# 第九章　重积分

## 一、教学目标与基本要求

1、教学目标

本章从曲顶柱体的体积和平面薄片的质量这两个实际例子引入二重积分的概念，不加以证明地指出二重积分存在的充分条件。对二重积分的性质只加以叙述，而不予证明，将三重积分自然地看成是二重积分的推广。总的精神就是对概念和性质不作分析上的严格要求，而把重点放在讨论二重积分和三重积分的计算上，计算二重积分和三重积分的基本途径是将它们化为二次与三次积分，但在直角坐标系下计算二次与三次积分有时会比较困难，因此需要考虑采用其它的坐标，我们将分别讨论最常见的平面极坐标，空间柱面坐标与球面坐标下重积分的计算方法，此外对二重积分的一般换元法进行简单介绍。最后采用元素法介绍重积分在几何与物理问题中的某些应用。

2、基本要求：

（1）理解二重积分、三重积分的概念，了解并会应用重积分的性质。

（2）熟练掌握利用直角坐标和极坐标计算二重积分的方法

（3）会利用直角坐标、柱面坐标、球面坐标计算三重积分。

（4）会用重积分求立体体积、曲面面积、平面薄片和空间立体的质量、重心和转动惯量，平面薄片和空间立体对空间一质点的引力等几何与物理量。

## 二、教学内容及学时分配

| | | |
|---|---|---|
| 第一节 | 二重积分的概念与性质 | 2 学时 |
| 第二节 | 二重积分的计算法 | 4 学时 |
| 第三节 | 三重积分 | 4 学时 |
| 第四节 | 重积分的应用 | 2 学时 |

## 三、教学内容重点与难点

1、重点：二重积分概念，二重积分和三重积分的计算。

2、难点：对二重积分概念的理解，将重积分化为累次积分时的定限及更换积分次序。

## 四、教学内容的深化和拓宽：

1、二重积分、三重积分概念的深刻背景

2、二重积分、三重积分的换元积分法

3、重积分的实际应用

## 五、思考题与习题

本章和下一章是多元函数积分学的内容，将原来的积分范围为区间的定积分，推广到积分范围为平面区域，则得到二重积分，积分范围若为空间区域，则得到三重积分。本章主要介绍二重、三重积分的概念、性质，计算法及其应用。

## 第一节　二重积分的概念与性质

**讲稿内容**

**一、二重积分的概念**

**例 1 曲顶柱体的体积**

曲顶柱体：设有一立体，它的底是 $xoy$ 面上的闭区域 $D$，它的侧面是以 $D$ 的边界曲线为准线而母线平行于 $z$ 轴的柱面，它的顶是曲面 $z=f(x,y)(f\geq 0,\text{连续})$，这种立体叫做曲顶柱体。

如何计算曲顶柱体的体积呢？

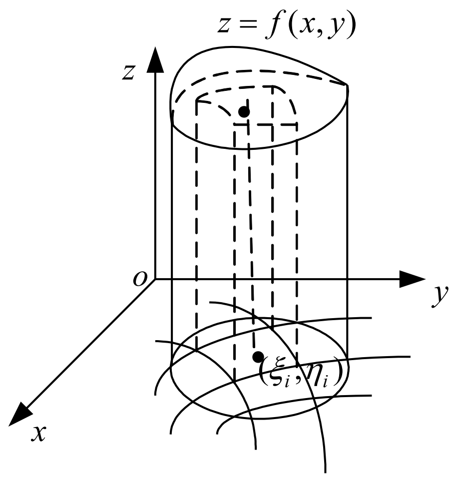
如果柱体是平顶柱体即高 $f(x,y)$ 不变，或者说 $f(x,y)$=常数，则它的体积容易计算：

体积=底面积×高

计算曲顶柱体体积时，高是变化的，不能用上公式计算，但我们可以用对付“曲边梯形面积”的那种办法来求曲顶柱体的体积，即化曲顶为平顶。

为此，我们用曲线网把区域 $D$ 划分成 $n$ 个小区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots\Delta\sigma_n$，分别以这些小区域的边界为准线，作母线平行于 $z$ 轴的柱面，这样，曲顶柱体被分为 $n$ 个小的曲顶柱体。

由于 $f(x,y)$ 的连续性，当 $\Delta\sigma_i$ 很小时，$f(x,y)$ 的变化不大，可视小的曲顶柱体为平顶柱体，在区域 $\Delta\sigma_i$ 内任取一点 $(\xi_i,\eta_i)$，把函数值 $f(\xi_i,\eta_i)$ 作为平顶柱体的高，则此小平顶柱体的体积为 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$。




作和有 $V_{\text{曲顶主体}}\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

为了提高精度，令小区域的直径的最大值 $\lambda\to 0$，所得极限便是曲顶柱体的体积。

即　　$V_{\text{曲顶主体}}=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

**例 2 平面薄片的质量**

设有一平面薄片占有 $xoy$ 面上的区域 $D$ ,它在点 $(x,y)$ 处的面密度为 $\mu(x,y)$ ，计算该平面薄片的质量 $M$ 。（其中 $\mu(x,y)>0$ ，连续）

我们知道，如果薄片是均匀的，即面密度为常数，则

质量=面密度×面积

采用前面类似的方法，化“非均匀”为“均匀”，把薄片划分成许多小块，由于 $\mu(x,y)$ 是连续的，当小块区域 $\Delta\sigma_i$ 的直径很小时，这些小块就可以近似地看成均匀薄片，在 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 $(\xi_i,\eta_i)$ ，则

$$\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

可看作是第 $i$ 块质量的近似值，通过求和取极限便得整个平面薄片的质量

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

上面的两个例子虽然实际意义不一样，但都归结为同一形式和的极限，把它们从实际意义中提取出来，即不考虑它们的实际意义，则得到二重积分的定义。

<u>**定义**</u>　设 $f(x,y)$ 是闭区域 $D$ 上的有界函数，将闭区域 $D$ 任意分成 $n$ 个小闭区域

$$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots\Delta\sigma_n$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 $i$ 个小区域，也表示它的面积，在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 $(\xi_i,\eta_i)$ ，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots n)$ ，并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ ，如果当各个小闭区域的直径中的最大值 $\lambda$ 趋于零时，这和的极限总存在，则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在闭区域 $D$ 上的二重积分，记作 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ ,即　$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

其中 $f(x,y)$ ——被积函数，　　　　$f(x,y)d\sigma$ ——被积表达式

$d\sigma$ ——面积元素，　　　　$x,y$ ——积分变量

$D$ ——积分区域，　　　　$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ ——积分和

注：① 在直角坐标系中，面积元可取为$d\sigma = dxdy$。

因为，在直角坐标系中，我们可用垂直于坐标轴的直线网来划分区域$D$，除了一些靠边界的小区域外，大部分区域均为方形，所以$d\sigma = dxdy$。

② 可积条件：$f(x,y)$在闭区域$D$上连续。

③ 在定义中极限过程是小区域的最大直径$\lambda \to 0$，而不是小区域的面积趋于零。

因为，小区域的直径小与面积小是两回事。如非常扁的长条，其直径很大，但面积确很小。

④ 二重积分$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$的几何意义：

$\forall (x,y)\in D, f(x,y)\ge 0$，二重积分表示以$D$为底，以$D$的边界为准线，母线平行$z$轴的柱面为侧面，以$z=f(x,y)$为顶的曲顶柱体的体积。

$\forall (x,y)\in D, f(x,y)< 0$，二重积分的绝对值为柱体的体积。

$\forall (x,y)\in D, f(x,y)$有正有负，柱体体积的代数和。

**二、二重积分的性质**

二重积分的性质与定积分的性质一一对应。

**性质 1（线性性）** $\iint\limits_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]d\sigma = \alpha\iint\limits_D f(x,y)d\sigma + \beta\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$

**性质 2（对积分区域可加性）** $\iint\limits_{D_1+D_2} f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$

**性质 3** $\iint\limits_D 1\cdot d\sigma =$区域$D$的面积

**性质 4（积分不等式）** $\forall (x,y)\in D, f(x,y)\le g(x,y)$,则$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le \iint\limits_D g(x,y)d\sigma$

**推论** $\left|\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|d\sigma$

**性质 5（估值定理）** 设$m\le f(x,y)\le M$，$\sigma$是$D$的面积，则有

$$m\sigma \le \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma$$

证明：因为$m\le f(x,y)\le M \Rightarrow m\sigma = \iint\limits_D md\sigma \le \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le \iint\limits_D Md\sigma = M\sigma$

**性质 6（二重积分中值定理）** 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 $D$ 上连续，$\sigma$ 是 $D$ 的面积，则在 $D$ 内至少存在一点 $(\xi,\eta)$ 使得

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

证明：由性质 5 知

$$m \le \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)d\sigma \le M$$

由二元函数的介值定理知 $\exists(\xi,\eta)\in D$,使 $f(\xi,\eta)=\dfrac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)d\sigma.$

**例**（1）在区域 $D:0<|x|+|y|\le 1$ 上，判断 $\iint_D \ln(x^2+y^2)dxdy$ 的正负；

（2）在区域 $D:|x|+|y|\le 1$ 上，估计积分 $I=\iint_D \dfrac{dxdy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$ 之值。

解（1）：$0<|x|+|y|\le 1 \Rightarrow 0<x^2+y^2\le 1-2|xy|\le 1,$

所以 $\ln(x^2+y^2)\le 0$，故 $\iint_D \ln(x^2+y^2)dxdy<0$

解（2）：易知 $\dfrac{1}{102}\le\dfrac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\dfrac{1}{100}$，

而区域 $D$ 的面积为 $\sigma=(\sqrt{2})^2=2$，所以 $\dfrac{1}{51}\le I\le\dfrac{1}{50}$

**例** 估计 $\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy$ 的值，其中 $D:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1, 0<b<a.$

解：区域 $D$ 的面积为 $\sigma=\pi ab$，又 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}\le\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$

即有 $0\le x^2+y^2\le a^2 \Rightarrow 1\le e^{x^2+y^2}\le e^{a^2}$，

于是 $\pi ab\le\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy\le \pi abe^{a^2}.$

**例** 比较积分的大小 $I_1=\iint_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $I_2=\iint_D (x+y)^3 d\sigma$

（1）$D$ 由 $x=0, y=0, x+y=1$ 所围成；

（2）$D$ 由 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成。

解（1）：易知在区域 $D$ 内 $0\le x+y\le 1, \therefore I_1>I_2$

解（2）：**法 1：**据积分的性质，需讨论被积函数的大小，进一步地需讨论 $x+y$ 是否大于 1。

圆心 $(2,1)$ 到直线 $x+y-1=0$ 的距离为 $\sqrt{2}$，而圆的半径也为 $\sqrt{2}$，所以圆与直线相切，且圆在直线的上方，故 $\forall(x,y)\in D, x+y\geq 1\Rightarrow (x+y)^2\leq (x+y)^3\Rightarrow I_1\leq I_2$。

**法 2：**区域 D 可表示为 $(x-2)^2+(y-1)^2\leq 2$，从而有

$4x+2y\geq x^2+y^2+3\Rightarrow x+y\geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)-x+\frac{3}{2}$。

**令** $f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)-x+\frac{3}{2}$ 求其最小值：

由 $f_x=x-1=0, f_y=y=0$ 得驻点 $(1,0)$，又 $A=f_{xx}(1,0)=1, B=f_{xy}(1,0)=0, C=f_{yy}(1,0)=1$

$B^2-AC=-1<0$，$(1,0)$ 为极小值点，也是最小值点，且 $f(1,0)=1$，故 $x+y\geq 1$。

**例** 若 $D: x^2+y^2\leq r^2$,则 $\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_D e^{x^2+y^2}\cos(x+y)dxdy=$________ 1

**例**（2019）已知积分区域 $D=\left\{(x,y)\middle| |x|+|y|\leq\frac{\pi}{2}\right\}$，

$I_1=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy, I_2=\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，$I_3=\iint\limits_D(1-\cos\sqrt{x^2+y^2})dxdy$，试比较 $I_1,I_2,I_3$ 的大小(　　)

(A) $I_3<I_2<I_1$　　　　(B) $I_1<I_2<I_3$

(C) $I_2<I_1<I_3$　　　　(D) $I_2<I_3<I_1$

【答案】(A)

【解析】在区域 $D$ 上，$0\leq x^2+y^2\leq\frac{\pi^2}{4}$，故 $\sin\sqrt{x^2+y^2}\leq\sqrt{x^2+y^2}$，

记 $f(u)=1-\cos u-\sin u, u\in[0,\frac{\pi}{2}]$

令 $f'(u)=\sin u-\cos u=0$，得 $u=\frac{\pi}{4}$，易知 $f(u)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 单减，在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 单增，且 $f(0)=f(\frac{\pi}{2})=0$，从而 $f(u)<0$，即 $1-\cos u\leq\sin u$，选（A）

**思考题：**怎样理解二重积分定义中的两个“任意”（即区域$D$任意分割、点$(\xi_i,\eta_i)$任意取）？为什么如此要求？

答：与一元函数定积分一样，二重积分的定义中也强调了分割和取点的任意性，为什么呢？（1）以立体的体积来说，任何一个立体都有确定的体积，不应该因为计算方法的不同而改变，现在用“分割、作和、取极限”的方法来计算，当然也不应该因为分割和取点的不同而改变。（2）值得注意的是，一元函数定积分中的分割对象是区间，分割方式只有一种，即在区间内插入一些分点，分割的任意性只体现在这些分点的自由选择上；而二重积分中的分割则不同，它的对象是平面上区域，分割方式多种多样，比如有直角坐标网的分割，也有极坐标网的分割，以及其它曲线坐标网的分割等等。（3）在二重积分的计算中，在二重积分存在的前提条件下，正是由于区域$D$的任意分割及任意取点均可，同时也为了便于计算，采用了特殊的分割和取点方式。

**教学要求和注意点**

理解二重积分，了解重积分的性质，了解二重积分的中值定理。

# 第二节　二重积分的计算法

**讲稿内容**

二重积分的计算总的来说就是化二重积分为二次积分。

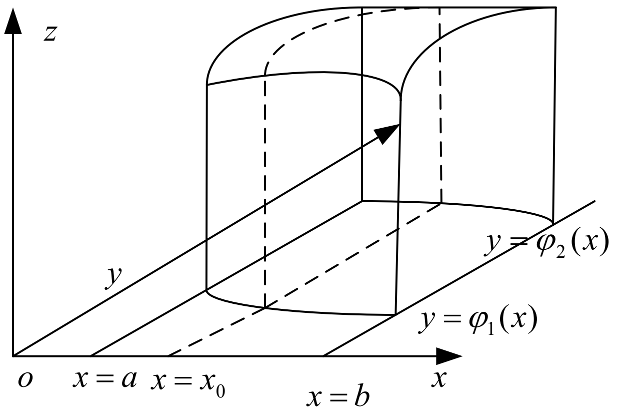
一、利用直角坐标计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

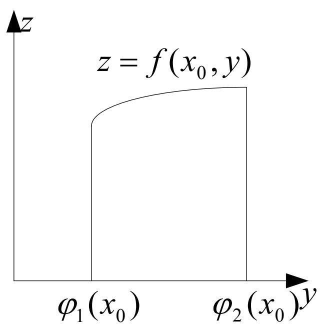
**1.** <u>**设被积分函数为**</u> $f(x,y), f(x,y)>0$ <u>**，积分区域为**</u> $X-$<u>**型区域**</u>

$D:\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x), a<x<b$，如图（此种区域的特点是：用垂直于 $x$ 轴的直线穿过区域 $D$ 时，与 $D$ 的边界交点不多于两个）

由二重积分的几何意义知：$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 表示以 $D$ 为底、以 $f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积。如图

若用二重积分的定义求二重积分显然是比较麻烦的，我们这里用上册的“平行截面面积为已知的立体的体积”来求曲顶柱体的体积。




用 $x=x_0(a<x_0<b)$ 的平面截柱体得一截面，其截面面积为

$$A=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)dy$$

对任意的 $x$ 有一般式子 $A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_a^b A(x)dx=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

此结论对非正的 $f(x,y)$ 仍成立。

**2.** <u>**设积分区域为**</u>$Y-$<u>**型区域，即**</u>

$D:\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y), c<y<d$ **,如图**

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

3. <u>积分区域既是</u> $X-$<u>型区域，又是</u>$Y-$<u>型区域，则</u>

$$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy=\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

上式表明，虽然积分次序不同，它们的值是相同的。(条件： $f(x,y)\in C(D)$)

4. <u>区域既不是</u> $X-$<u>型区域，又不是</u>$Y-$<u>型区域，作辅助线化为情形 1、2</u>

**<u>5．特别地</u>**，若 $D:a\le x\le b,c<y<d$ ，则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

进一步，若 $f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$，则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b \varphi(x)dx\cdot\int_c^d \psi(y)dy=\int_a^b \varphi(x)dx\cdot\int_c^d \psi(x)dx$$

**例** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明： $\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx\ge(b-a)^2$

证明：记 $D:a\le x\le b,a\le y\le b$，则

$$I=\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx=\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(y)}dy=\iint_D \frac{f(x)}{f(y)}dxdy$$

$$I=\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx=\int_a^b f(y)dy\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx=\iint_D \frac{f(y)}{f(x)}dxdy$$

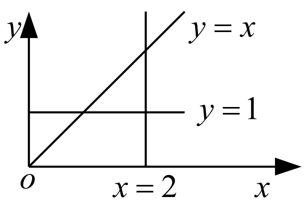
于是，$I=\frac{1}{2}\left[\iint_D \frac{f(x)}{f(y)}dxdy+\iint_D \frac{f(y)}{f(x)}dxdy\right]=\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]dxdy$

$$\ge\frac{1}{2}\iint_D 2dxdy=(b-a)^2$$

**例** 计算积分 $\iint\limits_D xydxdy, D: y=1, x=2, y=x$ 所围成的闭区域。

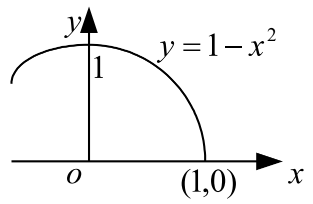
$$\iint_D xydxdy=\int_1^2 dx\int_1^x xydy=\frac{9}{8}$$

$$\iint_D xydxdy=\int_1^2 dy\int_y^2 xydx=\frac{9}{8}$$



**例** 计算积分 $\iint\limits_D 3x^2y^2dxdy, D: x=0, y=0, y=1-x^2$ 所围成在第Ⅰ象限内的区域。

$$\iint\limits_D 3x^2y^2dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x^2}3x^2y^2dy$$

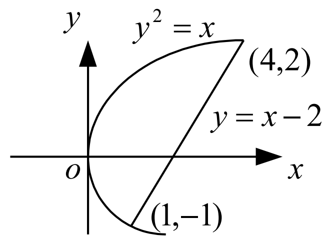



$$\iint\limits_D 3x^2y^2dxdy=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y}}3x^2y^2dx$$

**例** 计算积分 $\iint\limits_D xydxdy, D: y^2=x, y=x-2$

**解：** 先求得交点 $(1,-1),(4,2)$

$$\iint\limits_D xydxdy=\int_{-1}^2 dy\int_{y^2}^{y^2+2}xydx$$




$$\iint\limits_D xydxdy=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}xydy+\int_1^4 dx\int_{x-2}^{\sqrt{x}}xydy$$

**（注意前一积分的区域、被积函数的特点）**

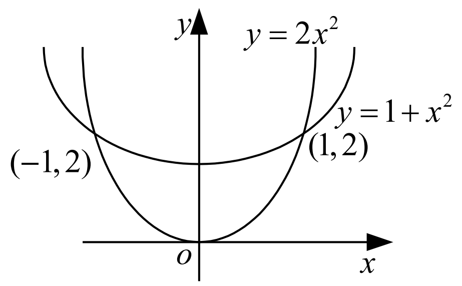
**例** 计算 $\iint\limits_D xydxdy, D: 4x^2+y^2\le 4.$

奇函数在对称区间上积分等于 0

**例（教材）** 计算 $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$，其中积分区域 $D$ 由抛物线 $y=2x^2$ 和 $y=1+x^2$ 所围成的闭区域。

解：此题按 $x$−型区域来计算较方便。

$$D=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1, 2x^2\le y\le 1+x^2\}$$




则有 $\iint\limits_D (x+2y)dxdy=\int_{-1}^1 dx\int_{2x^2}^{1+x^2}(x+2y)dy$

$$=\int_{-1}^1(-3x^4-x^3+2x^2+x+1)dx = \frac{32}{15}$$

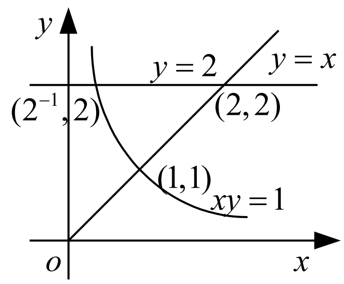
若利用对称性，则有 $\iint\limits_D (x+2y)dxdy=\iint\limits_D 2ydxdy$。

**例（教材）** 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$，其中 $D$ 是直线 $y=2, y=x$ 和双曲线 $xy=1$ 所围成的平面区域。

解　若将区域视为 x−型区域，由于 $D$ 的下方边界没有统一的表达式，所以必须将 $D$ 分成两部分

$$D=\{(x,y)\,|\,\frac{1}{2}\le x\le 1, \frac{1}{x}\le y\le 2\}\cup\{(x,y)\,|\,1\le x\le 2, x\le y\le 2\}$$

于是 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{\frac{1}{x}}^{2}\frac{x^2}{y^2}dy + \int_1^2 dx\int_x^2\frac{x^2}{y^2}dy$




可以看到以上积分形式很复杂。

若我们将 $D$ 视为 $y$ −型区域，$D$ 可以表示成

$$D = \{(x, y) \left| \frac{1}{y} \le x \le y, 1 \le y \le 2 \right.\}$$

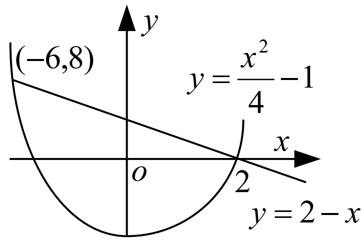
二重积分 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy = \int_1^2 dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}\frac{x^2}{y^2}dx = \int_1^2 \frac{1}{y^2}\cdot(\frac{1}{3}x^3)\Big|_{\frac{1}{y}}^{y} dy$

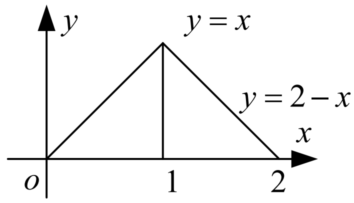
$$= \int_1^2 (\frac{y}{3} - \frac{1}{3y^5})dy = (\frac{y^2}{6} + \frac{1}{12y^4})\Big|_1^2 = \frac{27}{64}$$

**例**　更换下列二重积分的次序

① $\int\limits_{-6}^{2}dx\int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x}f(x,y)dy$　　　　② $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{2-x}f(x,y)dy$

解①：所给积分对应的积分区域为 $D: \begin{cases} -6 \le x \le 2 \\ x^2/4 - 1 \le y \le 2 - x \end{cases}$，如图



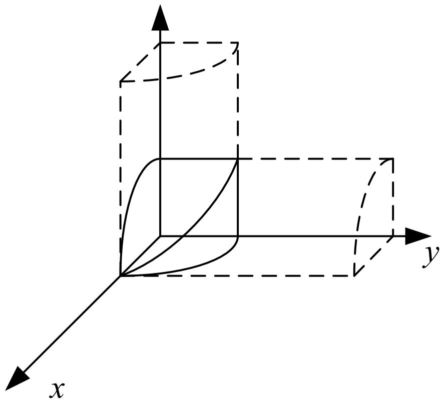

交换积分次序（先 $x$ 后 $y$ ）后的积分区域为

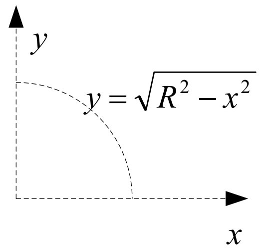
$$D_1: \begin{cases} -1 \le y \le 0 \\ -2\sqrt{y+1} \le x \le 2\sqrt{y+1} \end{cases} \qquad D_2: \begin{cases} 0 \le y \le 8 \\ -2\sqrt{y+1} \le x \le 2 - y \end{cases}$$

交换积分次序后的积分表达式为：$\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}}f(x,y)dx + \int\limits_0^8 dy\int\limits_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y}f(x,y)dx$

解②：类似可得交换积分次序后的表达式为：$\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{2-y}f(x,y)dx$

**例**　求两个底圆半径都等于 $R$ 的直交圆柱面所围成的立体的体积。



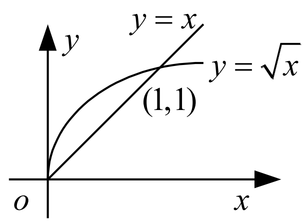

**解**：设两个圆柱面的方程为：

$$x^2+y^2=R^2 \quad 及\, x^2+z^2=R^2$$

所求体积可看成是以 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le R, 0\le y\le \sqrt{R^2-x^2}\right\}$为底，以 $z=\sqrt{R^2-x^2}$ 为顶的曲顶柱体体积的 8 倍，故

$$V=8\iint_D \sqrt{R^2-x^2}\,dxdy=8\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\,dy=\frac{16}{3}R^3$$

**例（教材）** 计算二次积分 $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}dy$。




解　考虑改变积分顺序，即视 $D$ 为 $y$ −型区域来计算此二重积分。

则 $D=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1, y^2\le x\le y\}$

所以 $\iint_D \frac{\sin y}{y}d\sigma=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}dx=\int_0^1\frac{\sin y}{y}(y-y^2\}dy$

$$=\int_0^1\sin y\,dy-\int_0^1 y\sin y\,dy=-\cos y\Big|_0^1-(-y\cos y+\sin y)\Big|_0^1 =1-\sin 1$$

**例**　$I=\iint_D\sqrt{|y-x^2|}\,dxdy, D:|x|\le 1, 0\le y\le 2.$

解：曲线 $y=x^2$ 把区域 $D$ 划分为两部分 $D_1$，$D_2$。

$D_1:\begin{cases}-1\le x\le 1\\ x^2\le y\le 2\end{cases}$，在 $D_1$ 内，$f(x,y)=\sqrt{|y-x^2|}=\sqrt{y-x^2}$

$D_2:\begin{cases}-1\le x\le 1\\ 0\le y\le x^2\end{cases}$，在 $D_2$ 内，$f(x,y)=\sqrt{|y-x^2|}=\sqrt{x^2-y}$

$$I=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{2}\sqrt{y-x^2}dy+\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{x^2}\sqrt{x^2-y}dy=(\frac{4}{3}+\frac{\pi}{2})+\frac{1}{3}=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}$$

前一积分利用被积函数的奇偶性并令 $x=\sqrt{2}\sin t$。

**例**　设 $f(x,y)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，$D$ 是由 $x=0, y=0$ 及 $x+y=t$ 所围成的区域，计算 $F(t)=\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy.$

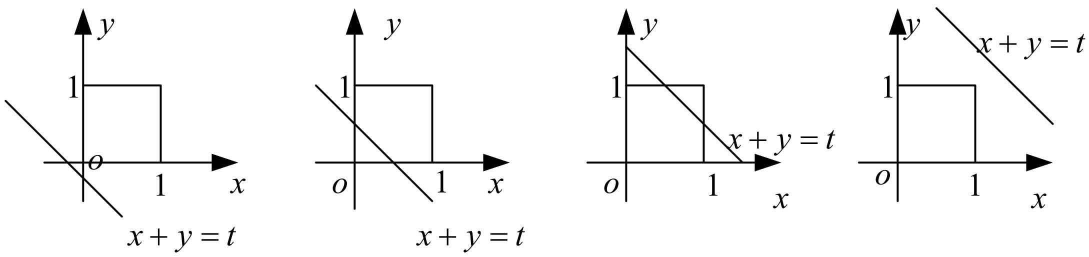
解：当 $t<0$ 时，$f(x,y)=0$，所以 $F(t)=0.$

当 $0\le t<1$ 时，有 $(x,y)\in D$ 时，$f(x,y)=1$，所以 $F(t)=\iint\limits_{D}1dxdy=\frac{1}{2}t^2$

当 $1\le t<2$，$(x,y)\in D$ 时，$f(x,y)=1$ 或 0，所以

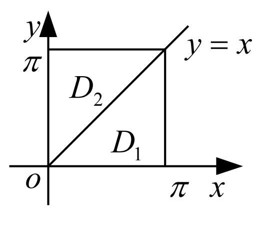
$$F(t)=\iint\limits_{D_1}1dxdy+\iint\limits_{D_2+D_3}0dxdy=1-\frac{1}{2}(2-t)^2$$

当 $2\le t$ 时，$f(x,y)=1$ 或 0，所以 $F(t)=\iint\limits_{D_1}1dxdy+\iint\limits_{D_2}0dxdy=1$




**例**　计算 $I=\iint\limits_{D}\sin x\sin y\cdot\max\{x,y\}dxdy$，其中 $D:0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi.$

解：用直线 $y=x$ 把 $D$ 划分两部分，如图。




则 $\max\{x,y\}=\begin{cases}x, & (x,y)\in D_1\\ y, & (x,y)\in D_2\end{cases}$

$$I=\iint\limits_{D_1}\sin x\sin y\cdot xdxdy+\iint\limits_{D_2}\sin x\sin y\cdot ydxdy=\frac{5\pi}{2}.$$

$\boxed{\text{思考题}}$:

1．定积分的上限可以大于也可小于下限，当重积分化为累次积分后，其上限是否可以小于下限？为什么？

答：不可以。因为：对于定积分，子区间$\Delta x_i$可正可负，故定积分上限可以大于也可小于下限；而对于重积分中的子区域$\Delta\sigma_i$（或$\Delta V_i$）只能为正，所以在化为累次积分时，每个累次积分的上限一定要大于下限。

2．怎样正确利用积分域和被积函数的对称性来简化二重积分的计算？

答：利用对称性来简化重积分的计算是十分有效的，它与求定积分时利用函数的奇、偶性来简化计算是一样的。由于定积分的积分范围为区间，应用对称性较容易，而重积分的积分范围为区域，在运用对称性时，必需兼顾**被积函数与积分区域**两个方面，两个方面**相匹配**才能利用。

设$f(x,y)$在$D$上连续，$I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，

（1）如果$D$关于$y$轴对称，则　$f(-x)=-f(x)$

①$\forall(x,y)\in D$，有$f(-x,y)=-f(x,y)$（关于$x$是奇函数），$I=0$；

②$\forall(x,y)\in D$，有$f(-x,y)=f(x,y)$（关于$x$是偶函数，空间图形关于$yoz$面对称），

$I=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy$，其中$D_1=\{(x,y)|(x,y)\in D, x\ge 0\}$.

（2）如果$D$关于$x$轴对称，则

①$\forall(x,y)\in D$，有$f(x,-y)=-f(x,y)$（关于$y$是奇函数）时，$I=0$；

②$\forall(x,y)\in D$，有$f(x,-y)=f(x,y)$（关于$y$是偶函数）时，$I=2\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$，

其中$D_2=\{(x,y)|(x,y)\in D, y\ge 0\}$.

（3）如果$D$关于原点对称，则

①$\forall(x,y)\in D$，有$f(-x,-y)=-f(x,y)$时，$I=0$；

②$\forall(x,y)\in D$，有$f(-x,-y)=f(x,y)$时，

$I=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy=2\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$

（4）如果$D$关于直线$y=x$对称，则$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(y,x)dxdy$

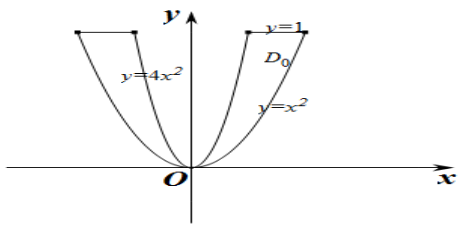
（5）如果$D_1,D_2$两个区域关于直线$y=x$对称，则$\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_2} f(y,x)dxdy$

**例** 计算$I=\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}|xy|dxdy$

解：$I=4\iint\limits_{D_1}xydxdy=4\int_0^1 dx\int_0^{1-x}xydy$，其中$D_1:0\le x\le 1,0\le y\le 1-x$

**例** 计算 $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ 其中 $D$ 为抛物线 $y=x^2, y=4x^2$ 与直线 $y=1$ 所围成区域.

**解** 积分区域如图 9.13 所示.




$$\iint\limits_D (x+y)dxdy=\iint\limits_D xdxdy+\iint\limits_D ydxdy=\iint\limits_D ydxdy=2\iint\limits_{D_0} ydxdy$$

$$=2\int_0^1 dy\int_{\frac{1}{2}\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} ydx=\int_0^1 y\sqrt{y}dy=\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{5}$$

**例** 证明$1\le\iint\limits_D(\sin x^2+\cos y^2)dxdy\le\sqrt{2}$，其中$D:0\le x\le 1,0\le y\le 1$.

证明：利用对称性

$$\iint\limits_D(\sin x^2+\cos y^2)dxdy=\iint\limits_D\sin x^2dxdy+\iint\limits_D\cos y^2dxdy$$

$$=\iint\limits_D\sin x^2dxdy+\iint\limits_D\cos x^2dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_D\sin(x^2+\frac{\pi}{4})dxdy$$

又因$0\le x\le 1\Rightarrow\frac{\pi}{4}\le x^2+\frac{\pi}{4}\le 1+\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin(x^2+\frac{\pi}{4})\le 1$，积分区域的面积为 1

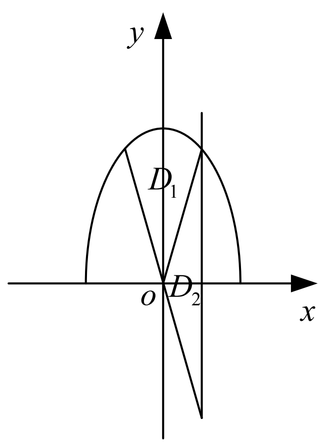
于是，$1\le\iint\limits_D(\sin x^2+\cos y^2)dxdy\le\sqrt{2}$.

**例** 计算$I=\iint\limits_D x\ln(y+\sqrt{1+y^2})dxdy$，其中$D$由$y=4-x^2, y=-3x, x=1$围成。

解：首先注意被积函数关于$x$或$y$均为奇函数，

但积分区域关于$y$或$x$不具有对称性，

而此题作直线$y=3x$可将区域划分为具有对称性。如图




$$I=\iint\limits_{D_1}x\ln(y+\sqrt{1+y^2})dxdy+\iint\limits_{D_2}x\ln(y+\sqrt{1+y^2})dxdy=0$$

研讨内容

在上册分部积分部分，我们做过这样的题：设 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin y}{y}dy$，求 $\int_0^1 xf(x)dx.$

在本部分，计算过二次积分 $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}dy$，二者之间是否有联系，若有，能否推广？

结论：二者可以相互转化。

**推广：** $\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy=\left[x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]_a^b$

$$-\int_a^b x[f(x,\varphi_2(x))\varphi_2'(x)-f(x,\varphi_1(x))\varphi_1'(x)+\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f_x'(x,y)dy]dx$$

## 二、利用极坐标计算二重积分

前面讲了利用直角坐标计算二重积分，但对某些积分，利用直角坐标难以解决，如 $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy, D:x^2+y^2\le R^2$；$\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy, D:\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2$。

特别是区域 $D$ 的边界或被积函数用极坐标表示起来更方便时，往往用极坐标来计算更简捷。

我们首先研究二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 在极坐标系的形式

我们用从极点出发的射线（$\theta$=常数）及以原点为心的同心圆（$\rho$=常数）作曲线网（坐标网）来划化区域 $D$，如图

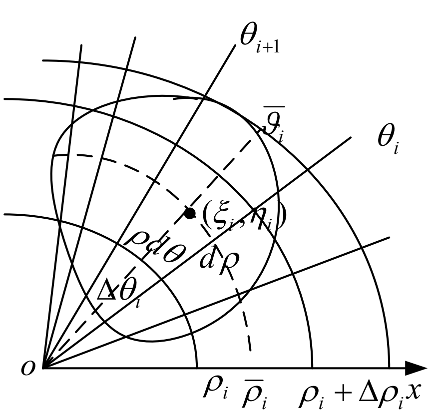
小区域的面积（除靠边界的区域外）

$$\Delta\sigma_i=\frac{1}{2}(\rho_i+\Delta\rho_i)^2\Delta\theta_i-\frac{1}{2}\rho_i^2\Delta\theta_i$$

$$=\frac{\rho_i+(\rho_i+\Delta\rho_i)}{2}\Delta\rho_i\Delta\theta_i=\bar{\rho}_i\Delta\rho_i\Delta\theta_i$$

（$=\rho_i\Delta\rho_i\Delta\theta_i+\frac{1}{2}(\Delta\rho_i)^2\Delta\theta_i$，

去掉高阶无穷小部分）




其中 $\bar{\rho}_i$ 表示相邻两圆弧的半径的平均值。

在圆周 $\rho=\bar{\rho}_i$ 上取点 $(\bar{\rho}_i,\bar{\theta}_i)$（特殊取点），设对应的直角坐标为 $(\xi_i,\eta_i)$，则由直角坐标与极坐标的关系知 $\xi_i=\bar{\rho}_i\cos\bar{\theta}_i,\eta_i=\bar{\rho}_i\sin\bar{\theta}_i$，于是

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{\rho}_i\cos\bar{\theta}_i, \bar{\rho}_i\sin\bar{\theta}_i)\bar{\rho}_i\Delta\rho_i\Delta\theta_i$$

$$= \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

这样就把二重积分化为了极坐标系下的二重积分，极坐标系的面积元为$d\sigma = \rho d\rho d\theta$

下面进一步把极坐标系下的二重积分化为二次积分

设积分区域为$D:\varphi_1(\theta)\le\rho\le\varphi_2(\theta),\alpha\le\theta\le\beta$

$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$$

若积分区域$D:a\le\rho\le b,\varphi_1(\rho)\le\theta\le\varphi_2(\rho)$

$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta = \int_a^b d\rho\int_{\varphi_1(\rho)}^{\varphi_2(\rho)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\theta$$

其它各种区域类似。

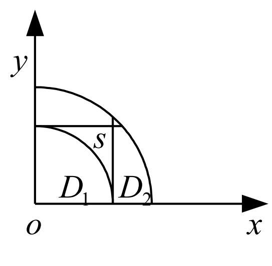
何时选用极坐标进行计算呢？一般说来，当积分域 D 的边界曲线或被积函数用极坐标表示比较简单，可考虑用积坐标计算。通常被积函数含$x^2+y^2$项或为$f(\frac{y}{x})$，积分区域与圆有关（圆域或圆域的一部分）。

**例**　计算$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy, D:x^2+y^2\le R^2$

解：（1）在极坐标下画出 D 的图形，（2）化直角坐标的二重为极坐标下的二重积分，（3）化极坐标下的二重积分为二次积分，（4）计算二次积分。

原式$=\iint_D e^{-r^2}rdrd\theta = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R e^{-r^2}rdr = \pi(1-e^{-R^2}).$

利用上面结果可以计算**概率积分**$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$




设$D_1:x^2+y^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0$

$D_2:x^2+y^2\le 2R^2, x\ge 0, y\ge 0$

$S:0\le x\le R, 0\le y\le R$

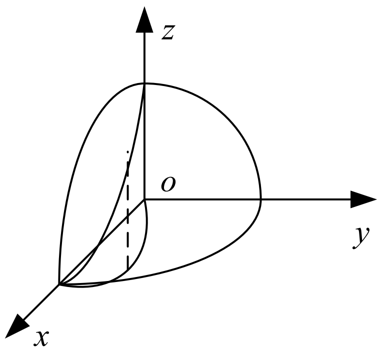
因$e^{-(x^2+y^2)}>0$，所以$\iint_{D_1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le \iint_S e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le \iint_{D_2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

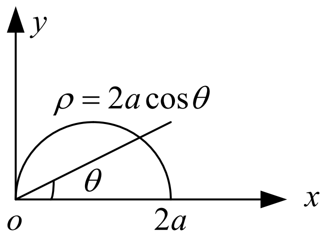
即 $\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) \le \int_0^R dx\int_0^R e^{-(x^2+y^2)}dy \le \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})$（利用前面的结果及二重积分的对称性）

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) \le (\int_0^R e^{-x^2}dx)^2 \le \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2}),$$

让 $R \to \infty$，则 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

**例**　求球体 $x^2+y^2+z^2 \le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的（含在圆柱面内的部分）立体的体积。




解：由对称性 $V = 4\iint\limits_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy$

其中 $D$ 为半圆周 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 及 $x$ 轴所围成的闭区域，在极坐标系中 $D$ 可表示为

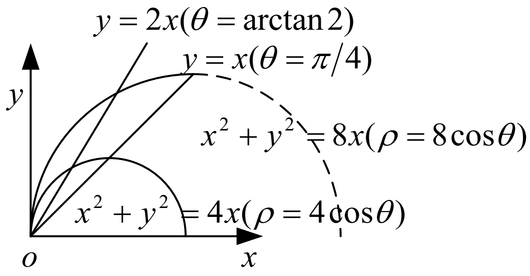
$$D: 0 \le \rho \le 2a\cos\theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$V = 4\iint\limits_D \sqrt{4a^2-\rho^2}\,\rho d\rho d\theta = 4\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \sqrt{4a^2-\rho^2}\,\rho d\rho = \frac{32}{3}a^3(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}).$$

**例**　将 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 表为极坐标系下的累次积分。

其中 $D: 0 < 4x \le x^2+y^2 \le 8x, x < y \le 2x$

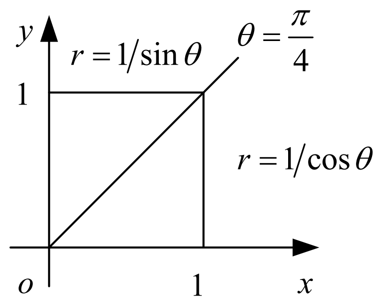
解：将区域的边界化为极坐标系下边界，如图




$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_{\pi/4}^{\arctan 2} d\theta \int_{4\cos\theta}^{8\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$$

**例**　将 $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$ 化为极坐标系下的二次积分。

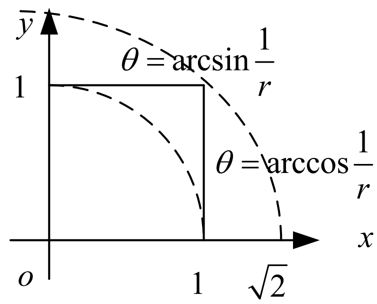
记 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$




$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=\iint_D f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$$

$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$$




$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=\iint_D f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dr\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rd\theta$$

$$+\int_1^{\sqrt{2}} dr\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{1}{r}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rd\theta$$

**例**　计算 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma$。

解：设 $D_1: x^2+y^2\le 1, D_2: 1\le x^2+y^2\le 4$

则 $I=\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)dxdy+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1(1-r^2)rdr+\int_0^{2\pi} d\theta\int_1^2(r^2-1)rdr=5\pi.$$

**例**　计算 $I=\iint_D(x^2-2x+3y+2)dxdy$，其中 $D: x^2+y^2\le a^2$

解：利用二重积分的对称性，可得

$$I=\iint_D(x^2-2x+3y+2)dxdy=\iint_D x^2dxdy+2\iint_D dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)dxdy+2\cdot\pi a^2=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^a \rho^2\cdot\rho d\rho+2\pi a^2=\frac{1}{4}\pi a^4+2\pi a^2.$$

**例**　计算 $I=\iint_D(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dxdy$，其中 $D: x^2+y^2\le R^2$.

解：区域 $D$ 关于 $y=x$ 对称，故

$$I=\iint_D(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dxdy=\iint_D(\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2})dxdy$$

于是，$I=\frac{1}{2}\iint_D(\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{x^2+y^2}{b^2})dxdy=\frac{1}{2}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})\iint_D(x^2+y^2)dxdy$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})\cdot\frac{\pi R^4}{2}$$

**例** 计算$I=\iint_D (x+y)^2 dxdy$，其中$D: x^2+y^2\le 2ax, x^2+y^2\ge ax.$

解：利用对称性

$$I=\iint_D (x+y)^2 dxdy=\iint_D (x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{a\cos\theta}^{2a\cos\theta} r^2\cdot rdr=\frac{45}{32}\pi a^4.$$

**例** 设函数$f(x,y)$连续，且$f(x,y)=x^2+y^2+\iint_D f(u,v)\sin ydudv$，其中$D$由$x^2-2x+y^2=0$围成,求$f(x,y)$.

解:设$\iint_D f(u,v)dudv=A$,则$f(x,y)=x^2+y^2+A\sin y$

上式两边在区域$D$上积分, 得

$$A=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D (x^2+y^2)dxdy+A\iint_D \sin ydudv$$

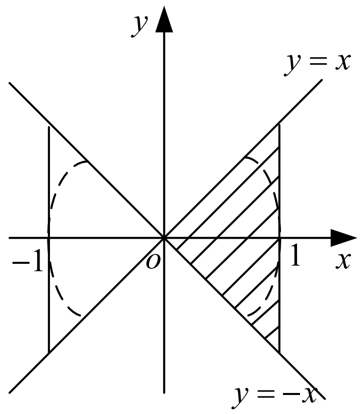
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\cos\theta} r^2\cdot rdr+0$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\theta d\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=8\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$$

于是$f(x,y)=x^2+y^2+\frac{3\pi}{2}\sin y.$

**例** 将二重积分化为一重积分：$\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$，其中$D=\{|y|\le|x|,|x|\le 1\}$.

**解**：若化为先$r$后$\theta$的积分：




$$\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy=2\iint_{D_1} f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{1/\cos\theta} f(r)rdr$$

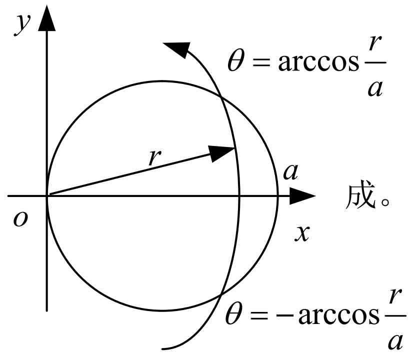
则该二次积分不能化为一重积分。

$$\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy=2\iint_{D_1} f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

$$=2\int_0^1 dr\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} rf(r)d\theta+4\int_1^{\sqrt{2}} dr\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{4}} rf(r)d\theta$$

$$=\pi\int_0^1 rf(r)dr+4\int_1^{\sqrt{2}}(\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r})rf(r)dr.$$

**例** 交换二重积分的积分次序：$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}f(\theta,r)dr$




**解**：积分区域由圆 $r=a\cos\theta$ 或 $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$ 围成。

对于 $[0,a]$ 内的任意固定 $r$，$\theta\in\left[-\arccos\frac{r}{a},\arccos\frac{r}{a}\right]$

于是 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}f(\theta,r)dr=\int_0^a dr\int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}}f(\theta,r)d\theta$

**练习题**

**例** 设$D$是圆域$x^2+y^2\le 1$，证明不等式$\dfrac{3\pi}{5}\le\iint_D e^{-\sqrt{(x^2+y^2)^3}}dxdy\le\dfrac{29\pi}{40}$.

解：利用极坐标，有

$$\iint_D e^{-\sqrt{(x^2+y^2)^3}}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho e^{-\rho^3}d\rho=2\pi\int_0^1\rho e^{-\rho^3}d\rho$$

由于$e^{-x}=1-x+\dfrac{1}{2!}x^2-\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{1}{4!}x^4+\cdots$,故当$x>0$时，有

$$1-x\le e^{-x}\le 1-x+\frac{1}{2!}x^2$$

$$\int_0^1\rho e^{-\rho^3}d\rho\ge\int_0^1\rho(1-\rho^3)d\rho=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$$

$$\int_0^1\rho e^{-\rho^3}d\rho\le\int_0^1\rho(1-\rho^3+\frac{1}{2}\rho^6)d\rho=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{16}=\frac{29}{80}$$

于是$\dfrac{3\pi}{5}\le\iint_D e^{-\sqrt{(x^2+y^2)^3}}dxdy\le\dfrac{29}{40}\pi$.

**例** 证明：$\int_a^b e^{x^2}dx\cdot\int_a^b e^{-x^2}dx\ge(b-a)^2$

证明：$\int_a^b e^{x^2}dx\cdot\int_a^b e^{-x^2}dx=\int_a^b e^{x^2}dx\cdot\int_a^b e^{-y^2}dy=\iint_D\dfrac{e^{x^2}}{e^{y^2}}dxdy$，其中$D:\begin{cases}a\le x\le b\\a\le y\le b\end{cases}$

同理$\int_a^b e^{x^2}dx\cdot\int_a^b e^{-x^2}dx=\int_a^b e^{y^2}dx\cdot\int_a^b e^{-x^2}dx=\iint_D\dfrac{e^{y^2}}{e^{x^2}}dxdy$，两式相加，得

$$\int_a^b e^{x^2}dx\cdot\int_a^b e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\left(\iint_D\frac{e^{x^2}}{e^{y^2}}dxdy+\iint_D\frac{e^{y^2}}{e^{x^2}}dxdy\right)=\frac{1}{2}\iint_D\left(\frac{e^{x^2}}{e^{y^2}}+\frac{e^{y^2}}{e^{x^2}}\right)dxdy$$

$$\ge\frac{1}{2}\iint_D 2\cdot\sqrt{\frac{e^{x^2}}{e^{y^2}}\cdot\frac{e^{y^2}}{e^{x^2}}}dxdy=(b-a)^2$$

另证：$\int_a^b e^{x^2}dx\cdot\int_a^b e^{-x^2}dx=\int_a^b e^{x^2}dx\cdot\int_a^b e^{-y^2}dy=\iint_D e^{x^2-y^2}dxdy$

$\ge\iint_D(1+x^2-y^2)dxdy=(b-a)^2$，利用$e^x\ge 1+x$

**例** 设$f(u)$在$[0,1]$上连续，证明：$\int_0^1 dx\int_0^x f(x)f(y)dy=\dfrac{1}{2}\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2$

**证法 1**：设 $F(u)=\int_0^u f(t)dt$,则有$F'(u)=f(u),F(0)=0$，于是

$$\int_0^1 dx\int_0^x f(x)f(y)dy=\int_0^1 f(x)F(x)dx=\int_0^1 F(x)dF(x)=\frac{1}{2}F^2(x)\Big|_0^1=\frac{1}{2}F^2(1)=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2$$

**证法 2**：作 $\varphi(u)=\int_0^u dx\int_0^x f(x)f(y)dy-\frac{1}{2}\left[\int_0^u f(x)dx\right]^2$

则 $\varphi'(u)=f(u)\int_0^u f(y)dy-f(u)\int_0^u f(x)dx\equiv 0$

从而 $\varphi(u)=C=\varphi(0)=0,$于是有$\varphi(1)=0$，得证。

**证法 3**：积分区域 $D_1:\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le y\le x\end{cases}$，取 $D_2:\begin{cases}0\le x\le 1\\x\le y\le 1\end{cases},D:\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le y\le 1\end{cases}$

利用轮换对称性

$$\int_0^1 dx\int_0^x f(x)f(y)dy=\iint_{D_1} f(x)f(y)dxdy=\iint_{D_2} f(x)f(y)dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D f(x)f(y)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^1 f(x)f(y)dy=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$$

**例** 记平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 1\}$，计算如下二重积分：

(1) $I_1=\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}d\sigma$ ,其中 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续正值函数,常数 $a>0,b>0$;　　答案:$I_1=a+b$

(2) $I_2=\iint_D(e^{\lambda x}-e^{-\lambda y})d\sigma$,常数 $\lambda>0$.

解(2): 因为 $D$ 关于 $y=x$ 对称,所以

$$I_2=\iint_D(e^{\lambda x}-e^{-\lambda y})d\sigma=\iint_D(e^{\lambda y}-e^{-\lambda x})d\sigma$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D(e^{\lambda x}-e^{-\lambda y}+e^{\lambda y}-e^{-\lambda x})d\sigma$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D(e^{\lambda x}-e^{-\lambda x})d\sigma+\frac{1}{2}\iint_D(e^{\lambda y}-e^{-\lambda y})d\sigma=0$$

最后一步是因为 $D$ 关于 $y$ 轴,$x$ 轴对称,且被积函数分别关于 $x,y$ 是奇函数.

**例** 设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2x\}$，计算 $I=\iint_D(x^2+xy)^2dxdy.$

解：注意积分区域$D$关于$x$轴对称，所以

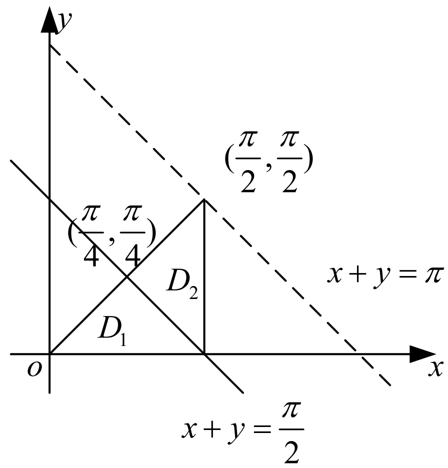
$$I=\iint_D (x^2+xy)^2dxdy=\iint_D (x^4+2x^3y+x^2y^2)dxdy=\iint_D x^2(x^2+y^2)dxdy$$

$$=2\iint\limits_{D(y\ge 0)} x^2(x^2+y^2)dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta} r^5\cos^2\theta dr=\frac{64}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8\theta d\theta$$

$$=\frac{64}{3}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{35}{12}\pi$$

**例** 设$D$为由$y=x,x=\dfrac{\pi}{2},y=0$所围成的平面图形，求$\iint\limits_D|\cos(x+y)|dxdy$。

解：用$x+y=\dfrac{\pi}{2}$将$D$划分为$D_1,D_2$，如图。




$$\iint\limits_D|\cos(x+y)|dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_1}\cos(x+y)dxdy-\iint\limits_{D_2}\cos(x+y)dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dy\int_y^{\frac{\pi}{2}-y}\cos(x+y)dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{x}\cos(x+y)dy$$

$$=\frac{\pi}{2}-1$$

**例**（2019）已知平面区域$D=\left\{(x,y)\big||x|\le y,(x^2+y^2)^3\le y^4\right\}$，计算二重积分$\iint\limits_D\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy.$

**【解析】**$(x^2+y^2)^3=y^4$对应极坐标方程为$r=\sin^2\theta$，由对称性

$$\iint\limits_D\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint\limits_D\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sin^2\theta}\frac{r\sin\theta}{r}\cdot rdr$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta d\theta=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)^2d\cos\theta=\frac{43}{420}\sqrt{2}$$

## 三、二重积分的换元法（曲线坐标系二重积分的计算法）

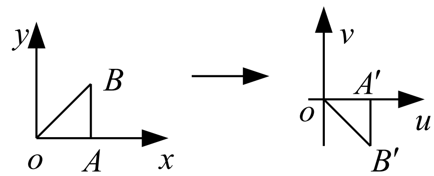
首先注意，$x=x(u,v),y=y(u,v)$ 不能在一坐标面下用几何图形表示出来，我们可用两个坐标面来表示，一个是 $xoy$ 坐标面，另一个是 $uov$ 坐标面。此时把 $x=x(u,v),y=y(u,v)$ 看成是将 $xoy$ 坐标面的点映射成 $uov$ 坐标面的点的**变换**，此时变换把 $xoy$ 的点（图形）映射成 $uov$ 坐标面的点（图形）。

如 $u=x,v=-y$

$o(x_1,y_1)=(0,0)\rightarrow o(u_1,v_1)=(0,0)$

$A(x_2,y_2)=(1,0)\rightarrow A'(u_2,v_2)=(1,0)$

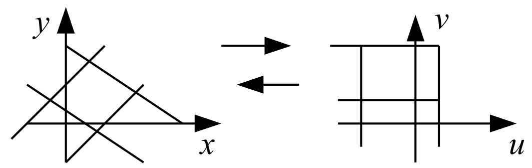
$B(x_3,y_3)=(1,1)\rightarrow B'(u_3,v_3)=(1,-1)$




三角形区域 $\Delta oAB\rightarrow\Delta oA'B'$

又如 $u=y-x,v=y+\dfrac{x}{3}$ 把区域（如图）

$$D_{xy}:\begin{cases}y-x=1\\ y-x=-3\\ y+\dfrac{x}{3}=\dfrac{7}{9}\\ y+\dfrac{x}{3}=5\end{cases}\rightarrow D_{uv}:\begin{cases}u=1\\ u=-3\\ v=\dfrac{7}{9}\\ v=5\end{cases}$$




若在同一平面内既有 $xoy$ 坐标面，又有 $uov$ 坐标面，则同一点 $M$，既可写为 $(x,y)$ 坐标，又可写为 $(u,v)$ 坐标，称为点 $M$ 的**曲线坐标。**相应的变换也称为**曲线坐标变换**。

在两种坐标系下，二重积分之间有下面的关系（可推广到三重积分）：

**定理** 设 $f(x,y)$ 在 $xoy$ 平面上的闭区域 $D$ 上连续，变换

T：$x=x(u,v),y=y(u,v)$

将 $uov$ 平面上的闭区域 $D'$ 变为 $xoy$ 平面上的 $D$，且满足

（1）$x(u,v),y(u,v)$ 在 $D$ 上具有一阶连续偏导数；

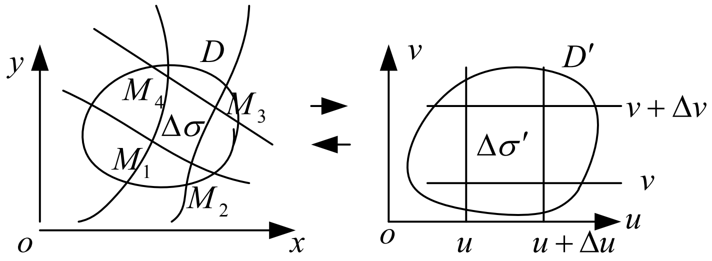
（2）在 $D'$ 上雅可比行列式 $J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}\neq 0$

（3）变换 $T: D' \to D$ 是一一对应的，

则有 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(u,v), y(u,v))\left|J(u,v)\right|dudv$。

注：在具体计算中经常用到：$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1\Big/\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$。

我们只需证明曲线坐标系下的面积元为 $\left|J(u,v)\right|dudv$




用平行于坐标轴的曲线网划分区域 $D'$，取一典型区域 $\Delta\sigma'$，$\Delta\sigma'$ 对应于 $xoy$ 坐标面的区域为 $\Delta\sigma$。下面计算 $\Delta\sigma$ 的面积，其面积近似看成是曲边四边形 $M_1M_2M_3M_4$ 的面积，即 $\left|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_4}\right|$

设两种坐标系下，四点 $M_1, M_2, M_3, M_4$ 的对应关系为：

$M_1(x_1, y_1) = M_1(x(u,v), y(u,v))$（先假设 $uov$ 面上的点，通过变换得 $xoy$ 面上的点）

$M_2(x_2, y_2) = M_2(x(u+\Delta u, v), y(u+\Delta u, v))$

$M_3(x_3, y_3) = M_3(x(u+\Delta u, v+\Delta v), y(u+\Delta u, v+\Delta v))$

$M_4(x_4, y_4) = M_4(x(u, v+\Delta v), y(u, v+\Delta v))$

$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} = \left[x(u+\Delta u, v) - x(u,v)\right]\vec{i} + \left[y(u+\Delta u, v) - y(u,v)\right]\vec{j}$

$\approx x_u(u,v)\Delta u\vec{i} + y_u(u,v)\Delta u\vec{j}$ (用一元函数的微分近似代替)

同理可得 $\overrightarrow{M_1M_4} \approx x_v\Delta v\vec{i} + y_v\Delta v\vec{j}$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_4}\right| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u\Delta u & y_u\Delta u & 0 \\ x_v\Delta v & y_v\Delta v & 0 \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Delta u\Delta v$$

**例**　求$I=\iint\limits_D (y-x)d\sigma$，

其中$D$是由直线$y=x+1, y=x-3, y=-\dfrac{x}{3}+\dfrac{7}{9}, y=-\dfrac{x}{3}+5$围成的平面区域。

解：若用以前的直角坐标来做该题比较繁，下面我们用曲线坐标来做，即用二重积分的换元法来做该题。

引入曲线坐标$y-x=u, y+\dfrac{x}{3}=v$

或$x=-\dfrac{3}{4}u+\dfrac{3}{4}v, y=\dfrac{1}{4}u+\dfrac{3}{4}v$，

此时$D$的边界曲线变为：$u=1, u=-3, v=7/9, v=5$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left\|\begin{matrix}-3/4 & 3/4\\ 1/4 & 3/4\end{matrix}\right\|=\frac{3}{4}$$

或$\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|=\left\|\begin{matrix}-1 & 1\\ 1/3 & 1\end{matrix}\right\|=\dfrac{4}{3}$,所以$\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\dfrac{3}{4}$

$$I=\iint\limits_D (y-x)d\sigma=\iint\limits_{D'} ududv=\frac{3}{4}\int_{-3}^{1}du\int_{7/9}^{5}udv=-\frac{38}{3}$$

**例**　计算$\iint\limits_D \sqrt{xy}dxdy$，其中$D$为由曲线$xy=1, xy=2, y=x, y=4x(x>0, y>0)$所围成的区域。

解：引入曲线坐标$u=xy, v=\dfrac{y}{x}$,

区域$D$的边界曲线变为$D': u=1, u=2, v=1, v=4$

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|=\left\|\begin{matrix}y & x\\ -y/x^2 & 1/x\end{matrix}\right\|=\left|\frac{2y}{x}\right|=2v$$

$$\iint\limits_D \sqrt{xy}dxdy=\iint\limits_{D'}\sqrt{u}\cdot\frac{1}{2v}dudv=\frac{1}{2}\int_1^2 du\int_1^4\frac{\sqrt{u}}{v}dv=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\ln 2$$

**例**　计算$I=\iint\limits_D x^2 d\sigma$，其中$D$为椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$的内部。

解：作变量代换$\dfrac{x^2}{4}=\rho^2\cos^2\theta, \dfrac{y^2}{9}=\rho^2\sin^2\theta$

即$x=2\rho\cos\theta, y=3\rho\sin\theta$，　$xoy$平面的区域$D$变为$uov$面的区域$D': \rho=1, 0\le\theta\le 2\pi$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right|=6\rho$$

$$I=\iint_D x^2 d\sigma=\iint_{D'} 4\rho^2\cos^2\theta\cdot\rho d\rho d\theta=6\pi$$

**例** 计算$\iint_D \exp\frac{y-x}{y+x}dxdy$，其中$D$由$x$轴、$y$轴和直线$x+y=2$所围成的闭区域。

解：作代换$u=y-x, v=y+x$，即$x=\frac{v-u}{2}, y=\frac{v+u}{2}$

此时区域$D$变为$D': v+u=0, v-u=0, v=2$，$|J|=\frac{1}{2}$

所以$\iint_D \exp\frac{y-x}{y+x}dxdy=\frac{1}{2}\iint_{D'}\exp\frac{u}{v}dudv=\frac{1}{2}\int_0^2 dv\int_{-v}^{v}\exp\frac{u}{v}du=e-\frac{1}{e}.$

**三重积分也有和二重积分类似的换元法**，下面我们直接给出结论。

设$T$是$R^3\to R^3$的变换：

$$x=x(u,v,w), y=y(u,v,w), z=z(u,v,w)$$

则 $T$的雅可比行列式是一个三阶行列式：

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$

于是　三重积分的变量变换公式为：

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Omega f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw$$

**教学要求和注意点**

1、掌握二重积分（直角坐标、极坐标）的计算方法

2、将重积分化为累次积分计算时，积分限的确定要保持每个单积分的下限小于上限，因此在交换二次积分次序时应注意符号问题。

3、在二重积分的计算时应尽量利用区域和被积函数的对称性以简化计算。

# 第四节　三重积分

**讲稿内容**

**一、三重积分的概念**

将二重积分的概念推广则得三重积分的概念。

**定义**：设 $f(x,y,z)$ 是空间有界闭区域 $\Omega$ 上的有界函数，将 $\Omega$ 任意分成 $n$ 个小闭区域 $\Delta v_1,\Delta v_2,\cdots\Delta v_n$，其中 $\Delta v_i$ 表示第 $i$ 小闭区域，也表示它的体积。在每个 $\Delta v_i$ 上任取一点 $(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)$，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta v_i$，并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta v_i$。如果当各小闭区域直径中的最大值 $\lambda$ 趋于零时这和的极限总存在，则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 $\Omega$ 上的三重积分。记作 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$，即 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta v_i$

其中 $dv$ 叫做体积元素。

**三重积分的性质与二重积分的性质完全类似。**

**例**　求极限 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le r^2} f(x,y,z)dxdydz$，其中 $f(x, y, z)$为连续函数.

**解**　由积分中值定理

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le r^2} f(x,\ y,z)dxdydz=f(\xi,\eta,\zeta)\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le r^2} dxdydz=f(\xi,\eta,\zeta)\frac{4}{3}\pi r^3$$

其中$(\xi, \eta, \zeta)$为球域 $x^2+y^2+z^2\le r^2$ 内一点，故

$$\lim_{r\to 0}\frac{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le r^2} f(x,y,z)dxdydz}{\pi r^3}=\lim_{r\to 0}\frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{\pi r^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}f(0,\ 0,\ 0)$$

**例**　证明：$\dfrac{12\pi}{5}<\iiint_{\Omega}\sqrt[3]{2x+4y-4z+21}dv<4\pi$，其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$.

**证明**：据积分的性质，先求 $\sqrt[3]{2x+4y-4z+21}$ 在 $\Omega$ 上的最值，等价于求 $f(x,y,z)=2x+4y-4z+21$ 在 $\Omega$ 上的最值。

由于 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2\ne 0,\dfrac{\partial f}{\partial y}=4\ne 0,\dfrac{\partial f}{\partial z}=-4\ne 0$，故 $f$ 在 $\Omega$ 内无驻点，于是 $f$ 在 $\Omega$ 上的最值一定在 $\Omega$ 的边界上取得，问题转化为：求 $f$ 在边界条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的最值。

构造函数 $L(x,y,z,\lambda)=2x+4y-4z+21+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$

令 $L_x' = 2 + 2\lambda x = 0, L_y' = 4 + 2\lambda y = 0, L_z' = -4 + 2\lambda z = 0, L_\lambda' = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

解得可能极值点 $P_1(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}), P_2(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

最大值、最小值分别为 $f(P_1) = 27, f(P_2) = 15 \Rightarrow \sqrt[3]{f(P_1)} = 3, \sqrt[3]{f(P_2)} = \sqrt[3]{15}$，于是

$$\frac{16\pi}{5} < \sqrt[3]{15} \cdot \frac{4\pi}{3} < \iiint_\Omega \sqrt[3]{2x + 4y - 4z + 21} dv < 3 \cdot \frac{4\pi}{3} = 4\pi$$

**三重积分的对称性**

（1）如果三重积分的积分区域$\Omega$关于 $xOy$ 面对称，则

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv = \begin{cases} 0, & f(x,y,-z) = -f(x,y,z) \\ 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dv, & f(x,y,-z) = -f(x,y,z) \end{cases}$$

其中 $\Omega_1 = \left\{(x,y,z) \in \Omega, z \ge 0\right\}$。其余同理可得。

（2）积分区域关于变量 $x, y, z$ 具有轮换性，则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv = \iiint_\Omega f(y,z,x)dv = \iiint_\Omega f(z,x,y)dv.$$

**例** 若 $\Omega = \left\{(x,y,z) \middle| x^2 + y^2 + z^2 \le 1\right\}$，

则 $\iiint\limits_\Omega \frac{z\ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dv = 0$

因为被积函数关于 $z$ 为奇函数，积分区域关于 $xoy$ 面对称。

## 二、　三重积分的计算

### 1.　利用直角坐标计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv$

其中 $\Omega$ 为空间区域，它的边界曲面 $S$ 与任何平行于坐标轴的直线至多相交于两点，被积函数 $f(x,y,z)$ 在 $\Omega$ 上连续。

我们对空间有界闭区域 $\Omega$ 作特殊划分：用平行于 $yOz$ 坐标平面的平面 $x$和$x + dx$，用平行于 $zOx$ 坐标平面的平面 $y$和$y + dy$，以及用平行于 $xOy$ 坐标平面的平面 $z$和$z + dz$ 去截区域 $\Omega$，除 $\Omega$ 边界的部分以外均为长方体。

所以体积微元为：　$dv = dxdydz$

由此，在直角坐标系中，三重积分的形式为$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$，

**①先单积分后二重积分**：设$\Omega$在$xoy$坐标面的投影为$D_{xy}$，以$D_{xy}$的边界为准线作母线平行于$z$的柱面，这柱面与曲面$S$的交线把$S$分为下、上两部分，设其方程为$z = z_1(x,y), z = z_2(x,y), z_1(x,y) < z_2(x,y)$，即有

设$\Omega = \{(x,y,z) | z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y), (x,y) \in D_{xy}\}$，其中$z_1(x,y), z_2(x,y)$连续，$D_{xy}$为$\Omega$在$xoy$坐标面的投影。（这类区域也称为$xy-$型空间区域）

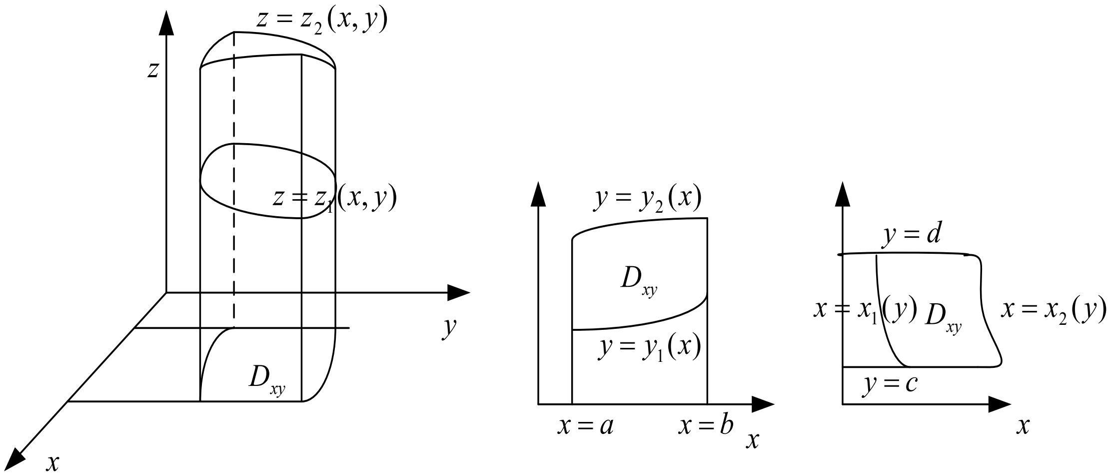
则$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint\limits_{D_{xy}} \left[ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] d\sigma$

若$D_{xy} = \{(x,y) | a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint\limits_{D_{xy}} \left[ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] d\sigma = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

若$D_{xy} = \{(x,y) | c \le y \le d, x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint\limits_{D_{xy}} \left[ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] d\sigma = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$




将空间区域投影到其它坐标面，类似于此。

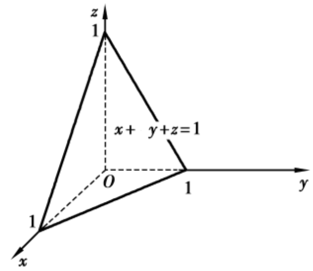
**②先二重积分后单积分**

设空间区域$\Omega = \{(x,y,z) | (x,y) \in D_z, c_1 \le z \le c_2\}$，其中$D_z$为垂直于$z$轴的平面截闭区

域$\Omega$所得的平面闭区域（这种区域也称为 z-型区域）。则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_{c_1}^{c_2}dz\iint_{D_z}f(x,y,z)dxdy$$

然后再将区域$D_z$上的二重积分化为二次积分。




**例** 求$\iiint_{\Omega}(x+y+z)dxdydz$，其中$\Omega$是平面$x+y+z-1=0$与三个坐标面所围成的空间立体区域.

**解法 1** 如图 9.26 所示.积分区域可表示为

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|0\le z\le 1-x-y,0\le y\le 1-x,0\le x\le 1\right\}$$

$$\iiint_{\Omega}(x+y+z)dxdydz=\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(x+y+z)dz=\frac{1}{8}$$

**解法 2** 由于积分区域和被积函数关于$x,y,z$具有坐标轮换性，故有

$$\iiint_{\Omega}xdxdydz=\iiint_{\Omega}ydxdydz=\iiint_{\Omega}zdxdydz,$$

则 $$\iiint_{\Omega}\left(x+y+z\right)dxdydz=3\iiint_{\Omega}xdxdydz=3\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}xdz$$

$$=3\int_0^1dx\int_0^{1-x}x(1-x-y)dy=3\int_0^1\left[x(1-x)^2-\frac{x}{2}(1-x)^2\right]dx$$

$$=3\int_0^1\frac{x}{2}(1-x)^2dx=\frac{3}{2}\int_0^1(x-2x^2+x^3)dx=3\times\frac{1}{24}=\frac{1}{8}$$

**解法 3** 先二后一积分法

$$\iiint_{\Omega}(x+y+z)dxdydz=3\iiint_{\Omega}xdxdydz=3\int_0^1\left[\iint_{D_x}xdydz\right]dx$$

$$=3\int_0^1x\cdot\frac{(1-x)^2}{2}dx=3\cdot\frac{1}{24}=\frac{1}{8}$$

**例** 计算三重积分$\iiint_{\Omega}z^2dxdydz$，其中$\Omega$是由椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$所围成的空间闭区域。

解：过$z(-c\le z\le c)$作垂直于$z$轴的平面，截椭球面为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}$

椭圆的面积为$\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})$

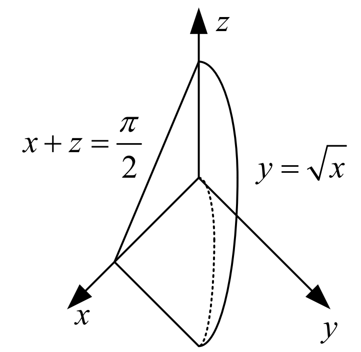
所以$$\iiint_{\Omega}z^2dxdydz=\int_{-c}^{c}dz\iint_{D_z}z^2dxdy=\int_{-c}^{c}z^2dz\iint_{D_z}dxdy=\int_{-c}^{c}z^2\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})dz=\frac{4}{15}\pi abc^3$$

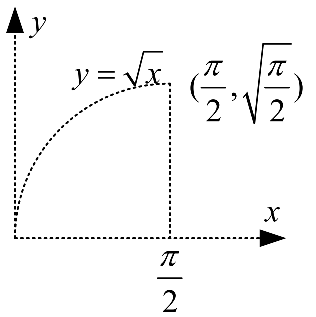
若计算 $\iiint\limits_{\Omega} y^2 dxdydz = \int_{-b}^{b} dy \iint\limits_{D_y} y^2 dzdx = \int_{-b}^{b} y^2 dy \iint\limits_{D_y} dxdz = \int_{-b}^{b} y^2 \pi ac(1-\frac{y^2}{b^2})dy = \frac{4}{15}\pi acb^3$

$\boxed{\text{总结}}$：当空间立体的截面（圆、椭圆、三角形等）面积容易求得、被积分函数只含一个变量时，注意用“先重积分后单积分”的积分方法，且用垂直于被积分函数所含变量对应的轴的平面去截立体。

**例** 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} y\cos(x+z)dv$，其中 $\Omega$ 由抛物面 $y=\sqrt{x}$ 及平面 $y=0, z=0, x+z=\frac{\pi}{2}$ 所围成的区域。

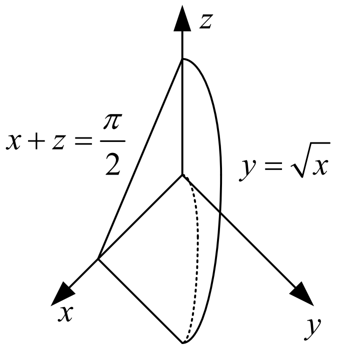
（1）先单积分后重积分

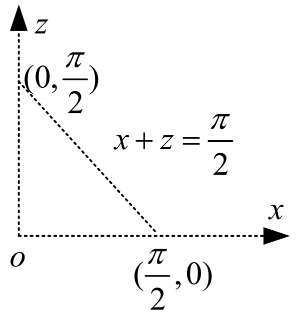



① $I=\iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_{0}^{\pi/2-x} y\cos(x+z)dz = \int_{0}^{\pi/2} dx \int_{0}^{\sqrt{x}} dy \int_{0}^{\pi/2-x} y\cos(x+z)dz = \frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.$

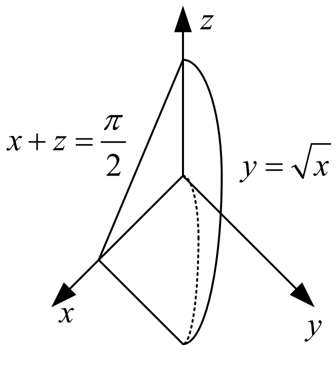
或 $= \int_{0}^{\sqrt{\pi/2}} dy \int_{y^2}^{\pi/2} dx \int_{0}^{\pi/2-x} y\cos(x+z)dz$

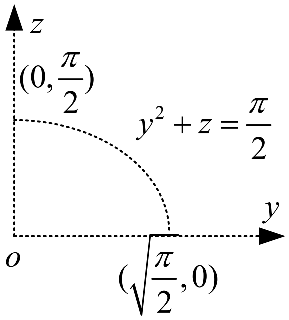



② $I=\iint\limits_{D_{xz}} dxdz \int_{0}^{\sqrt{x}} y\cos(x+z)dy = \int_{0}^{\pi/2} dx \int_{0}^{\pi/2-x} dz \int_{0}^{\sqrt{x}} y\cos(x+z)dy = \frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$

或 $= \int_{0}^{\pi/2} dz \int_{0}^{\pi/2-z} dx \int_{0}^{\sqrt{x}} y\cos(x+z)dy$

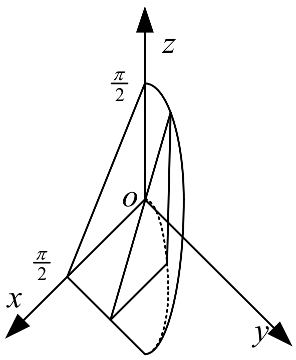


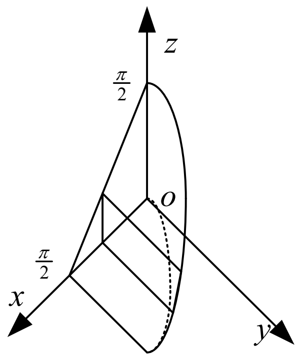



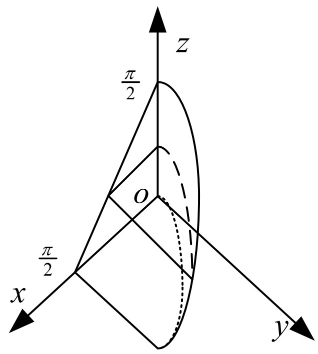

③ $I=\iint\limits_{D_{yz}}dydz\int_{y^2}^{\pi/2-z}y\cos(x+z)dx=\int_0^{\sqrt{\pi/2}}dy\int_0^{\pi/2-y^2}dz\int_{y^2}^{\pi/2-z}y\cos(x+z)dx=\frac{1}{16}\pi^2-\frac{1}{2}$

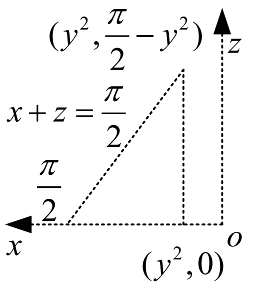
或 $=\int_0^{\pi/2}dz\int_0^{\sqrt{\pi/2-z}}dy\int_{y^2}^{\pi/2-z}y\cos(x+z)dx$

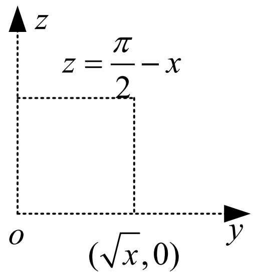
（2）先重积分后单积分

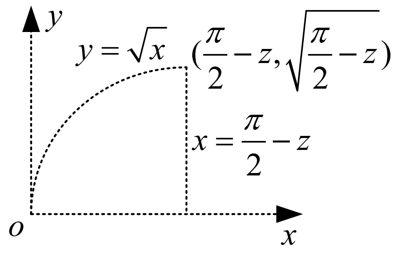



④ $I=\int_0^{\sqrt{\pi/2}}dy\iint\limits_{D_y}y\cos(x+z)dxdz=\int_0^{\sqrt{\pi/2}}dy\int_{y^2}^{\pi/2}dx\int_0^{\pi/2-x}y\cos(x+z)dz=\frac{1}{16}\pi^2-\frac{1}{2}$

或 $=\int_0^{\sqrt{\pi/2}}dy\int_0^{\pi/2-y^2}dz\int_{y^2}^{\pi/2-z}y\cos(x+z)dx$

⑤ $I=\int_0^{\pi/2}dx\iint\limits_{D_x}y\cos(x+z)dydz=\int_0^{\pi/2}dx\int_0^{\sqrt{x}}dy\int_0^{\pi/2-x}y\cos(x+z)dz=\frac{1}{16}\pi^2-\frac{1}{2}$

$$或=\int_0^{\pi/2}dx\int_0^{\pi/2-x}dz\int_0^{\sqrt{x}}y\cos(x+z)dy$$

$$⑥\ I=\int_0^{\pi/2}dz\iint_{D_z}y\cos(x+z)dxdy=\int_0^{\pi/2}dz\int_0^{\sqrt{\pi/2-z}}dy\int_{y^2}^{\pi/2-z}y\cos(x+z)dx$$

$$或=\int_0^{\pi/2}dz\int_0^{\pi/2-z}dx\int_0^{\sqrt{x}}y\cos(x+z)dy$$

因此，一个三重积分的定限有 12 种不种的处理方式，但只有 6 种不同的积分限

**例**　设函数 $f(x)$在[0, 1]内连续,证明

$$\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_x^y f(x)f(y)f(z)dz=\frac{1}{3!}\left[\int_0^1 f(t)dt\right]^3$$

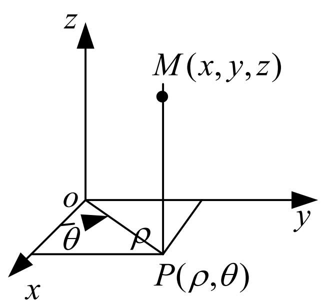
**解**　令 $F(u)=\int_0^u f(t)dt$，则 $F'(u)=f(u)$

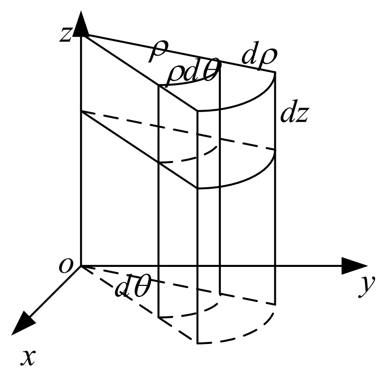
$$\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_x^y f(x)f(y)f(z)dz=\int_0^1\left[f(x)\ \left(\int_x^1 f(y)\big(F(y)-F(x)\big)dy\right)\right]dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}f(x)\left[F(1)-F(x)\right]^2dx=-\frac{1}{6}\left[F(1)-F(x)\right]^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}\left[F(1)\right]^3=\frac{1}{3!}\left[\int_0^1 f(t)dt\right]^3$$

**2．柱面坐标系下三重积分的计算。**

<u>**①柱面坐标**</u>：设空间一点 $M(x,y,z)$ 在 $xoy$ 平面上的投影点为 $P(x,y)$，如果 $P(x,y)$ 点的极坐标为 $(\rho,\theta)$，则 $(\rho,\theta,z)$ 叫做点 $M(x,y,z)$ 的柱面坐标。如图




<u>**②直角坐标** $M(x,y,z)$ **与柱面坐标** $M(\rho,\theta,z)$ **的关系为：**</u>

$$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta, z=z$$

其中 $\rho$ 为点 $M$ 到 $z$ 轴的距离，$0\le\rho\le+\infty$

$\theta$ 是两个平面 $xoz$ 与 $zom$ 的夹角，$0\le\theta\le2\pi$

$z$ 是点 $M(x,y,z)$ 的竖坐标，$-\infty < z < +\infty$

③三个坐标面分别是：

$\rho$=常数，表示以 $z$ 轴为轴的圆柱面；

$\theta$=常数，表示过 $z$ 轴的半平面；

$z$=常数，表示与 $xoy$ 面平行的平面。

④柱面坐标下的体积元

用坐标曲面网 $\rho,\rho+d\rho$，$\theta,\theta+d\theta$，$z,z+dz$ 把空间区域 $\Omega$ 划分成许多小区域，除了一些边界不规划的小区域外，这些小区域都是柱体。如图。

柱体的体积=底面积×高

底面积即极坐标系的面积元为 $\rho d\rho d\theta$，高为 $dz$

**所以柱面坐标系下的体积元为 $\rho d\rho d\theta dz$。（或利用三重积分换元法得体积分元**

$$J=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)}\right|=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho\text{）}$$

**进一步地有：**

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iiint_{\Omega} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho d\rho d\theta dz=\iint_{D_{\rho\theta}}\rho d\rho d\theta\int_{z_1(\rho,\theta)}^{z_2(\rho,\theta)}F(\rho,\theta,z)dz$$

$$=\int_{c_1}^{c_2}dz\iint_{D_z}F(\rho,\theta,z)\rho d\rho d\theta$$

**例**　计算 $\iiint_{\Omega} zdv,\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1, z\ge 0.$

解法 1：区域 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 对应的在柱坐标下的区域为 $\rho^2+z^2\le 1$

$\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1, z\ge 0$ 在 $xoy$ 坐标面的投影为 $x^2+y^2\le 1,$ 对应的极坐标为 $\rho\le 1, 0\le\theta\le 2\pi.$ 所以

$$\iiint_{\Omega} zdv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_0^{\sqrt{1-\rho^2}}zdz=\frac{\pi}{4}.$$

解法 2：$\iiint_{\Omega} zdv=\int_0^1 dz\iint_{D_z}zdxdy=\int_0^1 z\cdot\pi(1-z^2)dz=\frac{\pi}{4}$

解法 3：$\iiint_{\Omega} zdv=\int_0^1 dz\iint_{D_z}zdxdy=\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{1-z^2}}z\rho d\rho=\frac{\pi}{4}$

**例**　计算 $\iiint\limits_{\Omega} zdv, \Omega: z = x^2 + y^2$ 与 $z = 4$ 所围成。

解法 1：$z = x^2 + y^2$ 对应的柱坐标为 $z = \rho^2$

$\Omega: z = x^2 + y^2$ 与 $z = 4$ 所围成的立体在 $xoy$ 面的投影为 $x^2 + y^2 \le 4$，

对应的极坐标为 $\rho \le 2$

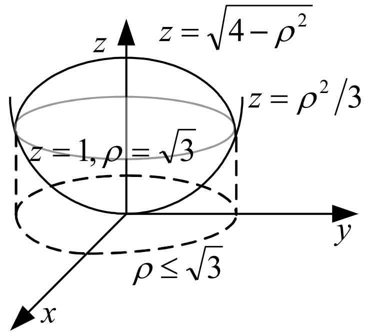
$$\iiint\limits_{\Omega} zdv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho^2}^4 zdz = \frac{64}{3}\pi.$$

解法 2：$\iiint\limits_{\Omega} zdv = \int_0^4 dz \iint\limits_{D_z} zdxdy = \int_0^4 z \cdot \pi zdz = \frac{64}{3}\pi.$

**例**　求 $\iiint\limits_{\Omega} zdv, \Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 3z$ 围成。

解法 1：

在柱坐标系下，$\Omega$ 的边界曲面方程变为：



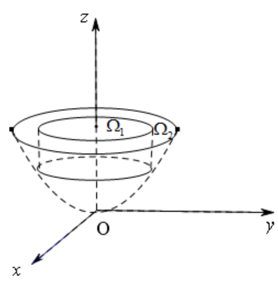

$\rho^2 + z^2 = 4, \rho^2 = 3z$，其交线为 $\begin{cases} z = 1 \\ \rho = \sqrt{3} \end{cases}$

所以 $\Omega$ 在 $xoy$ 面的投影为 $\rho \le \sqrt{3}, 0 \le \theta \le 2\pi$

$$\iiint\limits_{\Omega} zdv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho d\rho \int_{\rho^2/3}^{\sqrt{4-\rho^2}} zdz = \frac{13}{4}\pi$$

解法 2：$\iiint\limits_{\Omega} zdv = \int_0^1 dz \iint\limits_{D_z} zdxdy + \int_1^2 dz \iint\limits_{D_z} zdxdy = \int_0^1 z \cdot \pi 3zdz + \int_1^2 z \cdot \pi(4 - z^2)dz = \frac{13}{4}\pi$

**例**　计算 $\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)dxdydz$，其中 $\Omega$ 是由 $yOz$ 平面上 $y = \sqrt{2z}$ 绕 $z$ 轴旋转所得旋转面与 $z$=2, $z$=8 围成的区域.

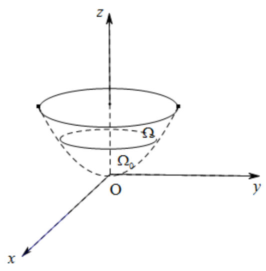



**解法 1** 如图所示.

将 $\Omega$ 分成 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ 两部分,其中

$$\Omega_1 = \{(\rho, \theta, z) | 0 \le \rho \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi, 2 \le z \le 8\}$$

$$\Omega_2 = \left\{(\rho, \theta, z) \middle| 2 \le \rho \le 4, 0 \le \theta \le 2\pi, \frac{\rho^2}{2} \le z \le 8\right\}$$




$$\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_1} (x^2 + y^2)dxdydz + \iiint\limits_{\Omega_2} (x^2 + y^2)dxdydz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 d\rho \int_2^8 \rho^2 \rho dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^4 d\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^8 \rho^2 \rho dz = 336\pi$$

**解法 2**　如图所示.

$$\Omega_0=\left\{(\rho,\theta,z)\middle|0\le\rho\le2,0\le\theta\le2\pi,\frac{\rho^2}{2}\le z\le2\right\},$$

$$\Omega+\Omega_0=\left\{(\rho,\theta,z)\middle|0\le\rho\le4,0\le\theta\le2\pi,\frac{\rho^2}{2}\le z\le8\right\}$$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega+\Omega_0}(x^2+y^2)dxdydz-\iiint\limits_{\Omega_0}(x^2+y^2)dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^8\rho^2\rho dz-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^2\rho^2\rho dz$$

$$=2\pi\int_0^4\rho^3\left(8-\frac{\rho^2}{2}\right)d\rho-2\pi\int_0^2\rho^3\left(2-\frac{\rho^2}{2}\right)d\rho$$

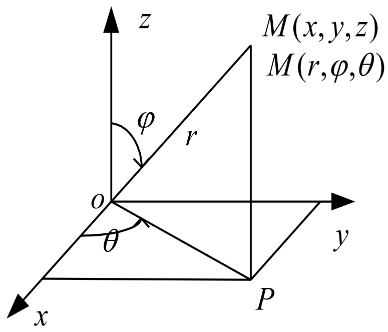
$$=2\pi\left[2\rho^4-\frac{1}{12}\rho^6\right]_0^4-2\pi\left[\frac{1}{2}\rho^4-\frac{1}{12}\rho^6\right]_0^2=336\pi$$

**解法 3** 用垂直于 $z$ 轴的平面截 $\Omega$，截面圆域为 $D_z:x^2+y^2\le2z$，对应极坐标表示为 $D_z:0\le\theta\le2\pi,0\le\rho\le\sqrt{2z}$，故

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv=\int_2^8dz\iint\limits_{D_z}(x^2+y^2)dxdy=\int_2^8dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^2\cdot\rho d\rho=336\pi$$

**⑤何时选用柱面坐标**——当 $\Omega$ 是由柱形，锥形或旋转体围成且在坐标面上的投影是圆域或其部分，或者被积函数含有式子 $\varphi(x^2+y^2)$ 等时，常用柱面坐标计算。

**3．球面坐标系下三重积分的计算。**




**①球面坐标**：设空间一点$M(x,y,z)$，

又设

$OM=r, 0\le r<+\infty$

$\varphi$ 为有向线段 $\overrightarrow{OM}$ 与 $z$ 轴正向的夹角，$0\le\varphi\le\pi$

$\theta$为$xoz$面与$zoM$的夹角，$0\le\theta\le 2\pi$。

我们可用有序数组$(r,\varphi,\theta)$来表示点$M(x,y,z)$，

称为**点$M$的球面坐标**。

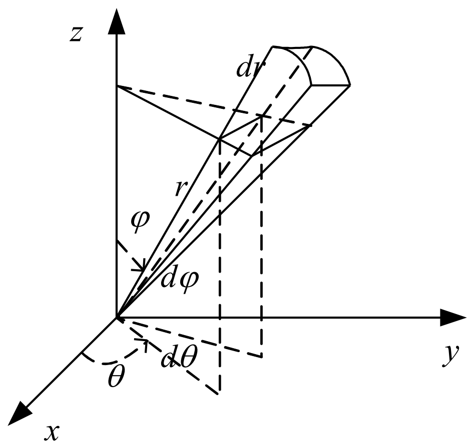
**②球面坐标与直角坐标的关系**：$x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\varphi$

**③球面坐标的三组坐标面为：**

$r$=常数，表示圆心在原点的球面；

$\varphi$=常数，表示顶点在原点，$z$轴为轴的锥面；

$\theta$=常数，表示过$z$轴的半平面。




长$:r\sin\varphi d\theta$

宽$:rd\varphi$

高$:dr$

体积元$:dv=r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$

**④球面坐标系的体积元：**

用坐标曲面网$r,r+dr$，$\varphi,\varphi+d\varphi$，$\theta,\theta+d\theta$把积分区域划分成许多小区域，不计高阶无穷小部分，所围的区域可看成是长方体，其体积为$dv=r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$（**可由三重积分的换元法得到体积元**）

进一步有$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi win\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$

**⑤何时选用球面坐标**——当$\Omega$是球体或其部分，或被积函数含有式子$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$时，常用球面坐标计算。

**例** 利用球面坐标计算半径为$R$的球体体积。

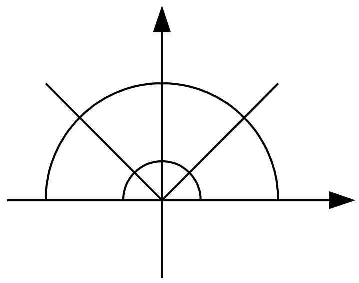
解：设球面方程为$x^2+y^2+z^2=R^2$，球体所占空间区域可用球面坐标表示为

$\Omega=\left\{(r,\varphi,\theta)\middle|0\le\theta\le 2\pi,0\le\varphi\le\pi,0\le r\le R\right\}$

$$V=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{R}r^2\sin\varphi dr=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\cdot\int_0^{R}r^2dr=\frac{4\pi}{3}R^3$$

**例**　求由 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x^2+y^2+z^2=b^2$，$x^2+y^2=z^2$ 所围成的体积 $(z\geq 0,0<a<b)$

解：所围立体的边界曲面在球坐标系的方程为



$$x^2+y^2+z^2=a^2\rightarrow r=a$$

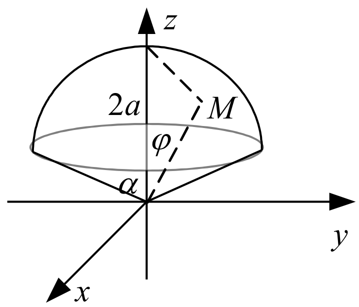
$$x^2+y^2+z^2=b^2\rightarrow r=b$$

$$x^2+y^2=z^2\rightarrow\tan\varphi=1\rightarrow\varphi=\pi/4$$

$$V=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_a^{b}r^2\sin\varphi dr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^{\pi/4}\sin\varphi d\varphi\cdot\int_a^{b}r^2dr=\frac{1}{3}\pi(2-\sqrt{2})(b^3-a^3)$$

**例**　求半径为 $a$ 的球面与半顶角为 $\alpha$ 的内接锥面所围成的立体的体积。




**解：**设球面通过原点，球心在 $z$ 上，又内接圆锥的顶点在原点，其轴与 $z$ 轴重合，则球面方程为

$$r=2a\cos\varphi$$

锥面方程为 $\varphi=\alpha$

立体所占空间区域可用下面不等式表示

$$0\leq r\leq 2a\cos\varphi,0\leq\varphi\leq\alpha,0\leq\theta\leq 2\pi$$

所以体积 $V=\iiint\limits_{\Omega}r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\alpha}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\sin\varphi dr=\frac{4\pi a^3}{3}(1-\cos^4\alpha)$

**例**　计算积分 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dv$，其中 $\Omega$ 由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围成的区域。

**解：** $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 对应的球坐标方程为 $\varphi=\frac{\pi}{4}$， $z=1$ 对应的球坐标方程为 $r=\frac{1}{\cos\varphi}$

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^{1/\cos\varphi}\frac{1}{r}\cdot r^2\sin\varphi dr=(\sqrt{2}-1)\pi$$

**例**　计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2dv$，其中 $\Omega$： $x^2+y^2+z^2\leq R^2(R>0)$。

解　　原式$=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)dv$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^R r^2\cdot r^2\cdot dr=\frac{4\pi R^5}{5}$$

其中　$\iiint\limits_{\Omega}xydv=\iiint\limits_{\Omega}yzdv=\iiint\limits_{\Omega}zxdv=0$（奇函数在对称区间上积分为 0）

**例**　已知函数$F(t)=\iiint\limits_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$，其中 $f$ 为可微函数，积分区域为$\Omega$: $x^2+y^2+z^2\le t^2$. **求 $F'(t)$**

**解**　积分区域$\Omega$可表示为: $\Omega$: $0\le\theta\le2\pi$, $0\le\varphi\le\pi$, $0\le r\le t$.

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^t f(r^2)r^2dr=4\pi\int_0^t f(r^2)r^2dr$$

故　　$$F'(t)=4\pi t^2 f(t^2)$$

**练习题**

**例**　设 $f(x)$ 是连续的奇函数，并且是周期为 1 的周期函数，$\int_0^1 xf(x)dx=1$，若 $F(u)=\int_0^u dx\int_0^x dy\int_0^y f(z)dz$，试将$F(u)$表示为定积分形式，并求$F'(1)$.

解：交换三重积分的积分次序可得

$$F(u)=\int_0^u dx\iint\limits_{\substack{0\le y\le x\\0\le z\le y}}f(z)dydz=\int_0^u dx\int_0^x dz\int_z^x f(z)dy=\int_0^u dx\int_0^x(x-z)f(z)dz$$

$$=\iint\limits_{\substack{0\le x\le u\\0\le z\le x}}(x-z)f(z)dxdz=\int_0^u dz\int_z^u(x-z)f(z)dx=\frac{1}{2}\int_0^u(u-z)^2f(z)dz$$

又$F(u)=\frac{1}{2}u^2\int_0^u f(z)dz-u\int_0^u zf(z)dz+\frac{1}{2}\int_0^u z^2f(z)dz$

故$F'(u)=u\int_0^u f(z)dz+\frac{1}{2}u^2f(u)-\int_0^u zf(z)dz-u^2f(u)+\frac{1}{2}u^2f(u)$

$$=u\int_0^u f(z)dz-\int_0^u zf(z)dz$$

所以$F'(1)=\int_0^1 f(z)dz-\int_0^1 zf(z)dz=\int_0^1 f(z)dz-1$

而$\int_0^1 f(z)dz\underline{\underline{z-1=t}}\int_{-1}^0 f(1+t)dt=\int_{-1}^0 f(t)dt=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(z)dz+\int_{-1}^0 f(z)dz\right]$

$=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(z)dz=0$

（可用结论：连续函数$f(x)$以$T$为周期，则$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$，从而

$\int_0^1 f(z)dz = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(z)dz = 0$）

于是，$F'(1) = -1$

**例** 设有空间区域$\Omega:(x-1)^2+y^2\le 1, 0\le z\le 4$，计算$\iiint_\Omega \left|z-x^2-y^2\right|dxdydz.$

解：用$z=x^2+y^2$将$\Omega$分成

$\Omega_1:(x-1)^2+y^2\le 1, x^2+y^2\le z\le 4$及$\Omega_2:(x-1)^2+y^2\le 1, 0\le z\le x^2+y^2$

利用柱面坐标，并注意对称性的使用，得

$$\iiint_\Omega \left|z-x^2-y^2\right|dxdydz$$

$$=\iiint_{\Omega_1}\left(z-x^2-y^2\right)dxdydz+\iiint_{\Omega_2}\left(x^2+y^2-z\right)dxdydz$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}rdr\int_{r^2}^4(z-r^2)dz+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}rdr\int_0^{r^2}(r^2-z)dz$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r(8-4r^2+\frac{1}{2}r^4)dr+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\frac{1}{2}r^5dr$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(16\cos^2\theta-16\cos^4\theta+\frac{16}{3}\cos^6\theta)d\theta+\frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta d\theta$$

$$=32\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\frac{32}{3}\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{16}{3}\pi$$

**教学要求和注意点**

1、在直角坐标系中，当用“先一后二”法计算三重积分时，如何恰当选择第一次单积分的积分变量颇为关键，一般方法是：先把围成$\Omega$的各边界曲面通过显式方程表出，如果 x，y，z 中的某个变量恰好出现在两个显式方程的左端，并且不出现于任一方程的右端，则可选该变量作为第一次单积分的积分变量。

2、在重积分的计算中，换元法也是强有力的手段。

# 第四节　重积分的应用——元素法

**讲稿内容**

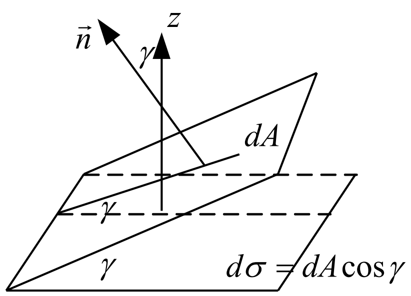
$$\text{重积分的应用}\begin{cases}\text{二重积分}\begin{cases}\text{几何上:平面图形面积,曲面面积,曲顶体体积等}\\ \text{物理上:平面薄片的质量,质心,力矩,转动惯量等}\end{cases}\\ \text{三重积分}\begin{cases}\text{几何上:立体的体积}\\ \text{物理上:物体的质量,质心,转动惯量,引力等}\end{cases}\end{cases}$$

**一、曲面面积**

设曲面片$S$的方程为$z=f(x,y)$，具有一阶连续的偏导数$f_x,f_y$，即曲面是光滑的，设$S$在$xoy$面上投影为$D_{xy}$，下面推导求曲面面积的公式。

<u>其主要思想是：划分投影区域，面积的近似代替，求出面积元。</u>

将$D_{xy}$划分为许多小区域，其中任取一个直径很小的区域$d\sigma$，在$d\sigma$中任取一点$P(x,y)$，对应地曲面$S$有一点$M(x,y,f(x,y))$，$M$在$xoy$面上的投影即为点$P(x,y)$，在$M$处有一切平面设为$T$，然后以小区域$d\sigma$的边界为准线作母线平行于$z$轴的柱面，这个柱面在曲面上割下一小片曲面，同时在切平面$T$上也割下一小片平面，由于$d\sigma$很小，可以近似地用切平面上一小片平面的面积$dA$代替那小片曲面的面积，设点$M$处曲面$S$的法线与$z$轴的夹角为$\gamma$，则有关系$dA=\dfrac{d\sigma}{\cos\gamma}$，见下图




因为$\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$

所以$dA=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,d\sigma$

这就是**<u>曲面$S$的面积元</u>**，以它为被积表达式在投影区域$D_{xy}$上积分，即得**<u>曲面面积</u>**$A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,d\sigma$

若给出的方程为$x=g(y,z)$，则可投影到$yoz$坐标面，类似地有公式

$$A=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1+g_y^2+g_z^2}\,dydz$$

其余同理。

**例** 求半径为$a$的球的表面积。

解：只需求出上半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的表面积，上半球面在$xoy$面的投影为

$\{(x,y)|x^2+y^2\le a^2\}$，$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

利用极坐标，得面积为

$$A=2\iint\limits_{D_{xy}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}rdr=4\pi a^2$$（注意积分为反常积分）

**例** 求曲面$az=xy$包含在圆柱$x^2+y^2=a^2$内那部分面积。

解：$A=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{1+(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{a})^2}dxdy=\frac{1}{a}\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{a^2+x^2+y^2}dxdy$（利用极坐标）

$$=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{a^2+r^2}rdr=\frac{2\pi}{3}a^2(2\sqrt{2}-1).$$

**例** 求圆柱面$x^2+y^2=9$位于$xOy$平面上方，平面$z=y$下方的那部分侧面积.

**解**　如图 9.36 所示将圆柱面投影响在$zOx$平面得投影区域

$D_{zx}=\{(z,x)|z^2+x^2\le 9, y=0, z\ge 0\}$.

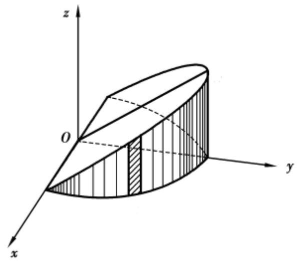



图 9.36

$$A=\iint\limits_{Dzx}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}dxdz=\iint\limits_{Dzx}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}\right)^2}dxdz$$

$$=\iint\limits_{D_{zx}}\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}dxdz=3\int_{-3}^{3}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{\sqrt{9-x^2}}dz=18$$

**另解**：$L:x^2+y^2=9, y\ge 0$

$$A=\int_L zds=\int_L yds=\int_{-\pi}^{\pi}3\sin\theta\cdot 3d\theta=18.$$

**二、质心**

<u>**平面薄片的质心**</u>：设有一平面薄片，占有$xoy$面上的区域$D$，在点$(x,y)$处的面密度为$\mu(x,y)$，求该平面薄片的质心的坐标。（假设$\mu(x,y)$在$D$上连续）

由物理学知道，若在$xoy$内有$n$个质点，它们位于点$(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$处，质量分别为$m_1,\cdots,m_n$，则这$n$质点的重心为

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}，\quad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}$$

但平面薄片是一些连续的点，而不是一些孤立的点，不能直接用上面的公式，我们把它转换成一些孤立的点，方法与以前类似：把平面薄片划分为许多小区域$d\sigma$，当小区域$d\sigma$的直径很小时，因$\mu(x,y)$连续，$\mu(x,y)$在$d\sigma$内变化很小，取$d\sigma$内任意一点$(x,y)$，其密度值视为$d\sigma$内各点的密度值，即把$d\sigma$这块区域的质量近似看作集中在$(x,y)$处，此时静矩

$$dM_y=x\mu(x,y)d\sigma, dM_x=y\mu(x,y)d\sigma$$

按二重积分的定义，平面薄片$D$对轴的力矩为

$$M_y=\iint_D x\mu(x,y)d\sigma, M_x=\iint_D y\mu(x,y)d\sigma$$

所以，<u>**平面薄片的重心**</u>：$\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{1}{M}\displaystyle\iint_D x\mu(x,y)d\sigma \xrightarrow{\mu=常数} \dfrac{1}{A}\displaystyle\iint_D xd\sigma \\ \bar{y}=\dfrac{1}{M}\displaystyle\iint_D y\mu(x,y)d\sigma\end{cases}$

其中 $M=\iint_D \mu(x,y)d\sigma$

类似地，<u>**空间物体的重心**</u>：$\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{1}{M}\displaystyle\iiint_\Omega x\mu(x,y,z)dv=\dfrac{M_{yz}}{M} \\ \bar{y}=\dfrac{1}{M}\displaystyle\iiint_\Omega y\mu(x,y,z)dv \\ \bar{z}=\dfrac{1}{M}\displaystyle\iiint_\Omega z\mu(x,y,z)dv\end{cases}$

**例（教材）** 求位于两圆$\rho=2\sin\theta$和$\rho=4\sin\theta$之间的均匀薄片的质心。

解：由区域$D$的对称性及薄片的均匀性知$\bar{x}=0$，
区域$D$的面积$A=4\pi-\pi=3\pi$

$M_y=\iint\limits_D ydxdy=\int_0^{\pi}d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}\rho\sin\theta\cdot\rho d\rho=7\pi$,质心为$(0,\frac{7}{3})$

**例** 求均匀半球体的质心。
解：建立球心为原点，球体的对称轴为$Z$轴的空间直角坐标系。设球的半径为 a 则

$\bar{x}=\bar{y}=0$

$$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz=\frac{1}{2\pi a^3/3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^a r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr=\frac{3}{8}a$$

质心坐标为$(0,0,\frac{3}{8}a)$

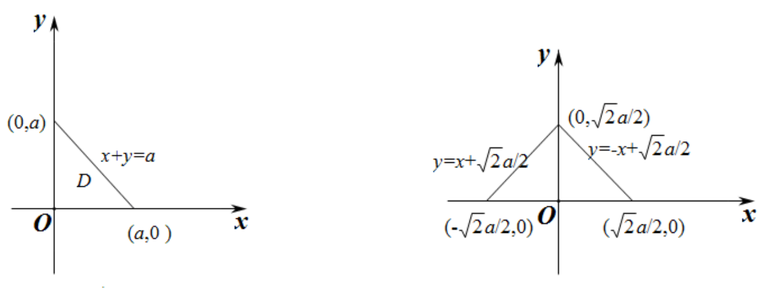
**例** 求由两球面$x^2+y^2+z^2=a^2$，$x^2+y^2+z^2=b^2(a<b)$及锥面

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的均匀物体的重心。

解　如图。由于对称性，$\bar{x}=\bar{y}=0$，

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}zdv}{\iiint\limits_{\Omega}dv}=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_a^b r^3\sin\varphi\cos\varphi dr}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_a^b r^2\sin\varphi dr}=\frac{3(b^4-a^4)}{16(1-\frac{1}{\sqrt{2}})(b^3-a^3)}$$

**例**　求腰长为$a$的等腰直角三角形形心的位置.
**解法 1** 建立如图 9.37($a$)所示坐标系.




($a$)　　　　　　($b$)

图 9.37

由对称性, 形心位置在直线$y=x$上.

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D xdxdy}{\iint\limits_D dxdy},\bar{y}=\frac{\iint\limits_D ydxdy}{\iint\limits_D dxdy}$$

$$\overline{x}=\frac{\iint\limits_D xdxdy}{\iint\limits_D dxdy}=\frac{\int_0^a dx\int_0^{a-x} xdy}{\frac{1}{2}a\times a}=\frac{1}{3}a,\quad \overline{y}=\frac{\iint\limits_D ydxdy}{\iint\limits_D dxdy}=\frac{\int_0^a dy\int_0^{a-y} ydx}{\frac{1}{2}a^2}=\frac{1}{3}a$$

形心坐标为$\left(\frac{1}{3}a,\ \frac{1}{3}a\right)$.

**解法 2** 建立如图 9.37($b$)所示坐标系, 仍由对称性, 形心坐标在 $y$ 轴上, 即

$$\overline{y}=\frac{\iint\limits_D ydxdy}{\iint\limits_D dxdy}=\frac{\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} dy\int_{y-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{-y+\frac{\sqrt{2}}{2}a} ydx}{\frac{1}{2}a^2}=\frac{\sqrt{2}}{6}a$$

即形心坐标极为$\left(0,\ \frac{\sqrt{2}}{6}a\right)$.

重心(形心)坐标是由平面图形所确定, 但坐标系选择不同, 重心(形心)坐标的表示方式可能不同, 如该例的形心与顶点的距离是中线的$\frac{2}{3}$, 但坐标表示形式不一样.

**例 5** 在底半径为 $R$, 高为 $H$ 的圆柱上面, 加上一个半径为 $R$ 的半球, 使整个立体重心位于球心处, 求 $R$ 与 $H$ 的关系(设密度均匀).

**解** 取球心为原点, 建立如图 9.38 所示坐标系.

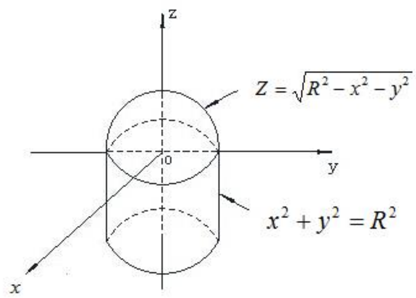



图 9.38

由对称性, 重心位于 $z$ 轴上, 由

$$\overline{z}=\frac{\iiint\limits_\Omega zdxdydz}{\iiint\limits_\Omega dxdydz}=0$$

有

$$0=\iiint\limits_\Omega zdxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R \rho d\rho\int_{-H}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} zdz$$

$$=\pi\int_0^R \rho\left[R^2-\rho^2-H^2\right]d\rho=\frac{\pi R^2}{4}\left(R^2-2H^2\right)$$

$$H=\frac{R}{\sqrt{2}}$$

**三、转动惯量：**

平面薄片对坐标轴及原点的转动惯量：

$$I_x=\iint\limits_D y^2\mu(x,y)d\sigma$$

$$I_y=\iint\limits_D x^2\mu(x,y)d\sigma$$

$$I_0=\iint\limits_D (x^2+y^2)\mu(x,y)d\sigma$$

空间物体对于坐标面、坐标轴及原点的转动惯量：

$$I_{xy}=\iiint\limits_\Omega z^2\mu(x,y,z)dv$$

$$I_x=\iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)\mu(x,y,z)dv$$

$$I_0=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)dv$$

**例（教材）**　求半径为$a$的均匀半圆薄片对其直径边的转动惯量。

解：建立原点在圆心、直径边为$x$轴的平面直角坐标系。

则$I_x=\iint\limits_D \mu y^2dxdy=\mu\iint\limits_D r^2\sin^2\theta\cdot rdrd\theta=\mu\int_0^\pi\sin^2\theta d\theta\cdot\int_0^a r^3dr=\frac{1}{8}\pi\mu a^4$

**例（教材）**设物体由一圆锥以及这一圆锥共底的半球拼成，而锥的高等于它的底的半径 a，密度函数$\rho=1$，求这物体对对称轴的转动惯量。

解　建立坐标轴如图 9-53。圆锥的方程为：$z=\sqrt{x^2+y^2}$，半球的方程为：$z=a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

则　对称轴为 z 轴，于是物体对对称轴的转动惯量为：

$$I_z=\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=\frac{64\pi a^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\varphi\cos^5\varphi d\varphi=\frac{3\pi a^5}{5}$$

## 四．引力

设有物体$M$占有空间有界闭区域$\Omega$，其上的密度函数为$\rho(x,y,z)$，求物体$M$对质量为$m$的质点$P(x_0,y_0,z_0)$。

解：在$\Omega$上任取一直径充分小的闭区域$dv$（其体积也记为$dv$），当$dv$充分小时，近似认为它是质量为$\rho(x,y,z)dv$的质点$Q(x,y,z)$

$\overrightarrow{PQ}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$，对应的方向余弦为

$$\overrightarrow{PQ}^{\circ}=\frac{1}{r}\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\},r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

物体$M$对质点的引力微元为：

$$dF=\left\{G\frac{m\rho dv}{r^2}\cos\alpha,G\frac{m\rho dv}{r^2}\cos\beta,G\frac{m\rho dv}{r^2}\cos\gamma\right\}$$

即三个分力分别为：

$$F_x=\iiint\limits_{\Omega}\frac{G\mu(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}dv$$ ---------沿$x$轴的分力

$$F_y=\iiint\limits_{\Omega}\frac{G\mu(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}dv$$

$$F_z=\iiint\limits_{\Omega}\frac{G\mu(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}dv$$

$\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)$

$G$----引力常数，

$r$-----两点的距离，$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$

**例（教材）**求由$x^2+y^2+z^2\le R^2$所围成的均匀物体对位于$P(0,0,a)$ $(a>R)$处的单位质点的引力。

解　设物体的密度为$\rho_0$，由于球体对称且物体是均匀的，则有$F_x=F_y=0$，则引力沿$z$轴的分量为

$$F_z=\iiint\limits_{\Omega}\frac{k(z-a)\rho_0}{\left[x^2+y^2+(z-a)^2\right]^{\frac{3}{2}}}dv$$

$$= k\rho_0 \int_{-R}^{R}(z-a)dz \iint_{x^2+y^2\le R^2-z^2} \frac{1}{\left[x^2+y^2+(z-a)^2\right]^{\frac{3}{2}}} dxdy$$

$$= k\rho_0 \int_{-R}^{R}(z-a)dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{\rho d\rho}{\left[\rho^2+(z-a)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -k\cdot\frac{4\pi R^3}{3}\rho_0\cdot\frac{1}{a^2}$$

**练习题**

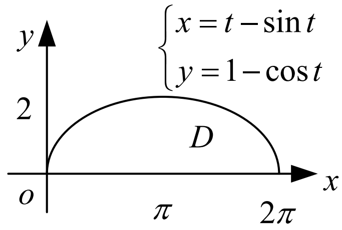
**例** 设平面区域$D$由曲线$\begin{cases} x = t-\sin t \\ y = 1-\cos t \end{cases}(0\le t\le 2\pi)$与$x$轴围成，

计算二重积分$\iint_D (x+2y)dxdy.$

**【解析】**区域D是摆线的一拱与$x$轴围成，利用形心的公式$\bar{x} = \dfrac{\iint_D xdxdy}{\iint_D dxdy}$得

$$\iint_D xdxdy = \bar{x}\iint_D dxdy = \pi\int_0^{2\pi}dx\int_0^y dy = \pi\int_0^{2\pi} ydx$$

$$= \pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)(1-\cos t)dt = 3\pi^2$$




$$\iint_D 2ydxdy = \int_0^{2\pi}dx\int_0^{y(x)}2ydy = \int_0^{2\pi} y^2(x)dx$$

$$= \int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2(1-\cos t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt = 5\pi$$

于是$\iint_D (x+2y)dxdy = 3\pi^2+5\pi$

或$\iint_D (x+2y)dxdy = \int_0^{2\pi}dx\int_0^{y(x)}(x+2y)dy$

$$= \int_0^{2\pi}(xy+y^2)dx \xrightarrow[y=1-\cos t]{x=t-\sin t} \int_0^{2\pi}[(t-\sin t)(1-\cos t)+(1-\cos t)^2](1-\cos t)dt$$

**教学要求和注意点**

1、掌握三重积分（直角坐标、柱面坐标、球面坐标）的算法。

2、用元素法解决实际问题