韩昊辰 20214272

周一 P200.(1).(4)

（1）设$\langle G,*\rangle$是一个独异点，并且对于G中的每一个元素x都有$x*x=e$，其中e是幺元，证明$\langle G,*\rangle$是一个阿贝尔群。

$\forall x\in G$，x逆元为x，

$\therefore$ $\langle G,*\rangle$ 是群.

$\forall x_1,x_2\in G$，$(x_1*x_2)*(x_2*x_1)$

$= x_1*(x_2*x_2)*x_1$

$= x_1*x_1$

$= e$

$\therefore x_1*x_2 = x_2*x_1$

$\therefore$ $*$在G上可交换

$\therefore$ $\langle G,*\rangle$是阿贝尔群

（4）设$G=\{[1],[2],[3],[4],[5],[6]\}$，$G$上的二元运算$\times_7$如表5-5.3所示。

问$\langle G,\times_7\rangle$是循环群吗？若是，试找出它的生成元。

表 5-5.3

$\times_7$	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[2]	[2]	[4]	[6]	[1]	[3]	[5]
[3]	[3]	[6]	[2]	[5]	[1]	[4]
[4]	[4]	[1]	[5]	[2]	[6]	[3]
[5]	[5]	[3]	[1]	[6]	[4]	[2]
[6]	[6]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]

$\langle G,\times_7\rangle$是循环群且[3]，[5]是生成元

P211.(2).(5)

（2）设$\langle Z_6,+_6\rangle$是一个群，这里$+_6$是模6加法，$Z_6=\{[0],[1],[2],[3],[4],[5]\}$，试写出$\langle Z_6,+_6\rangle$中每个子群及其相应的左陪集。

子群：$\langle Z_6,+_6\rangle$

左陪集：Z_6

子群：$\langle\{[0],[2],[4]\},+_6\rangle$

左陪集：$\{[0],[2],[4]\}$ $\{[1],[3],[5]\}$

子群：$\langle\{[0],[3]\},+_6\rangle$

左陪集：$\{[0],[3]\}$ $\{[1],[4]\}$ $\{[2],[5]\}$

子群：$\langle\{[0]\},+_6\rangle$

左陪集：$\{[0]\}$ $\{[1]\}$ $\{[2]\}$ $\{[3]\}$ $\{[4]\}$ $\{[5]\}$

（5）设$\langle H,*\rangle$是群$\langle G,*\rangle$的子群，如果

$$A=\{x\mid x\in G,\ x*H*x^{-1}=H\}$$

证明$\langle A,*\rangle$是$\langle G,*\rangle$的一个子群。

易知 $A\subseteq G$ 且 $\langle A,*\rangle$ 满足结合律.

$\because \forall x\in A$，$(x*x)*H*(x*x)^{-1}$

$= x*x*H*x^{-1}*x^{-1}$

$= x*H*x^{-1}$

$= H$

$\therefore x*x\in A$

$\therefore$ $\langle A,*\rangle$满足封闭性

$\because \forall a*b\in A$，$(a*b)*H*(a*b)^{-1}$

$= a*b*H*b^{-1}*a^{-1}$

$= H$

$= b*a*H*a^{-1}*b^{-1}$

$= (b*a)*H*(b*a)^{-1}$

$\therefore b*a\in A$

$\therefore$ $\langle A,*\rangle$满足对称性

e是$\langle G,*\rangle$的幺元，也是$\langle H,*\rangle$的幺元

$\because e*H*e^{-1}=H$

$\therefore e\in A$

$\because \forall x\in A$，$x*H*x^{-1}=H$

$\Rightarrow x^{-1}*x*H*x^{-1}*x = H$

$\Rightarrow x^{-1}*H*x = H$

$\Rightarrow x^{-1}\in A$

$\therefore$ A中每个元素逆元存在

$\therefore$ $\langle A,*\rangle$是一个群且是$\langle G,*\rangle$子群

P221 (2), (3)

（2）设$\langle G, *\rangle$是一个群，而$a\in G$，如果f是从G到G的映射，使得对于每一个$x\in G$，都有

$$f(x)=a*x*a^{-1}$$

试证明f是一个从G到G上的自同构。

$\forall x_1, x_2 \in G$

$$f(x_1 * x_2) = a*(x_1*x_2)*a^{-1}$$

$$= a*x_1*a^{-1}*a*x_2*a^{-1}$$

$$= f(x_1)*f(x_2)$$

$\therefore f$是G到G的同态映射

$\because$ 对$\forall x\in G$，都有 $a^{-1}*x*a=m$ 使得

$f(m) = a*m*a^{-1} = x$

$\therefore f$满射

$\because$ 当$x_1\neq x_2$时 $a*x_1*a^{-1} \neq a*x_2*a^{-1}$

$\therefore f$入射

$\therefore f$是G到G的自同构

（3）试证由表 5－8.9 所给出的两个群$\langle G, ★\rangle$和$\langle S, *\rangle$是同构的。

表 5－8.9

★	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	p_1	p_2	p_3	p_4
p_2	p_2	p_1	p_4	p_3
p_3	p_3	p_4	p_1	p_2
p_4	p_4	p_3	p_2	p_1

$\langle G, ★\rangle$

$*$	q_1	q_2	q_3	q_4
q_1	q_3	q_4	q_1	q_2
q_2	q_4	q_3	q_2	q_1
q_3	q_1	q_2	q_3	q_4
q_4	q_2	q_1	q_4	q_3

$\langle S, *\rangle$

构造f有：$f(p_1)=q_3$

$f(p_2)=q_4$

$f(p_3)=q_1$

$f(p_4)=q_2$

使得 $\forall a_1, a_2 \in G$

有 $f(a_1 ★ a_2) = f(a_1) * f(a_2)$

又f是双射的

$\therefore \langle G, ★\rangle \cong \langle S, *\rangle$