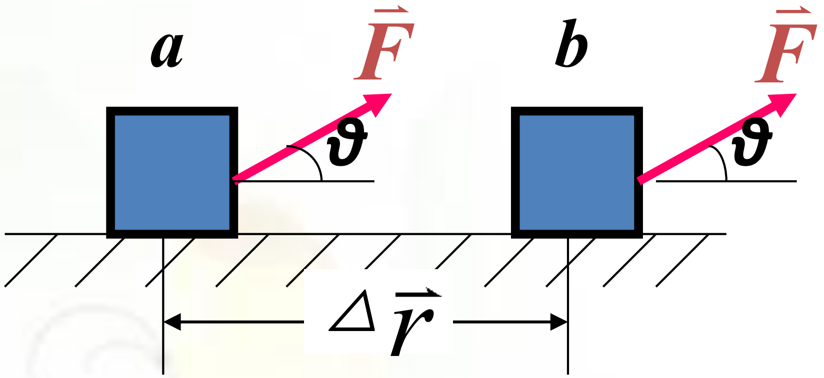
第四章 功和能

§ 4-1 功

力对空间的累积→功，用A表示 ➡ 能

一 功 功的计算



1、直线运动中恒力的功

$$A = F\Delta r\cos\theta = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

注意：

功是标量，但有正有负，正负由ϑ决定：

$0\le\vartheta<90^0$ $A>0$;

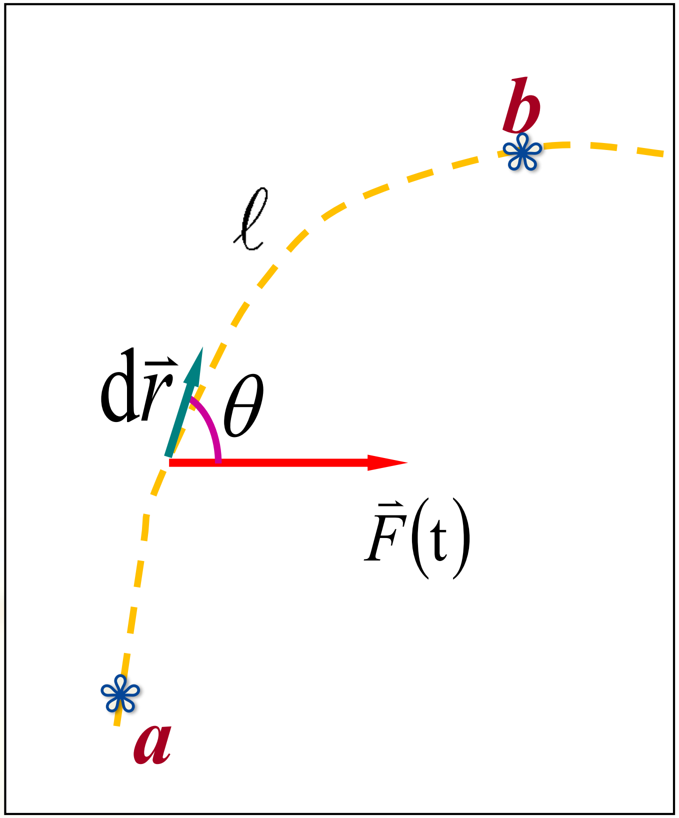
$\vartheta=90^0$ $A=0$;

$90^0<\vartheta\le180^0$ $A<0$。

2、变力的功

元功：$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$= F\left|d\vec{r}\right|\cos\theta$$



质点由a运动到b，力F所作的总功：

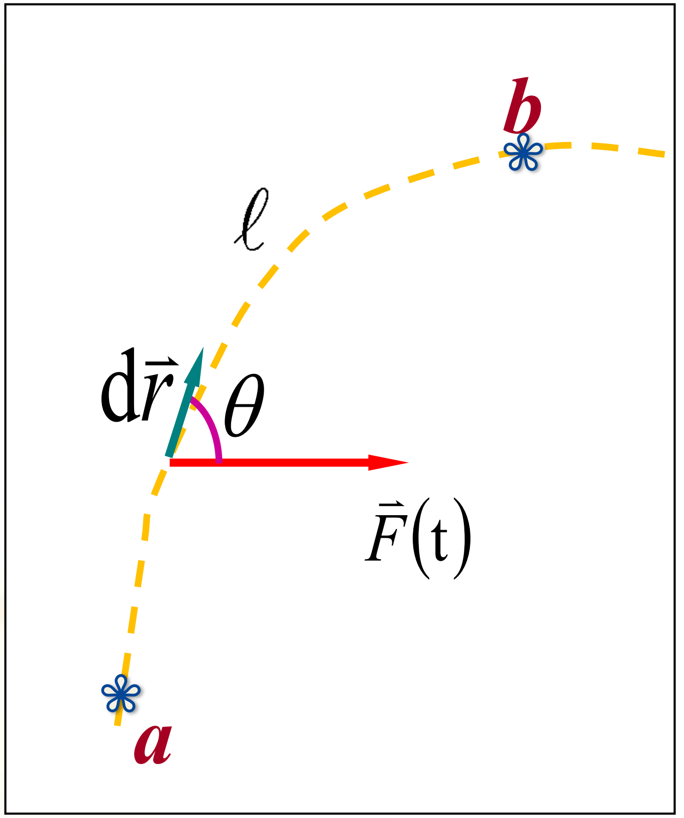
$$A = \int dA = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b F\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\theta$$

质点由a运动到b，力F所作的总功为力F沿路径ℓ 的线积分。

功是过程量

二、合力的功＝分力的功的代数和

$$A=\int\left(\sum \vec{F}_i\right)\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\sum\int \vec{F}_i\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\sum_i A_i$$



- 功是过程量,与参考系有关
- 功的单位为焦耳J

三、功率：功对时间的变换率（力做功的快慢）

$$P=\frac{dA}{dt}=\frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}$$

- 已知功率可求功：$A=\int_{t_1}^{t_2}Pdt$
- 功率的单位为瓦特W

四、一对力的功 (作用力与反作用力)

m_1、m_2 组成一个封闭系统

$$dA = \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2$$

$$\because \ \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$\therefore \ dA = \vec{F}_{21} \cdot (d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) = \vec{F}_{21} \cdot d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$\because \ \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_{21}$$

$\therefore$ 元功 $dA = \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_{21}$

总功 $A = \int dA = \int_a^b \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_{21}$

一对力做的总功，只与力及二质点相对位移相关，与参考系的选择无关

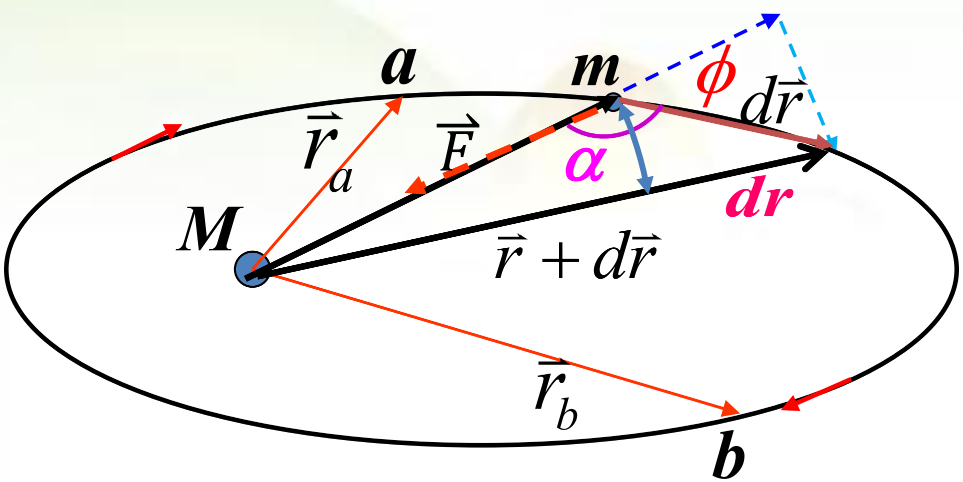
方法：常假设其中一个质点不动，如假设m1不动，则

$$dA = \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_{21} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

例题 万有引力的功：m 在 M 的引力场沿其椭圆轨道由 r_a 移到 r_b。求：引力对 m 所作的功。

$$A=-\int_{r_a}^{r_b} G\frac{Mm}{r^2}dr=-GMm\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

$$\left|d\vec{r}\right|\cos\phi=dr$$



万有引力做功只与初末位置相关，与具体路径无关，这种力称为**保守力**，重力、弹簧弹力等都是保守力。

§ 4-2 动能定理

一、质点的动能定理

元功：$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F\cos\theta\left|d\vec{r}\right| = F_t\left|d\vec{r}\right| = mdv\dfrac{\left|d\vec{r}\right|}{dt}$

$$= mvdv = d(\frac{1}{2}mv^2)$$

定义质点的**动能**：$E_k = \dfrac{1}{2}mv^2$

$$\therefore\ dA = dE_k$$

质点动能定理的微分形式

表示：合外力在元位移做的功等于质点动能的微增量

经历一段距离，合外力做的功：

$$A = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{E_{ka}}^{E_{kb}} dE_k = E_{kb} - E_{ka}$$

质点动能定理的积分形式

◆ 质点动能定理

$$A = E_{\mathrm{kb}} - E_{\mathrm{ka}}$$

表示：合外力对质点所作的功，等于质点动能的增量

注意

1、功和动能都与参考系有关；动能定理仅适用于惯性系；

2、功和能的单位都是焦耳，但功是过程量，动能是状态量(也称态函数)。

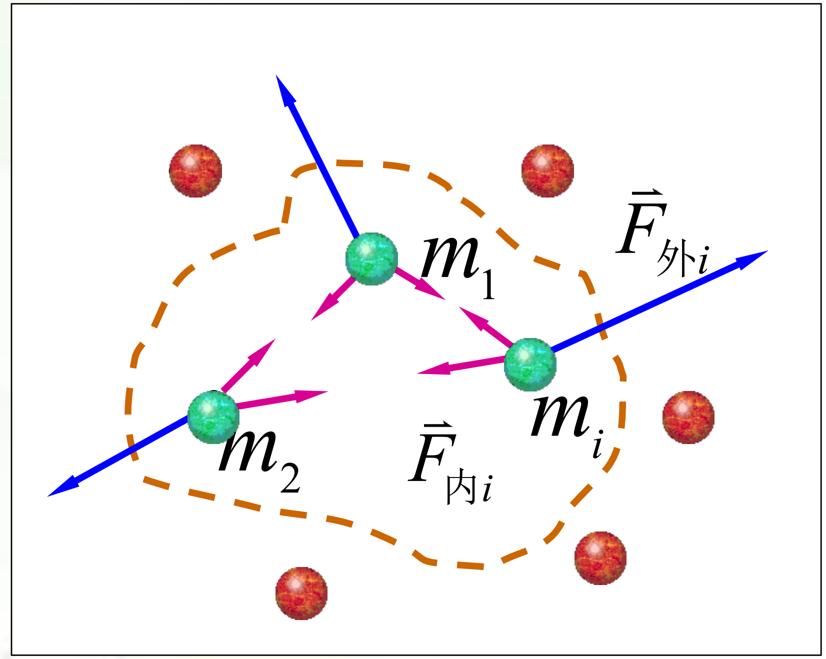
动能定理的启示：功是能量变化的一种量度

二、质点系的动能定理

◆ 对第 i 个质点，有：

$$A_{外i} + A_{内i} = E_{\mathrm{k}i2} - E_{\mathrm{k}i1}$$

外力功　内力功



◆ 对质点系，有：

$$\sum_i A_{外i} + \sum_i A_{内i} = \sum_i E_{\mathrm{k}i2} - \sum_i E_{\mathrm{k}i1}$$

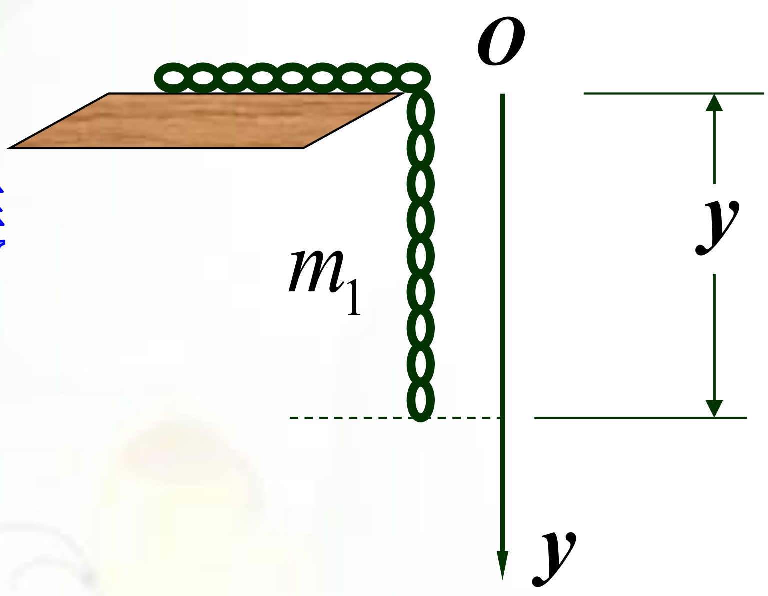
$$\boxed{A_{外} + A_{内} = E_{\mathrm{k}2} - E_{\mathrm{k}1}}$$

质点系的动能定理

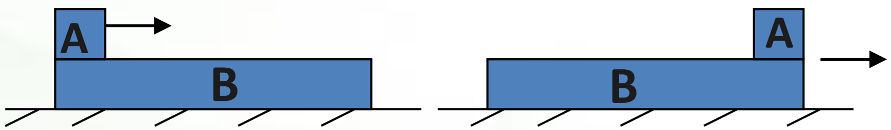
表示：所有外力与内力对质点系所做功之和等于质点系动能的增量。

注意：内力可以改变质点系的动能

例题：如图，一链条长为l，质量为m，放在光滑的水平桌面，一端下垂，下垂段长为a，设链条在重力作用下开始下滑，求链条全部离开桌面时的速度。



例题：如图，质量为m_B的木板静止在光滑的桌面上，质量为 m_A 的物体放在B的一端，现给A一初速度v_0使其在B上滑动，AB间的滑动摩擦系数为μ，设$m_A=m_B$,且A滑到B的另一端时A、B恰好具有相同的速度，求B板的长度及B板走过的距离。



§ 4-3 势能

一　保守力与非保守力

1） 万有引力做功

$$A = -\int_{r_a}^{r_b} G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr = -Gm_1m_2\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

万有引力做功只与初末位置相关，与具体路径无关。万有引力是**保守力**。

2） 重力做功

元功：$dA = mg\left|d\vec{r}\right|\cos\theta$

$$= -mgdh$$

质点从a经c到b重力所做的功：

$$A_{acb} = \int dA = \int_{h_a}^{h_b} -mgdh$$

$$= mg(h_a - h_b)$$

重力做功只与始末相对位置有关，而与具体路径无关

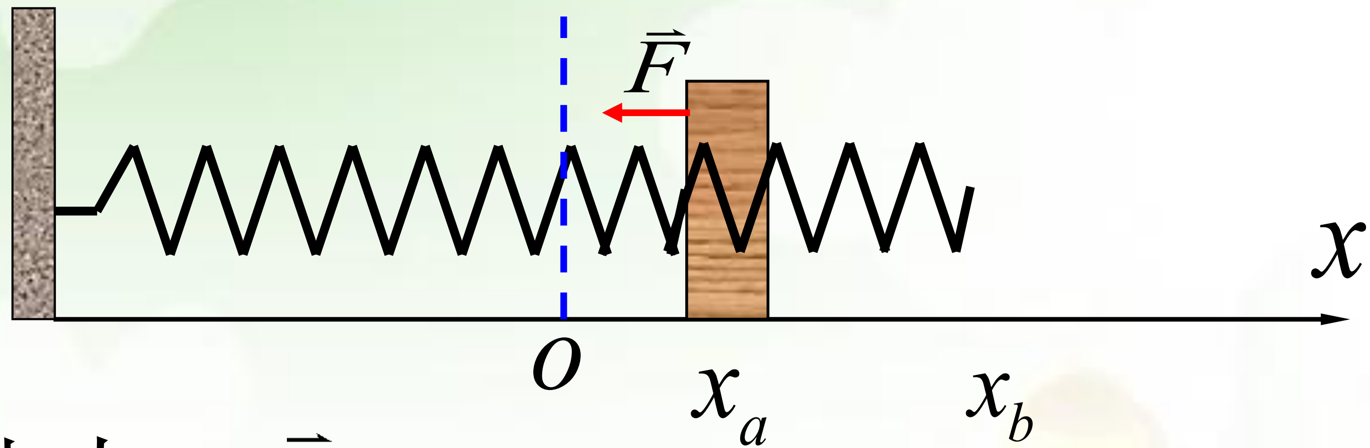
质点从a经d到b重力所做的功：$A_{adb} = A_{acb}$

且：$A_{bda} = -A_{adb}$

所以经过任一闭合路径acbda，重力所做的功为零。

重力为保守力

3） 弹性力做功



弹性力：$\vec{F} = -k\vec{x}$

元功：$dA = \vec{F} \cdot d\vec{x} = -kxdx$

振子从 x_a 运动到 x_b，弹力所做的功：

$$A = \int dA = \int_{x_a}^{x_b} -kx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx_a^2 - \frac{1}{2}kx_b^2$$

弹性力做功也与路径无关，只与始末态位置有关。

弹性力也是保守力。

保守力和非保守力

保守力: 力做功与路径无关，仅取决于系统的始末状态的相对位置。

保守力沿任一闭合路径做功等于零。

$$\oint_S \vec{F}_{保守} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

即保守力的环流（环路积分）等于零。

非保守力: 力所做的功与路径有关.（如摩擦力做功）

$$\oint_S \vec{F}_{非保守} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq 0$$

二　势能

势能 E_p：与物体间相对位置（位形）有关的能量

重力的功

$$A = mgh_a - mgh_b$$

引力的功

$$A = (-G\frac{m_1m_2}{r_a}) - (-G\frac{m_1m_2}{r_b})$$

弹力的功

$$A = \frac{1}{2}kx_a^2 - \frac{1}{2}kx_b^2$$

$$A_{ab} = \int_a^b \vec{F}_{保守} \cdot d\vec{r}$$

$$= E_{pa} - E_{pb}$$

$$= -(E_{pb} - E_{pa})$$

保守力做的功等于系统势能的减少（或势能增量的负值）

$A_{ab} > 0$, 系统势能减小

$A_{ab} < 0$, 系统势能增加

注意

- 保守力的功是系统势能变换的量度
- 势能是一种相互作用能，势能是属于系统的
- 非保守力没有相互的势能

三 势能的计算

$$A_{ab}=\int_a^b \vec{F}_{保守}\cdot d\vec{r}=E_{pa}-E_{pb}$$

势能具有相对性，其大小与势能零点的选取有关

设势能定义式中b点的势能为零， $E_{pb}=0$

则a点的势能为：

$$E_{pa}=\int_a^{(0)} \vec{F}_{保守}\cdot d\vec{r}=A_{ab}$$

空间某点 ***r*** 的势能等于由该点到势能零点保守力所做的功。

1、重力势能

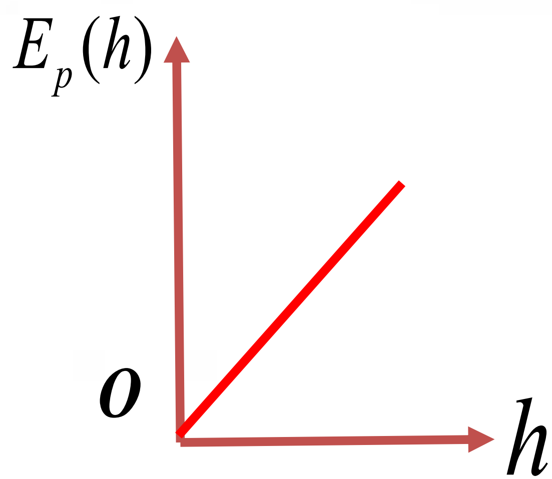
$$E_p(r)=\int_r^{r_0}\vec{F}_{保守}\cdot d\vec{r}$$

$$E_p(h)=-\int_h^{h_0}mgdh=mgh-mgh_0$$

令 $h_0=0$ 处势能为零，则重力势能表示为：

$$E_p(h)=mgh$$

重力势能曲线：



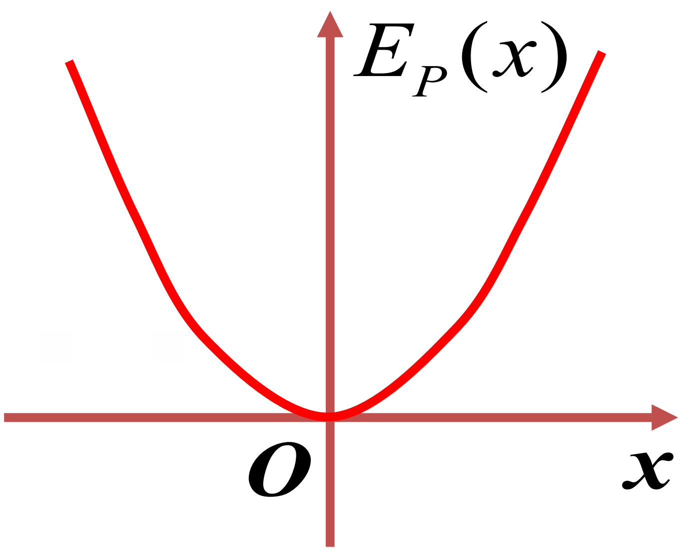
2、弹性势能

$$E_p(x) = -\int_x^{x_0} kx dx = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$$

令 $x_0 = 0$（平衡位置）处势能为零，则弹性势能表示为：

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

弹性势能曲线：



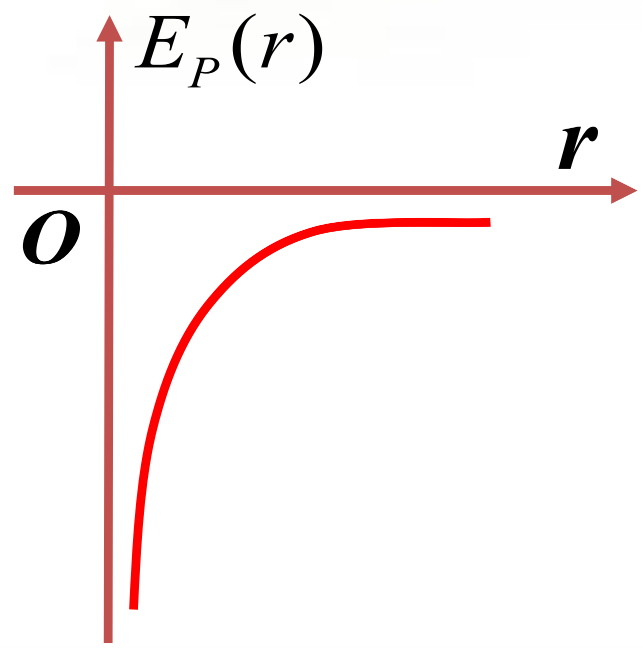
3、引力势能

$$E_p(r) = -\int_r^{r_0} \frac{Gm_1m_2}{r^2} dr = (-\frac{Gm_1m_2}{r}) - (-\frac{Gm_1m_2}{r_0})$$

令 $r_0 \to \infty$ 处势能为零，则弹性势能表示为：

$$\boxed{E_p(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}}$$

引力势能曲线：



§ 4-4　机械能守恒

一、质点系的功能原理

由质点系的动能定理：

$$A_{外}+A_{内}=E_{k2}-E_{k1}$$

$$A_{内}=A_{内保}+A_{内非保}$$

$$A_{内保}=E_{p1}-E_{p2}$$

$$A_{外}+A_{内非保}=E_{k2}+E_{p2}-(E_{k1}+E_{p1})$$

机械能：$E=E_{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{p}}$

$$\boxed{A_{外}+A_{内非保}=E_{2}-E_{1}}$$

质点系的功能原理：外力和非保守内力做功之和等于质点系机械能的增量

二、机械能守恒定律

由质点系的功能原理： $\boxed{A_{外} + A_{内非保} = E_2 - E_1}$

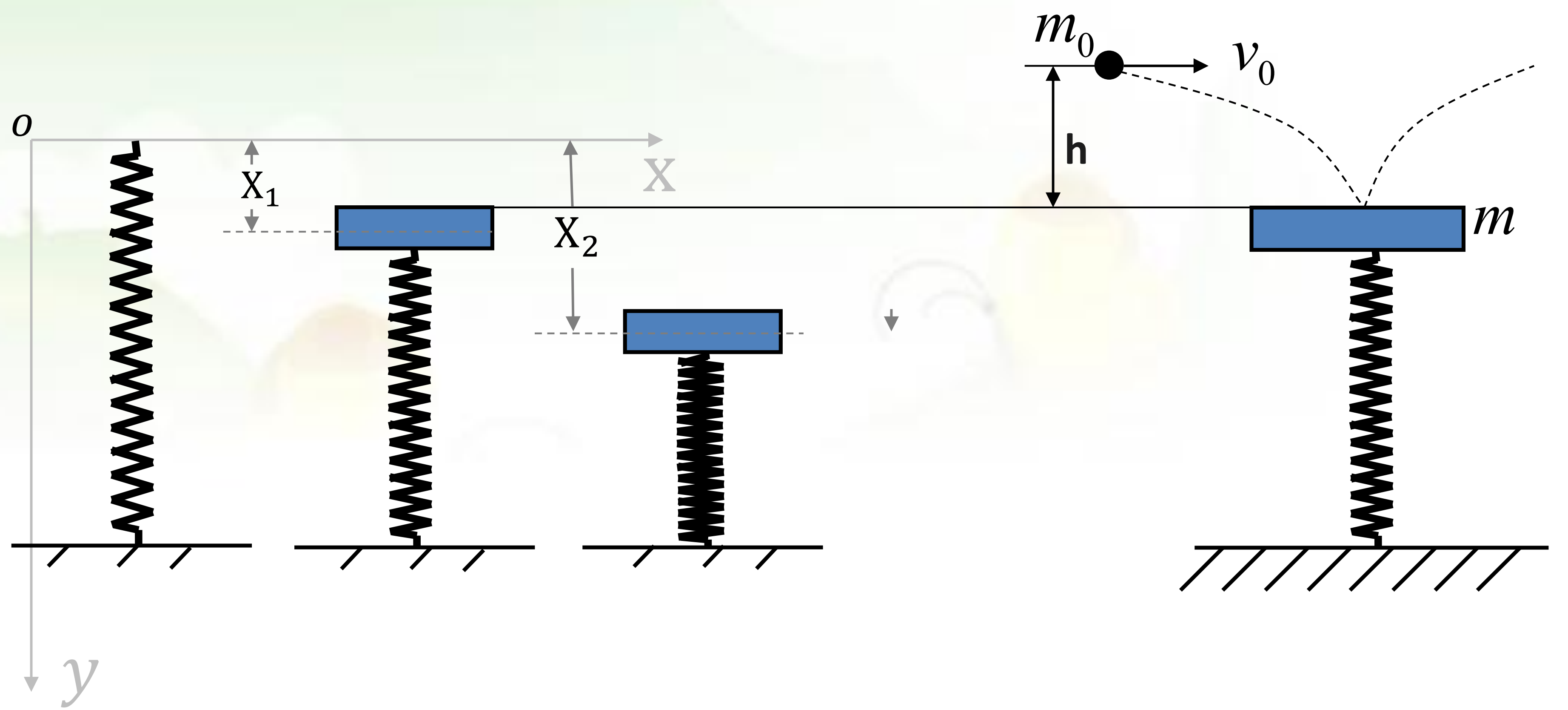
当 $A_{外} + A_{内非保} = 0$ 时，有 $E_2 = E_1$

机械能守恒定律:只有保守内力作功的情况下，系统的机械能保持不变

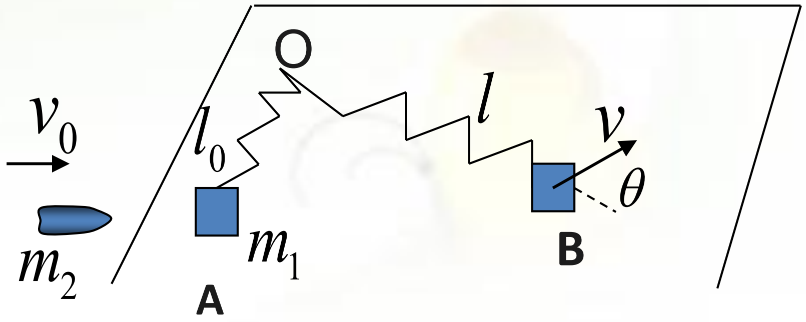
三、能量守恒定律

一个孤立系统经历任何变化过程时，系统所有能量的总和保持不变。

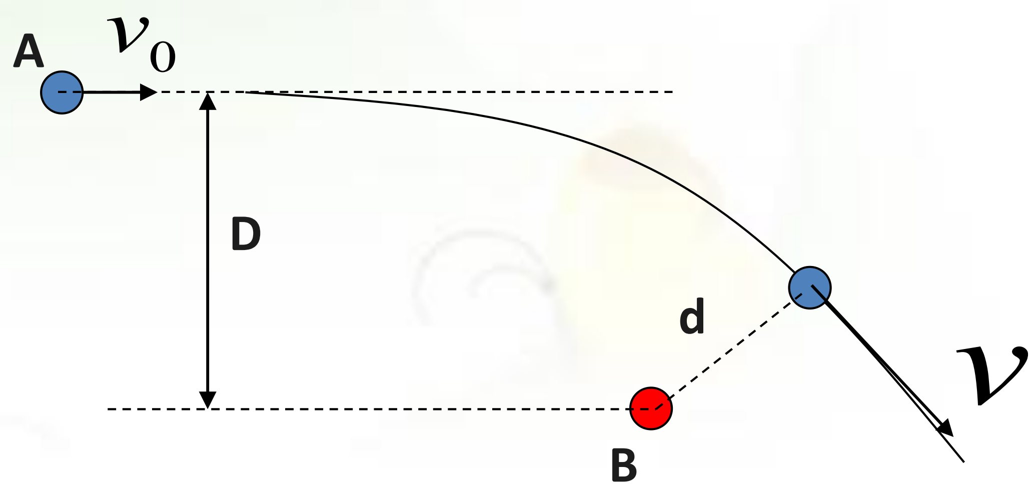
例1、轻弹簧下端固定在地面，上端连接一质量为m的木板，静止不动，如图，一质量为m₀的弹性小球从距木板h高度处以水平速度v₀平抛，落在木板上与木板发生弹性碰撞，设木板没有左右摆动，求碰后弹簧对地面的最大作用力。



例2、（4.22）在光滑的水平桌面上，有一劲度系数为k的轻弹簧，一端固定于O点，另一端联结一质量为 m_1 的木块，处于静止状态。一质量为 m_2 的子弹，以速度 v_0 沿与弹簧垂直的方向射入木块，与之一起运动，当木块运动由A点运动到B点时，弹簧长度由原长 l_0 变为 l，求B点木块速度v和方位角 θ。



例3、A、B粒子之间有万有引力作用，B固定不动，A从远处以初速率 v_0 按图示轨道运动，A、B之间的最近距离为d，求A在离B最近点时的速率 v 和B的质量。



以下对功的几种说法正确的是：（　　）

A．保守力做正功时，系统内相应的势能增加；

B．质点运动经一闭合路径，保守力对质点做的功为零；

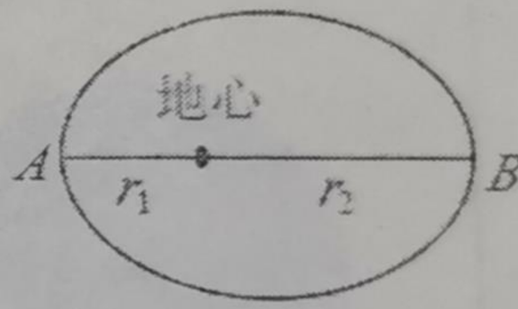
C．作用力和反作用力所做功的代数和一定为零；

D．合外力做功等于质点系动能的增量。

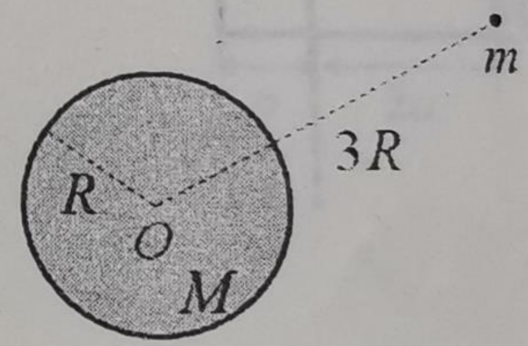
一个质点在恒力 $\boldsymbol{F}=-3\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}$ (SI)的作用下发生位移 $\Delta\boldsymbol{r}=4\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$ (SI)，则此力在该位移过程中所做的功 $A=$________________J。

一质点在二恒力共同作用下，位移为 $\Delta\boldsymbol{r}=3\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}$ (SI)；在此过程中，动能增加了 24J，已知其中一恒力 $\boldsymbol{F}_1=10\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$ (SI)，则另一恒力 $\boldsymbol{F}_2$ 所作的功为__________。

一人造地球卫星绕地球作椭圆运动，近地点为 A，远地点为 B。 A、B 两点距地心分别为 r_1 和 r_2。设卫星质量为 m，地球质量为 M ，万有引力常量为 G，则卫星在 A、B 两点的动能之差 $E_{kB}-E_{kA}=$ ________________。



已知地球的质量为 M，半径为 R。一质量为 m 的物体，处在离地心 $3R$ 的高度。以地球和物体为系统，若取地面为势能零点，则系统的引力势能 E_p = ________。



人造地球卫星绕地球作椭圆轨道运动，地球在椭圆的一个焦点上。卫星对地心的角动量为 L，卫星与地球组成的系统的机械能为 E，则（　　）

A．L 守恒，E 守恒；

B．L 守恒，E 不守恒；

C．L 不守恒，E 守恒；

D．L 不守恒，E 不守恒。