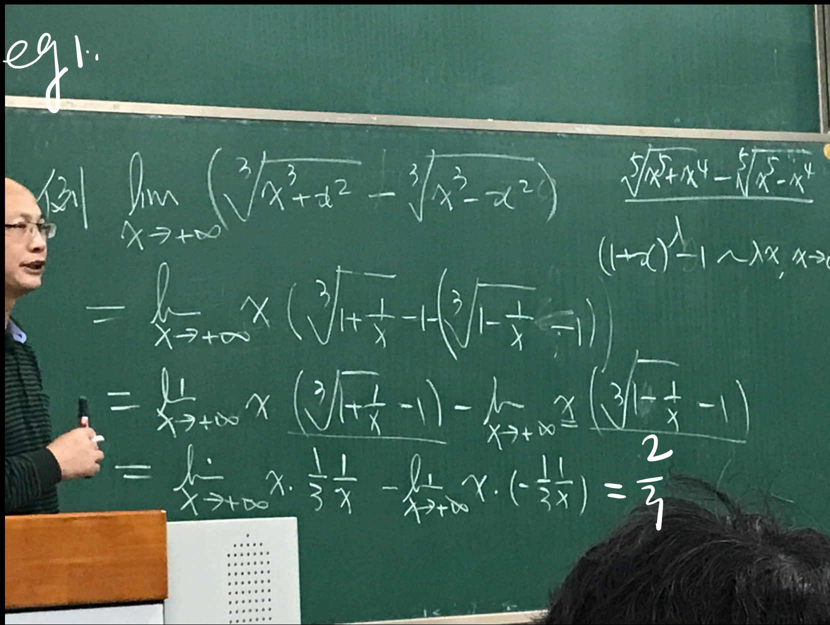
eg1.



$$\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)\left[\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)^2+\sqrt[3]{(x^3+x^2)(x^3-x^2)}\right]}{\left[\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)^2+\sqrt[3]{(x^3+x^2)(x^3-x^2)}\right]}$$

$$=\frac{2x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^6-x^4}}=\frac{2}{1+1+1}=\frac{2}{3}$$

eg2. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{\sin(x^2-1)}=3$，求 a, b

解：

$\because \lim\limits_{x\to1}\sin(x^2-1)=0 \quad \therefore \lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0$ --- ①.

而 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{\sin(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-(b+1)x+b}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x-b)}{(x+1)(x-1)}$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x-b)}{(x+1)\cancel{(x-1)}}=3 \Rightarrow \frac{1-b}{2}=3 \quad b=-5,\ a=4.$

例 已知 $f(x)$ 连续，证明 $|f(x)|$ 也连续，但反之不成立。

证明 1：由 $f(x)$ 连续，可得 $f^2(x)$ 连续，于是 $|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}$ 也连续（幂函数 $u^{\frac{1}{2}}$ 在 $(0,+\infty)$ 连续）。

证明 2：设 $f(x)$ 在 x_0 连续，由定义 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 于是 $\big||f(x)|-|f(x_0)|\big|\le|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，所以 $|f(x)|$ 也在 x_0 连续。

例子 $f(x)=\begin{cases}1, & x\ge0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 说明反之不成立。

进一步有： 若 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则

$$\max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}\left(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\right)$$

$$\min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}\left(f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\right)$$

在区间 $[a,b]$ 上也连续。

结论： 基本初等函数在其定义域内均连续。

基本初等函数包括以下几种：

（1）常数函数y = c （ c 为常数）

（2）幂函数y = x^a （ a 为常数）

（3）指数函数y = a^x（a>0, a≠1）

（4）对数函数y =log(a) x（a>0, a≠1，真数x>0）

（5）三角函数以及反三角函数(如正弦函数： y =sinx　反正弦函数：y = arcsin x等)

结论： 初等函数在其定义区间内连续。

eg. 求 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$ 的连续区间.

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ x^2, & |x|>1.\end{cases}$$

$\lim_{x\to1^-}f(x)=1=\lim_{x\to1^+}f(x)=1=f(1)$ ∴ $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续

同理. $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续

故 $f(x)$ 在 R 上连续

eg.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax\sin x+b\cos 2x+1}{\sin^2 x} & x\in[-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2}]\\ 3 & x=0\end{cases}$$

求 a、b，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续

解：$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax\sin x+b\cos 2x+1}{\sin^2 x}=3$

$\to 0$ $(\therefore b=-1)$

$\sin^2 x \to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax\sin x-\cos 2x+1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cancel{x\sin x}+2\cancel{\sin^2 x}}{\cancel{x^2}}=a+2$$

例 指出 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x-1|\sin x}$ 的间断点，并判断其类型.

解： $x=0,1,k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为 $f(x)$ 的间断点，

因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{|x-1|\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)}{|x-1|}\cdot\dfrac{x}{\sin x}=-1$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类（可去）间断点；

因 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-x}{|x-1|\sin x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)x}{(1-x)\sin x}=-\dfrac{1}{\sin 1}$，$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-x}{|x-1|\sin x}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)x}{(x-1)\sin x}=\dfrac{1}{\sin 1}$，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类（跳跃）间断点；

因 $\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{x^2-x}{|x-1|\sin x}=\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{(x-1)x}{|x-1|\sin x}=\infty$，所以 $k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为 $f(x)$ 的第二类（无穷）间断点.

P66. 4.(2) (3) (5)

例 证明指数函数 $f(x)=a^x, 0<a\neq 1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续。

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}(a^{x+\Delta x}-a^x)=0$

$a^x\cdot a^{\Delta x}-a^x$

$=a^x(a^{\Delta x}-1)$

$e^{(x+\Delta x)\ln a}-e^{x\ln a} = e^{x\ln a}\cdot e^{\Delta x\ln a}-e^{x\ln a}$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} e^{x\ln a}(e^{\Delta x\ln a}-1)$