# §2.3 连续型随机变量



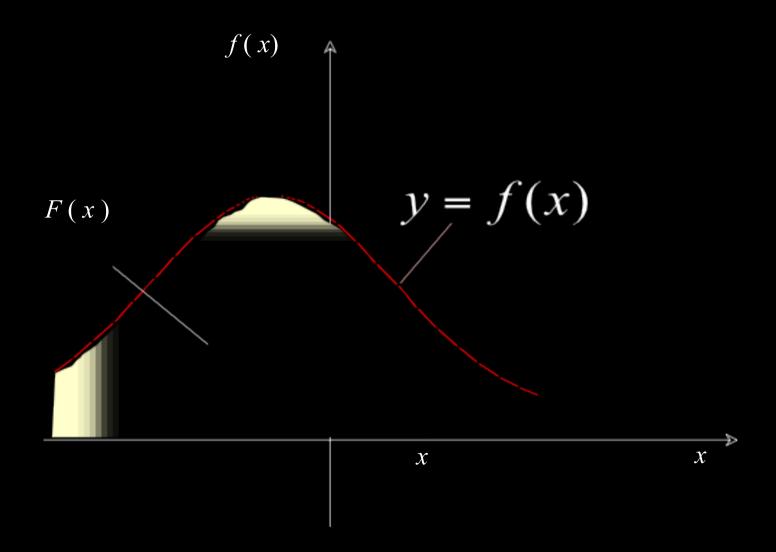
定义 设X是一随机变量,若存在一个非负可积函数f(x),使得

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt \qquad -\infty < x < +\infty$$

其中F(x)是它的分布函数

则称 X 是连续型随机变量,f(x) 是它的概率密度函数( $\mathbf{p.d.f.}$ ),简称为密度函数或概率密度

### 分布函数F(x)与密度函数f(x)的几何意义



$$f(x) \ge 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) = 1$$

• 连续性随机变量的分布函数是连续函数

#### 简证

•  $\mathbf{c} f(x)$  的连续点处,

$$f(x) = F'(x)$$

简证

注意: 对于连续型随机变量X, P(X=a)=0

这里 a 可以是随机变量 X 的一个可能的 取值

命题 连续型随机变量取任一常数的概率为零

强调 概率为1(零)的事件未必发生(不发生)

#### 对于连续型随机变量X

$$P(a < X \le b) = P(a \le X \le b)$$

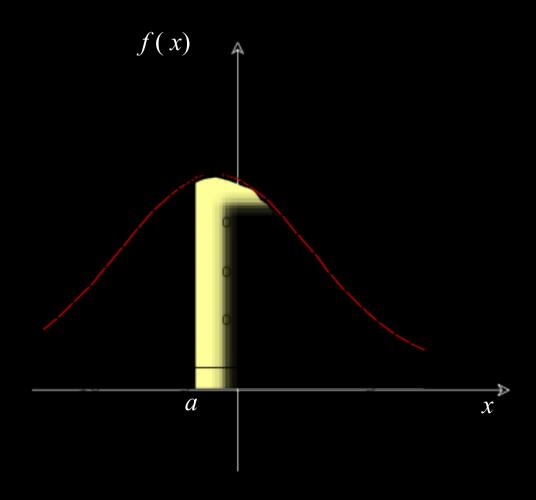
$$= P(a < X < b)$$

$$= P(a \le X < b)$$

$$= \int_{a}^{b} f(x) dx = F(b) - F(a)$$
"事件区间上积分"

$$P(X \le b) = P(X < b) = F(b)$$

$$P(X > a) = P(X \ge a) = 1 - F(a)$$



Ch2-0

**例1** 有一批晶体管,已知每只的使用寿命 X 为 连续型随机变量,其概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2}, & x > 1000\\ 0, & 其他 \end{cases}$$

- (1) 求常数 c
  - (2) 已知一只收音机上装有3只这样的晶体管, 每只晶体管能否正常工作相互独立,求在 使用的最初1500小时只有一个损坏的概率.

Ch2-0

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{1000}^{+\infty} \frac{c}{x^2} dx = 1$$

$$c = 1000$$

(2) 设事件 *A* 表示一只晶体管的寿命小于 1500小时

$$P(A) = P(0 \le X < 1500)$$
$$= \int_{1000}^{1500} \frac{1000}{x^2} dx = \frac{1}{3}$$

设在使用的最初1500小时三只晶体管中 损坏的只数为 Y

$$\sim B\left(3,\frac{1}{3}\right)$$

$$P(Y=1) = C_3^1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

#### **例2** 在高为h 的 ABC 中任取一点M,点M到

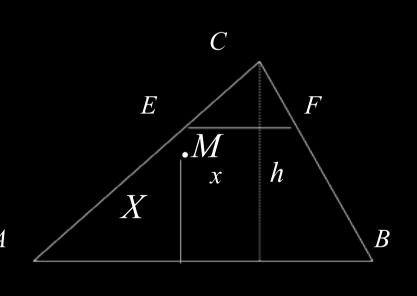
AB 的距离为X, 求X的概率密度函数 f(x).

解作 EF//AB, 使EF = AB间的距离为x

$$0 \le x \le h$$

$$F(x) = P(X \le x) = \frac{S_{\Box EFBA}}{S_{\triangle ABC}}$$

$$=1-\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ABC}}=1-(\frac{h-x}{h})^2$$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - (\frac{h - x}{h})^2 & 0 \le x \le h \\ 1 & x > h \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2\frac{h-x}{h^2} & 0 \le x \le h \\ 0 & 其他 \end{cases}$$



#### 常见的连续性随机变量的分布

(1) 均匀分布

记作

$$X \sim U(a,b)$$

密度

分布函数

例如
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & 其他 \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x < b, \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$

在进行大量数值计算时,如果在小数点后第 k+1 位进行四舍五入,则产生的误差可以看作

服从 
$$U\left(-\frac{1}{2}10^{-k}, \frac{1}{2}10^{-k}\right)$$

例3 秒表的最小刻度差为0.01秒.若计时精度是取最近的刻度值,求使用该秒表计时产生的随机误差X的概率密度,并计算误差的绝对值不超过0.004秒的概率.

 $\mathbf{M}$  由题设知随机误差 X 等可能地取得区间

$$\begin{bmatrix} -0.005 & \text{Loc} & \text{Loc}$$

(2) 指数分布

记作

$$X \sim E(\lambda)$$

## 密度函数

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

# 事件的计算

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} \lambda e^{-\lambda x} dx$$
$$= F(b) - F(a)$$
$$= e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

# 用指数分布描述的实例有:

随机服务系统中的服务时间

电话问题中的通话时间

无线电元件的寿命

动物的寿命

指数分布常作为各种 "寿命"分布的近似 若 *X*∼*E*(□),则

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$$

事实上

$$P(X > s + t \mid X > s) = \frac{P(X > s + t, X > s)}{P(X > s)} = \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)}$$

$$= \frac{1 - P(X \le s + t)}{1 - P(X \le s)} = \frac{1 - F(s + t)}{1 - F(s)} = \frac{e^{-\lambda(s + t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

所以,又把指数分布称为"**永远年轻**"的分布

# 例4 假定一大型设备在任何长为t的时间内发生

故障的次数 N(t) 服从参数为 t 的 Poisson 分布,

- (1) 求相继两次故障的时间间隔 T的概率分布
  - (2) 求设备已经无故障运行8小时的情况下,再

无故障运行 
$$10$$
 小时的概率.  $t < 0$  解  $(1)$   $F_T(t) = P(T \le t) = \begin{cases} 1 - P(T > t), & t > 0 \end{cases}$ 

$$P(T > t) = P(N(t) = 0) = \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} = e^{-\lambda t}$$

故 
$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0 \end{cases}$$
 
$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0 \end{cases}$$

(2) 由指数分布的"无记忆性"

$$P(T > 18 \mid T > 8) = P(T > 8 + 10 \mid T > 8)$$
  
=  $P(T > 10) = e^{-10\lambda}$ 

即  $T \sim E(\lambda)$ 

(3) 正态分布

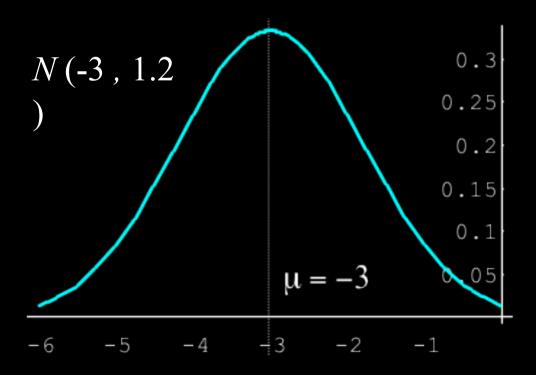
记作 $X \sim N(\square, \square 2)$ 

密度函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} - \infty < x < +\infty$$

$$\mu, \sigma^{\text{hfss}}, \quad \sigma > 0$$

则称 X 服从参数为  $\Box$  ,  $\Box$  2 的正态分布



若随机变量 X 受到众多相互独立的随机因素的影响,而每一个别因素的影响都是微小的,且这些影响可以叠加,则 X 服从正态分布.

可用正态变量描述的实例非常之多:

各种测量的误差; 人的生理特征;

工厂产品的尺寸; 农作物的收获量;

海洋波浪的高度; 金属线的抗拉强度;

热噪声电流强度; 学生们的考试成绩;

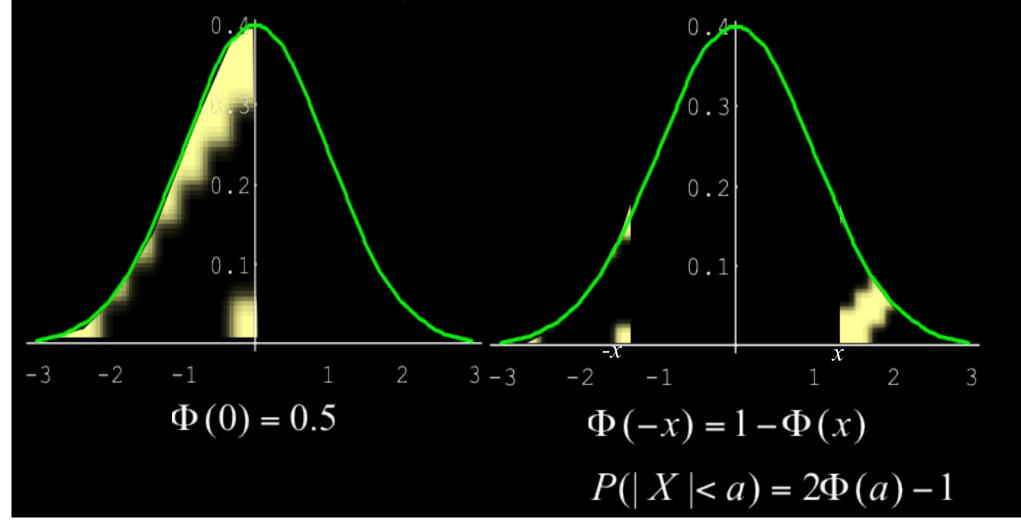
| ? | ? |

| ? | ? |

一种重要的正态分布: N(0,1) — 标准正态分布

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} - \infty < x < +\infty$$

其分布函数记为 $\square(x)$ ,其值有专门的表可查



对一般的正态分布:  $X \sim N(\square, \square 2)$ 

其分布函数 
$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

作变量代换 
$$s = \frac{t-\mu}{\sigma}$$
  $\longrightarrow$   $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$  简证

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

$$= \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

**例5** 设  $X \sim N(1,4)$ , 求  $P(0 \square X \square 1.6)$ 

$$P(0 \le X \le 1.6) = \Phi\left(\frac{1.6 - 1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 1}{2}\right)$$
$$= \Phi\left(0.3\right) - \Phi\left(-0.5\right)$$

$$=\Phi(0.3)-[1-\Phi(0.5)]$$

查P275附表1

$$= 0.6179 - [1 - 0.6915]$$

$$= 0.3094$$

$$X \sim N(2,\sigma^2)^{\text{B}P(2$$

解

$$P(X < 0) = \Phi\left(\frac{0 - 2}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)$$

$$P(2 < X < 4) = \Phi\left(\frac{4-2}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{2-2}{\sigma}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)-\Phi(0)=0.3$$

 $\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0.8$ 

$$P(X < 0) = 0.2$$

$$P(|X - \mu| < 3\sigma)$$

$$P(|X - \mu| < 3\sigma) = P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)$$

$$= \Phi\left(\frac{\mu + 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - 3\sigma - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi(3) - \Phi(-3)$$

$$= 2\Phi(3) - 1 = 2 \times 0.9987 - 1 = 0.9974$$

在一次试验中, *X* 落入区间( *[* - 3[ , [ +3[ ) 的概率为 0.9974, 而超出此区间的可能性很小

由3[原理知,

$$^{\exists}$$
  $a < -3$  时  $\Phi(a) \approx 0$ ,  $b > 3$  时  $\Phi(b) \approx 1$ 

例7 设测量的误差  $X \sim N(7.5,100)$ (单位:米),问要进行多少次独立测量,才能使至少有一次误差的绝对值不超过10米的概率大于0.9?

$$P(|X| \le 10) = \Phi\left(\frac{10 - 7.5}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-10 - 7.5}{10}\right)$$

$$= \Phi\left(0.25\right) - \Phi\left(-1.75\right)$$

$$= \Phi\left(0.25\right) - [1 - \Phi\left(1.75\right)]$$

$$= 0.5586$$

设 A 表示进行 n 次独立测量至少有一次误差的绝对值不超过10米

$$P(A) = 1 - (1 - 0.5586)^n > 0.9 \implies n > 3$$

所以至少要进行 4 次独立测量才能满足要求.

### 作业 习题2

A组: 10, 11, 12, 13, 15

B组: 7, 8, 9