重庆大学《高等数学2》（工学类）课程试卷

☑A卷
☐B卷

2016 — 2017 学年 第 2 学期

开课学院：数统　课程号：MATH10023　考试日期：20170902

考试方式：☐开卷 ☑闭卷 ☐其他　　考试时间：120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

2.**考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。**

1

(A) L_1 与 L_2 平行，且重合　(B) L_1 与 L_2 平行，但不重合

(C) L_1 与 L_2 异面　(D) L_1 与 L_2 垂直相交

2.设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(3^n+(-2)^n)}$ 的收敛半径是 R，则（ D ）

(A) $R=\infty$　(B) $R=\frac{1}{3}$　(C) $R=1$　(D) $R=3$

3.以下说法正确的是（ B ）

(A) 若 $f(x,y)$ 沿任意直线 $y=kx$ 在某点 x_0 连续，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续

(B) 若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续，则 $f(x_0,y)$ 在 y_0 连续

(C) 若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的偏导数 $f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0)$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续

(D) 若 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点处偏导数 $f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0)$ 存在，则全微分 $dz=f'_x(x_0,y_0)dx+f'_y(x_0,y_0)dy$

4.设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $D:x^2+y^2\le 2a^2$ 上连续，则当 $a\to 0$ 时 $\frac{1}{\pi a^2}\iint_D f(x,y)dxdy$ 的极限为（ A ）

(A) $2f(0,0)$　(B) $f(0,0)$　(C) $\sqrt{2}f(0,0)$　(D) 不存在

5.设 L 是圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\x+y+z=0\end{cases}$，若从 x 轴正向看去，此圆依逆时针方向进行，则曲线积分 $\oint_L ydx+zdy+xdz=$（ C ）

(A) $-\sqrt{2}\pi R^2$　(B) $\sqrt{2}\pi R^2$　(C) $-\sqrt{3}\pi R^2$　(D) $\sqrt{3}\pi R^2$

6.方程 $y''-2y'=xe^{2x}$ 的一个特解具有形式（ D ）

(A) $(ax+b)e^{2x}$　(B) axe^{2x}

(C) ax^2e^{2x}　(D) $x(ax+b)e^{2x}$

二、填空题（每小题3分，共18分）

1.已知直线 L 过点 $M(1,-2,0)$ 且与两条直线 $L_1:\begin{cases}2x+z=1\\x-y+3z=5\end{cases}$ 和 $L_2:\begin{cases}x=-2+t\\y=1-4t\\z=3\end{cases}$ 垂直，则 L 的参数方程为______ $x=1+8t,y=-2+2t,z=-t$

2.级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}$ 的和为______ $3e.$

3.已知微分方程 $y'+P(x)y=e^x$ 有特解 $y=xe^x$，

则该微分方程的通解为_____ $y=e^x(c+x).$

4.设 L 为取正向的圆周 $x^2+y^2=4$，则曲线积分 $\oint_L xdy-ydx=$ ___ 8π

5.若曲面 $xyz=32$ 上的点 (x_0,y_0,z_0) 处的法线平行于向量 $\vec{s}=(2,8,1)$，则

$(x_0,y_0,z_0)=$ ______ $(4,1,8)$

6.设$\Omega: x^2+y^2+z^2-2z\le 0$，则$\iiint_\Omega (x+xyz^2-3)dv=$ ______ -4π

三、计算题（每小题6分，共24分）

1.设$y=f(x,t)$，而t是由方程$F(x,y,t)=0$所确定的x,y的函数，其中f,F可微，求$\frac{dy}{dx}$.

解：方程组$y=f(x,t),F(x,y,t)=0$确定了$y=y(x),t=t(x)$，故有

$$\frac{dy}{dx}=f_1'+f_2'\cdot\frac{dt}{dx},F_1'+F_2'\cdot\frac{dy}{dx}+F_3'\cdot\frac{dt}{dx}=0$$

解之得$\frac{dy}{dx}=\frac{F_3'f_1'-F_1'f_2'}{F_2'f_2'+F_3'}$.

2.已知函数$f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$，求$f(x,y)$的极值。

解：令$\begin{cases} f_x'=e^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0 \\ f_y'=e^{2x}(2y+2)=0 \end{cases}$ **得驻点**$P(\frac{1}{2},-1)$**。又**

$$f_{xx}''=2e^{2x}(2x+2y^2+4y+1)+e^{2x}\cdot 2x, A=f_{xx}''(P)=2e$$

$$f_{xy}''=e^{2x}(4y+4), B=f_{xy}''(P)=0$$

$$f_{yy}''=2e^{2x}, C=f_{yy}''(P)=2e$$

由于$B^2-AC=-4e^2<0$**，且**$A>0$**，故**$f(x,y)$**在**P**点有极小值**$f(P)=-\frac{e}{2}.$

3.设D是由直线$y=1,y=x,y=-x$围成的有界区域，计算二重积分$\iint_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy.$

解：$D=\left\{(r,\theta)\middle|\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4},0\le r\le\frac{1}{\sin\theta}\right\}$

则$\iint_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}\frac{r^2\cos^2\theta-r^2\cos\theta\sin\theta-r^2\sin^2\theta}{r^2}rdr$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta)d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}rdr$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\csc^2\theta-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-2)d\theta=\frac{1}{2}\cot\theta\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\cdot\ln|\sin\theta|\Big\|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{\pi}{2}=1-\frac{\pi}{2}$$

4.将函数$f(x)=\frac{x^2}{x^2-5x+6}$展开成麦克劳林级数，并指出收敛区间。

解：$f(x)=\frac{x^2}{x^2-5x+6}=1+\frac{5x-6}{(x-2)(x-3)}=1+\frac{9}{x-3}-\frac{4}{x-2}$

$$=1-\frac{3}{1-\frac{x}{3}}+\frac{2}{1-\frac{x}{2}}=1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n-1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n-1}}=1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{3^{n-1}}\right)x^n,|x|<2$$

四、综合题（每小题8分，共16分）

1.计算曲线积分$I=\oint_C\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中$C$是正向曲线$|x|+|y|=1.$

解：记$P=\frac{-y}{x^2+y^2},Q=\frac{x}{x^2+y^2}$，则$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

在C内作$L: x^2+y^2=\varepsilon^2$（ε充分小），L与C同向，L围成区域为D。则

$$I=\oint_C\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_L xdy-ydx$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_D 2dxdy=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 2\pi\varepsilon^2=2\pi.$$

2.设Γ为$x^2+y^2=2x(y\ge 0)$上从$O(0,0)$到$A(2,0)$的一段弧，连续函数$f(x)$满足$f(x)=x^2+\int_\Gamma y\left[f(x)+e^x\right]dx+(e^x-xy^2)dy$，求$f(x).$

解：记$\int_\Gamma y\left[f(x)+e^x\right]dx+(e^x-xy^2)dy=a$，则$f(x)=x^2+a.$

记Γ与$\overline{AO}$包围的区域为D，应用格林公式

$$a=\oint_{\Gamma+Ao}y\left[f(x)+e^x\right]dx+(e^x-xy^2)dy-\int_{\overline{Ao}}y\left[f(x)+e^x\right]dx+(e^x-xy^2)dy$$

$$=-\iint_D(e^x-y^2-f(x)-e^x)dxdy-0$$

$$=-\iint_D(-y^2-x^2-a)dxdy$$

$=\iint_D (x^2+y^2)dxdy + a\iint_D dxdy$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^3 d\rho + \frac{\pi}{2}a$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\theta\, d\theta + \frac{\pi}{2}a = \frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{2}a$

解得 $a=\frac{3\pi}{2(2-\pi)}$，于是 $f(x)=x^2+\frac{3\pi}{2(2-\pi)}$.

五、证明题（每小题8分，共16分）

1.证明：若 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，有界区域$V$的边界$S$为光滑曲面，则有

$$\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS = \iiint_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz + \iiint_V u\Delta u dxdydz$$

，式中u及其二阶偏导数是在区域V内连续的函数，$\frac{\partial u}{\partial n}$为沿曲面$S$的外法线方向$\vec{n}$的导数。

证明：$\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS = \iint_S\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + u\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + u\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)dS$

$=\iiint_V\left[\frac{\partial}{\partial x}(u\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(u\frac{\partial u}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(u\frac{\partial u}{\partial z})\right]dxdydz$

$=\iiint_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz + \iiint_V u\Delta u dxdydz$

2.证明：无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)$ 收敛。

证明：解：因 $0<\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}=\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{n}-(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\cdots)$

$=\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+\cdots<\frac{1}{2n^2}$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ 收敛，故原级数收敛。

六、应用题（共8分）

设曲线弧AB的极坐标方程为 $\rho=1+\cos\theta\,(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2})$，一质点$P$在力$\vec{F}$的作用下沿曲线弧$AB$从点$A(0,-1)$运动到点$B(0,1)$，力$\vec{F}$的大小等于点$P$到定点$M(3,4)$的距离，其方向垂直于线段$MP$，且与$y$轴正向的夹角为锐角，求力$\vec{F}$对质点$P$所作的功。

解：设点$P(x,y)$，根据题意，得 $\overrightarrow{MP}=(x-3,y-4)$，$\vec{F}=(y-4,3-x)$，功

$W=\int_{\overset{\frown}{AB}}(y-4)dx+(3-x)dy$

$=\oint_{\overset{\frown}{AB}+\overline{BA}}(y-4)dx+(3-x)dy-\int_{\overline{BA}}(y-4)dx+(3-x)dy$

$=-2\iint_D dxdy-\int_1^{-1}2dy=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^2 d\theta+6$

$=6-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)^2 d\theta$

$=6-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta)^2 d\theta=2-\frac{3\pi}{2}.$