{a}{2})(x-\frac{a}{2})$，两边在区间$[0,a]$上积分即证。

证 4 因为$f''(x)>0, x\in[0,a]$，故函数$f(x)$的图形在$[0,a]$上是凹的，由凹弧的定义，对$[0,a]$内任意两点$x, a-x$有

$$\frac{f(x)+f(a-x)}{2}\ge f(\frac{a}{2})$$

两边区间$[0,a]$上积分，得

$$\int_0^a \frac{f(x)+f(a-x)}{2}dx \ge \int_0^a f(\frac{a}{2})dx$$

$$\frac{1}{2}\int_0^a f(x)dx+\frac{1}{2}\int_0^a f(a-x)dx\ge af(\frac{a}{2})$$

即$\int_0^a f(x)dx\ge af(\frac{a}{2})$（不等式左边后一积分作代换$a-x=u$）

证 5 令$F(x)=\int_0^x f(t)dt-xf(\frac{x}{2})$

$F'(x)=f(x)-f(\frac{x}{2})-\frac{x}{2}f'(\frac{x}{2})=\frac{x}{2}f'(\xi)-\frac{x}{2}f'(\frac{x}{2})$，其中$\frac{x}{2}<\xi<x$

$=\frac{x}{2}\left[f'(\xi)-f'(\frac{x}{2})\right]=\frac{x}{2}f''(\eta)(\xi-\frac{x}{2})>0$，其中$\frac{x}{2}<\eta<\xi$

故$F(a)\ge F(0)=0$

例 设函数$f(x)$在$[0,b]$上连续，且单调递减，则有

$$b\int_0^a f(x)dx\ge a\int_0^b f(x)dx(0\le a\le b).$$

证：首先$a=0$或$a=b$时，积分不等式显然成立。下面证明在$0<a<b$内不等式成立。

法 1

思路：原式可变为$\frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx\ge\frac{1}{b}\int_0^b f(x)dx$，令$g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$，则只须证明$g(a)\ge g(b)$，并注意$a\le b$，由单调性的定义，只须证$g(x)$单减。

事实上，

$g'(x)=\frac{1}{x^2}\left[xf(x)-\int_0^x f(t)dt\right]=\frac{1}{x^2}[xf(x)-xf(\xi)]\le 0$

其中$0\le\xi\le x$，由于$f(x)$单减，故$f(\xi)\ge f(x)$。

所以，$g(x)$单减，$0<a<b$时$g(a)\ge g(b)\Rightarrow\frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx\ge\frac{1}{b}\int_0^b f(x)dx$

即不等式$b\int_0^a f(x)dx\ge a\int_0^b f(x)dx(0<a<b)$成立。

证 2

思路：积分变量代换将积分区间变成相同

作代换$t=\frac{b}{a}x$，则有

$$b\int_0^a f(x)dx=b\int_0^b f(\frac{a}{b}t)\frac{a}{b}dt=a\int_0^b f(\frac{a}{b}t)dt$$

因为$\frac{a}{b}t\le t$，且$f(x)$单减，故$f(\frac{a}{b}t)\ge f(t)$，于是

$$b\int_0^a f(x)dx=a\int_0^b f(\frac{a}{b}t)dt\ge a\int_0^b f(t)dt=a\int_0^b f(x)dx\text{。}$$

证 3

思路：比较两个常数的大小，经常用的方法是作差。

$b\int_0^a f(x)dx-a\int_0^b f(x)dx=(b-a)\int_0^a f(x)dx-a\int_a^b f(x)dx$

由于$f(x)$单减且$0<a<b$，所以

$(b-a)\int_0^a f(x)dx\ge(b-a)\int_0^a f(a)dx=a(b-a)f(a)$

$a\int_a^b f(x)dx\le a\int_a^b f(a)dx=a(b-a)f(a)$

比较两式可得$(b-a)\int_0^a f(x)dx\ge a\int_a^b f(x)dx$，即$b\int_0^a f(x)dx\ge a\int_0^b f(x)dx.$

证 4

由于$b\int_0^a f(x)dx-a\int_0^b f(x)dx=(b-a)\int_0^a f(x)dx-a\int_a^b f(x)dx$

$=a(b-a)f(\xi_1)-a(b-a)f(\xi_2)=a(b-a)[f(\xi_1)-f(\xi_2)]$

由于$f(x)$单减，且$0\le\xi_1\le a\le\xi_2\le b$，所以$f(\xi_1)\ge f(\xi_2)$，于是

$b\int_0^a f(x)dx-a\int_0^b f(x)dx\ge0$，即所证不等式成立。

例 设$f(x)=\int_x^1 e^{-y^2}dy$，计算$I=\int_0^1 x^2f(x)dx.$

解：$I=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)dx^3=\frac{1}{3}\left[x^3f(x)\right]_0^1+\frac{1}{3}\int_0^1 x^3e^{-x^2}dx=\frac{1}{3}\int_0^1 x^3e^{-x^2}dx$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1 x^2e^{-x^2}dx^2 \ \underline{\underline{x^2=t}}\ \frac{1}{6}\int_0^1 te^{-t}dt=\frac{1}{6}(1-\frac{2}{e}).$$

或 $I=\int_0^1 x^2f(x)dx=\int_0^1 dx\int_x^1 x^2e^{-y^2}dy=\int_0^1 dy\int_0^y x^2e^{-y^2dx}=\frac{1}{3}\int_0^1 y^3e^{-y^2}dy$

例（2005）设 $f(x)$ 为连续函数，且 $f(0)\neq 0$，求极限 $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$

解：$A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(u)dt}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(u)du+xf(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}{\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du+f(x)}=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}$$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\(\xi\to 0)}}\frac{1}{x}f(\xi)\cdot x=f(0)\end{cases}$

例 计算积分 $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

解：令 $x=\frac{1}{t}$，有 $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int_{-\frac{1}{2}}^{-1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\frac{\pi}{3}$

另解：令 $x=\sec t$，有 $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}-dt=-\frac{\pi}{3}$

例 设 $f(x)$ 连续，且当 $x>-1$ 时有 $f(x)\left(\int_0^x f(t)dt+1\right)=\frac{xe^x}{2(1+x)^2}$，求 $f(x)$.

解：记 $y(x)=\int_0^x f(t)dt+1$，则 $y(0)=1, y'(x)=f(x)$，于是有

$2y'(x)y(x)=\frac{xe^x}{(1+x)^2}$，两边积分 $\int 2yy'dx=-\int xe^x d\frac{1}{1+x}$

即 $y^2=\frac{e^x}{1+x}+c$，利用条件 $y(0)=1$ 知 $c=0$

从而 $\int_0^x f(t)dt+1=\sqrt{\frac{e^x}{1+x}}\Rightarrow f(x)=\frac{x\sqrt{e^x}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$.

例 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且有 $f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin xdx$，求 $f(x)$.

解：记 $A=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x dx$，于是有 $f(x)=\dfrac{x}{1+\cos^2 x}+A$

也有 $f(x)\sin x=\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}+A\sin x$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x dx}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi}A\sin x dx$$

$$A=2\int_0^{\pi}\frac{x\sin x dx}{1+\cos^2 x}+0=2\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}=-\pi\left[\arctan(\cos x)\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}\pi^2.$$

从而 $f(x)=\dfrac{x}{1+\cos^2 x}+\dfrac{1}{2}\pi^2.$

一、内容要点

1、　定积分换元法：换元公式$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))dt$

2、　定积分分布积分法：分布积分公式　$\int_a^b uv'dx=\left[uv\right]_a^b-\int_a^b vu'dx$

3、　举例

二、教学要求与注意点

教学要求　能正确和熟练的运用定积分的换元积分法和分部积分法

注意点　　定积分的换元积分法

第四节　反常积分（广义积分）

在定积分中，我们总是假设区间是有限的，而被积函数是有界的，但在理论或实际中都要去掉这两个限制，把定积分拓广为

（1）无限区间上的积分；（2）无界函数的积分

此时的积分称为广义积分（或称为反常积分），以前的积分称为常义积分（或狭义积分）。

一、积分区间为无穷区间（无穷限广义积分）

考察位于曲线 $y=\frac{1}{x^2}$ 之下，x 轴之上，而夹在 $x=1及x=b(b>1)$ 之间的区域的面积。

$$S(b)=\int_1^b\frac{1}{x^2}dx=1-\frac{1}{b}，当 b\to+\infty 时，\lim_{b\to+\infty}S(b)=\lim_{b\to+\infty}(1-\frac{1}{b})=1$$

自然地，把这一极限值看成是 $y=\frac{1}{x^2}$ 之下，x 轴之上，$x=1$ 之右的无限区域的面积。

我们考察位于曲线 $y=\frac{1}{x}$ 之下，x 轴之上，而夹在 $x=1及x=b(b>1)$ 之间的区域的面积。

$$S(b)=\int_1^b\frac{1}{x}dx=\ln b，\lim_{b\to+\infty}S(b)=\lim_{b\to+\infty}\ln b=\infty$$

这时无限延展的区域没有有限的面积。

定义 1：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $a<b$ 时，如果极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的广义积分，记为 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$，

即
$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \tag{5·1}$$

这时也称广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛。如果极限不存在，就称广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散，这时 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 只是一个记号，已不再表示数值。

收敛性与发散性统称为**敛散性**。

类似可以定义，设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,b]$ 上连续，且 $a<b$ 时，如果极限 $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty,b]$ 上的广义积分，记为 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$，即
$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \tag{5·2}$$

这时也称广义积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 收敛。否则，称广义积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 发散。

（3）设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，c 为任意取定的实数。如果广义积

分 $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ 和 $\int_{c}^{+\infty} f(x)dx$ 都收敛，则称这两个广义积分的和为 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的广义积分，记为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

这是也称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，否则，则称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

例 2：计算广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$。

解：
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}dx$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\left[arctgx\right]_a^0 + \lim_{b\to+\infty}\left[arctgx\right]_0^b \qquad \text{（介绍简洁记号）}$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\left[-arctga\right] + \lim_{b\to+\infty}\left[arctgb\right]$$
$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

这个广义积分值的几何意义是：表示位于曲线 $y=\frac{1}{1+x^2}$ 的下方、x 轴的上方的阴影部分面积

例 4：计算广义积分 $\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx$。

解：
$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} xe^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left\{\left[-xe^{-x}\right]_0^b + \int_{0}^{b} e^{x}dx\right\}$$
$$= \lim_{b\to+\infty}\left\{-be^{-b} - \left[e^{-x}\right]_0^b\right\} = \lim_{b\to+\infty}\left[-be^{-b} - e^{-b} + 1\right] = 1$$

例 计算 $I_n = \int_{0}^{+\infty} x^n e^{-x}dx = -\int_{0}^{+\infty} x^n de^{-x} = -\left[x^n e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} nx^{n-1}e^{-x}dx$

$$= nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = \cdots = n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

例 $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \int_{2}^{+\infty} \frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}} = \frac{1}{3}\left[\ln\frac{x-1}{x+2}\right]_2^{+\infty} = \frac{2}{3}\ln 2$

例 5：证明广义积分$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx \quad (a>0)$，当$p>1$时收敛，当$p\le 1$时发散。

证：（1）当$p=1$时，　$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\left[\ln x\right]_a^{+\infty}=+\infty$

（2）当$p\ne 1$时

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty & \text{当 } p<1 \text{ 时}\\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1} & \text{当 } p>1 \text{ 时}\end{cases}$$

所以，当$p>1$时，此广义积分收敛，其值为$\frac{a^{1-p}}{p-1}$；当$p\le 1$时，此广义积分发散。

注：由广义积分的定义知，常义积分的性质，积分法则对广义积分同样成立。

例　$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}dx$

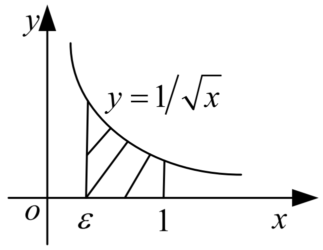
解：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2\right]^{-2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{(u^2+a^2)^2}$

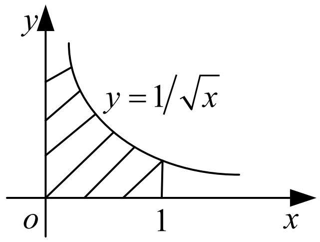
$\overset{u=a\tan t}{=}\frac{1}{a^3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t dt=\frac{\pi}{2a^3}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$

二、无界函数的广义积分

这里要讨论的是有限区间上的无界函数的广义积分。例如，积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ 的被积函数在点 $x=0$ 附近无界，这不是通常的定积分。

引例 考虑由曲线 $x=\varepsilon>0, x=1>\varepsilon, y=0, y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 所围平面图形面积。





阴影部分面积为定积分

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1=2-2\sqrt{\varepsilon}$$

显然，ε 越小，阴影部分的面积越接近于 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ 所表示的面积。因此很自然地令 $\varepsilon\to 0$，取极限，如果极限存在，即

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2 \text{。}$$

并认为此极限就是“开口曲边梯形”的面积

定义 2：设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\infty$，取 $\varepsilon>0$。如果极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ 存在，则称此极限为无界函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上的广义积分，仍记为 $\int_a^b f(x)dx$，即

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \qquad （5·4）$$

这时也称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛。如果极限不存在，就称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散。

类似地，设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上连续，且在点 b 的左邻域内无界，

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \qquad （5·5）$$

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,c)$ 及 $(c,b]$ 上都连续，且在点 c 的邻域内无界，如果广义

积分$\int_a^c f(x)dx$与$\int_c^b f(x)dx$都收敛，则称这两个广义积分之和为函数$f(x)$在区间$[a,b]$的广义积分，记为$\int_a^b f(x)dx$，即

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx \qquad (5\cdot 6)$$

这时也称称广义积分$\int_a^b f(x)dx$收敛；否则，称广义积分$\int_a^b f(x)dx$发散。这时$\int_a^b f(x)dx$只是一个记号，<u>不再表示数值</u>。

注意：广义积分的记号$\int_a^b f(x)dx$与定积分相同，但含义却不一样。

例 6：计算广义积分$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$。

解：因为　$$\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=+\infty$$

所以被积函数在点a的左邻域内无界，于是有

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{a-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^{a-\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\arcsin(\frac{a-\varepsilon}{a})=\frac{\pi}{2}$$

这个广义积分的几何意义是：位于曲线$y=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$之下，$x$轴之上，直线$x=0$与$x=a$之间的图形的面积（图 5·3）的极限值是$\frac{\pi}{2}$。

例 7：计算广义积分$\int_0^1 \ln x dx$。

解：因为$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$，所以被积函数$\ln x$在点$x=0$的右邻域内无界，于是

$$\int_0^1 \ln x dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \ln x dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\{[x\ln x]_\varepsilon^1-\int_\varepsilon^1 dx\right\}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}(-\varepsilon\ln\varepsilon-1+\varepsilon)=-1$$

为了方便起见，记

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}[F(x)]_{a+\varepsilon}^b=[F(x)]_a^b,\qquad \lim_{\varepsilon\to 0^+}[F(x)]_a^{b-\varepsilon}=[F(x)]_a^b$$

例 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

解:记$a_n=\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}\Rightarrow \ln a_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\dfrac{i}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\dfrac{i}{n}=\int_0^1\ln x dx=-1$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{e}$，即$\sqrt[n]{n!}\sim\dfrac{n}{e}$（等价无穷大）

例 8；证明广义积分$\int_a^b\dfrac{dx}{(x-a)^q}$当$q<1$时收敛，当$q\geq 1$时发散，其中$a<b$。

证:（1）当$q\leq 0$时，$\int_a^b\dfrac{dx}{(x-a)^q}$为常义积分。

$$\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^q}=\left[\frac{(x-a)^{1-q}}{1-q}\right]_a^b=\frac{1}{1-q}(b-a)^{1-q}$$

（2）当$q>0$时，所求积分为反常积分。

当$q\neq 1$时，$\int_a^b\dfrac{dx}{(x-a)^q}=\left[\dfrac{(x-a)^{1-q}}{1-q}\right]_a^b=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q} & (q<1)\\ +\infty & (q>1)\end{cases}$

（3）当$q=1$时，　$\int_a^b\dfrac{dx}{x-a}=\left[\ln(x-a)\right]_a^b=+\infty$

因此，当$q<1$时广义积分$\int_a^b\dfrac{dx}{(x-a)^q}$收敛；当$q\geq 1$时发散。　▲

例 9：讨论广义积分$\int_{-1}^1\dfrac{1}{x^2}dx$的敛散性。

解：因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$，所以$x=0$是被积函数的无穷间断点，于是

$$\int_{-1}^1\frac{1}{x^2}dx=\int_{-1}^0\frac{1}{x^2}dx+\int_0^1\frac{1}{x^2}dx$$

由例 8 知，$\int_0^1\dfrac{1}{x^2}dx$ 发散，故$\int_{-1}^1\dfrac{1}{x^2}dx$发散。

注意：如果疏忽了$x=0$是被积函数的无穷间断点，而按定积分计算，便得到

以下错误的结果：

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1}=-1-1=-2$$

例 10：计算广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}dx$。

解：这既是无穷区间上的广义积分，又是无界函数的广义积分（因为$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$）。令$\sqrt{x}=t$，即$x=t^2$，$dx=2tdt$，于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t}e^{-t}\cdot 2tdt=2\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=2$$

注意：定积分的换元积分法与分部积分法也可以推广到广义积分中来。

例 计算$\int_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

解：该积分为无界函数的广义积分。

令$\sqrt{1-x}=t$，则$x=1-t^2$

$$\int_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=\int_1^0\frac{-2dt}{1+t^2}=-2\left[\arctan t\right]_1^0=\frac{\pi}{2}$$

例 求$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$

解：这是含有无穷间断点的无穷限广义积分。为了简洁先算不定积分。

$$\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{1}{2}\int\ln x d\frac{1}{1+x^2}=-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x(1+x^2)}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})dx=-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+C$$

于是，$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx=\int_0^1\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$

$$=\left[-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)\right]_0^1+\left[-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)\right]_1^{+\infty}$$

$$=-\lim_{x\to 0+}\left[-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)\right]+\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)\right]$$

$$= -\lim_{x\to 0+}\left[\frac{1}{2}\frac{x^2\ln x}{1+x^2}-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)\right]+\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{1+x^2}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right]$$

$$=0$$

例 计算$\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\sin^2 x}dx.$

错解 $\int\frac{1}{1+\sin^2 x}dx=\int\frac{\sec^2 x}{1+2\tan^2 x}dx=\int\frac{dt}{1+2t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t)+C$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C$$

所以$\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\sin^2 x}dx=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C\right]_0^{\pi}=0$

正解：$\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin^2 x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{1+\sin^2 x}dx$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

注意：其中前一个$\tan x$代$x=\frac{\pi}{2}$时相当于$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\tan x=+\infty$

后一个$\tan x$代$x=\frac{\pi}{2}$时相当于$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+}\tan x=-\infty$

练习题

例 求广义积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}$

解：作代换 $x=\frac{1}{t}$，则

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{x^\lambda dx}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}\Rightarrow I=\frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}+\int_0^{+\infty}\frac{x^\lambda dx}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}\right]$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$$

例 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+(\cot x)^\lambda}$，**作代换** $\cot x=t$

例 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+(\cot x)^\lambda}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+(\tan x)^\lambda}=\frac{\pi}{4}$

一、内容要点

1　无穷限的反常积分

（1）$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$

（2）$\int_{-\infty}^{b}f(x)dx=\lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$

（3）$\int_{-\infty}^{b}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}f(x)dx+\int_0^{+\infty}f(x)dx$

2　无界函数的反常积分

（1）$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$　　$f(x)\in C$ (a,b],点 a 为 f(x)的瑕点 t>a

（2）$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$　　$f(x)\in C$ [a,b）,点为 f(x)的瑕点 t<b

（3）$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$　$f(x)\in C$ {[a,b]-c},点 c 为 f(x)的瑕点

3　例题分析

二、教学要求与注意点

教学要求　并会计算一些较为简单的广义积分，了解积分的审敛法。

注意点　　无穷限的反常积分 、无界函数的反常积分