不安全 — sakai.cqu.edu.cn

1.设 $f(x)$ 具有一阶连续的导数，且 $f'(1)=-2$，则 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{d}{dx}\ldots\cos\sqrt{x})=$ ____

2.$\int\dfrac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx=$ $\int\frac{\sin x}{(\cos x)^{\frac{3}{2}}}dx=-\int\frac{d\cos x}{(\cos x)^{\frac{3}{2}}}=2(\cos x)^{-\frac{1}{2}}+C$

3.$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+4x+8}dx=$ $\int_0^{+\infty}\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+2^2}=\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{x+2}{2}\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}$

4.$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)dx$，则 $f(x)=$ $\frac{1}{1+x^2}+\frac{\pi}{4-\pi}\cdot\sqrt{1-x^2}$

$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ $x=\sin u$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2u\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2u}{2}du=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2u\,d2u=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\cdot\sin 2u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

$\int_0^1 f(x)dx=\arctan x\Big|_0^1+\frac{\pi}{4}\int_0^1 f(x)dx$ $\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{4-\pi}$

5.设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+bx)}{x}, & x\neq 0\\ -1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导时，则 $f'(0)=$ $-\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{bx}{x}=b=-1$. $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\frac{\ln(1-x)}{x}+1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+x}{x^2}=\frac{\frac{-1}{1-x}+1}{2x}=\frac{\frac{-x}{1-x}}{2x}=\frac{-1}{2}$

6.极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}dx=$ 0

二、单项选择题（每小题3分，共18分）

$1+x=u$ $x=u-1$ $\lim\int_1^2\frac{u^n-C_n^1u^{n-1}+C_n^2u^{n-2}\cdots+1}{u}du$

1.$x=0$ 是函数 $f(x)=\sin x\sin\dfrac{1}{x}$ 的 A

（A）可去间断点　（B）跳跃间断点

（C）震荡间断点　（D）无穷间断点

2.下列结论中不正确的是（ ）C D

（A）曲线 $y=x^2-2x$ 在点 $(1,-1)$ 处的切线是水平的 ✓

$2x-2$

（B）曲线 $y=x-\cos x$ 在 $(0,-1)$ 处的切线与 x 轴的夹角为 $\frac{\pi}{4}$ ✓

$1+\sin x$ 0

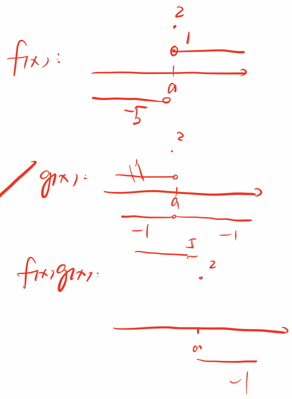
（C）曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 在点 $(0,0)$ 处有切线 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{-\frac{2}{3}}$

（D）已知曲线 $y=f(x)$ 处处有切线，则函数 $f(x)$ 处处可导

3.函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $x=a$ 处取极大值，则 $f(x)g(x)$ 在 $x=a$ 处（ ）D

（A）必取极大值 $-(x^2+1)$ $-x^2+1$　（B）必取极小值 $f(x)<f(a)$

（C）不可能取极值 x^4-x^2 $x^2(x^2-1)$ $4x^3-2x=2x(2x^2-1)$　（D）是否取极值不能确定



$f(x)$: $g(x)$: $f(x)g(x)$:

4.设 $f(x)$ 具有连续的导数，则下列各式中正确的是（ ）D

$-(1+x^2)$ $1-x^2$ $-(1-x^2)$

（A）$\int f'(x)dx=f(x)$　（B）$\dfrac{d}{dx}\int f'(x)dx=f(x)+C$

（C）$\int f'(3x)dx=f(3x)+C$　（D）$\dfrac{d}{dx}\int f(3x)dx=f(3x)$

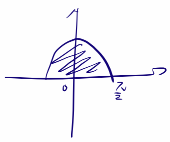
5.$\int_0^a x^3f(x^2)dx=$（ ）

（A）$\dfrac{1}{2}\int_0^{a^2}xf(x)dx$　（B）$\int_0^a x^2f(x^2)dx^2$

（C）$\dfrac{1}{2}\int_0^a xf(x)dx$　（D）$\dfrac{1}{2}\int_0^a x^2f(x^2)dx^2$

6.曲线 $y=\cos x\left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$ 与 x 轴所围成的图形，绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为（ ）C

（A）$\frac{\pi}{2}$　（B）π　（C）$\frac{1}{2}\pi^2$　（D）π^2



$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\cos^2x\,dx$

$2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dx=\pi\cdot\frac{\pi}{2}$

$3\le\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n}\le\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3\cdot 3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}\cdot 3=3$

三、计算题（每小题6分，共24分）

1.求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$. $\le\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n-2)(n-2)!+(n-1)!+n!}{n!}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n(n-1)}+\frac{1}{n}+1\right)=1$

夹逼

2. 若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}\sin\dfrac{1}{t}$，求 $f'(t)$.

$f(t)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x\cdot 2t}\sin\frac{1}{t}=\sin\frac{1}{t}\cdot e^{2t}$

$f'(t)=-\frac{1}{t^2}\cos\frac{1}{t}\cdot e^{2t}+2e^{2t}\sin\frac{1}{t}$

3. 求 $\int\dfrac{x+1}{x(1+xe^x)}dx$ $+C$

原式 $=\int\frac{(xe^x+e^x)dx}{xe^x(1+xe^x)}=\int\frac{d(xe^x)}{xe^x(1+xe^x)}=\int\left(\frac{1}{xe^x}-\frac{1}{1+xe^x}\right)d(xe^x)=\ln(xe^x)-\ln(1+xe^x)+C$

4. 已知 $f(2)=\dfrac{1}{2}, f'(2)=0$ 及 $\int_0^2 f(x)dx=1$，求 $\int_0^1 x^2f''(2x)dx$.

$\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(2x)d(2x)=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2d f'(2x)=\frac{1}{2}\left[[x^2f'(2x)]_0^1+\int_0^1 2xf'(2x)dx\right]=\frac{1}{2}\left[2\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 xf'(2x)d(2x)\right]=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,df(2x)=\frac{1}{2}\left[[xf(2x)]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)d2x\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)d2x\right]$

令 $2x=u$　$\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\int_0^2 f(u)du=0$.

四、综合题（每小题8分，共16分）

1.确定方程 $\ln x=\dfrac{x}{e}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内根的个数。

$1-(1-2s^2)$

$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=\int_0^{\pi}\sqrt{2\sin^2x}dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\sin x|dx=$ ~~$\sqrt{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\,dx\right)=\sqrt{2}\left(\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)$~~ $=\sqrt{2}(1+1)=2\sqrt{2}$

$=\sqrt{2}(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=2\sqrt{2}$

令 $\varphi(x)=\ln x-\frac{x}{e}+2\sqrt{2}$　$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=\frac{e-x}{ex}$

x	$(0,e)$	$(e,+\infty)$
$\varphi'(x)$	$+$	$-$
$\varphi(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=-\infty \\ \varphi(e)=+2\sqrt{2} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=-\infty \end{array}\right\}$ 2根

2.常数 a,b 各为何值时，有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{ax-\sin x}\displaystyle\int_0^x \dfrac{u^2}{\sqrt{b+3u}}du = 2.$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{\sqrt{b+3x}}}{a-\cos x}=2$ $a=1.$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{\sqrt{b+3x}}}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{b+3x}}=\dfrac{2}{\sqrt{b}}=2$ $b=1.$

五、证明题（每小题8分，共16分）

1. 设 $x>0$ ，常数 $a>e$ ，证明 $(a+x)^a < a^{a+x}$.

$a\ln(a+x)<(a+x)\ln a \iff \frac{1}{a+x}\ln(a+x)<\frac{1}{a}\ln a.$

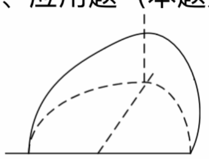
$\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2}\ (x>e)<0.$

$\because a+x>a$

$\therefore \frac{1}{a+x}\ln(a+x)<\frac{1}{a}\ln a$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续， $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$ ，则在 $(0,1)$ 内至少存在 ξ,η 使得 $|f'(\xi)|\ge 2M$ ， $|f'(\eta)|\le 2M$ ，其中 $M=\max\{|f(x)|\}$.

六、应用题（本题共8分）



楔形体

设有一个正椭圆柱体，其底面的长、短轴分别为 $2a,2b$ ，用过此柱体底面的短轴且与底面成 α 角 $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ 的平面截此柱体，得如图的楔形体，求此楔形体的体积 V.