4:35..

$\frac{-\infty}{e^{bx}}=0$　　$\frac{x}{e^{-x}}$ $(x\to-\infty)$

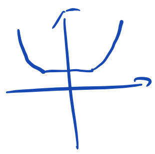
$b<0$.

1.设函数$f(x)=\frac{x}{a+e^{bx}}$在R内连续，且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则（D）
（A）$a>0,b<0$.（B）$a>0,b>0$.（C）$a\ge0,b>0$.（D）$a\ge0,b<0$.

2.设$x_n\le z_n\le y_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}z_n$（C）
（A）~~存在且等于~~零　　（B）存在但不一定等于零
（C）不一定存在　　（D）~~一定不存~~在

3.设x_n与y_n满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列断言正确的是（D）
（A）若x_n发散，则y_n必发散 X　（B）若x_n有界，则y_n必有界 X.
（C）若x_n有界，则y_n必为无穷小 0.　（D）若$\frac{1}{x_n}$为无穷小，则y_n必为无穷小
$x_n\to\infty$.

4.设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上（C）
（A）处处可导　　（B）恰有一个不可导点
（C）恰有两个不可导点　　（D）恰有三个不可导点



5.当$x\to0$时$(\tan x-\sin x)\ln\cos x$是x的（B）阶无穷小.
（A）4.　（B）5.　（C）6.　（D）7.

$x\to0$ $\cos x>0$.

$s\left(\frac{1}{c}-1\right)\frac{1}{2}\ln(1-s^2)$

$\sim\frac{s(1-c)\frac{1}{2}\ln(1-s^2)}{cx^k}=0.$

$\sim\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{2}(-s^2)}{cx^k}=\frac{-\frac{1}{4}x^5}{cx^k}.$

6.下列函数中在$[1,+\infty)$无界的是（C）
(A) $f(x)=2x\sin\frac{1}{x}$　(B) $f(x)=\arctan x+\frac{x^2+1}{x}\sin\frac{1}{x}$
(C) $f(x)=x\cos\sqrt{x}+2^xe^{-x}$　(D) $f(x)=\frac{x^2}{2x^2+1}\arctan x$.

二、填空题（每小题3分，共18分）

1.极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}=$ 7 .

2.已知$\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sin2x)^\alpha}{x^3}$存在，则$\alpha$的取值范围是 $[3,+\infty)$.

3.设函数$y=y(x)$由$\begin{cases}x=1+t^2\\y=\cos t\end{cases}$所确定，则$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=$ $\cancel{\frac{2}{(\pi+1)^3}}$.　$\frac{2}{\pi^3}$

$\frac{-s}{2t+1}\Rightarrow\frac{\cdots}{(2t)^2}$ / $2t$.

4.设$x_n=4\left[\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\boxed{?}+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}\right]$，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n$ $\cancel{1}$.　$\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$

$e^{\sin x\ln(1+x^2)}$

5.设$y=(1+x^2)^{\sin x}$，则$y'=$ $(1+x^2)^{\sin x}[\cos x(1+x^2)+2x\sin x]$.

$(1+x^2)^{\sin x}\left(\cos x\ln(1+x^2)+\frac{2x\sin x}{1+x^2}\right)$

6.$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，$f(x)\ne0$，且$\forall x,y$有
$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$，则函数$f(x)$的奇偶性为 偶 .

三、计算题（每小题7分，共28分）

1.　求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$

洛必达：$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-x-1-x}{4x(\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$=-\frac{1}{4}$

2.　求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\pi+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\arctan\frac{1}{x}\right).$

$\frac{\pi}{2}$

3.设$y=\sec2x\cdot\arctan\frac{1}{x}$，求$y'$

$y'=\frac{2\sin2x}{\cos^22x}\arctan\frac{1}{x}+\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}\sec2x$

$=2\sin2x\sec^22x\arctan\frac{1}{x}-\frac{\sec2x}{x^2+1}$

4. $f(x)=\frac{|x-2|\cdot\ln|x|}{\cdots}$

4.求 $f(x)=\frac{|x-2|\cdot\ln|x|}{x^2-3x+2}$ 的间断点，并指出其类型.

$$f(x)=\frac{|x-2|\ln|x|}{(x-1)(x-2)}=\begin{cases}\frac{\ln|x|}{x-1} & x>2\\ -\frac{\ln|x|}{x-1} & x<2.\end{cases}$$

$x=0,1,2,$ 为其间断点.

∵ $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\infty$ ∴ $x=0$ 为无穷型间断点.

∵ $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{-\ln x}{x-1}$ 由洛必达法则 $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{-\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{-\frac{1}{x}}{1}=-1$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-\ln x}{x-1}$ 同理得 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-1=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$

∴ $x=1$ 为可去间断点.

∵ $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{\ln x}{x-1}$ 由洛必达法则 $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{-\ln x}{x-1}$ 同理: $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=-\frac{1}{2}\neq\lim\limits_{x\to2^+}f(x)$ ∴ $x=2$ 为跳跃间断点.

四、综合题（每小题8分，共16分）

1.已知 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}+ax+b)=1$, 求常数 a,b.

$(\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b))$

原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+a+\frac{b}{x}}{\frac{1}{x}}=1$

∵ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ ∴ $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a+\frac{b}{x})=1+a=0\Rightarrow a=-1$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x+1-(a^2x^2+2abx+b^2)}{\sqrt{\cdots}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\underbrace{(1-a^2)}_{=0}x^2+(-1-2ab)x+1-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)}=0.$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-1-2b)+\frac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-(1+\frac{b}{x})}=\frac{-1-2b}{-2}=1\qquad 1+2b=2\qquad b=\frac{1}{2}.$$

2.设 $f(x)=2x^3+x^2|x|$,讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性,是几阶可导?

$$f(x)=\begin{cases}3x^3 & x\geq0\\ x^3 & x<0.\end{cases}$$

∵ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$ ∴ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$\begin{cases}f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0^+}3\Delta x^2=0\\ f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\Delta x^2=0\end{cases}\Rightarrow f(x)\text{在}x=0\text{处可导}.$$

$$f'(x)=\begin{cases}9x^2 & x\geq0\\ 3x^2 & x<0\end{cases}$$ 在R上连续，$f'(0)=0$.

$$\begin{cases}f''_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to0^+}9\Delta x=0\\ f''_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to0^-}3\Delta x=0\end{cases}\Rightarrow f'(x)\text{在}0\text{处可导}$$

$$f''(x)=\begin{cases}18x & x\geq0\\ 6x & x<0\end{cases}$$ 在R上连续 $f''(0)=0$

$$\begin{cases}f'''_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to0^+}18=18\\ f'''_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to0^-}6=6\end{cases}\Rightarrow f''(x)\text{在}0\text{处不可导}.$$

∴ $f(x)$ 在0处为二阶可导.

五、证明题（每小题7分，共14分）

1.设 $x_n = \frac{n^{10}}{3^n}$. 证明：极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求此极限值.

x_n 在 $\left[\frac{1}{\sqrt[10]{3}-1}\right]$ 以后 $\downarrow$　$x_n > 0$.

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10} \cdot \frac{1}{3}$　　$x_{n+1} = \frac{x_n (n+1)^{10}}{3n^{10}}$.

$A = \frac{A(n+1)^{10}}{3n^{10}} \Rightarrow A = 0$.

2.若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数，$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$，证明：$\exists \xi \in [a,b]$ 使 $f'(\xi) = \frac{f'(x_1) + f'(x_2) + \cdots + f'(x_n)}{n}$.

$f'(x)$ 连续 $\longrightarrow$ 介值定理

六、应用题（共6分）

证明：双曲线 $xy = a^2$ 上任意一点的切线与两坐标轴构成的三角形的面积为定值。