重庆大学高等数学2（工学类）课程试卷

☑A卷 ☐B卷

2017—2018 学年 第2学期

开课学院：数统学院 课程号：MATH10023 考试日期：20180711

考试方式：☐开卷 ☑闭卷 ☐其他 考试时间：120分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试;

2.考试作弊,留校察看,毕业当年不授学位;请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等,属严重作弊,开除学籍.

1

(A) 0 (B) 4π (C) $4\pi R^2$ (D) $\frac{4}{3}\pi R^3$

2.曲线 $x=t, y=4\sqrt{t}, z=t^2$ 在点 $(4,8,16)$ 处的法平面方程为（B）

$\frac{x^2}{2\sqrt{t}}$

(A) $x-y-8z=-132$ (B) $x+y+8z=140$ $(1, \frac{2}{\sqrt{t}}, 2t)\Big|_4$

(C) $x-y+8z=124$ (D) $x+y-8z=116$ $(1,1,8)$

$4+8+128 = 140$

3.设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处沿任何方向有方向导数，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处（C）

(A) 偏导数存在 (B) 可微

(C) 偏导数不一定存在 (D) 偏导数连续

4.设 $I_1=\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma, I_2=\iint_D \cos(x^2+y^2)\,d\sigma, I_1=\iint_D \cos(x^2+y^2)^2\,d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$，则有（C）

(A) $I_3<I_2<I_1$ (B) $I_3<I_1<I_2$ (C) $I_1<I_2<I_3$ (D) $I_2<I_1<I_3$

5.设 $\lim_{n\to\infty} n^2 u_n = k(0<k<+\infty)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$（D）

$\frac{1}{n^2}$

(A) 条件收敛 (B) 发散 (C) 不一定收敛 (D) 绝对收敛

6.微分方程 $x^2y''=(y')^2$ 的通解是（D）

(A) $y=-x-\frac{\ln(C_1x-1)}{C_1^2}+C_2$ (B) $y=-\frac{x}{C_1}-\frac{\ln(C_1x-1)}{C_1}+C_2$

(C) $y=\frac{x}{C_1}-\frac{\ln(C_1x-1)}{C_1^2}+C_2$ (D) $y=-\frac{x}{C_1}-\frac{\ln(C_1x-1)}{C_1^2}+C_2$

$\frac{y'^2}{y''}$ $\frac{1}{y'}$ $-\frac{y''}{y'^2}$

$\left(\frac{1}{y'}\right)' = -\frac{y''}{y'^2} = \frac{-1}{x^2}$ $\frac{1}{y'}=\frac{1}{x}-C_1$

$y' = \frac{x}{1-C_1x}$

$=\frac{1}{C_1}\cdot\frac{C_1x-1+1}{1-C_1x} = \int \frac{1}{C_1}\left(-1+\frac{1}{1-C_1x}\right)dx$

$\frac{1}{C_1}\left(-x-\frac{1}{C_1}\ln(1-C_1x)\right)$

$-\frac{1}{C_1}\int\frac{d(1-C_1x)}{1-C_1x}$

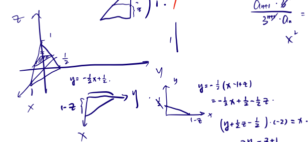
二、填空题（每小题3分，共18分）

1.已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$ 的收敛半径为 2，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_nx^{2n}}{3^n}$ 的收敛半径为 $\sqrt{6}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$. $\frac{a_{n+1}\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot a_n}=\frac{1}{3}\cdot$ x^2

2.已知 Ω 是由 $x=0,y=0,z=0,x+2y+z=1$ 所围成的区域，按先 z 后 y 再 x 的积分次序将 $I=\iiint_\Omega xdxdydz$ 化为三次积分，则 $I=\int_0^1 dz\int_0^{\frac{1-z}{2}} dy\int_0^{-2y-z+1} x\,dx$

$1-x-2y$



$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

$y=-\frac{1}{2}(x-1+z)$

$=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z$.

$(y+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2})\cdot(-2)=x$.

$-2y-z+1$

3.若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 发散，则 $p=$ ≤ 0.

4.微分方程 $y''-\frac{1}{x^2}y=1$ 的一个特解为为 $y=x^2$

5.设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x\le 0\\ x, & 0<x\le\pi\end{cases}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅氏级数的和函数为 $s(x)$，则 $s(4\pi)=$ $\frac{1}{2}$

$s(0)$

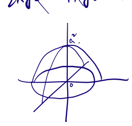
6.设空间区域 Ω 是由曲面 $z=a^2-x^2-y^2$ 与平面 $z=0$ 围成，其中 a 为正数，记 Ω 的表面外侧为 S，则 $\iint_S x^2yzdydz-2xy^2zdxdz+z(1+xyz)dxdy=$ $\frac{1}{2}\pi a^2$

$x^2+y^2=a^2-z$.

三、计算题（每小题6分，共24分）

1.判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}(a>0)$ 的敛散性。

$2xyz - 4xyz + 1 + 2xyz$



$\int_0^{a^2} \pi(a^2-z)\,dz$.

$\pi a^4 - \pi\cdot\frac{1}{2}a^2$

$\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \cos(r/r^2/r^4)\,r dr$.

$\cos r$ $\sin + r\cos r -$

① $\int r d\sin r$ $\int \sin r dr$.

$(r\sin r+\cos r)\Big|_0^1 = \sin 1+\cos 1-1$

$\wedge$

② $\int \cos r^2 dr^2$ $\sin r^2\Big|_0^1$ $\sin 1$

③ $\int \cos r^4 dr^2 = \int\left(\frac{\cos 2r^2+1}{2}\right)dr^2$

$\cos r^2=\frac{\cos 2r+1}{2}$ $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2r^2+r^2\right)\Big|_0^1$

$\cos 2r$ $=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2+1\right)=\frac{1}{4}\sin 2+\frac{1}{2}$.

$=\frac{1}{2}(\sin 1\cos 1+1)$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+a^n}}{\frac{1}{a^n}}=1$

当 $a\in(0,1]$

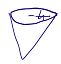
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a}(1-\frac{1}{a^n})}{1-\frac{1}{a}}$ 不存在，故 Σ 发散

$a>1$ 时.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a}(1-\frac{1}{a^n})}{1-\frac{1}{a}}=\frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}}$，$\Sigma$ 收敛

2.计算$\iint_{\Sigma}(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)dS$，其中$\Sigma$为曲面$x^2+y^2=z^2$夹在平面$z=0$及$z=h(h>0)$之间的部分，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为此曲面的外法线的方向余弦。

$I=\iiint_V 3(x^2+y^2+z^2)dxdydz-\iint_{\Sigma'}h^3dxdy$ $=6\pi(\frac{1}{20}h^5+\frac{1}{8}h^5)$ $=\pi(\frac{3}{10}h^5+\frac{3}{4}h^5)$ $\frac{3}{20}+\frac{15}{20}=\frac{18}{20}$



$=3\int_0^h dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z(r^2+z)rdr-h^3\cdot\pi h^2$

$=3\cdot 2\pi\int_0^h(\frac{1}{4}z^4+\frac{1}{2}z^3)dz-\pi h^5$

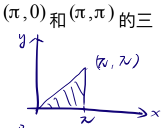
3.求平行于平面$5x-14y+2z+36=0$，且与此平面的距离为3的平面方程。

设该平面Σ: $5x-14y+2z+D=0$

取Σ上一点$(0,0,-\frac{D}{2})$到原平面 $d=\frac{|-D+36|}{\sqrt{25+14^2+4}}=3 \Rightarrow D_1=-9 \quad D_2=81$

$\therefore \Sigma_1: 5x-14y+2z-9=0 \quad \Sigma_2: 5x-14y+2z+81=0$

4.计算二重积分$\iint_D x\cos(x+y)d\sigma$，其中$D$是顶点分别为$(0,0),(\pi,0)$和$(\pi,\pi)$的三角形闭区域。



$I=\int_0^{\pi}dx\int_0^x x\cos(x+y)dy=\int_0^{\pi}x\sin(x+y)\Big|_0^x dx=\int_0^{\pi}(x\sin 2x-x\sin x)dx$

$\because \int x\sin x dx=-\int x d\cos x=-(x\cos x-\int\cos x dx)=-x\cos x+\sin x$

$\therefore I=-\frac{\pi}{2}-(\pi)=-\frac{3\pi}{2}$

四、综合题（每小题8分，共16分）

1.在过$O(0,0)$和$A(\pi,0)$的曲线$y=a\sin x(a>0)$中求一条曲线L，使沿它从O到A的积分$I=\int_L(1+y^3)dx+(2x+y)dy$的值最小。

$D: 0\le y\le a\sin x,\ 0\le x\le\pi$

$I=-\iint_D(2-3y^2)dxdy-\int_{AO}dx$ $\qquad f'(a)=-4+4a^2=4(-1+a^2)$

$=-\int_0^{\pi}dx\int_0^{a\sin x}(2-3y^2)dy+\pi$ $\qquad a=1$时，f最小

$=-\int_0^{\pi}(2a\sin x-a^3\sin^3x)dx+\pi$

$=-\left(-2a\cos x\Big|_0^{\pi}+a^3\int_0^{\pi}(1-\cos^2x)d\cos x\right)+\pi$

$=-\left(4a+a^3(\cos x-\frac{1}{3}\cos^3x)\Big|_0^{\pi}\right)+\pi$

$=-(4a-\frac{4}{3}a^3)+\pi$

$=f(a)$

2.设函数$\varphi(x)$具有连续的二阶导数，$\int_L[3\varphi'(x)-2\varphi(x)]ydx+\varphi'(x)dy$路径无关，求函数$\varphi(x)$.

$3\varphi'-2\varphi=\varphi''$

五、证明题（每小题8分，共16分）

1.证明：二元方程$e^{x+y}+x+y=\frac{3}{2}$在正方形域$D=\{(x,y)|-1\le x\le 1,-1\le y\le 1\}$上至少有一组解。

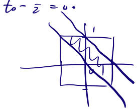
$f(t)=e^t+t-\frac{3}{2}$

$f(0)=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}<0$

$f(1)=e-\frac{1}{2}>0$.

$\exists t_0\in(0,1)$ $e^{t_0}+t_0-\frac{3}{2}=0$.

$x+y=t_0$



2. 已知$a_1=1,a_{n+1}=2a_n+1$，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n}$收敛。

$\frac{1}{a_{n+1}+1}=\frac{1}{2(a_n+1)}$ $\qquad = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}=1$

六、应用题（本题8分）

设球在动点 $P(x,y,z)$ 处的密度与该点到球心距离成正比，求质量为 m 的非均匀球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 对于其直径的转动惯量。

$$\rho(x,y,z)=kd=k\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\iiint\limits_{\Omega}\rho\,dv=\iiint\limits_{\Omega}k\sqrt{x^2+y^2+z^2}=m$$

$$\Rightarrow\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R kr\cdot r^2\sin\varphi\,dr$$

$$=2\cdot2\pi\cdot k\cdot\frac{1}{4}R^4$$

$$=k\pi R^4$$

$$\therefore\ k=\frac{m}{\pi R^4}$$

$$J=\iiint\limits_{\Omega}\rho\cdot(x^2+y^2)\,dv$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\frac{m}{\pi R^4}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot(x^2+y^2)\,dv$$

$$=\frac{m}{\pi R^4}\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r\cdot r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,dr$$

$$=\frac{m\cdot2\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}R^4}\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi\int_0^R r^5\,dr$$

$$=\frac{2m}{\cancel{R^4}}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\cancel{R^6}R^2}{\cancel{6}\,3}$$

$$=\frac{4mR^2}{9}$$