封

线

1.设 $f(x)$ 具有一阶连续的导数，且 $f'(1)=-2$，则 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\quad s\sqrt{x})}{dx}=$ ____

2.$\int\frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx=$ $\int\frac{\sin x}{(\cos x)^{\frac32}}dx=-\int\frac{d\cos x}{(\cos x)^{\frac32}}=2(\cos x)^{-\frac12}+C$

3.$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+4x+8}dx=$ $\int_0^{+\infty}\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+2^2}=\left[\frac12\arctan\frac{x+2}{2}\right]_0^{+\infty}=\frac12\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}$

$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ $x=\sin u$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2u\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2u}{2}du=\frac12\cdot\frac{\pi}{2}+\frac14\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos2u\,d2u=\frac{\pi}{4}+\frac14\cdot\sin2u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

4.$f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)dx$，则 $f(x)=$ $\frac{1}{1+x^2}+\frac{\pi}{4-\pi}\cdot\sqrt{1-x^2}$

数.

$\int_0^1f(x)dx=\arctan x\Big|_0^1+\frac{\pi}{4}\int_0^1f(x)dx$ $\frac{4-\pi}{4}\int_0^1f(x)dx=\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{4-\pi}$.

5.设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+bx)}{x}, & x\neq0\\ -1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导时，则 $f'(0)=$ $-\frac12$

6.极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=$ 0

$\lim\limits_{x\to0}\frac{bx}{x}=b=-1$. $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\frac{\ln(1-x)}{x}+1}{x}$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-x)+x}{x^2}=\frac{\frac{-1}{1-x}+1}{2x}=\frac{\frac{-x}{1-x}}{2x}=\frac{-1}{2}$

二、单项选择题（每小题3分，共18分）

$1+x=u$ $x=u-1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^2\frac{u^n-C_n^1u^{n-1}+C_n^2u^{n-2}\cdots+1}{u}du$

1.$x=0$ 是函数 $f(x)=\sin x\sin\frac1x$ 的（A）

（A）可去间断点 （B）跳跃间断点

（C）震荡间断点 （D）无穷间断点

2.下列结论中不正确的是（ ）C D

（A）曲线 $y=x^2-2x$ 在点 $(1,-1)$ 处的切线是水平的

$2x-2$

（B）曲线 $y=x-\cos x$ 在 $(0,-1)$ 处的切线与 x 轴的夹角为 $\frac{\pi}{4}$

$1+\sin x$

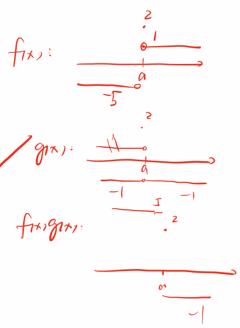
（C）曲线 $y=x^{\frac13}$ 在点 $(0,0)$ 处有切线 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^{\frac13}}{x}=\lim\limits_{x\to0}x^{-\frac23}$

（D）已知曲线 $y=f(x)$ 处处有切线，则函数 $f(x)$ 处处可导

3.函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $x=a$ 处取极大值，则 $f(x)g(x)$ 在 $x=a$ 处（ ）D

（A）必取极大值 （B）必取极小值

（C）不可能取极值 （D）是否取极值不能确定



4.设 $f(x)$ 具有连续的导数，则下列各式中正确的是（ ）D

（A）$\int f'(x)dx=f(x)$ （B）$\frac{d}{dx}\int f'(x)dx=f(x)+C$

（C）$\int f'(3x)dx=f(3x)+C$ （D）$\frac{d}{dx}\int f(3x)dx=f(3x)$

$-(1+x^2)$ $1-x^2$ $-(1-x^4)$

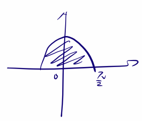
5.$\int_0^a x^3f(x^2)dx=$（ ）

（A）$\frac12\int_0^{a^2}xf(x)dx$ （B）$\int_0^a x^2f(x^2)dx^2$

（C）$\frac12\int_0^a xf(x)dx$ （D）$\frac12\int_0^a x^2f(x^2)dx^2$

6.曲线 $y=\cos x\left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$ 与 x 轴所围成的图形，绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为（ ）C

（A）$\frac{\pi}{2}$ （B）π （C）$\frac12\pi^2$ （D）π^2



$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\cos^2x\,dx$ $2\pi\cdot\frac12\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dx=\pi\cdot\frac{\pi}{2}$

$3\le\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n}\le\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3\cdot3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac1n}\cdot3=3$

三、计算题（每小题6分，共24分）

1.求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$. $\le\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n-2)(n-2)!+(n-1)!+n!}{n!}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n(n-1)}+\frac1n+1\right)=1$

夹逼

2. 若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac1x\right)^{2tx}\sin\frac1t$，求 $f'(t)$.

$f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac1x)^{x\cdot2t}\sin\frac1t=\sin\frac1t\cdot e^{2t}$

$f'(t)=-\frac{1}{t^2}\cos\frac1t\cdot e^{2t}+2e^{2t}\sin\frac1t$

3. 求 $\int\frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx$ $+C$.

原式 $=\int\frac{(xe^x+e^x)dx}{xe^x(1+xe^x)}=\int\frac{d(xe^x)}{xe^x(1+xe^x)}=\int\left(\frac{1}{xe^x}-\frac{1}{1+xe^x}\right)d(xe^x)=\ln(xe^x)-\ln(1+xe^x)+C$

4. 已知 $f(2)=\frac12, f'(2)=0$ 及 $\int_0^2f(x)dx=1$，求 $\int_0^1x^2f''(2x)dx$.

$\frac12\int_0^1x^2f''(2x)d(2x)=\frac12\int_0^1x^2df'(2x)=\frac12\left[[x^2f'(2x)]_0^1+\int_0^12xf'(2x)dx\right]=\frac12\left[2\cdot\frac12\int_0^1xf'(2x)d(2x)\right]=\frac12\int_0^1x\,df(2x)=\frac12\left[[xf(2x)]_0^1-\frac12\int_0^1f(2x)d2x\right]=\frac12\left[\frac12-\frac12\int_0^1f(2x)d2x\right]$

令 $2x=u$ $\frac14-\frac14\int_0^2f(u)du=0$.

四、综合题（每小题8分，共16分）

1.确定方程 $\ln x=\frac{x}{e}-\int_0^\pi\sqrt{1-\cos2x}dx$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内根的个数。

$\int_0^\pi\sqrt{1-\cos2x}dx=\int_0^\pi\sqrt{2\sin^2x}\,dx=\sqrt2\int_0^\pi|\sin x|dx=\sqrt2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi\cos x\,dx\right)=\sqrt2\left(\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi\right)=\sqrt2(1+1)=2\sqrt2$

$=\sqrt2[-\cos x]_0^\pi=2\sqrt2$

令 $\varphi(x)=\ln x-\frac{x}{e}+2\sqrt2$ $\varphi'(x)=\frac1x-\frac1e=\frac{e-x}{ex}$

x	$(0,e)$	$(e,+\infty)$
$\varphi'(x)$	+	-
$\varphi(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+}\varphi(x) = -\infty \\ &\varphi(e) = 1+2\sqrt{2} \\ &\lim_{x\to +\infty}\varphi(x) = -\infty \end{aligned}\right\}$ 2根

2.常数 a,b 各为何值时，有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{ax-\sin x}\displaystyle\int_0^x \dfrac{u^2}{\sqrt{b+3u}}du = 2.$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{\sqrt{b+3x}}}{a-\cos x} = 2$ $a=1.$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{\sqrt{b+3x}}}{\frac{1}{2}x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{b+3x}} = \dfrac{2}{\sqrt{b}} = 2$ $b=1.$

五、证明题（每小题8分，共16分）

1. 设 $x>0$，常数 $a>e$，证明 $(a+x)^a < a^{a+x}$.

$a\ln(a+x) < (a+x)\ln a \iff \dfrac{1}{a+x}\ln(a+x) < \dfrac{1}{a}\ln a.$

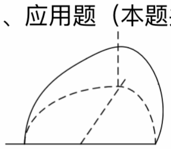
$\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)' = \dfrac{1-\ln x}{x^2}\ (x>e) < 0.$

$\because a+x > a$

$\therefore \dfrac{1}{a+x}\ln(a+x) < \dfrac{1}{a}\ln a$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，则在 $(0,1)$ 内至少存在 ξ,η 使得 $|f'(\xi)| \ge 2M$，$|f'(\eta)| \le 2M$，其中 $M = \max\{|f(x)|\}$.

六、应用题（本题共8分）



楔形体

设有一个正椭圆柱体，其底面的长、短轴分别为 $2a,2b$，用过此柱体底面的短轴且与底面成 α 角 $(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2})$ 的平面截此柱体，得如图的楔形体，求此楔形体的体积 V.