条件概率　　**引例**　袋中有7只白球, 3只红球, 白球中有4只木球, 3只塑料球; 红球中有2只木球,1只塑料球. 现从袋中任取1球, 假设每个球被取到的可能性相同. 若已知取到的球是白球, 问它是木球的概率是多少?

设 A 表示任取一球，取得白球；

B 表示任取一球，取得木球.

所求的概率称为**在事件A发生的条件下事件B 发生的条件概率**。**记为** $P(B|A)$

解 列表

	白球	红球	小计
木球	4	2	6
塑球	3	1	4
小计	7	3	10

$$P(B|A)=\frac{4}{7}\quad \begin{array}{l} \longrightarrow k_{B|A}=4=k_{AB} \\ \longrightarrow n_{\Omega|A}=7=k_{A} \end{array} =\frac{P(AB)}{P(A)}$$

从而有

$$P(B|A)=\frac{4}{7}=\frac{k_{AB}}{k_A}=\frac{k_{AB}/n_{\Omega}}{k_A/n_{\Omega}}=\frac{4/10}{7/10}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

定义　设A、B为两事件，$P(A)>0$，则称 $P(AB)/P(A)$ 为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率，记为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

条件概率也是概率，故具有概率的性质：

- 非负性　$P(B|A)\geq 0$
- 规范性　$P(\Omega|A)=1$
- 可列可加性　$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \,\middle|\, A\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A)$

例1 从混有5张假钞的20张百元钞票中任意抽出2张，将其中1张放到验钞机上检验发现是假钞. 求2 张都是假钞的概率.

解 令 A 表示"抽到2 张都是假钞".

B表示"2 张中至少有1张假钞"

$A \subset B$

$AB=B$

则所求概率是 $P(A|B)$（而不是$P(A)$！）.

$$P(AB)=P(A)=C_5^2/C_{20}^2 \qquad P(B)=(C_5^2+C_5^1C_{15}^1)/C_{20}^2$$

所以 $P(A|B)=P(AB)/P(B)$

$$=C_5^2/(C_{20}^2+C_5^1C_{15}^1)=10/85=0.118$$

乘法公式

利用条件概率求积事件的概率即**乘法公式**

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) \quad (P(A) > 0)$$

$$P(AB) = P(B)P(A \mid B) \quad (P(B) > 0)$$

推广

$$P(A_1 A_2 \boxed{?} A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) \boxed{?} P(A_n \mid A_1 A_2 \boxed{?} A_{n-1})$$

$$(P(A_1 A_2 \boxed{?} A_{n-1}) > 0)$$

例2 盒中装有5个产品, 其中3个一等品，2个二等品, 从中不放回地取产品, 每次1个，求

（1）取两次，两次都取得一等品的概率;

（2）取两次，第二次取得一等品的概率;

（3）取三次，第三次才取得一等品的概率;

（4）取两次，已知第二次取得一等品，求第一次取得的是二等品的概率.

解 令 A_i 为第 i 次取到一等品

解 令 A_i 为第 i 次取到一等品

(1) $$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2 \mid A_1)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$$

(2) $$P(A_2)=P(\overline{A_1}A_2\cup A_1A_2)=P(\overline{A_1}A_2)+P(A_1A_2)$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{5}$$

直接解更简单 $P(A_2)=3/5$

提问：第三次才取得一等品的概率, 是

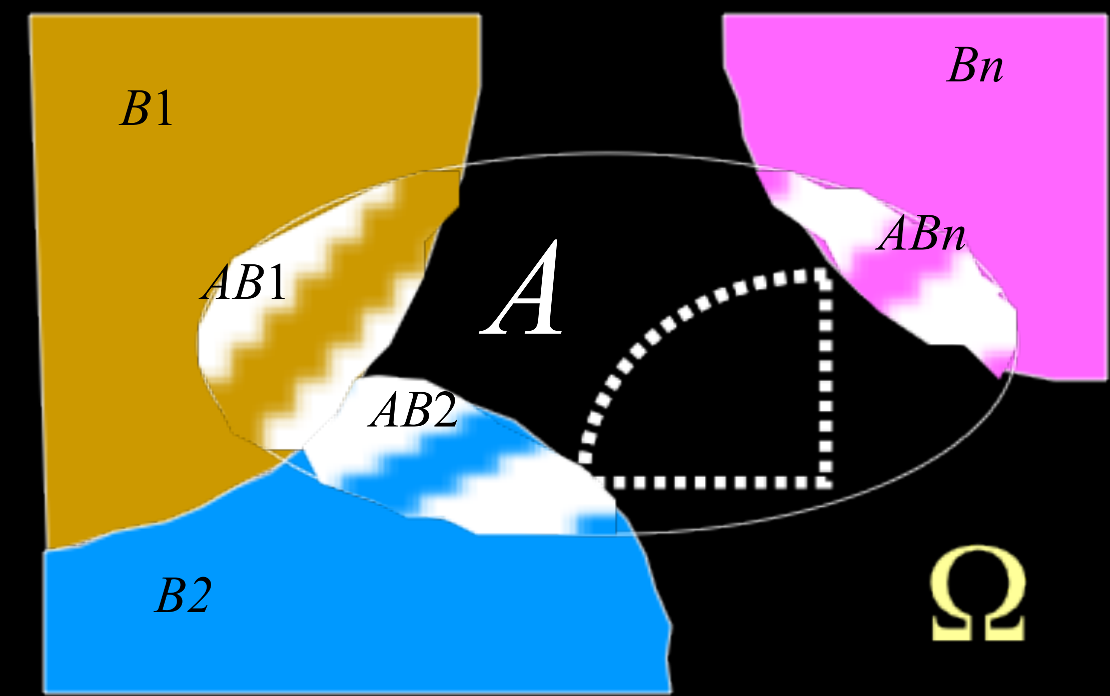
$$P(A_3|\overline{A_1}\,\overline{A_2})\text{ 还是 }P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3)?$$

(3) $P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}\,\overline{A_2})=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}=\frac{1}{10}$

(4) $P(\overline{A_1}|A_2)=\frac{P(\overline{A_1}A_2)}{P(A_2)}=\frac{P(A_2)-P(A_1A_2)}{P(A_2)}$

$$=1-\frac{3/10}{3/5}=0.5$$

全概率公式与Bayes 公式



$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$$

$$B_i B_j = \Phi$$

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} AB_i$$

$$(AB_i)(AB_j) = \Phi$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)$$

全概率公式

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(AB_k)}{P(A)} = \frac{P(B_k)P(A \mid B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)}$$

Bayes公式

例3 由于随机干扰, 在无线电通讯中发出信号“•”, 收到信号“•”,“不清”,“—” 的概率分别为0.7, 0.2, 0.1; 发出信号“—”,收到信号“•”,“不清”,“—”的概率分别为0.0, 0.1, 0.9. 已知在发出的信号中, “•”和“—”出现的概率分别为0.6 和 0.4 ,

试分析, 当收到信号 “不清”时, 原发信号为“•”还是“—”的概率 哪个大?

解 设原发信号为“•” 为事件 $B1$

原发信号为“—”为事件 $B2$

收到信号“不清” 为事件 A

例4 每100件产品为一批, 已知每批产品中次品数不超过4件, 每批产品中有 i 件次品的概率为

i	0	1	2	3	4
P	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

从每批产品中不放回地取10件进行检验,若发现有不合格产品, 则认为这批产品不合格, 否则就认为这批产品合格. 求

(1) 一批产品通过检验的概率

(2) 通过检验的产品中恰有 i 件次品的概率

解 设一批产品中有 i 件次品为事件B_i，$i=0,1,\ldots,4$

A 为一批产品通过检验

已知$P(B_i)$如表中所示,

且

$$P(A|B_i)=\frac{C_{100-i}^{10}}{C_{100}^{10}},\ i=0,1,2,3,4$$

由全概率公式与Bayes 公式可计算$P(A)$与

$P(B_i|A),\ i=0,1,2,3,4$

结果如下表所示

i	0	1	2	3	4
$P(Bi)$	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1
$P(A\|B_i)$	1.0	0.9	0.809	0.727	0.652
$P(B_i\|A)$	0.123	0.221	0.397	0.179	0.080

$$P(A)=\sum_{i=0}^{4}P(B_i)P(A|B_i)=0.814$$

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)},\quad i=0,1,2,3,4$$

- 称 $P(Bi)$ 为先验概率，它是由以往的经验得到的，它是事件 A 的原因

  称 $P(B_i|A)$　$i=0,1,2,3,4$ 为后验概率，它是得到了信息 — A 发生, 再对导致 A 发生的原因发生的可能性大小重新加以修正

- 本例中，i 较小时，$P(B_i|A) \geq P(B_i)$

  i 较大时，$P(B_i|A) \leq P(B_i)$

作业 习题1

A组：10，11，14，16

B组：5，6，7

$$P(B|A)=\frac{P(BA)}{P(A)} \ \overset{(\geq\ \leq\ =)}{?} \ P(B)$$ 无必然大小关系.

(决定于 A 是否有利于 B 发生)

若 $P(BA) \underset{=}{\overset{>}{<}} P(B)P(A)$ 则 $P(B|A) \underset{=}{\overset{>}{<}} P(B)$