§2.4 随机变量函数的分布

问题：已知随机变量 X 的概率特性 —— 分布函数 或密度函数（分布律）

$$Y = g(X)$$

求 随机因变量Y 的概率特性

方法：将与 Y 有关的事件转化成 X 的事件

离散型随机变量函数的分布

例1 已知 X 的概率分布为

X	-1	0	1	2
pk	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

求 $Y_1 = 2X - 1$ 与 $Y_2 = X^2$ 的分布律

例2 已知 X 的概率分布为

$$P\left(X = k\frac{\pi}{2}\right) = pq^k, \quad k = 0,1,2,\boxed{?}$$

其中 $p + q = 1,\ 0 < p < 1,$

求 $Y = \mathrm{Sin}\, X$ 的概率分布

解

$$P(Y=0) = P\left(\bigcup_{m=0}^{\infty}\boxed{?}\left(X = 2m\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sum_{m=0}^{\infty} pq^{2m} = \frac{p}{1-q^2}$$

$$P(Y=1) = P\left(\bigcup_{m=0}^{\infty}\boxed{?}\left(X = 2m\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = P\left(\bigcup_{m=0}^{\infty}\boxed{?}\left(X = (4m+1)\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sum_{m=0}^{\infty} pq^{4m+1} = \frac{pq}{1-q^4}$$

$$P(Y=-1) = P\left(\bigcup_{m=0}^{\infty}\boxed{?}\left(X = 2m\pi + \frac{3\pi}{2}\right)\right) = P\left(\bigcup_{m=0}^{\infty}\boxed{?}\left(X = (4m+3)\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sum_{m=0}^{\infty} pq^{4m+3} = \frac{pq^3}{1-q^4}$$

故 Y 的概率分布为

Y	-1	0	1
p_i	$\frac{pq^3}{1-q^4}$	$\frac{p}{1-q^2}$	$\frac{pq}{1-q^4}$

连续性随机变量函数的分布

已知随机变量 X 的密度函数 $f(x)$ (或分布函数)
求 $Y = g(X)$ 的密度函数或分布函数

方法:　　分布函数法

例3 已知 X 密度函数为 $f_X(x), Y = aX + b, a, b$

为常数，且 a □ 0, 求 $fY(y)$

例如，设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = aX + b$, 则

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

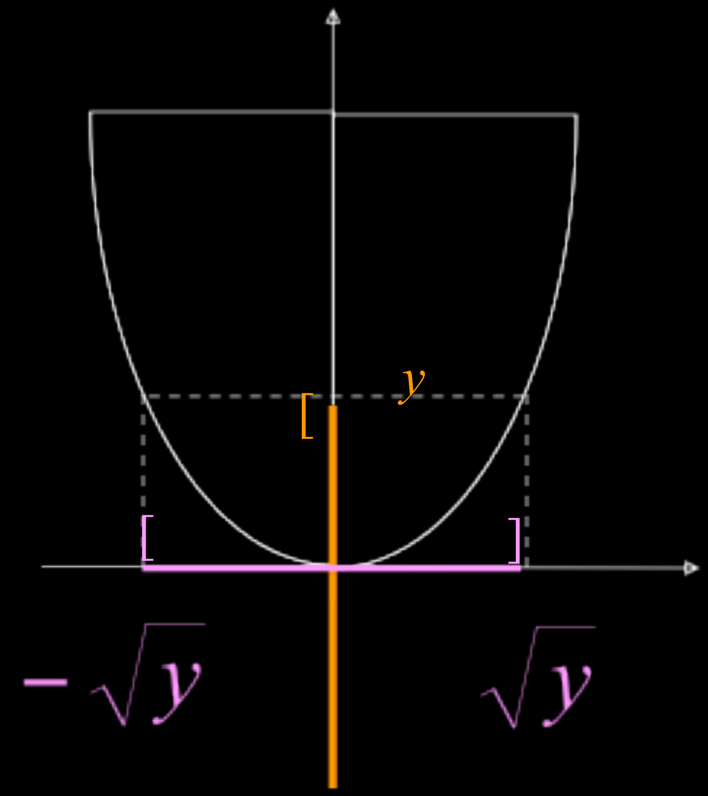
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\,|a|} e^{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2a^2\sigma^2}} \qquad -\infty < y < \infty$$

$Y \sim N(a\mu + b,\ a^2\sigma^2)$

特别地，若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

则 $$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

例4 已知 $X \sim N(0,1)$, $Y = X^2$, 求 $f_Y(y)$



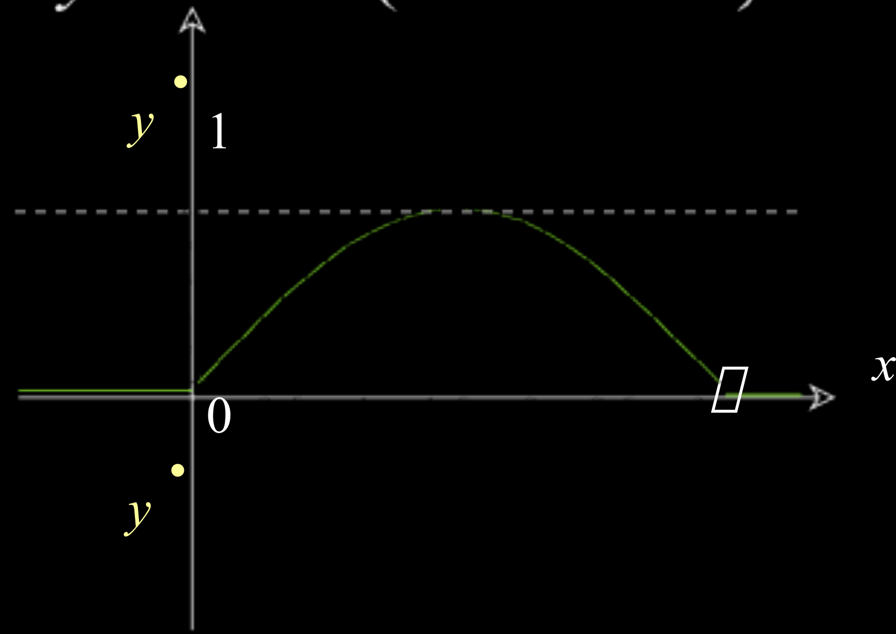
例5 设 X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $Y=\sin X$ 的概率密度函数

解 由图可知, Y 的取值范围为(0,1)

$$y=\sin x(0<x<\pi)$$



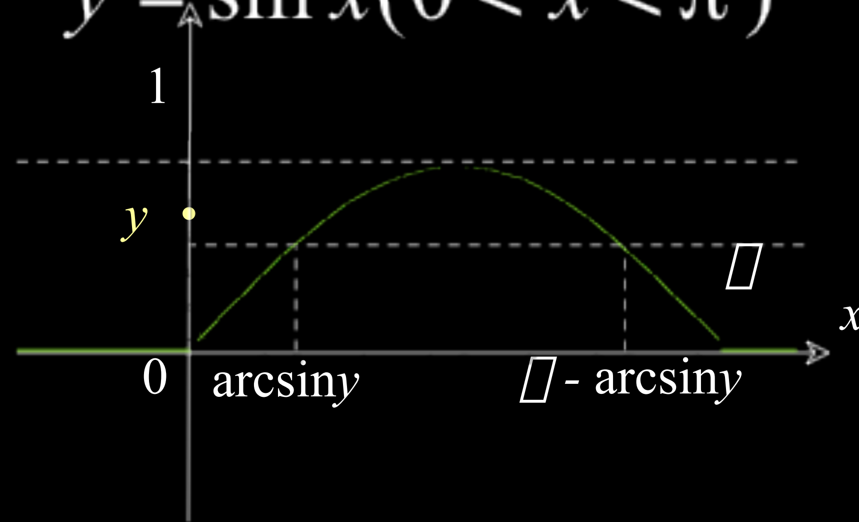
故当 $y \le 0$

或 $y \ge 1$ 时

$$f_Y(y)=0$$

当0 □ $y < 1$ 时

$$y = \sin x (0 < x < \pi)$$



$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\left[\frac{2\arcsin y}{\pi^2} + \frac{2(\pi - \arcsin y)}{\pi^2}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$$

故

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

讲习题1C组1题

作业 习题2

A组：18，20，22，23

B组：11

C组：1