作业：第125页
11题奇数号
12题奇数号
13题奇数号

周一. 作业.

11. 计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D (3x+2y)\,d\sigma$，$D$ 是由直线 $x=0$，$y=0$ 及 $x+y=2$ 所围成的闭区域；

原式 $= \int_0^2 dx \int_0^{-x+2} (3x+2y)\,dy$

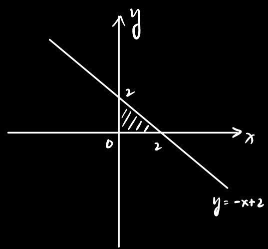
$= \int_0^2 \left[3x(-x+2) + (-x+2)^2\right] dy$

$= \int_0^2 (-2x^2+2x+4)\,dx$

$= -\frac{2}{3}x^3\Big|_0^2 + x^2\Big|_0^2 + 4x\Big|_0^2$

$= -\frac{16}{3} + 4 + 8$

$= \frac{20}{3}$



3) (3) $\iint\limits_D x\cos(x+y)\,d\sigma$，$D$ 是以点 $(0,0)$，$(\pi,0)$，(π,π) 为顶点的三角形闭区域；

原式 $= \int_0^\pi dx \int_0^x x\cos(x+y)\,dy$

$= \int_0^\pi x(\sin 2x - \sin x)\,dx$

$\because \int x\sin x\,dx = -\int x\,d\cos x = -x\cos x + \sin x$

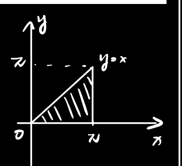
$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{4}\int_0^\pi 2x\sin 2x\,d2x - \int_0^\pi x\sin x\,dx$

$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} t\sin t\,dt - \int_0^\pi x\sin x\,dx$

$= \frac{1}{4}(\sin x - x\cos x)\Big|_0^{2\pi} - (\sin x - x\cos x)\Big|_0^\pi$

$= -\frac{1}{4}\cdot 2\pi + (-\pi)$

$= -\frac{3\pi}{2}$



(5) $\iint\limits_D xy\,d\sigma$，$D$ 是由 $x=1$，$y=1+x^2$，$x=1$，$y=1$ 及 $x=y^2$ 所围成的闭区域；
-1 -1

对于 D_1: $-1 \le y \le 1$ $-1 \le x \le y^2$

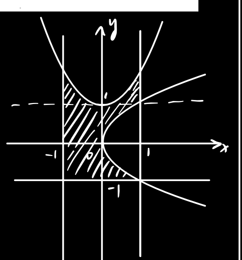
$\because D_1$ 关于x轴对称.

又 $\because f(x,y) = xy$

$f(x,-y) = -xy = -f(x,y)$

即 $f(x,y)$ 关于y是奇函数

$\therefore \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^{y^2} xy\,dx = 0$



对于 D_2: $-1 \le x \le 1$，$1 \le y \le x^2+1$

有 D_2 关于 y 对称

而 $f(x,y)$ 关于x是奇函数

$\therefore \int_{-1}^1 dx \int_1^{x^2+1} xy\,dy = 0$

$\therefore \iint\limits_D xy\,d\sigma = 0$

(7) $\iint\limits_D \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\,d\sigma$，$D$ 是由 $y=0$，$y=\sin x$ 及 $x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的闭区域；

原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sin x} \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dy$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$

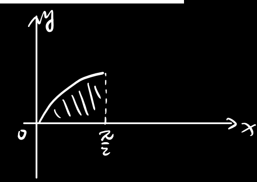
$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\,d\cos x$

$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}\,d(\cos^2 x+1)$

$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= -\frac{1}{3}\cdot\left(1 - 2^{\frac{3}{2}}\right)$

$= \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$



(9) $\iint\limits_D \frac{x}{y}\sqrt{1-\sin^2 y}\,d\sigma$，$D$ 是由 $x=\sqrt{y}$，$x=\sqrt{3y}$，$y=\frac{\pi}{2}$，$y=2\pi$ 所围成的闭区域.

原式 $= \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{3y}} \frac{x}{y}\sqrt{1-\sin^2 y}\,dx$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \frac{|\cos y|}{y}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2y\,dy$

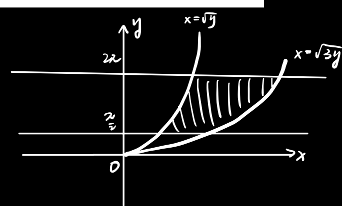
$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} |\cos y|\,dy$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -\cos y\,dy + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos y\,dy$

$= -\sin y\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \sin y\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$

$= -(-1-1) + 1$

$= 3$

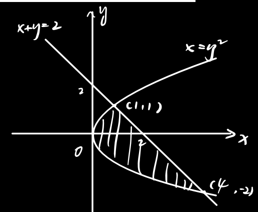


12. 把二重积分 $I = \iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$ 在直角坐标系中以两种不同的次序化为二次积分，其中 D 为

(1) $x=y^2$，$x+y=2$ 所围成的闭区域；

原式 $= \int_{-2}^1 dy \int_{y^2}^{2-y} f(x,y)\,dx$

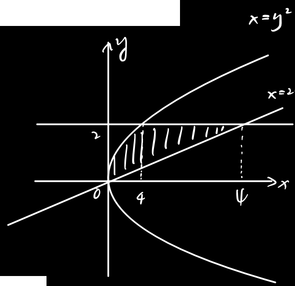
原式 $= \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy + \int_1^4 dx \int_{-\sqrt{x}}^{2-x} f(x,y)\,dy$



13. 交换下列二次积分的积分顺序：

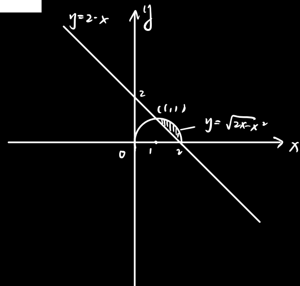
(1) $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,dx$；

$I=\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dx$



(3) $\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$；

$I=\int_0^1 dy\int_{2-y}^{\sqrt{1-y^2}+1} f(x,y)\,dx$



作业，P126
15。
16。 (2) (4)
18。 (1) (3)
19。 (1) (3)
20。

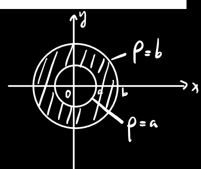
15. 利用极坐标计算下列二重积分：

(1) $\iint_D e^{x^2+y^2}d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid a^2\le x^2+y^2\le b^2\}$，$a>0$，$b>0$；

$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b e^{r^2}r\,dr$

$=\frac12\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b e^{r^2}dr^2$

$=\pi\left(e^{b^2}-e^{a^2}\right)$



?

(2) $\iint_D (x+y)^2 d\sigma$，$D=\{(x,y)\mid (x^2+y^2)^2\le 2a(x^2-y^2)\}$，$a>0$；

$D=\{(r,\theta)\mid r^2\le 2a\cos2\theta\}$

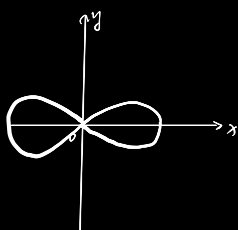
$I=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{2a\cos2\theta}} r^3\,dr$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2a\cos\theta)^2d\theta$

$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos2\theta+1)\,d\theta$

$=2a^2\left(\frac12\sin2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{\pi}{4}\right)$

$=a^2+\frac{\pi a^2}{2}$



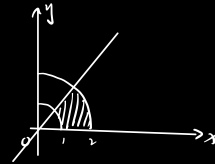
(3) $\iint_D \arctan\frac{y}{x}d\sigma$，$D$ 由圆周 $x^2+y^2=4$，$x^2+y^2=1$，及直线 $y=0$，$y=x$ 所围的在第一象限内的区域；

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_1^2 \arctan\left(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right)r\,dr$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_1^2\theta r\,dr$

$=\frac12\cdot\frac{\pi^2}{16}\cdot\frac12\cdot3$

$=\frac{3\pi^2}{64}$



(4) $\iint_D \rho^2 d\rho d\theta$，$D$ 是由 $x^2+y^2=a^2$，$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$ 及 y 轴所围的在第一象限的区域.

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{a\cos\theta}^a\rho^2\,d\rho$

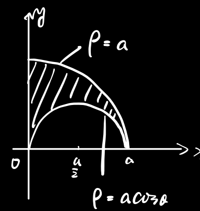
$=\frac13\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^3-a^3\cos^3\theta)\,d\theta$

$=\frac{a^3\pi}{6}-\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\,d\sin\theta$

$=\frac{\pi a^3}{6}-\frac{a^3}{3}\cdot\left(\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac13\sin^3\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$

$=\frac{\pi a^3}{6}-\frac{a^3}{3}\left(\frac23\right)$

$=\frac{\pi a^3}{6}-\frac{2a^3}{9}$



16. (2) $\iint_D (x+y)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le x+y\}$；

以圆心$(\frac12,\frac12)$为原点
建立极轴,如图

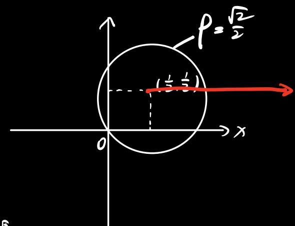
则 $x=r\cos\theta+\frac12$ $y=r\sin\theta+\frac12$

$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}} r(r\cos\theta+r\sin\theta+1)\,dr$

$=\int_0^{2\pi}\left[(\cos\theta+\sin\theta)\cdot\frac13r^3\Big|_0^{\frac{\sqrt2}{2}}+\frac12r^2\Big|_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\right]d\theta$

$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{6\sqrt2}(\cos\theta+\sin\theta)+\frac14\right]d\theta$

$=\frac14\cdot2\pi=\frac{\pi}{2}$



(4) $\iint_D\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}d\sigma$，其中 D：$x^2+y^2\le ax(0<a<1)$.

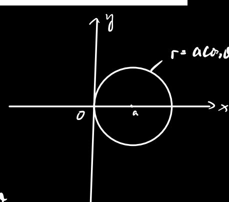
$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\cdot r\,dr$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{1-r^2}{\sqrt{1-(r^2)^2}}dr^2$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\arcsin r^2\Big|_0^{a\cos\theta}+\frac12\int_0^{a\cos\theta}\frac{d(1-r^4)}{\sqrt{1-r^4}}\right)d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\arcsin(a^2\cos^2\theta)+\sqrt{1-r^4}\Big|_0^{a\cos\theta}\right)d\theta$

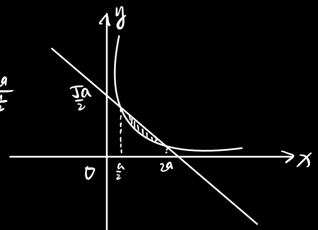
$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\arcsin(a^2\cos^2\theta)+\sqrt{1-a^4\cos^4\theta}\right)d\theta$



18. 求下列各组曲线所围成图形的面积：

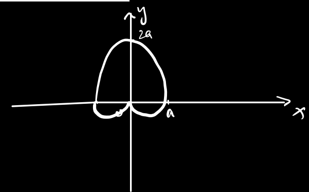
（1） $xy=a^2$，$x+y=\frac{5}{2}a$ （$a>0$）；

$$S=\int_{\frac{a}{2}}^{2a}\left(\frac{5}{2}a-x-\frac{a^2}{x}\right)dx$$
$$=\frac{5}{2}a\cdot\frac{3a}{2}-\frac{1}{2}\left(4a^2-\frac{a^2}{4}\right)-a^2\ln\frac{2a}{\frac{a}{2}}$$
$$=\frac{15a^2}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{15a^2}{4}-2a^2\ln 2$$
$$=a^2\left(\frac{15}{8}-2\ln 2\right)$$



（3） $\rho=a(1+\sin\theta)$ （$a\geqslant 0$）.

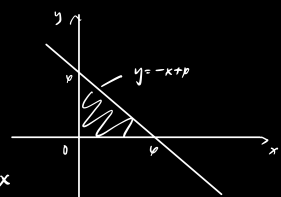
$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2(1+\sin\theta)^2d\theta$$
$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\sin^2\theta+2\sin\theta)d\theta$$
$$=\frac{a^2}{2}\left(2\pi+\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta\right)$$
$$=\frac{a^2}{2}(2\pi+\pi)=\frac{3a^2\pi}{2}$$



19. 求下列各组曲面所围成立体的体积：

（1） $z=x^2+y^2$，$x+y=4$，$x=0$，$y=0$，$z=0$；

$$V=\int_0^4dx\int_0^{-x+4}(x^2+y^2)dy$$
$$=\int_0^4\left[x^2(4-x)+\frac{1}{3}(4-x)^3\right]dx$$
$$=\int_0^4\left(-\frac{4}{3}x^3+\frac{16}{3}x^2-16x+\frac{64}{3}\right)dx$$
$$=-\frac{16^2}{3}+\frac{16\times 64}{9}-8\times 16+\frac{64\times 4}{3}$$
$$=\frac{128}{3}$$



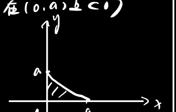
（3） $z=xy$，$z=0$，$x+y=1$.

$$V=\int_0^1dx\int_0^{1-x}(xy)dy$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1x(1-x)^2dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1(x^3-2x^2+x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{24}$$

20. 证明：曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}(a>0)$与三个坐标面所围成的立体的体积为一定值.

$z=0$ 时 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}\Rightarrow y=x+a-2\sqrt{ax}$ （y'在$(0,a)$上<0）

$$V=\int_0^adx\int_0^{x+a-2\sqrt{ax}}(\sqrt{a}-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2dy$$
$$=\int_0^adx\int_0^{x+a-2\sqrt{ax}}(a+x+y-2\sqrt{ax}-2\sqrt{ay}+2\sqrt{xy})dy$$
$$=\int_0^a\left[(a+x-2\sqrt{ax})(x+a-2\sqrt{ax})+\frac{1}{2}(x+a-2\sqrt{ax})^2+(2\sqrt{x}-2\sqrt{a})\frac{1}{2\sqrt{x+a-2\sqrt{ax}}}\right]dx$$



$$=\int_0^a\left((\sqrt{x}-\sqrt{a})^4\cdot\frac{3}{2}+1\right]dx$$

$\sqrt{x}-\sqrt{a}=t$，$x=(\sqrt{a}+t)^2$

$$\frac{3}{2}\int_{-\sqrt{a}}^0t^4\cdot 2(\sqrt{a}+t)dt+a$$
$$=3\left(\sqrt{a}\cdot\frac{1}{5}(-\sqrt{a}^5)+\frac{1}{6}\cdot\sqrt{a}^6\right)+a$$
$$=a-\frac{a^3}{10}$$

作业P42

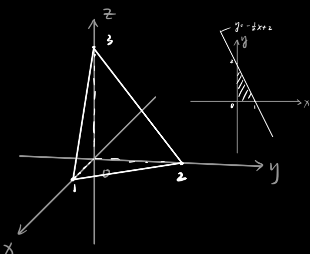
1, （1） （3）

3, （1（ （3） （5）

1. 化三重积分$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$为三次积分，其中积分区域分别是：

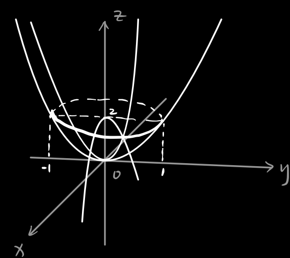
（1） 由平面$x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$与各坐标面围成的区域；

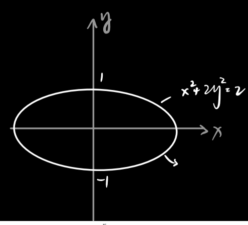
$$I=\int_0^3dz\iint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dxdy$$
$$=\int_0^3dz\int_0^1dx\int_0^{-\frac{1}{2}x+2}f(x,y,z)dy$$



（3） 由曲面$z=x^2+2y^2$及平面$z=2-x^2$所围成的闭区域；

$$I=\iint\limits_{D}d\sigma\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2}f(x,y,z)dz$$
$$=\int_{-1}^1dy\int_{-\sqrt{2-2y^2}}^{\sqrt{2-2y^2}}dx\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2}f(x,y,z)dz$$





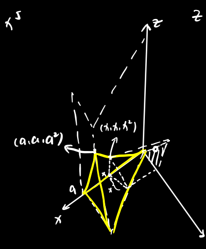
3. 计算下列三重积分：

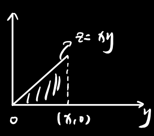
（1） $\iiint\limits_{\Omega}x^3y^2\mathrm{d}v$，$\Omega$由$z=0$，$z=xy$，$y=x$，$x=a(a>0)$所围成；

$$I=\int_0^adx\iint\limits_{D}x^3y^2ds$$

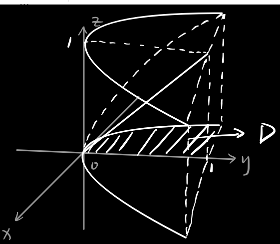
$x^3\cdot x^5$

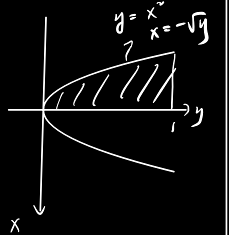
$$=\int_0^adx\int_0^xdy\int_0^{xy}x^3y^2dz$$
$$=\int_0^adx\int_0^xx^4y^3dy$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^ax^8dx$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{9}\times a^9=\frac{a^9}{36}$$





(3) $\iiint\limits_{\Omega} xz\,dx\,dy\,dz$，$\Omega$ 是由 $z=0$，$z=y$，$y=1$ 及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域；





$$I=\iint_D ds\int_y^1 xz\,dz$$

$$=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^0 dx\int_y^1 xz\,dz$$

$$=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^0 \frac{1}{2}x(1-y^2)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (1-y^2)\left(-\frac{1}{2}y\right)dy$$

$$=\frac{-1}{4}\left(\frac{1}{2}y^2\Big|_0^1-\frac{1}{3}y^3\Big|_0^1\right)$$

$$=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}$$

$$=-\frac{1}{24}$$

(5) $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dx\,dy\,dz$，$\Omega$ 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$z=1$，$z=2$ 所围成；

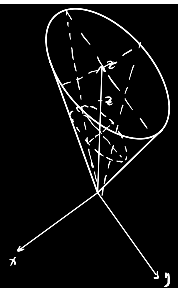
$$I=\int_1^2 dz\iint_D\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dx\,dy$$

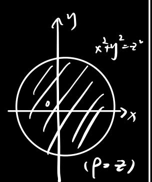
其中

$$\iint_D\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^z e^r\,dr$$

$$=2\pi(e^z-1)$$





$$\therefore I=2\pi\int_1^2(e^z-1)\,dz=2\pi\left(e^2-e-(2-1)\right)$$

$$=2\pi(e^2-e-1)$$