§4.2 方差

引例 甲、乙两射手各打了10发子弹，每发子弹 击中的环数分别为：

甲	10, 6, 7, 10, 8, 9, 9, 10, 5, 10
乙	8, 7, 9, 10, 9, 8, 7, 9, 8, 9

问哪一个射手的技术较好?

解 首先比较平均环数 $\overline{甲} = 8.4$, $\overline{乙} = 8.4$

再比较稳定程度

甲：$4\times(10-8.4)^2+2\times(9-8.4)^2+(8-8.4)^2+(7-8.4)^2+(6-8.4)^2+(5-8.4)^2=30.4$

乙：$(10-8.4)^2+4\times(9-8.4)^2+3\times(8-8.4)^2+2\times(7-8.4)^2=6.44$

进一步比较平均偏离平均值的程度

甲 $$\frac{1}{10}\{4\times(10-8.4)^2+2\times(9-8.4)^2+(8-8.4)^2$$
$$+(7-8.4)^2+(6-8.4)^2+(5-8.4)^2\}$$
$$=3.04=\sum_{k=1}^{6}\left(x_k-E(X)\right)^2 p_k$$

乙 $$\frac{1}{10}\{(10-8.4)^2+4\times(9-8.4)^2$$
$$+3\times(8-8.4)^2+2\times(7-8.4)^2\}$$
$$=0.644=\sum_{k=1}^{4}\left(x_k-E(X)\right)^2 p_k$$

方差的概念

定义 若$E((X - E(X))2)$ 存在，则称其为随

机变量 X 的**方差**，记为$D(X)$

$$D(X) = E((X - E(X))2)$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为X的**均方差**.

$(X - E(X))2$ —— 随机变量X的取值偏离平均

值的情况，是 X 的函数，也是**随机变量**

$E(X - E(X))2$ —— 随机变量X的取值偏离平

均

若 X 为离散型 **r.v.**，概率分布为

$$P(X = x_k) = p_k, \quad k = 1,2,\cdots$$

$$D(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(x_k - E(X)\right)^2 p_k$$

若 X 为连续型，概率密度为 $f(x)$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(X)\right)^2 f(x)dx$$

常用的计算方差的公式：

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

方差的性质

- $D(C) = 0$
- $D(aX) = a2D(X)$

$D(aX + b) = a2D(X)$

- $$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big)$$

特别地，若X, Y相互独立，

则

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

若 $X_1, X_2, \boxed{?}, X_n$ 相互独立, $a_1, a_2, \boxed{?}, a_n, b$ 为常数

则 $$D\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D(X_i)$$

若 X, Y 独立 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$

$\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $E(XY) = E(X)E(Y)$

- 对任意常数 C, $D(X)$ □ $E(X - C)2$,
  当且仅当 $C = E(X)$ 时等号成立
- $D(X) = 0 \Longleftrightarrow P(X = E(X)) = 1$

称为 X 依概率 1 等于常数 $E(X)$

常见随机变量的方差

分布	概率分布	方差
参数为p 的 0-1分布	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	$p(1\text{-}p)$
$B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\boxed{?},n$	$np(1\text{-}p)$
$P(\square)$	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k=0,1,2,\boxed{?}$	$\square$

分布	概率密度	方差
区间(a,b)上的均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & 其它\end{cases}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
E(□)	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & 其它\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
N(□,□2)	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	σ^2

例4 已知X,Y相互独立，且都服从 $N(0,0.5)$，求 $E(|X-Y|)$.

解

$$X \sim N(0,0.5), Y \sim N(0,0.5)$$

$$E(X-Y)=0, D(X-Y)=1$$

故

$$X-Y \sim N(0,1)$$

$$E(|X-Y|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

例5 在 [0, 1] 中随机地取两个数 X, Y，求

$D(\min\{X, Y\})$

解

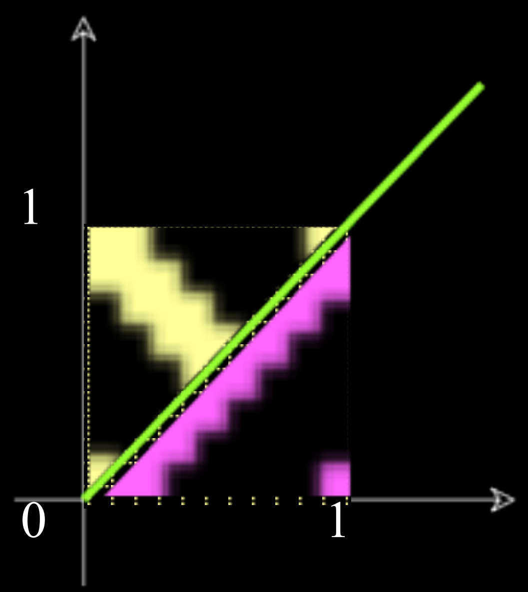
$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$E(\min\{X,Y\})$$

$$=\iint\limits_{\substack{0<x<1\\0<y<1}} \min\{x,y\}\,dxdy$$

$$=\int_0^1\left(\int_x^1 x\,dy\right)dx+\int_0^1\left(\int_y^1 y\,dx\right)dy$$

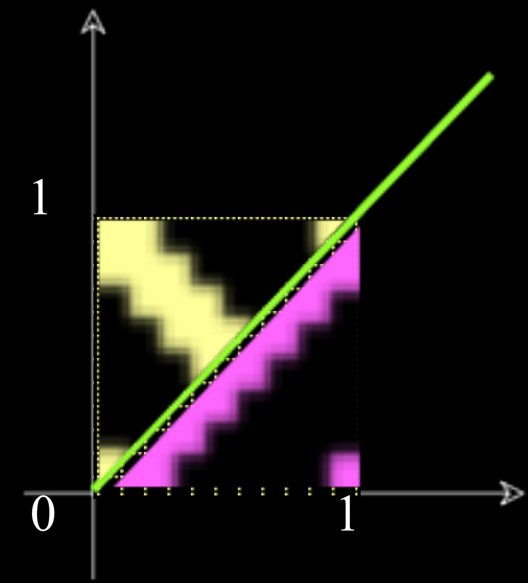
$$=\frac{1}{3}$$



$$E(\min{}^2\{X,Y\})$$

$$=\int_0^1\left(\int_x^1 x^2 dy\right)dx+\int_0^1\left(\int_y^1 y^2 dx\right)dy$$

$$=\frac{1}{6}$$



$$D(\min\{X,Y\})$$

$$=E\left(\min{}^2\{X,Y\}\right)-E^2\left(\min\{X,Y\}\right)$$

$$=\frac{1}{18}$$

例6 将 编号分别为 $1 \sim n$ 的n 个球随机地放入编号分别为 $1 \sim n$ 的n 只盒子中，每盒一球．若球的号码与盒子的号码一致，则称为一个配对．求配对个数 X 的期望与方差．

解

$$X_i = \begin{cases} 1, & i \text{ 号球放入 } i \text{ 号盒} \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \qquad i = 1,2,\boxed{?},n$$

则 $$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

但 $X_1, X_2, \boxed{?}, X_n$ 不相互独立，

X_i	1	0
P	$\frac{1}{n}$	$1-\frac{1}{n}$

$i=1,2,\boxed{?},n$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=n\cdot\frac{1}{n}=1$$

$$E(X^2)=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}^{n}X_iX_j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)+2\sum_{1\le i<j\le n}^{n}E(X_iX_j)$$

X_i^2	1	0
P	$\frac{1}{n}$	$1-\frac{1}{n}$

$$E(X_i^2)=\frac{1}{n}$$

$$i=1,2,\boxed{?},n$$

X_iX_j	1	0
P	$\frac{1}{n(n-1)}$	$1-\frac{1}{n(n-1)}$

$$E(X_iX_j)=\frac{1}{n(n-1)}$$

$$i,j=1,2,\boxed{?},n$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)+2\sum_{1\le i<j\le n}^{n}E(X_iX_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}+2\sum_{1\le i<j\le n}^{n}\frac{1}{n(n-1)}=n\cdot\frac{1}{n}+2\cdot C_n^2\cdot\frac{1}{n(n-1)}=2$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=1$$

标准化随机变量

设随机变量 X 的期望$E(X)$、方差$D(X)$都存在,
且$D(X) > 0$, 则称

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

为 X 的标准化随机变量. 显然,

$$E(X^*) = 0, \quad D(X^*) = 1$$

仅知随机变量的期望与方差并不能确定其分布,

例如:

X	-1	0	1
P	0.1	0.8	0.1

$$E(X)=0, D(X)=0.2$$

与

Y	-2	0	2
P	0.025	0.95	0.025

$$E(Y)=0, D(Y)=0.2$$

它们有相同的期望、方差但是分布却不同

作业习题三

A组：12、13、17、18