P279. (1) (2) (4)

(1) 证明：在任何有向完全图中，所有结点入度的平方之和等于所有结点的出度平方之和。

设完全图 $G=\langle V,E\rangle$, $V=n$

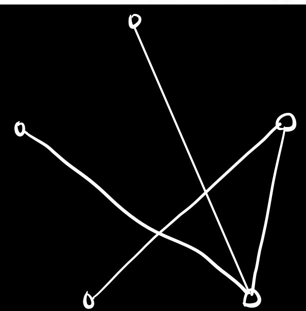
$\forall$一个结点i, $deg^+(v_i)+deg^-(v_i)=n-1$

$$\sum_{i=1}^{n}(deg^+(v_i))^2=\sum_{i=1}^{n}\left(n-1-deg^-(v_i)\right)^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left((n-1)^2-2(n-1)deg^-(v_i)+deg^-(v_i)^2\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left((n-1)^2-2(n-1)deg^-(v_i)\right)+\sum_{i=1}^{n}(deg^-(v_i))^2$$

$\because \sum_{i=1}^{n}deg^-(v_i)=\sum_{i=1}^{n}deg^+(v_i)=\frac{n(n-1)}{2}$

$\therefore \sum_{i=1}^{n}(deg^+(v_i))^2=n(n-1)^2-2(n-1)\cdot\frac{n(n-1)}{2}+\sum_{i=1}^{n}(deg^-(v_i))^2$
$$=\sum_{i=1}^{n}(deg^-(v_i))^2$$

(2) 写出图 7-1.11 相对于完全图的补图。



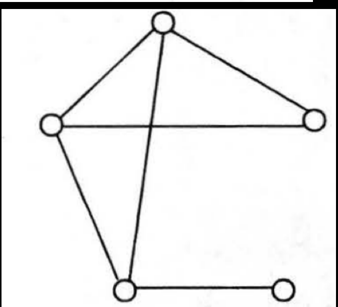


图 7-1.11

(4) 证明：图 7-1.13 中两个图是同构的。

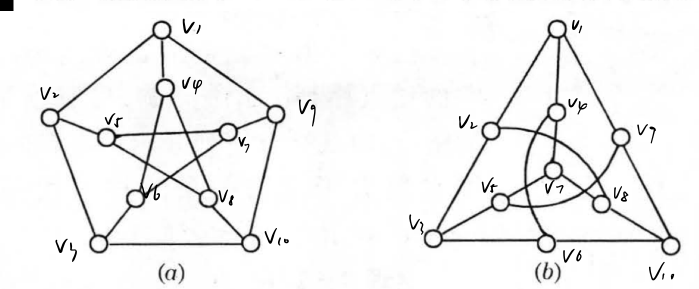


图 7-1.13

如图可知，建立了双射函数，2图同构

P287. (5) (7) (8)

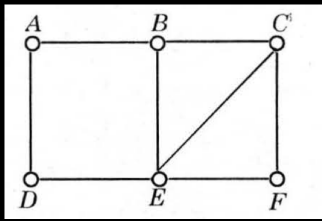
(5) 分析图 7-2.8，求：

a) 从 A 到 F 的所有通路。

b) 从 A 到 F 的所有迹。

c) A 和 F 之间的距离。

d) $k(G)$，$\lambda(G)$和 $\delta(G)$。



a) $\langle A,D,E,F\rangle$

$\langle A,D,E,C,F\rangle$

$\langle A,D,E,B,C,F\rangle$

$\langle A,B,E,F\rangle$

$\langle A,B,C,E,F\rangle$

$\langle A,B,C,F\rangle$

c). $d=3$

d). $k(G)=2$ $\lambda(G)=2$

$\delta(G)=2$

7) (7) 在图 7-2.9 中给出了一个有向图，试求 $d\langle v_1,v_4\rangle$，$d\langle v_2,v_5\rangle$及 $d\langle v_3,v_6\rangle$。此有向图对应的关系是否可传递的？如果不是可传递的，试求此图的传递闭包。

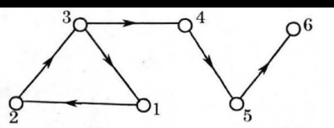


图 7-2.9

$d\langle v_1,v_4\rangle=3$

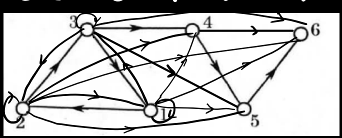
$d\langle v_2,v_5\rangle=3$

$d\langle v_3,v_6\rangle=3$

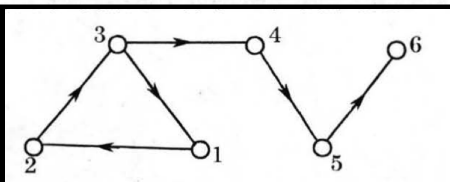
$\because \langle 3,4\rangle\cap\langle 4,5\rangle \not\Rightarrow \langle 3,5\rangle$

$\therefore$关系不是传递的

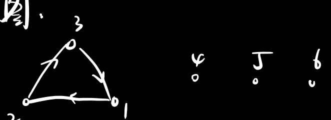
传递闭包对应有向图：



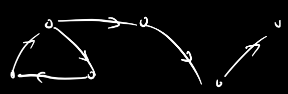
(8) 试求图 7-2.9 中的有向图的强分图，单侧分图和弱分图。



强分图.



单侧台图 & 弱台图:



P300. 1. 3

(1) 求出图 7-3.9 中有向图的邻接矩阵 A,找出从 v_1 到 v_4 长度为 2 和 4 的路,用计算 A^2,A^3 和 A^4 来验证这结论。

(2) 对于邻接矩阵 A 的简单有向图 G,它的距离矩阵定义如下:

$d_{ij}=\infty$,如果 $d\langle v_i,v_j\rangle=\infty$

$d_{ii}=0$, 对所有的 $i=1, 2, \cdots, n$

$d_{ij}=k$, 这里 k 是使 $a_{ij}^{(k)}\neq 0$ 的最小正整数

确定由图 7-3.9 所示的有向图的距离矩阵,并指出 $d_{ij}=1$ 是什么意义?

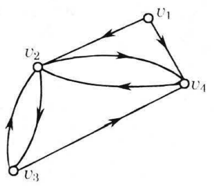


图 7-3.9

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

长度为2的路有1条

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&2&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}0&2&1&2\\0&1&2&3\\0&2&1&2\\0&2&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}0&3&2&3\\0&5&1&3\\0&3&2&3\\0&1&2&2\end{pmatrix}$$ → 长度为4的路有3条

(3) 在图 7-3.10 中给出了一个有向图,试求该图的邻接矩阵,并求出可达性矩阵和距离矩阵。

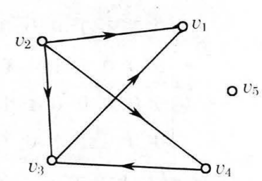


图 7-3.10

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&1&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&1&1&0\\1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}0&\infty&\infty&\infty&\infty\\1&0&1&1&\infty\\1&\infty&0&\infty&\infty\\2&\infty&1&0&\infty\\\infty&\infty&\infty&\infty&0\end{pmatrix}$$