姓名　　学号　　年级　　专业、班　　学院

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密　　封　　线

重庆大学《高等数学 1》(电子信息类)课程试卷

◉ A卷　○ B卷

2019 — 2020 学年　第 1 学期

开课学院：数统　课程号：MATH10012　考试日期：202001

考试方式：○开卷 ◉闭卷 ○其他　考试时间：120 分钟

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得 分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

2.考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

4:21

一、单项先择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设 $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{ax+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)=b$，其中 a,b 为常数，则（ B ） B

$x^3+1-3(ax+1)$　$x^3-3ax-2$　$-1+3a-2=0$　$a=1$

$(ax+1)(x^3+1)$

（A）$a=1,b=1$　　（B）$a=1,b=-1$

$\dfrac{3x^2-3}{x^3+1+3x^2(x+1)}$　$4x^3+3x^2$　$\dfrac{6x}{12x^2+6x}=\dfrac{1}{2x+1}=-1$　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cdots}{x}=\dfrac{f(0)}{1}$

（C）$a=-1,b=1$　　（D）$a=-1,b=-1$

2. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)du$ 的（ A ）

（A）可去间断点　（B）跳跃间断点　（C）连续点　（D）第二类间断点

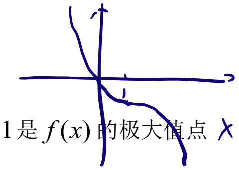
3. 函数 $f(x)=\dfrac{x|x|}{(x-1)(x-2)}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有（ D ）

1, 2.

（A）1 条铅直渐近线，1 条水平渐近线　（B）1 条铅直渐近线，2 条水平渐近线

（C）2 条铅直渐近线，1 条水平渐近线　（D）2 条铅直渐近线，2 条水平渐近线

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x-x, & x\ge1\\ x^2-2x, & x<1\end{cases}$，则（ C ）



（A）$x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点 ✗　（B）$x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点 ✗

（C）$(1,f(1))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点　（D）不能判定 $f(1)$ 是否为 $f(x)$ 的极值

5. 积分 $\int_0^{-\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{1+e^{-x}}}=$（ A ）

$1+e^{-x}=t$　$x=\ln(t-1)=-\ln(t-1)$

$\int \dfrac{e^{\frac12x}}{\sqrt{e^x+1}}dx=2\int_0^{-\infty}\dfrac{e^{\frac12x}d(\frac12x)}{\sqrt{1+e^x}}$　$\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

（A）$\ln\dfrac{(\sqrt2-1)^2}{\sqrt2+1}$　（B）$\ln\dfrac{\sqrt2+1}{\sqrt2-1}$　$=2\int_0^{-\infty}\dfrac{de^{\frac12x}}{\sqrt{1+(e^{\frac12x})^2}}$

（C）$-2\ln(\sqrt2+1)$ $=2\ln\dfrac{1}{\sqrt2+1}$　（D）$\ln(\sqrt2+1)$

$2\ln\left|\sqrt{1+e^x}+e^{\frac12x}\right|\Big|_0^{-\infty}$　$2(\ln(1)-\ln(\sqrt2+1))=-2\ln(\sqrt2+1)$

6. 当 $x\to0$ 时下列无穷小中阶数最高的是（ C ）

（A）$(1+x)^{x^2}-1$　（B）$e^{x^5-2x}-1$　（C）$\int_0^{x^2}(e^{t^2}-1)dt$　（D）$\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}$

$e^{x^2\ln(1+x)}-1\sim x^2\ln(1+x)\sim x^3$　x^5-2x　$\dfrac{(e^{x^4}-1)\cdot2x}{x^{k-1}}$　$\frac12\cdot2x$

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(e^{\frac1n}+e^{\frac2n}+\cdots+e^{\frac nn})=$ ______　$e-1$

$\sum_{i=1}^{n}e^{\frac in}$　$\int_0^1 e^x dx$

2 定积分 $\int_{-1}^{3}\dfrac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}dx=$ ______　$2\ln3$

$\sqrt{x+1}=u$　$x=u^2-1$　$\int_0^2$

3. 椭圆 $x=a\cos t, y=b\sin t$（$a>b>0$）在 $t=\pi$ 处的曲率为 ______　$\dfrac{a}{b^2}$

4. 设 $f(x)=x^3\sin3x$，则 $f^{(2020)}(0)=$ ______　$f^{(2020)}(0)=6C_{2020}^3 3^{2017}$

$f^{(2020)}(x)=(x^3)^{(3)}\cdot(\sin3x)^{(2017)}\cdot C_{2020}^3=6C_{2020}^3\cdot3^{2017}$

5. 设 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x f(x-u)\cdot5^u du=x^2$，则 $f(x)=$ ______　$2x-\ln5\cdot x^2$

6. 定积分 $\int_{-1}^{1}[(e^x-e^{-x})\cos x+x^2]dx=$ ______　$\dfrac{2}{3}$

$\int_0^1[(e^x-e^{-x})\cos x+x^2]+[(e^{-x}-e^x)\cos x+x^2]dx$

$=2\int_0^1x^2dx=2\cdot\frac13x^3\Big|_0^1=\frac23$

命题人：

组题人：

审题人：

命题时间：

教务处制

三、计算题（每小题 7 分，共 28 分）

1.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{e^{x^2}-1}}$.

$= \lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{(\cos x-1)}{e^{x^2}-1}}$

$1-\frac{x^2}{2}-1$

$= \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\cos x-1}{e^{x^2}-1}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}}$

$= e^{-\frac{1}{2}}$

2. 设 $y=y(x)$ 由方程 $\sin x-\int_x^y \varphi(u)du=0$ 确定，$\varphi(0)=\varphi'(0)=1$ 且可导函数 $\varphi(u)>0$，求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

解：当 $x=0$ 时，$y=0$。（1分）

$\cos x-\varphi(y)\cdot y'+\varphi(x)=0$. $x=0$ 时 $y=0$. $0=1-y'+1\Rightarrow y'=2$

等式 $\sin x-\int_x^y\varphi(u)du=0$ 两端对 x 求导得

$-\sin x-(\varphi'(y)(y')^2+y''\varphi(y))+\varphi'(x)=0$

$\cos x-\varphi(y)\cdot y'+\varphi(x)=0\Rightarrow y'(0)=2$（2分）

$x=0\Rightarrow -(\varphi'(0)(y')^2+y''\varphi(0))=2+\varphi'(x)$

等式 $\cos x-\varphi(y)\cdot y'+\varphi(x)=0$ 两端再对 x 求导得

$-(4+y'')+1=0 \Rightarrow y''=-3$

$-\sin x-\varphi'(y)(y')^2-\varphi(y)y''+\varphi'(x)=0\Rightarrow y''(0)=-3$ （3分）

3. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\tan x-x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\sin(\frac{\pi}{4}-x)\tan 2x\right]$，求正常数 a 的值。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\tan x-x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{(\sec^2 x-1)\sqrt{a+x}}=\frac{1}{\sqrt{a}}$ （3分）

$(\tan x)'=\sec^2 x$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\sin(\frac{\pi}{4}-x)\tan 2x\right]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(\frac{\pi}{4}-x)}{\cos 2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\cos(\frac{\pi}{4}-x)}{-2\sin 2x}=\frac{1}{2}$ （3分）

所以，由 $\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{2}$ 知 $a=4$ （1分）

4.计算定积分 $\int_0^1\frac{2x\arctan x}{(2-x^2)^2}dx.$

解：$\int_0^1\frac{2x\arctan x}{(2-x^2)^2}dx=\int_0^1\arctan x\cdot d\frac{1}{2-x^2}$

$=\left[\frac{1}{2-x^2}\arctan x\right]_0^1-\int_0^1\frac{dx}{(2-x^2)(1+x^2)}$ （2分） 积化和差

$\frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}\cdot -\frac{1}{t^2}$

$\frac{1}{t^2+1}$

$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\int_0^1(\frac{1}{2-x^2}+\frac{1}{1+x^2})dx$ （2分）

$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}+\arctan x\right]_0^1$ （2分）

$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}(\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)$ （1分）

四、综合题（每小题 8 分，共 16 分）

1.设 $f(x)$ 是以 4 为周期的可导函数，$f(1)=\frac{1}{4}$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-4x)-f(1+2x)}{x}=12$，求 $y=f(x)$ 在 $(5,f(5))$ 处的法线方程。

解：由 $12=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-4x)-f(1+2x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-4x)-f(1)-[f(1+2x)-f(1)]}{x}$

$=-4\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-4x)-f(1)]}{-4x}-2\lim\limits_{x\to 0}\frac{[f(1+2x)-f(1)]}{2x}$

$=-4f'(1)-2f'(1)=-6f'(1)$

得 $f'(1)=-2$。　（4 分）

因为 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数，所以 $f(4+x)=f(x)\Rightarrow f'(4+x)=f'(x)$，

从而 $f(5)=f(1)=\frac{1}{4}, f'(5)=f'(1)=-2$，（3 分）

故 $y=f(x)$ 在 $(5,f(5))$ 处的法线方程为：$y-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}(x-5)$，或 $y=\frac{1}{2}x-\frac{9}{4}$.（2 分）

2.设曲线 L 的方程为 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x(1\le x\le e)$。

（Ⅰ）求 L 的弧长；

（Ⅱ）设 D 是由曲线 L，直线 $x=1,x=e$ 及 x 轴所围平面图形，求 D 的面积。

(1) $ds=\sqrt{1+(y')^2}\,dx$

解：（Ⅰ）$y'=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$，则 L 的弧长

$s=\int_1^e\sqrt{1+(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x})^2}\,dx=\int_1^e\sqrt{1+\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2}}\,dx$

$s=\int_1^e\sqrt{1+(y')^2}dx=\frac{1}{2}\int_1^e(x+\frac{1}{x})dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2+\ln x\right]_1^e=\frac{1}{4}(e^2+1)$　（4 分）

$=\int_1^e(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x})dx=\frac{1}{4}x^2\Big|_1^e+\frac{1}{2}\ln x\Big|_1^e=\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$

$=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$

（Ⅱ）面积 $A=\int_1^e(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x)dx=\left[\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{2}x\ln x+\frac{1}{2}x\right]_1^e=\frac{1}{12}e^3-\frac{7}{12}$　（4 分）

(2) $\int_1^e \frac{1}{4}x^2$

五、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

1..设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3, f(3)=1$，证明存在 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

在 $[0,2]$ 上 $\exists m, M$ 有 $f(x)\in[m,M]$

则 $f(1)+f(2)+f(3)=3\in[3m,3M]$

$\therefore$ $m\le 1\le M$. 由介值……

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可微，$\forall x\in[a,b], f'(x)>0, f''(x)>0$.证明：

$$\int_a^b f(x)dx<\frac{b-a}{2}(f(b)+f(a)).$$

$\varphi(x)=\int_a^x f(x)dx-\frac{x-a}{2}(f(x)+f(a))$　$(x>a)$

$\varphi'(x)=f(x)-\frac{1}{2}\left[(f(x)+f(a))+(x-a)f'(x)\right]$

$=\frac{1}{2}f(x)-\frac{x-a}{2}f'(x)-\frac{1}{2}f(a)$

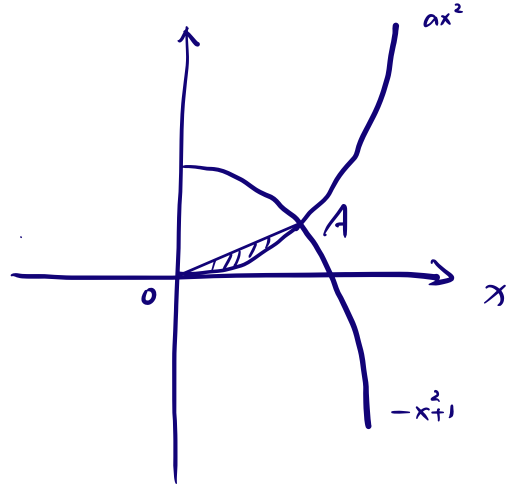
$\varphi''(x)=\frac{1}{2}f'(x)-\frac{1}{2}\left[f'(x)+(x-a)f''(x)\right]=-\frac{x-a}{2}f''(x)\le 0$

$\therefore$ $\varphi'(x)\downarrow$　$\varphi'(x)\le\varphi'(a)=0$　$\varphi(x)\downarrow$　$\varphi(x)<\varphi(a)=0$

六、应用题（共 6 分）

设曲线 $y=ax^2(a>0,x\ge 0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 A，过坐标原点和点 A 的直线与曲线

$y=ax^2$ 围成一平面图形，问 a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转一周的体积为最大？



$$\begin{cases} ax^2=y \\ 1-x^2=y \end{cases} \Rightarrow ax^2+x^2=1 \quad x^2=\frac{1}{a+1} \quad x=\sqrt{\frac{1}{a+1}} \quad y=\frac{a}{a+1}$$

$$l_{OA}: y=\frac{\frac{a}{a+1}}{\sqrt{\frac{1}{a+1}}}x=\frac{a}{\sqrt{a+1}}x$$

$$(a+1)^{-1}\cdot(a+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$V_1=\int_0^{\sqrt{\frac{1}{a+1}}}\pi y_1^2\,dx=\pi\int_0^{\sqrt{\frac{1}{a+1}}}\frac{a^2}{a+1}x^2\,dx=\frac{a^2\pi}{a+1}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\sqrt{\frac{1}{a+1}}}=\frac{a^2\pi}{3(a+1)}\left(\sqrt{\frac{1}{a+1}}\right)^3=\frac{a^2\pi}{3}\cdot(a+1)^{-\frac{5}{2}}$$

$$V_2=\int_0^{\sqrt{\frac{1}{a+1}}}\pi y_2^2\,dx=\pi\int_0^{\sqrt{\frac{1}{a+1}}}a^2x^4\,dx=a^2\pi\cdot\frac{1}{5}x^5\Big|_0^{\sqrt{\frac{1}{a+1}}}=\frac{a^2\pi}{5}\left(\sqrt{\frac{1}{a+1}}\right)^5=\frac{a^2\pi}{5}\cdot(a+1)^{-\frac{5}{2}}$$

$\therefore V_0=V_1-V_2=\frac{2a^2\pi}{15}(a+1)^{-\frac{5}{2}}$

令 $\varphi(a)=V_0$

$$\varphi'(a)=\frac{2\pi}{15}\left[2a\cdot(a+1)^{-\frac{5}{2}}+\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot(a+1)^{-\frac{7}{2}}a^2\right]$$

$$=\frac{2\pi}{15}\cdot(a+1)^{-\frac{7}{2}}a\left[2\cdot(a+1)-\frac{5}{2}\cdot a\right]$$

$$=\frac{2\pi}{15}(a+1)^{-\frac{7}{2}}a\left(-\frac{a}{2}+2\right)$$

a	$(0,4)$	$(4,+\infty)$
$\varphi'(a)$	+	−
$\varphi(a)$	↗	↘

$\therefore a=4$ 时 V_0 最大