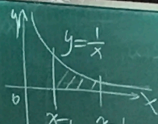


$$S(b) = \int_1^b \frac{1}{x} dx = \ln b.$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} S(b) = +\infty$$

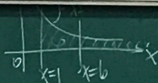
定义:  $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$   $f(x) \in C(a, +\infty)$  收敛  
 $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$   $f(x) \in C(-\infty, b]$  收敛  
 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^c f(x) dx + \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_c^{+\infty} f(x) dx$   $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$  两部分均收敛



一. 积分区间为无穷区间

引例 考虑位于  $y = \frac{1}{x^2}$  下,  $x$  轴上, 而夹在  $x=1$  及  $x=b$  之间区域的面积

解:  $S(b) = \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^b = (1 - \frac{1}{b})$   
 $\lim_{b \rightarrow +\infty} S(b) = 1.$



例:  $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = -\int_0^{+\infty} x d e^{-x}$   
 $= -[x e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 0 + [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$   
 例:  $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$   
 $= -[x^n e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} n x^{n-1} e^{-x} dx = n I_{n-1}$   
 $= n(n-1) I_{n-2} = \dots = n(n-1) \dots 2 \cdot 1 = n!$

例:  $I = \int_a^b \frac{1}{(x-a)^q} dx$   
 (1)  $q \leq 0$  时, 该积分分常义积分,  $I = \left[ \frac{1}{1-q} (x-a)^{1-q} \right]_a^b = \frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}$   
 (2)  $q > 0$  时, 该积分分无穷区间广义积分  
 $q \neq 1$  时,  $I = \left[ \frac{1}{1-q} (x-a)^{1-q} \right]_a^b = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & 1-q > 0 \Leftrightarrow q < 1 \\ \infty, & 1-q < 0 \Leftrightarrow q > 1 \end{cases}$   
 $q=1$  时 发散

作业 P247. 1. 奇. 3. 5.