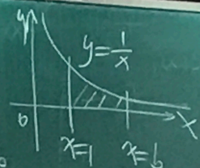
$S(b)=\int_1^b \frac{1}{x}dx=\ln b$.

$\lim\limits_{b\to+\infty} S(b)=+\infty$



定义: $\int_a^{+\infty} f(x)dx \xlongequal{f(x)\in C[a,+\infty)} \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 收敛 / 发散;

$\int_{-\infty}^b f(x)dx \xlongequal{f(x)\in C(-\infty,b]} \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \xlongequal{f(x)\in C(-\infty,+\infty)} \int_{-\infty}^{c} + \int_{c}^{+\infty}$ 两个积分均收敛 称 $\int_{-\infty}^{+\infty}$ 收敛.

一. 积分区间为无穷区间

引例 考察位于 $y=\frac{1}{x^2}$ 之下, x轴之上, 而夹在 $x=1$ 及 $x=b>1$ 之间区域的面积.

解: $S(b)=\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^b = (1-\frac{1}{b})$.

$\lim\limits_{b\to+\infty} S(b)=1$.

$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b f(x)dx$

$y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x^2}$

例. $\int_0^{+\infty} x e^{-x}dx = -\int_0^{+\infty} x\,de^{-x}$

$= -\left[xe^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx$

$= -\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}} - e^{-x}\Big|_0^{+\infty}$

$=1$

例 $I_n=\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$

$= -\int_0^{+\infty} x^n\,de^{-x}$

$= -\left[x^n e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\, n x^{n-1}dx$

$= nI_{n-1}$

$= n(n-1)I_{n-2}$

$= \cdots = n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$

例 $I=\int_a^b \frac{1}{(x-a)^q}dx$

(1) $q\le 0$ 时, 该积分为常义积分, $I=\left[\frac{1}{1-q}(x-a)^{1-q}\right]_a^b = \frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}$

(2) $q>0$ 时, 该积分为无界函数的广义积分

$q\ne 1$ 时, $I=\left.\frac{1}{1-q}(x-a)^{1-q}\right|_a^b = \begin{cases}\frac{1}{1-q}(b-a)^{1-q}, & 1-q>0 \Leftrightarrow q<1\\ \infty, & 1-q<0 \Leftrightarrow q>1\end{cases}$

$q=1$ 时 发散.

作业 P247. 1.奇. 3. 5.