第八章 多元函数微分法及其应用

（讲授法 18 学时）

上册研究了一元函数微分法，利用这些知识，我们可以求直线上质点运动的速度和加速度，也可以求曲线的切线的斜率，可以判断函数的单调性和极值、最值等，但这远远不够，因为一元函数只是研究了由一个因素确定的事物。一般地说，研究自然现象总离不开时间和空间，确定空间的点需要三个坐标，所以一般的物理量常常依赖于四个变量，在有些问题中还需要考虑更多的变量，这样就有必要研究多元函数的微分学。

多元函数微分学是一元函数的微分学的推广，所以多元函数微分学与一元函数微分学有许多相似的地方，但也有许多不同的地方，学生在学习这部分内容时，应特别注意它们的不同之处。

一、教学目标与基本要求

1、理解多元函数的概念，理解二元函数的几何意义。

2、了解二元 函数的极限与连续性的概念，以及有界闭区域上连续函数的性质。

3、理解多元函数偏导数和全微分的概念，会求全微分，了解全微分存在的必要条件和充分条件，了解全微分形式的不变性，了解全微分在近似计算中的应用。

4、理解方向导数与梯度的概念并掌握其计算方法。

5、掌握多元复合函数偏导数的求法。

6、会求隐函数（包括由方程组确定的隐函数）的偏导数。

7、了解曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念，会求它们的方程。

8、了解二元函数的二阶泰勒公式。

9、理解多元函数极值和条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件，了解二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值，会用拉格朗日乘数法求条件极值，会求简单多元函数的最大值和最小值，并会解决一些简单的应用问题。

二、教学内容及学时分配：

第一节 多元函数的基本概念 2 课时
第二节 偏导数 2 学时
第三节 全微分 2 学时
第四节 多元复合函数的求导法则 2 学时
第五节 隐函数的求导公式 2 学时
第六节 多元函数微分学的几何应用 2 学时
第七节 方向导数与梯度 2 学时
第八节 多元函数的极值及其求法 2 学时

三、教学内容的重点及难点：

重点：

1．多元函数的极限与连续；
2．偏导数的定义；全微分的定义
3．多元复合函数的求导法则；隐函数的求导法则
4．方向导数与梯度的定义
5．多元函数的极值与最值的求法

难点：

1．多元函数微分学的几个概念，即多元函数极限的存在性、多元函数的连续性、偏导数的存在性、全微分的存在性、偏导数的连续性之间的关系；
2．多元复合函数的求导法则中，抽象函数的高阶导数；
3．由方程组确定的隐函数的求导法则；
4．梯度的模及方向的意义；
5．条件极值的求法

四、教学内容的深化和拓宽：

1．多元函数微分学的几个概念的深刻背景；
2．多元复合函数的求导法则的应用；

3．由一个方程确定的隐函数，推广到由方程组确定的隐函数
4．利用多元函数微分学的知识研究空间曲线和曲面的性质；
5．将偏导数的概念推广到方向导数，并由此得到梯地的概念
6．利用多元函数微分学的知识研究无条件极值与条件极值。

五、思考题与习题

六、教学方式（手段）

本章主要采用讲授新课的方式，并辅以多媒体教学。

讲稿

第一节多元函数的基本概念

本部分主要将讨论一元函数时的一些基本概念（如：邻域、区域、极限、连续等）推广到多元的情形，为此首先引入平面点集，n维空间等概念。

一、平面点集 n维空间

1．平面点集

由平面解析几何知道，当在平面上引入直角坐标系后，平面上的点P就与有序实数对(x,y)之间建立了一一对应的关系，(x,y)称为点P的坐标。这种引入（建立）了坐标系的平面**称为坐标平面**，用$R^2=R\times R=\{(x,y)|x,y\in R\}$来表示。

坐标平面上具有某种性质P的点的集合，称为**平面点集**，

记作$E=\{(x,y)|(x,y)\text{具有性质}P\}$

例 1 $E=\{(x,y)|x^2+y^2<4\}$等

平面上，动点$P(x,y)$到定点$P_0(x_0,y_0)$的距离小于定长δ点的全体，称为**点P_0的δ邻域**，记为$U(P_0,\delta)$。即$U(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\middle|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$。

不强调半径δ时，点P_0的邻域记为$U(P_0)$

点P_0的去心δ邻域$\mathring{U}(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\middle|0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$

下面利用邻域来描述点与点集的关系

内点：已知点集E，若$\exists U(P)\subset E$，则称点P为E的内点。如$E=\{(x,y)|x^2+y^2<4\}$中点均为内点。

外点：已知点集E，若$\exists U(P)$，使$U(P)\cap E=\phi$，则称点P为E的外点。

边界点：已知点集E，点P的任意邻域$U(P)$内既含有属于E的点，又含有不属于E的点，则称点P为E的边界点，边界点的全体，称为E的**边界**，记为∂E。

例 2 $E=\{(x,y)|x^2+y^2<4\}$的边界为$\partial E=\{(x,y)|x^2+y^2=4\}$

例 3 $E=\{\text{全体无理数}\}$，则$\partial E=\{\text{实数}\}$

结论：E的内点必属于E，E的外点必不属于E，E的边界点可能属于E，也可能不属于E。

聚点：$\forall \delta > 0$,**点** P **的去心** δ **邻域** $\overset{\circ}{U}(P,\delta)$ 内总含有 E 中点，则称点 P 为 E 的聚点。

例 4 若 $E = \{(x,y) | 1 < x^2 + y^2 \le 2\}$

则内点为 $\{(x,y) | 1 < x^2 + y^2 < 2\}$

外点为 $\{(x,y) | x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,y) | x^2 + y^2 > 2\}$

边界点为 $\partial E = \{(x,y) | x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) | x^2 + y^2 = 2\}$

聚点为 $\{(x,y) | 1 \le x^2 + y^2 \le 2\}$

例 设 $E = \left\{(x,y) | (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), n \in N\right\}$，$(x,y) = (0,0)$ 为 E 的聚点。

前面我们利用邻域来描述了点与点集的关系，共 4 种关系：内点、外点、边界点、聚点。下面我们利用点集内所属点的特征来定义一些平面点集。

开集：如果点集 E 中的点均为 E 的内点，则称 E 为开集。

闭集：如果点集 E 的余集 E^C 为开集，则称 E 为闭集。

连通集：如果 E 内任何两点，都可用属于 E 的折线连结起来，则称 E 为连通集。

单连通：点集 E 中任意闭曲线所围的区域完全属于 E，则称 E 为**单连通集**。否则为**多连通集**。

区域：连通的开集称为区域或开区域。

闭区域：开区域连同它的边界一起所构成的点集称为闭区域。

有界集：对平面点集 E，若存在正数 r，使得 $E \subset U(O,r)$（其中 O 为坐标原点），则称 E 为有界集。

无界集：不是有界集，则称这个集合为无界集。

例 $E = \{(x,y) | |x| < 1, |y| < 1\}$ 为连通集，也是单连通集；$E = \{(x,y) | |x| > 1, |y| < +\infty\}$ 为非连通集；$E = \{(x,y) | |x| > 1, |y| > 1\}$ 是非连通集，$E = \{(x,y) | 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ 为连通集但非单连通。

例 极坐标 $2\cos\theta < r < 4\cos\theta$ 所围的区域为单连通区域，$2\cos\theta \le r \le 4\cos\theta$ 为多连通

2．n 维空间

设有点集 $R^n = R \times R \times \cdots \times R = \left\{\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in R\right\}$，$\forall \vec{x}, \vec{y} \in R^n, \lambda \in R$

规定：$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$

$\lambda\vec{x} = \lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)$

这样定义了线性运算的集合 R^n 称为 n **维空间。**

R^n 中两点的距离规定为$\rho(\vec{x},\vec{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots(x_n-y_n)^2}=\|\vec{x}-\vec{y}\|$。二维空间中的邻域等概念完全类似地推广到$n$维空间。

二、 多元函数的概念

在上册我们主要讨论的是一元函数，即两个变量之间的依赖关系，其中一个为自变量，另一个为因变量。但在生产实践中，经常会碰到多个（三个或三个以上）变量之间的依赖关系，如圆柱、圆锥的体积$V=\pi r^2h, V=\frac{1}{3}\pi r^2h$，体积$V$随两个变量$r,h$的变化而变化，即$V$依赖于两个变量。又如$n$个电阻并联后的总电阻$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\cdots+\frac{1}{R_n}$，$R$依赖于$n$个变量。这也提出了多元函数的概念，以及多元函数的微积分问题。

n元函数的定义：设D是R^n的一个非空子集，称映射$f:D\to R$为定义在D上的n元函数，记为$z=f(P)=f(x_1,x_2,\cdots x_n),P(x_1,x_2,\cdots x_n)\in D$，其中点集$D$称为该函数的**定义域**，$x_1,x_2,\cdots x_n$称为**自变量**，$z$称为**因变量**，对每一组自变量$x_1,x_2,\cdots x_n$的值相对应的因变量值$z=f(x_1,x_2,\cdots x_n)$，称为$f$在点$(x_1,x_2,\cdots x_n)$处的**函数值**，函数值的全体称为$f$ **值域**，记作$f(D)$，即$f(D)=\left\{z\middle|z=f(x_1,x_2,\cdots x_n),(x_1,x_2,\cdots x_n)\in D\right\}$

本书主要讨论的是二元函数，二元函数在几何上表示一张曲面。

例 求下列二元函数的定义域

(1) $z=\dfrac{\arcsin(x^2+y^2)}{\sqrt{x-y}}$ $\qquad D=\{(x,y)\,|\,x>y,x^2+y^2\le 1\}$

(2) $u=\sqrt{2az-x^2-y^2-z^2}+\arcsin\dfrac{x^2+y^2}{z^2}$

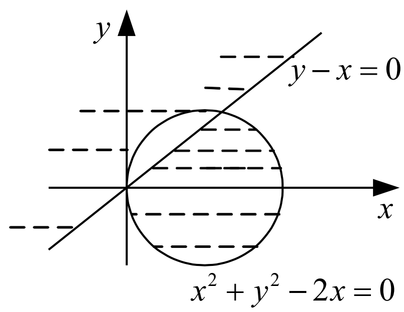
$\mathrm{D}=\{(x,y,z)\,|\ \ x^2+y^2+(z-a)^2\le a^2, x^2+y^2\le z^2, z\ne 0\}$

(3) $z=\sqrt{\dfrac{y-x}{x^2+y^2-2x}}$

解：由$\dfrac{y-x}{x^2+y^2-2x}\ge 0$且$x^2+y^2-2x\ne 0$得

$D=\left\{(x,y)\middle|y-x\ge 0,x^2+y^2-2x>0\right\}\cup$

$\left\{(x,y)\middle|y-x\le 0,x^2+y^2-2x<0\right\}$



(4) $z=\sqrt{\arcsin(x^2+y^2)}$

解：定义域为$\sin(x^2+y^2)\ge 0$或$2k\pi\le x^2+y^2\le(2k+1)\pi, k=0,1,2,\cdots$，同心圆环。

例 判别函数$z_1=\ln[x(x-y)]$与$z_2=\ln x+\ln(x-y)$是否为同一函数，并求两函数的定

义域、画出定义简图。

例 已知 $f(\frac{y}{x})=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}(x>0)$，求 $f(x)$.

例 已知 $f(x-y,x+2y)=xy,$ 求 $f(x,y)$.

例 已知 $f(x+y,x-y)=x^2-y^2+\varphi(x+y)$，且 $f(x,\ 0)=x$，求出 $f\left(x,y\right)$ 的表达式.

解 令 $u=x+y$，$v=x-y$，则 $x=\frac{1}{2}(u+v)$，$y=\frac{1}{2}(u-v)$

$$f(u,v)=\frac{1}{4}(u+v)^2-\frac{1}{4}(u-v)^2+\varphi(u)=u\,v+\varphi(u)$$

即 $f(x,y)=xy+\varphi(x)$ $\quad\because f(x,0)=x,\therefore\varphi(x)=x$

故 $f(x,y)=x(y+1)$

三、 多元函数的极限

我们先讨论二元函数的极限，与一元函数的极限类似，如果动点 $P(x,y)$ 趋于定点 $P_0(x_0,y_0)$ 的过程中，函数值 $f(x,y)$ 无限地接近一个确定的常数 A，则说 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限，为了与一元函数的极限相区别，二元函数的极限叫做二重极限。

定义：设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，如果存在常数 A，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}<\delta$ 时（或 $P(x,y)\in D\bigcap\overset{\circ}{u}(p_0,\delta)$ 时），有 $\left|f(P)-A\right|<\varepsilon$，

则称 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 的极限，也称为二重极限。

记作 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A.$

<u>**注意比较一元函数与二元函数极限、二重极限与二次极限。**</u>

① $f(P)$ 在 P_0 处的极限存在与否，与 $f(P)$ 在 P_0 处有无定义无关，这一点，二者相同。

② P 趋于 P_0 的过程：**一元函数在直线上完成**，可以单调增加，或单调减少，或左右摆动，或进二退一的方式趋于 P_0；**二元函数在平面上完成**，可以沿直线、曲线、折线趋于 P_0。

③一元函数极限存在的充要条件是左右极限存在且相等；二元函数极限即使有无穷多个方向的极限都存在且相等也不能肯定二重极限存在。即

如果 $P\xrightarrow{\text{沿无穷多种特殊方式}}P_0$，虽有 $f(P)\xrightarrow{\text{无限地}}A$，也不能判定 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$ 存在。但利

用这种特殊方式的极限（方向极限）可以判定某些二重极限的不存在，即

$P \xrightarrow{\text{某种特殊方式}} P_0$ 时，有 $f(P) \xrightarrow{\text{无限地}} A$(常数)

$P \xrightarrow{\text{另一种特殊方式}} P_0$ 时，有 $f(P) \xrightarrow{\text{无限地}} B$(常数)$\neq A$，则 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 不存在。

（当然，若沿某种特殊方式的极限不存在，则二元函数的极限不存在）

④二元函数的极限是动点 (x,y) 同时趋于定点 (x_0,y_0)，二次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 是依前后次序趋于 (x_0,y_0)，即若 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ $\underline{\underline{\text{固定}x}}$ $\varphi(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=A$。二者之间没有什么联系。

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} y\sin\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} y\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，但 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} y\sin\dfrac{1}{x}=0$；

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=0$；但 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在。

⑤在一定条件下，重极限与累次极限有一定联系。

定理 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ 且 $\forall y, y\neq y_0$ 有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y)$，

则 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=A$。

推论 若（1）$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在，（2）$\forall y, y\neq y_0$ 有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在

（3）$\forall x, x\neq x_0$ 有 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 存在，则

$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 均存在，且与 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 相等。

推论 若累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 存在但不相等，则二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在。

例 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$，证 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=0$

证：这里 $f(x,y)$ 的定义域为 $D=R^2\setminus\{(0,0)\}$，点 $O(0,0)$ 为 D 的聚点。$\forall\varepsilon>0$

要使 $|f(x,y)-0|=\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\le x^2+y^2<\varepsilon$，只须 $\sqrt{x^2+y^2}<\sqrt{\varepsilon}$

取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，则当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$，即 $P(x,y)\in D\cap \overset{\circ}{u}(O,\delta)$ 时，总有 $|f(P)-0|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

例 设函数 $f\left(x,y\right)=\dfrac{2x^2\sin y}{x^2+y^2}$．证明：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f\left(x,y\right)=0$．

证　此函数除点 $(0,0)$ 外均有定义．因为

$$\left|f\left(x,y\right)-0\right|=\left|\frac{2x^2\sin y}{x^2+y^2}\right|\le\left|2\sin y\right|\le 2\,|\,y\,|<2\sqrt{\left(x-0\right)^2+\left(y-0\right)^2}$$

所以，对任意给定的实数 $\varepsilon>0$，可取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，使得当 $M\left(x,y\right)\in \mathring{U}(M_0,\delta)$ 时，即 $0<\sqrt{\left(x-0\right)^2+\left(y-0\right)^2}<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 时，有 $\left|f\left(x,y\right)-0\right|<2\delta<\varepsilon$。故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f\left(x,y\right)=0$．

求一元函数极限的方法完全可平移到求二元函数的极限上，如用两边夹法则、重要极限、无穷小乘有界变量等。

例　求下列极限

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)}\dfrac{\sin(xy)}{x}=a$；　　$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to a}}(1+\dfrac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to a}}\left[(1+\dfrac{1}{x})^x\right]^{\frac{x}{x+y}}=e$

（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=-\dfrac{1}{4}$

（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}=0$；$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{(x+y)x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x+y)\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

（4）$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}$

解：$0\le\left|\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}\right|\le\left|\dfrac{x+y}{2xy+xy}\right|\le\left|\dfrac{1}{3y}\right|+\left|\dfrac{1}{3x}\right|\to0$，$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}=0$

（5）$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$

解 当 $x>0$，$y>0$ 时，$x^2+y^2\ge2xy>0$，有 $0<\dfrac{xy}{x^2+y^2}\le\dfrac{1}{2}$

从而 $0<\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}$，注意到 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}=0$，由夹逼定理，

故 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0$

（6）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy-\sin xy}{(xy)^3}$　　作代换 $u=xy$ 化为一元函数的极限

例 当$(x,y)\to(0,0)$时，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

的极限是否存在？

解：因$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}}f(x,y)=0,\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$，所以该函数的极限不存在。

例 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}$

因为$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}=\dfrac{1+k}{1+k^2}$，其极限值依赖于$k$值，该极限不存在。

例 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x+y}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\dfrac{xy}{x+y}=0$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^2-x}}\dfrac{xy}{x+y}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot(x^2-x)}{x+x^2-x}=-1$，所以二重极限不存在。

注：当分母有$x\pm y$的因子时，通常可取曲线$x\pm y=x^n$，则可选择适当n，二重极限可能不存在。

例 设函数$f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$．问$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$是否存在.

解 当点$P(x,y)$沿直线$y=kx$趋近于原点$O(0,0)$时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^4}{k^2x^4+x^2(1-k)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^2}{k^2x^2+(1-k)^2}=0\quad(k\neq 1)$$

但当$k=1$，即沿$y=x$ 的路线让$M\to M_0$时，又有

$$\text{原式}=\lim_{y=x\to 0}\frac{x^4}{x^4+0}=1\neq 0$$

故$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$不存在.

例 讨论二元函数的极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$是否存在.

解 令 $y=x$，则

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x^2}{2x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot(2x^2)^2}{2x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\quad\text{不存在}$$

所以，原二重极限不存在.

例 求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$，因$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}=0$，$\lim\limits_{\substack{x=y^3\\ y\to 0}}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}=\dfrac{1}{2}$，故原极限不存在。

四、 多元函数的连续性

与一元函数连续的定义类似，利用多元函数的极限来定义多元函数的连续。

<u>定义</u>：设 $f(x,y)$ 的定义域为 D ， $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 内的一聚点，若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续，否则称 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ <u>**不连续或间断**</u>。

$f(x,y)$ 在 D 内每一点均连续，则称 $f(x,y)$ 在 D 上连续，或者说 $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数。

例 讨论 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 在点 $O(0,0)$ 的连续性。

解：易知 $O(0,0)$ 为聚点，但由前面的例了知道 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在，所以 $O(0,0)$ 为 $f(x,y)$ 的间断点。

例 讨论 $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$ 连续性。

解： $f(x,y)$ 的定义域为 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\neq 1\}$，圆周 $C=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$ 上点均为聚点，但 $f(x,y)$ 在 C 上没有定义，所以 C 的点均为间断点。

例 函数 $f(x,y)=\begin{cases}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}, & x+y\neq 0\\ 0, & x+y=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点是否连续？

解：因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x+y}$ 不存在，故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{xy}\cdot\frac{xy}{x+y}}$ 不存在。

于是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续。

<u>多元函数极限的运算法则、连续的运算法则，多元连续函数的性质等均与一元函数相应的性质类似。</u>

和、差、积、商的极限等于极限后的和、差、积、商；（注：极限均存在，商时分母不能为 0）

如：若 $\lim f(x,y)=A,\lim g(x,y)=B,$则$\lim[f(x,y)g(x,y)]=AB=\lim f(x,y)\lim g(x,y)$

连续函数的和、差、积、商仍连续；（商时分母不能为 0）

连续函数的复合仍连续；

多元初等函数在其中定义区域内连续；（**定义区域**是指定义域内的区域或闭区域）

多元初等函数：由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合，并能用一个解析式表达的多元函数。

有界性定理： 在有界闭区域 D 上的多元连续函数必有界。

最值定理： 在有界闭区域 D 上的多元连续函数必能取得最大值和最小值。

介值定理： 在有界闭区域 D 上的多元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值。

一致连续性定理： 在有界闭区域 D 上的多元连续函数必一致连续。

例 讨论 $u=\dfrac{x+y}{x^3+y^3}$ 的连续性。

$\dfrac{x+y}{(x+y)(x^2+y^2-xy)}=\dfrac{1}{x^2+y^2-xy}$

解：函数 $u=\dfrac{x+y}{x^3+y^3}$ 除满足 $x+y=0$ 的点外均为连续点。

由于 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to -a}}\dfrac{x+y}{x^3+y^3}=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to -a}}\dfrac{1}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{1}{3a^2}$，所以对于直线 $x+y=0$ 上除原点 $(0,0)$ 以外的点为可去间断点，$(0,0)$ 点为无穷型间断点。

例 求 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$ 的不连续点。

解：（1）对于非 x 轴上的点

当 $y_0\neq 0$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=x_0\sin\dfrac{1}{y_0}=f(x_0,y_0)$，即 $f(x,y)$ 在除 x 轴以外均连续。

（2）对于 x 轴上的点，又分为原点 $(0,0)$ 与非原点。

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x\sin\dfrac{1}{y}=0=f(0,0)$，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续；

而 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\neq 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0}}x\sin\dfrac{1}{y}$ 不存在，故 $f(x,y)$ 在 x 轴上除原点外均不连续。

思考题：二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续与两个一元函数 $f(x,y_0),f(x_0,y)$ 分别在点 $x=x_0$，$y=y_0$ 处连续的关系。

答： $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续 $\Rightarrow$ $f(x,y_0),f(x_0,y)$ 分别在点 x_0，y_0 处连续，但反之不成立。

因：$z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续，所以

$f(x_0,y_0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y=y_0}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)$（二重极限存在沿任何方向的极限均存在）

故 $f(x,y_0)$ 在点 $x=x_0$ 连续，另一个同理说明。

反例：$f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点(0,0)处

显然 $f(x,0)$在$x=0$处连续，$f(0,y)$在$y=0$处连续，但 $f(x,y)$在$(0,0)$ 点的二重极限不存在，即不连续。

教学要求和注意点

<u>教学要求</u>：

1．理解多元函数的概念，理解二元函数的几何意义。

2．了解二元函数的极限与连续性的概念，以及有界闭区域上连续函数的性质。

<u>教学注意点</u>：

多元函数的极限与一元函数极限的定义表面上看起来非常相似，但也有不同的地方，要特别提醒学生注意，一元函数的方向极限只有两个，即左极限和右极限，但多元函数的方向极限有无限多个，动点可以沿着直线的方向趋于定点，也可以沿着曲线的方向趋于定点，这意味着多元函数的极限较一元函数的极限复杂得多。

第二节　偏导数

讲稿

一、　偏导数的定义及其计算法

我们学过一元函数的导数，即函数增量与自变量增量之比，当自变量增量趋于 0 的极限，亦即函数相对自变量的变化率。对于多元函数，我们同样考虑函数相对于自变量的变化率。设有二元函数$z=f(x,y)$，如果只有自变量x变化，而自变量y固定（看作常量），此时$z=f(x,y)$是变量x的一元函数，z对x的导数称为二元函数z对x的偏导数。

定义：设$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有定义，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对x的偏导数，记作

$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，或$z_x(x_0,y_0)$，$f_x(x_0,y_0)$，$z'_x(x_0,y_0)$等

$\boxed{注}$：二元函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)对x的偏导数的定义就是一元函数$z=f(x,y_0)$在x_0处的导数的定义:$z'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{z(x_0+\Delta x)-z(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

同理可定义$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对y的偏导数

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

$\boxed{注}$：二元函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)对y的偏导数的定义就是一元函数$z=f(x_0,y)$在y_0处的导数的定义。

偏导函数：$z=f(x,y)$在D内的每一点(x,y)处对x,y的偏导数均存在，那么这个偏导数就是x,y的函数，称为函数$z=f(x,y)$对x的偏导函数，记作$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial x},z_x,f'_x(x,y)$

偏导数的求法

从偏导数的定义知道，函数对其中一个变量（其余变量视为常数）的导数，就称为多元函数对这个变量的偏导数，因此偏导数的求法不需要新方法，全用一元函数的求导公式、求导法则。

例　求$z=x^2+3xy+y^2$在点$(1,2)$处的偏导数

例 设函数 $f(x,y)=e^{xy}\sin\pi y+(x-1)\arctan\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，求偏导数 $f_x(1,1)$ $f_y(1,1)$。

解 因 $f(x,1)=(x-1)\arctan\sqrt{x}$， $f_x(x,1)=\arctan\sqrt{x}+(x-1)\cdot\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，

所以，$f_x(1,1)=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$

同理 $f(1,y)=e^y\sin\pi y$， $f_y(1,y)=e^y(\sin\pi y+\pi\cos\pi y)$；所以 $f_y(1,1)=-\pi e$。

本题若先求 $f_x(x,y),f_y(x,y)$，再代入 $x=1,y=1$ 求偏导数的值，则其运算就复杂多了。

例 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f(x,y)$ 的偏导数.

解 当点 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，有 $f_x(x,y)=\dfrac{2y(x^2+y^2)-2xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$$f_y(x,y)=\frac{2x(x^2+y^2)-2xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

当 $(x,y)=(0,0)$ 时，按定义有 $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0}{\Delta x}=0$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0.$$

例 求 $z=\sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$ 的偏导数

例 求 $z=\dfrac{xe^y}{y^2}$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

例 设 $z=x^y(x>0,x\neq 1)$，求证：$\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$

例 求 $z=(1+xy)^y$ 的偏导数

例 求 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的偏导数。

二元函数 $z=f(x,y)$ 点 (x_0,y_0) 处对 x 偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 的<u>几何意义</u>

由于偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 就是一元函数 $\begin{cases}z=f(x,y)(\text{曲面})\\ y=y_0(\text{平面})\end{cases}$，亦即一元函数 $z=f(x,y_0)$ 的导数，所以由一元函数导数的几何意义知 $f_x(x_0,y_0)$ 的几何意义为：曲线 $z=f(x,y_0)$（曲面与平面的交线）在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线对 x 轴的斜率。

一元函数、二元函数的可导与连续的比较：

在一元函数中：$f(x)$ 可导 $\Rightarrow f(x)$ 连续，$f(x)$ 不连续 $\Rightarrow f(x)$ 必不可导

在二元函数中：$f(x,y)$ 可偏导（f_x, f_y 存在）不能推出 $f(x,y)$ 连续，

即 $f(x,y)$ 不连续但 $f(x,y)$ 的偏导数可能存在。

即二元函数的连续与存在一阶偏导数之间没有必然的联系。

例如 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续，但 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$。

又如 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 连续，但 $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ 不存在。

如 $f(x,y)=|x|+|y|$ 在 $(0,0)$ 连续，但 $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ 不存在。

问：偏导数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 满足什么条件，才能保证函数 $f(x,y)$ 连续呢？

答：偏导数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内存在且有界，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续。

证：设在区域 D 内，存在 $M>0$，使 $|f_x|\le M, |f_y|\le M$，则

$$|\Delta z|=|f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|$$

$$\le|f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)|+|f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|$$

$$=|f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\cdot\Delta x|+|f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\cdot\Delta y|\text{(Lagrange 中值定理)}$$

$$\le M(|\Delta x|+|\Delta y|)\to 0\text{，当}(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)\text{时，其中}0<\theta_1,\theta_2<1$$

所以 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续。

二、 高阶偏导数

由前面的例子知道：二元函数的偏导数仍是 x,y 的函数，可以再求偏导数，这就产生了高阶偏导数。例 $z=\sin(xy)$，$z_x=y\cos(xy), z_y=x\cos(xy)$ 仍是 x,y 的函数，再对 x,y 求偏导，得

$$(z_x)_x=z_{xx}=-y^2\sin(xy)=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},(z_x)_y=z_{xy}=\cos(xy)-xy\sin(xy)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},$$

其余类似。

一般地，$z=f(x,y)$ 有两个一阶偏导数 $f_x(x,y),f_y(x,y)$，进一步有四个二阶偏导数，它们是

$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)$，$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$（称为二阶混合偏导数）

$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)$（称为二阶混合偏导数），$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$

同理可得八个三阶偏导数。我们把二阶及二阶以上的偏导数称为**高阶偏导数。**

$$f''_{xx}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'_x(x_0+\Delta x,y_0)-f'_x(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$f''_{xy}(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f'_x(x_0,y_0+\Delta y)-f'_x(x_0,y_0)}{\Delta y}$，其余同理

例　设 $z=x^3y^2-3xy^3-xy+1$，求其二阶偏导数

（注意 2 个混合偏导数相等）

例　设函数 $z=\arctan\frac{y}{x}$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{-y}{x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}$、$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{-y}{x^2+y^2})=\frac{(-1)\cdot(x^2+y^2)-(-y)\cdot(0+2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{x}{x^2+y^2})=\frac{1\cdot(x^2+y^2)-x\cdot(2x+0)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

例　求 $z=y^{\ln x}$ 的二阶偏导数

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=y^{\ln x}\cdot\ln y\cdot\frac{1}{x}$,　　$\frac{\partial z}{\partial y}=\ln x\cdot y^{\ln x-1}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\ln y\left[y^{\ln x}\ln y\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}+y^{\ln x}\cdot\frac{-1}{x^2}\right]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\ln x\cdot(\ln x-1)\cdot y^{\ln x-2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{x}\left[\ln x\cdot y^{\ln x-1}\ln y+y^{\ln x}\cdot\frac{1}{y}\right]=\frac{\ln x\ln y+1}{xy}y^{\ln x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{1}{x} y^{\ln x - 1} + \ln x \cdot y^{\ln x - 1} \ln y \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x \ln y + 1}{xy} y^{\ln x}$$

从上面两个例子看到，二阶混合偏导数相等。下面的例子告诉我们二阶混合偏导数也可能不等。

例 设 $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$，求 $f_{xy}(0,0,)$、$f_{yx}(0,0,)$

解 当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时，

$$f_x(x,y) = \frac{yx^4 - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad f_y(x,y) = \frac{x^5 - xy^4 - 4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

当 $x^2 + y^2 = 0$ 时，即在点 $(0,0)$ 处：

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0, \quad f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0$$

故 $f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$，$f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - xy^4 - 4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

从而 $f_{xy}(0,0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f_x(0, 0 + \Delta y) - f_x(0,0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{-(\Delta y)^5}{(\Delta y)^5} = -1$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_y(0 + \Delta x, 0) - f_y(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(\Delta x)^5}{(\Delta x)^5} = 1$$

在什么条件下，两个二阶偏导数相等呢？

定理：如果 $z = f(x,y)$ 的两个二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 在区域 D 内连续，那么在该区域内这两个二阶偏导数相等，即二阶偏导数在连续的条件下与求导次序无关。

例 证明函数 $u = \dfrac{1}{r}$ 满足拉普拉斯方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$ 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$

证明：$\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{\partial r}{\partial x} = -\dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{x}{r} = -\dfrac{x}{r^3},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x}{r^4} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}.$$

由于函数关于自变量的对称性，类似可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}.$$

所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\dfrac{3}{r^3} + \dfrac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = -\dfrac{3}{r^3} + \dfrac{3r^2}{r^5} = 0.$

练习题

例.若函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$，且 $f(x,1)=x+2$，又 $f_y'(x,1)=x+1$，则 $f(x,y)$ 等于（　　）

（A） $y^2+(x-1)y-2$　　（B） $y^2+(x+1)y+2$

（C） $y^2+(x-1)y+2$　　（D） $y^2+(x+1)y^2$

答案：C

方法一：直接验证

方法二：由 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$ 知 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\int 2dy=2y+\varphi(x)$，由题设条件 $f_y'(x,1)=x+1$ 知

$x+1=f_y'(x,1)=2+\varphi(x)\Rightarrow\varphi(x)=x-1$

于是 $z=\int(2y+x-1)dy=y^2+(x-1)y+\psi(x)$

由题设条件 $f(x,1)=x+2$ 知 $x+2=f(x,1)=1+(x-1)+\psi(x)\Rightarrow\psi(x)=2$

则 $z=y^2+(x-1)y+2$

例.设 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1$，且当 $x=0$ 时，$z=\sin y$；当 $y=0$ 时，$z=\sin x$，则 $z(x,y)=$______

答案：$z(x,y)=xy+\sin x+\sin y$

解：由 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1$ 知 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y+\varphi(x)$

因 $z(x,0)=\sin x$，从而 $z_x'(x,0)=\cos x$，又 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,0)}=\left[y+\varphi(x)\right]_{(x,0)}=\varphi(x)$

于是 $\varphi(x)=\cos x$，故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y+\cos x\Rightarrow z=xy+\sin x+\psi(y)$

又因 $z(0,y)=\sin y$，故 $\psi(y)=\sin y$，从而 $z=xy+\sin x+\sin y$

例 关于 $f(x,y)=\begin{cases}xy, & xy\neq 0\\ x, & y=0\\ y, & x=0\end{cases}$，给出下列结论：

① $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=1$　　② $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=1$　　③ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$　　④ $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=0$

其中正确的个数为(　　)

(A)4　　(B) 3　　(C) 2　　(D) 1

【答案】(B)

【解析】① $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-0}{x}=1$

② $f_x(x,y)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{(x+\Delta x)y-xy}{\Delta x}=y$

$\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{y-1}{y}=\infty$

③ $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\xy\neq0}}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}xy=0$，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=0}}x=0$，$\lim\limits_{\substack{y\to0\\x=0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{y\to0\\x=0}}y=0$

即点(x,y)沿任意方向趋于$(0,0)$时，极限均为 0，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$

④当$xy\neq0$时，$\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}xy=\lim\limits_{y\to0}0=0$

当 $y=0$时，$\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}x=\lim\limits_{y\to0}0=0$

当 $x=0$时，$\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}y=\lim\limits_{y\to0}y=0$

综上，$\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=0$

教学要求和注意点

教学要求：

理解多元函数偏导数的概念，并会求具体多元函数的一阶偏导数和高阶偏导数，知道多元函数的连续性与偏导数之间的关系。

教学注意点：

在一元函数中，可导的要求比连续的要求更高，即可导必连续，但连续不一定可导。而对多元函数而言，偏导数存在时，多元函数却不一定连续，这是多元函数与一元函数的本质差别，应让学生举出反例，如

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

第三节 全微分

讲稿

在上册学过一元函数的微分：

如果函数的增量 $\Delta f = f(x+\Delta x)-f(x)$ 可以表为 $\Delta f = f(x+\Delta x)-f(x)=A\Delta x+O(\Delta x)$

其中 A 是不依赖于 Δx 而仅与 x 有关，则称 $y=f(x)$ 在点 x 可微， $A\Delta x$ 叫做 $y=f(x)$ 在点 x 处微分，记为 $dy=A\Delta x=f'(x)dx.$

同理，可以定义二元函数 $z=f(x,y)$ 的全微分

定义：如果 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 可以表为 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，（其中 A,B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$ 而仅与 x,y 有关）则称 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，并称 $dz=A\Delta x+B\Delta y$ 为 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全微分。

如果函数在区域 D 内各点均可微，则称函数在 D 内可微。

从可微的定义可知：若 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，则必有 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续。因为 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}(A\Delta x+B\Delta y+o(\rho))=0.$

在怎样的条件下，二元函数可微分呢？先看下面的定理。

定理（可微的必要条件）如果 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 必存在，且全微分 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial x}dy.$（习惯上记 $\Delta x,\Delta y$ 为 dx,dy）

即二元函数的全微分等于两偏微分之和，称为二元函数的微分符合叠加原理。可推广到多元函数的情形：如 $u=f(x,y,z),du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$

证明：因为 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，故

$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+O(\rho)$

在上式中，取 $\Delta y=0$，两边同除 Δx，

$$\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=A+\frac{O(|\Delta x|)}{\Delta x}$$

并让 Δx 趋于 0，即有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[A+\frac{O(|\Delta x|)}{\Delta x}\right]=A$

即 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 存在

同理可证 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在

进一步有，$dz=A\Delta x+B\Delta y=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial x}dy.$

定理（可微的充分条件）若 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内 $f_x'(x,y), f_y'(x,y)$ 存在且连续，则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微。

证明：$\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

$=[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]$

$=f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\cdot\Delta x+f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\cdot\Delta y$，$0<\theta_1,\theta_2<1$

$=\left[f_x(x_0,y_0)+\varepsilon_1\right]\Delta x+\left[f_y(x_0,y_0)+\varepsilon_2\right]\Delta y$

$=f_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x+f_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$

其中 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 是当 $\Delta x,\Delta y\to 0$ 时的无穷小。

从而 $\left|\frac{\Delta z-f_x(x_0,y_0)\Delta x-f_y(x_0,y_0)\Delta y}{\rho}\right|=\left|\frac{\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y}{\rho}\right|\le|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|\to 0$

所以 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微。

注：关于 x 的一元函数 $z=f(x,y_0+\Delta y)$ 在 x_0 与 $x_0+\Delta x$ 之间用拉格朗日中值定理有

$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)=f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\cdot\Delta x$

同理有 $f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\cdot\Delta y$

注：因偏导数 $f_x'(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续，故 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)=f_x(x_0,y_0)$，再利

用极限与无穷小的关系，有 $f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)=f_x(x_0,y_0)+\varepsilon_1$，其中 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_1=0$

同理，有 $f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)=f_y(x_0,y_0)+\varepsilon_2$，其中 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_2=0$

注：定理中 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的偏导数 $f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)$ 存在且连续这一条件可以减弱为：两个偏导数均存在，其中一个连续，仍有 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微。

如 f_x 连续，f_y 存在，在上面的证明中

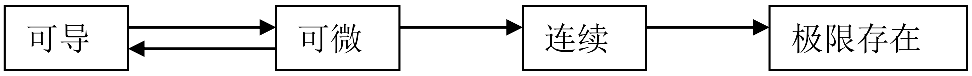
因 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=f_y(x_0,y_0)$

$$\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=f_y(x_0,y_0)+\varepsilon_2$$

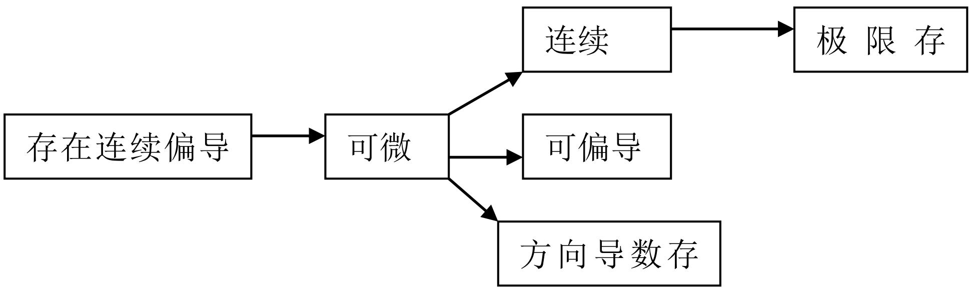
$f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)\Delta y+\varepsilon_2\Delta y$，其余同理。

一元函数与二元函数在可微、可导、连续等概念上的区别与联系

① 一元函数在某点处



②二元函数在某点处有



③用全微分的定义验证一个可偏导函数的可微性：只须验证极限 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z-z'_x(x_0,y_0)\Delta x-z'_y(x_0,y_0)\Delta y}{\rho}$ 是否等于零。若极限等于零，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，否则不可微。

例 设

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

证明在$(0,0)$的邻域内$\dfrac{\partial f}{\partial x}$与$\dfrac{\partial f}{\partial y}$都存在；$\dfrac{\partial f}{\partial x}$与$\dfrac{\partial f}{\partial y}$在$(0,0)$点不连续；但$f(x,y)$在$(0,0)$点可微。

证明：由定义知$f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x^2}=0$,同理$f_y'(0,0)=0$，所以在$(0,0)$点的偏导数存在。当$(x,y)\neq(0,0)$时，显然可求出其偏导数，

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

从而有$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}0,(x,y)=(0,0)\\ 2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

由对称性，同理可得$\dfrac{\partial f}{\partial y}$。

故在$(0,0)$的邻域内$\dfrac{\partial f}{\partial x}$与$\dfrac{\partial f}{\partial y}$都存在。

又因$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\lim\limits_{x\to 0}(2x\sin\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{2x^2})$不存在（沿特殊方式的极限不存在），所以$\dfrac{\partial f}{\partial x}$在$(0,0)$点不连续，同理可证$\dfrac{\partial f}{\partial y}$在$(0,0)$点不连续。

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta f-f_x'\cdot\Delta x-f_y'\cdot\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim\limits_{\rho\to 0}\rho\sin\dfrac{1}{\rho^2}=0$，由定义知$f(x,y)$在$(0,0)$点可微。

例　函数$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,x^2+y^2=0\end{cases}$在原点$\left(0,0\right)$处偏导数的存在,但不可微.

解　$f_x\left(0,0\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(0+\Delta x,0\right)-f\left(0,0\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0}{\Delta x}=0$，$f_y\left(0,0\right)=0$，即偏导数存在。

其次判定函数在点$\left(0,0\right)$是否可微，根据微分的定义，

$$\Delta z-[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y]=o\left(\rho\right)，（其中\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}）$$

即看Δz是否是ρ的高阶无穷小？

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y]}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\frac{\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\cdot\sin[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sqrt{\frac{|\Delta x\cdot\Delta y|}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\cdot\frac{\sin[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

其中前一部分的极限当沿$\Delta y=\Delta x$方向趋于原点时不趋于0。事实上

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x}}\sqrt{\frac{|\Delta x\cdot\Delta y|}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\sqrt{2}\,|\Delta x|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0$$，故 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z}{\rho}\neq 0.$ 事实上是极限不存在。

故表达式$\Delta z-\left[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y\right]$不是关于$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$的高阶无穷小，故函数$f(x,y)$在点$(0,0)$不可微分.

例 计算函数$z=e^{xy}$在点$(2,1)$处的全微分

例 求$z=\frac{y}{x}$,当$x=2,y=1,dx=0.1,dy=0.2$时 的全微分。

例 求下列函数的全微分

（1）$z=\arctan\frac{x+y}{x-y}$；（2）$u=z^{y^x}$。

解 （1）因为$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$,在定义域内连续，所以由定理2，该函数的全微分为 $\mathrm{d}z=\frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$；

解 （2）因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=z^{y^x}\cdot y^x\cdot\ln y\cdot\ln z$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=z^{y^x}\ln z\cdot x\cdot y^{x-1}=\frac{x\cdot y^x\ln z}{y}\cdot z^{y^x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=y^x\cdot z^{y^x-1}=\frac{y^x}{z}\cdot z^{y^x};$$

在定义域内连续，所以由定理2，该函数的全微分为于是，

$$du=z^{y^x}\left(\left(y^x\ln y\ln z\right)dx+\left(x\frac{y^x\ln z}{y}\right)dy+\frac{y^x}{z}dz\right).$$

例 设$f(x,y,z)=\sqrt[z]{\frac{x}{y}}$，求$df(1,1,1)$

解：$f(x,1,1)=x\Rightarrow f_x'(x,1,1)=1\Rightarrow f_x'(1,1,1)=1$

$f(1,y,1)=\frac{1}{y}\Rightarrow f_y'(1,y,1)=-\frac{1}{y^2}\Rightarrow f_y'(1,1,1)=-1$

$f(1,1,z)=1\Rightarrow f_z'(1,1,z)=0\Rightarrow f_z'(1,1,1)=0$

故 $df(1,1,1)=dx-dy$

练习题

例 设 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，其中 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域内连续，问：

（1）$\varphi(x,y)$ 应满足什么条件，才能使偏导数 $f_x'(0,0)$ 和 $f_y'(0,0)$ 都存在？

（2）在上述条件下，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点是否可微？

解（1）由于 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|\varphi(\Delta x,0)}{\Delta x}=\begin{cases}\varphi(0,0), & \Delta x\to 0^+\\ -\varphi(0,0), & \Delta x\leftrightarrow 0^-\end{cases}$，于是当

$\varphi(0,0)=0$ 时 $f_x'(0,0)$ 存在。同理可知当 $\varphi(0,0)=0$ 时 $f_y'(0,0)$ 存在。

（2）当 $\varphi(0,0)=0$ 时

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x'(0,0)\Delta x-f_y'(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{|\Delta x-\Delta y|\varphi(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$$

这是由于 $\dfrac{|\Delta x-\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\le\dfrac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}+\dfrac{|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\le 2$，

而 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varphi(\Delta x,\Delta y)=\varphi(0,0)=0$ 为无穷小量。

故当 $\varphi(0,0)=0$ 时，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微。

例 已知 $(axy^3-y^2\cos x)dx+(1+by\sin x+3x^2y^2)dy$ 是某一函数的全微分，则（　　）

（A）$a=-2,b=2$　　（B）$a=2,b=-2$

（C）$a=-3,b=3$　　（D）$a=3,b=-3$

答案：B

解析：由题设，存在 $u(x,y)$ 使

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=(axy^3-y^2\cos x)dx+(1+by\sin x+3x^2y^2)dy$$

于是 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=axy^3-y^2\cos x,\dfrac{\partial u}{\partial y}=1+by\sin x+3x^2y^2$

从而有 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=3axy^2-2y\cos x,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=by\cos x+6xy^2$

由表达式可知$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$连续，故有$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$，于是$a=2,b=-2$

例（2020年考研）设函数$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微，$f(0,0)=0,\vec{n}=\left.\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},-1\right)\right|_{(0,0)}$，非零向量$\vec{\alpha}$与$\vec{n}$垂直，则（　）

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\vec{n}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$存在　(B) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\vec{n}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$存在

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\vec{\alpha}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$存在　(D) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\vec{\alpha}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$存在

【答案】(A)

【解析】$\vec{n}=\left.\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},-1\right)\right|_{(0,0)}=(f_x'(0,0),f_y'(0,0),-1)$

因$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微，故

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\Leftrightarrow\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

从而$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\vec{n}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{|xf_x'(0,0)+yf_y'(0,0)-f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

例 设$z=f(x,y)$在点$(0,0)$处连续，且$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}=-1$，则下列结论**不正确**的是（ C ）

（A） $f_x'(0,0)$不存在　　（B） $f_y'(0,0)$不存在

（C） $f(x,y)$在$(0,0)$处取极小值　　（D） $f(x,y)$在$(0,0)$处不可微

解：因$z=f(x,y)$在点$(0,0)$处连续，且$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}=-1$，故$f(0,0)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0$，且$f(x,y)<0$，于是$f(x,y)<0=f(0,0),(x,y)\in\mathring{U}(0,0)$，从而$f(x,y)$在$(0,0)$处取极大值，故选C。

对于（A）：因$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}=-1\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)}{|x|}=-1$

于是 $f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)}{|x|}\cdot\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases}-1, & x\to 0+\\ 1, & x\to 0-\end{cases}$，即 $f_x'(0,0)$ 不存在。同理，$f_y'(0,0)$ 不存在。

例 若 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)+2x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=1$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（ B ）

（A）不连续　　（B）连续但两个偏导数不存在
（C）两个偏导数存在但不可微　　（D）可微

解：由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)+2x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=1$ 及 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}=0$ 知：

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[f(x,y)-f(0,0)+2x-y\right]=0\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=f(0,0)$，于是 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续。由

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)+2x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=1\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)+2x}{\sqrt{x^2}}=1$$

从而 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)+2x}{x}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{x}+2=1$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0+}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x,y)-f(0,0)+2x}{-x}=1\Rightarrow\lim_{x\to 0-}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{-x}-2=1$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0-}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{x}=-3$$

综上，两个偏导数不存在，故选 B。

教学要求和注意点

教学要求：

1．理解全微分的概念，
2．会求全微分，
3．了解全微分存在的必要条件和充分条件，
4．了解全微分形式的不变性，
5．了解全微分在近似计算中的应用。

教学注意点：

要求学生对全微分的原始定义

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

有很好的理解。

在一元函数中，可导与可微是等价的。但对多元函数而言，可微一定可导，可导却不一定可微。另外，还要让学生知道，但对多元函数而言，可微一定连续。判断全微分存在的充分条件是偏导数连续。

第四节　多元复合函数的求导法则

讲稿

在上册，我们学过一元复合函数的求导法则

若 $y=f(u),u=\varphi(x)$,则$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=f'(u)\varphi'(x)$

对于多元函数仍有类似的求导法则

1．复合函数的中间变量均为一元函数的情形

设 $z=f(u,v)$ 有连续的偏导数，$u=\varphi(t),v=\psi(t)$ 可导，则 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 可导，且

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

2．复合函数的中间变量均为多元函数的情形

设 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$ 有连续的偏导，则 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 可偏导，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

3．复合函数的中间变量既有一元函数，又有多元函数的情形

设 $z=f(u,v,x)$，$u=\varphi(x,y),v=\psi(y)$，则 $z=f[\varphi(x,y),\psi(y)]$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}\qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dy}$$

注意说明 z 是 x,y 的二元函数，而 f 是 u,v,x 的三元函数。

例　设 $z=e^u\sin v,$而$u=xy,v=x+y,$求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$

多元函数复合函数的求导法则只是把中间变量明确写出来了。

例　设 $z=uv+\sin t,$而$u=e^t,v=\cos t,$求全导数$\dfrac{dz}{dt}$

两种求法：多元函数的求导法则；一元函数的导数。

例　求下列复合函数的一阶偏导数，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，其中 f 可微。

（1）$z=f(x^2-y^2)$；　　　　（2）$z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$

解（1）$z_x=f'(x^2-y^2)\cdot 2x=2xf'(x^2-y^2)$，

$z_y=f'(x^2-y^2)\cdot(-2y)=-2y\,f'(x^2-y^2)$；

（2）$z_x=-\dfrac{yf'(x^2-y^2)\cdot 2x}{[f(x^2-y^2)]^2}=-\dfrac{2xyf'}{f^2}$；

$$z_y=\frac{f(x^2-y^2)-yf'(x^2-y^2)\cdot(-2y)}{[f(x^2-y^2)]^2}=\frac{f+2y^2f'}{f^2};$$

例　设$z=xf(\frac{y}{x})+(x-1)y\ln x$，其中$f$是任意二阶可微函数，求证：

$$x^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(x+1)y$$

证：$\frac{\partial z}{\partial x}=f-\frac{y}{x}f'+y\ln x+y-\frac{y}{x}$　　　$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y^2}{x^3}f''+\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=f'+(x-1)\ln x$　　　$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\cdot\frac{1}{x}$

所以　$x^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(x+1)y$

例 设$f\in C^{(2)}$类函数, 求下列函数的二阶偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

（1）$z=xf(\frac{y^2}{x})$　（2）$z=f(y+\frac{x^2}{y})$

解（1）$\frac{\partial z}{\partial y}=xf'\cdot\frac{2y}{x}=2yf'$；　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2yf''\cdot(-\frac{y^2}{x^2})=-\frac{2y^3}{x^2}f''$.

（2）$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\frac{2x}{y}$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2x}{y^2}f'+\frac{2x}{y}f''\cdot(1-\frac{x^2}{y^2})=-\frac{2x}{y^2}f'+\frac{2x}{y}(1-\frac{x^2}{y^2})f''$$

例　求$z=f(x,\frac{y}{x})$的所有二阶偏导数（其中f具有二阶连续偏导数）

解：这里$z=f(u,v),u=x,v=\frac{y}{x}$

于是$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\cdot\frac{-y}{x^2}$

$=f'_u+f'_v\cdot\frac{-y}{x^2}$（不混淆时，$\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}=f'_u(u,v)$可简记$f'_u$，$\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}=f'_v(u,v)$可简记为$f'_v$）

$=f'_1+f'_2\cdot\frac{-y}{x^2}$（不混淆时，可简记$\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}=f'_1,\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}=f'_2$）

同理$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_1\cdot 0+f'_2\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}f'_2$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\underline{f_{11}''\cdot 1+f_{12}''\cdot\frac{-y}{x^2}}+(\underline{f_{21}''\cdot 1+f_{22}''\cdot\frac{-y}{x^2}})\cdot\frac{-y}{x^2}+f_2'\cdot\frac{2y}{x^3}$$

$=f_{11}''-\frac{2y}{x^2}f_{12}''+\frac{y^2}{x^4}f_{22}''+\frac{2y}{x^3}f_2'$（因 f 具有二阶连续偏导数，故 $f_{12}''=f_{21}''$）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}f_2'\right)=\frac{1}{x}(f_{21}''\cdot 0+f_{22}''\cdot\frac{1}{x})=\frac{1}{x^2}f_{22}''$$

这里要注意的是： $f_1'=f_u'=f_u'(u,v), f_2'=f_v'=f_v'(u,v)$，即符号 f_1' 或 f_u' 及 f_2' 或 f_v' 仍看作 u,v 的函数。

例 设 $w=f(x+y+z,xyz), f$ 有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

例 设 $z=f(x,u,v),u=2x+y,v=xy,$其中f具有二阶连续偏导数,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot y$，求二阶偏导数时，主要注意是$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}(x,u,v)$，$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial u}(x,u,v),\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial v}(x,u,v)$，所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+2(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y})+\frac{\partial f}{\partial v}+y(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y})$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u}+x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial v}+2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+u\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial f}{\partial v}+v\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

并注意混合偏导数相等

例 7 设函数 $z=f\left(x^2+y^2,\frac{x}{y},xy\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

$$z_{xx}=2f_1'+4x^2f_{11}''+\frac{1}{y^2}f_{22}''+x^2f_{33}''+\frac{4x}{y}f_{12}''+4xyf_{13}''+2f_{23}''$$

$$z_{xy}=-\frac{1}{y^2}\cdot f_2'+f_3'+4xy\cdot f_{11}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''+xy\cdot f_{33}''+2(1-\frac{x^2}{y^2})f_{12}''+2(x^2+y^2)f_{13}''$$

例 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微，且 $f(1,1)=1$，$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3$，$\varphi(x)=f\left(x,f(x,x)\right)$，求 $\left.\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.

解 由题设 $\varphi(1)=f\left(1,f(1,1)\right)=f(1,1)=1$，

$$\left.\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\right|_{x=1}=3\varphi^2(x)\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=1}$$

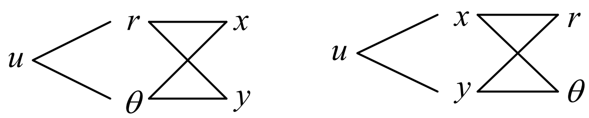
$$=3\left[f_1'(x,f(x,x))+f_2'(x,f(x,x))\left(f_1'(x,x)+f_2'(x,x)\right)\right]\Big|_{x=1}$$

$$=3\cdot[2+3\cdot(2+3)]=51$$

例 设 $u=f(x,y)$ 的所有二阶偏导数连续，把下表达式转换为极坐标系中的形式：

（1）$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$；　　　　（2）$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

解 1：变量之间的关系为



引入极坐标 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$， $r=\sqrt{x^2+y^2},\theta=\arctan\frac{y}{x}$，则

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}=\cos\theta,\frac{\partial r}{\partial y}=\sin\theta,\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}=-\frac{\sin\theta}{r},\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{x}{r}-\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{y}{r^2}=\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}$$

解 2：$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta$

$\frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}=\frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot r\sin\theta$， 解此方程组得 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$

从而 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\cdot\cos\theta-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\cdot\frac{\sin\theta}{r}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\theta-2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\sin^2\theta}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r}$$

同理可得：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\theta+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\theta}{r^2}-\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2\theta}{r}$$

极坐标形式下的方程为$\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$

例 利用变换$u=x-ay,v=x+ay(a\neq 0)$变换方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0.$

解：z可以看成是以u,v为中间变量，x,y为自变量的函数。于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-a\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial z}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\right]=a\left[-\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$

$$=a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$

代入原方程化简为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$

全微分的形式不变性

设函数$z=f(u,v)$具有连续的偏导数，则其全微分$dz=\dfrac{\partial z}{\partial u}du+\dfrac{\partial z}{\partial v}dv$

如果$z=f(u,v),u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$，则其全微分$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

而 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x})dx+(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y})dy$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy)+\frac{\partial z}{\partial v}(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy)=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$$

无论z是自变量u,v的函数，或是中间变量u,v的函数，它的全微分形式不变，均为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$$

这个性质称为全微分的形式不变性。

例 求$z=e^u\sin v,u=x+y,v=xy$的全微分

解：$dz=d(e^u\sin v)=e^u\sin vdu+e^u\cos vdv=e^u\sin v(dx+dy)+e^u\cos v(ydx+xdy)$

例 设函数$w=f\left(u,v\right)$，$u=xy$，$v=\frac{y}{x}$，其中$f\in C^{(1)}$类函数．求$\frac{\partial w}{\partial x}$、$\frac{\partial w}{\partial y}$．

解 利用全微分形式不变性，对函数w求全微分得

$$dw=f_1d\left(xy\right)+f_2d\left(\frac{y}{x}\right)=f_1\left(ydx+xdy\right)+f_2\frac{xdy-ydx}{x^2}$$

$$=\left(yf_1-\frac{y}{x^2}f_2\right)dx+\left(xf_1+\frac{1}{x}f_2\right)dy$$

故 $\frac{\partial w}{\partial x}=yf_1-\frac{y}{x^2}f_2$， $\frac{\partial w}{\partial y}=xf_1+\frac{1}{x}f_2$

思考题：如何证明多元复合函数的求导法则，即

设$z=f(u,v),u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$，$f$具有连续的偏导数，$\varphi,\psi$可偏导，证

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

证明：$\Delta_x u=\varphi(x+\Delta x,y)-\varphi(x,y)\Rightarrow\varphi(x+\Delta x,y)=u+\Delta_x u$

$$\Delta_x v=\psi(x+\Delta x,y)-\psi(x,y)\Rightarrow\psi(x+\Delta x,y)=v+\Delta_x v$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\varphi(x+\Delta x,y),\psi(x+\Delta x,y))-f(\varphi(x,y),\psi(x,y))}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[f(u+\Delta_x u,v+\Delta_x v)-f(u,v+\Delta_x v)\right]+\left[f(u,v+\Delta_x v)-f(u,v)\right]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(u+\Delta_x u,v+\Delta_x v)-f(u,v+\Delta_x v)}{\Delta_x u}\cdot\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\frac{f(u,v+\Delta_x v)-f(u,v)}{\Delta_x v}\cdot\frac{\Delta_x v}{\Delta x}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

练习题

例 设函数 $f(u,v)$ 由关系式 $f[xg(y),y]=x+g(y)$ 所确定，其中函数 $g(y)$ 可微，且 $g(y)\neq 0$，

则 $\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=$__________

答案：$-\frac{g'(v)}{[g(v)]^2}$

解：令 $xg(y)=u, y=v$，则 $f(u,v)=\frac{u}{g(v)}+g(v)$，于是 $\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{1}{g(v)},\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=-\frac{g'(v)}{g^2(v)}$

例.设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，其中 φ 具有二阶导数，ψ 具有一阶导数，则必有（　　）

（A）$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　（B）$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　（C）$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　（D）$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

答案：B

例.设 $f(x,y)$ 可微，又 $f(0,0)=0, f_x'(0,0)=a, f_y'(0,0)=b$，且 $g(t)=f[t,f(t,t^2)]$，求 $g'(0)$.

解：$g'(t)=f_x'[t,f(t,t^2)]+f_y'[t,f(t,t^2)][f_x'(t,t^2)+f_y'(t,t^2)\cdot 2t]$

$g'(0)=a+b(a+b\times 0)=a(1+b)$

例 设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}dt$，则 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$________　4

例（**2010 年**）设函数 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足等式 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，确定 a,b 的值，使等式在变换 $\xi=x+ay,\eta=x+by$ 下简化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0.$

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=a\frac{\partial u}{\partial\xi}+b\frac{\partial u}{\partial\eta}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$$

将以上各式代入原等式，得

$$(5a^2+12a+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+[10ab+12(a+b)+8]\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+(5b^2+12b+4)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0$$

由题意，令

$\begin{cases}5a^2+12a+4=0\\5b^2+12b+4=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=-2\\b=-2/5\end{cases}$,$\begin{cases}a=-2\\b=-2\end{cases}$,$\begin{cases}a=-2/5\\b=-2\end{cases}$,$\begin{cases}a=-2/5\\b=-2/5\end{cases}$

由$10ab+12(a+b)+8\neq 0$，舍去第二、四组，故

$\begin{cases}a=-2\\b=-2/5\end{cases}$，或$\begin{cases}a=-2/5\\b=-2\end{cases}$

例 若函数$z=f(x,y)$满足$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$，且$f(x,1)=x+2$，又$f_y'(x,1)=x+1$，求$f(x,y)$

解：由$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$知$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\int 2dy=2y+\varphi(x)$，由题设条件$f_y'(x,1)=x+1$知

$x+1=f_y'(x,1)=2+\varphi(x)\Rightarrow\varphi(x)=x-1$

于是$z=\int(2y+x-1)dy=y^2+(x-1)y+\psi(x)$

由题设条件$f(x,1)=x+2$知$x+2=f(x,1)=1+(x-1)+\psi(x)\Rightarrow\psi(x)=2$

则$z=y^2+(x-1)y+2$

例 设$f(u)$具有二阶连续导数，而$z=f(e^x\sin y)$满足方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=ze^{2x}$，求$f(u)$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(u)e^x\sin y,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)e^{2x}\sin^2 y+f'(u)e^x\sin y$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(u)e^x\cos y,\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)(e^x\cos y)^2-f'(u)e^x\sin y$

将$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$代入方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=ze^{2x}$

从而有$f''(u)e^{2x}=f(u)e^{2x}\Rightarrow f''(u)-f(u)=0\Rightarrow f(u)=C_1e^{-u}+C_2e^{u}$

例 设 $u=u(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足微分方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2+y^2$，证明 $u=u(r)$ 满足常微分方程 $\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}=r^2$，并求出 $u(r)$.

证明：由已知 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{du}{dr}\cdot\frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{d^2u}{dr^2}\cdot\left(\frac{x}{r}\right)^2+\frac{du}{dr}\cdot\frac{r-x\cdot(x/r)}{r^2}=\frac{d^2u}{dr^2}\cdot\left(\frac{x}{r}\right)^2+\frac{du}{dr}\cdot\frac{y^2}{r^3}$$，同理可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{d^2u}{dr^2}\cdot\left(\frac{y}{r}\right)^2+\frac{du}{dr}\cdot\frac{x^2}{r^3}$$

所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}$，故 $u=u(r)$ 满足常微分方程 $\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}=r^2$

利用降阶法，令 $\frac{du}{dr}=y(r)$，则 $\frac{d^2u}{dr^2}=y'$，上方程变为

$$y'+\frac{1}{r}y=r^2\Rightarrow y=\frac{c_1}{r}+\frac{1}{4}r^3\Rightarrow u=c_1\ln r+\frac{1}{16}r^4+c_2$$

例 设函数 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数,$z=f(e^x\cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$$

若 $f(0)=0,f'(0)=0$,求 $f(u)$ 的表达式.

解:因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(e^x\cos y)e^x\cos y,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\cos^2 y+f'(e^x\cos y)e^x\cos y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-f'(e^x\cos y)e^x\sin y,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\sin^2 y-f'(e^x\cos y)e^x\cos y$$

所以,由已知 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$ 可得

$$f''(e^x\cos y)e^{2x}=[4f(e^x\cos y)+e^x\cos y]e^{2x}$$

从而函数 $f(u)$ 满足方程 $f''(u)-4f(u)=u$

该微分方程对应的齐次方程的通解为 $f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}$,非齐次方程的一个特解为 $-\frac{u}{4}$,

故微分方程的通解为 $f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{u}{4}$.

由 $f(0)=0, f'(0)=0$ 得 $\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ 2C_1-2C_2-\frac{1}{4}=0 \end{cases}$,解得 $C_1=\frac{1}{16}, C_2=-\frac{1}{16}$

故 $f(u)=\frac{1}{16}(e^{2u}-e^{-2u}-4u)$.

教学要求和注意点

教学要求：

1．会求复合函数的中间变量均为一元函数的情形

2．理解并会求复合函数的中间变量均为多元函数的情形

3．会求复合函数的中间变量既有一元函数，又有多元函数的情形

教学注意点：

多元复合函数的求导法则实际上是一元复合函数求导法则的推广，都是所谓的链锁法则，要求学生掌握其本质，重点要掌握和理解复合函数的中间变量均为多元函数的情形。在具体求导时，最好能画出变量之间关系的树形图。

第五节　隐函数的求导公式

讲稿内容

我们知道表示函数的方法是多种多样的，如显式表示，隐式表示（又分为单个方程或方程组），参数方程（显式或隐式）表示等，相应就产生各式各样的求导法则或公式。

1．由二元方程 $F(x,y)=0$ 所确定（有一个能不能确定的问题，即隐函数存在定理）的一元隐函数 $y=f(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$ 的求法：

（1）显化：由 $F(x,y)=0$ 解出 $y=f(x)$，利用一元函数的求导法则，求出 $\frac{dy}{dx}$。

由 $F(x,y)=0$ 解出 $x=f(y)$，利用反函数的求导法则，求出 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{dx/dy}$

（2） 视 y 为 x 的函数用复合函数的求导法则

（3） 利用函数的微分

（4） 用隐函数的求导公式 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$

隐函数存在定理 1 设函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0, F_y(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并且有 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$

证明：我们只证隐函数求导公式

易知 $F(x,f(x))\equiv 0$，两边对 x 求导得

$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$（由 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ 且连续知 $F_y(x_0,y_0)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内不为 0）

解得 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$。进一步可得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{F_y^2}\left[(F_{xx}+F_{xy}\cdot\frac{dy}{dx})F_y-F_x(F_{yx}+F_{yy}\frac{dy}{dx})\right]=-\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

例 求由方程 $x^2+y^2=1$ 所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$

例 求由方程 $e^y+xy-e=0$ 所确定的隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

法 1　视 y 为 x 的函数，两边对 x 求导得：

$e^y y'+y+xy'=0$，解得 $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-y}{x+e^y}$

法 2　由已知得 $x=\dfrac{1}{y}(e-e^y)$, 从而 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{-e^y y+e^y-e}{y^2}$，用反函数的求导法则知

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{-e^y y+e^y-e}=\frac{-y}{x+e^y}$$

法 3　两边微分：$e^y dy+dx\cdot y+xdy=0$，解出 $\dfrac{dy}{dx}$ 即得。

法 4　令 $F(x,y)=e^y+xy-e$, 则 $F_x=y, F_y=e^y+x$, 所以 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}=\dfrac{-y}{x+e^y}$

从上面可看到法 4 较简。

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\right)=-\dfrac{(F_{xx}+F_{xy}y')\cdot F_y-F_x(F_{yx}+F_{yy}y')}{F_y^2}$，其中 $y'=\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$

或 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{-y}{x+e^y}\right)=-\dfrac{y'(x+e^y)-y(1+e^y y')}{(x+e^y)^2}=\dfrac{3xy+(3y-y^2)e^y}{(x+e^y)^3}$

例 证明：若 $1+xy=k(x-y)$，式中 k 为常数，则成立等式 $\dfrac{dx}{1+x^2}=\dfrac{dy}{1+y^2}$ 。

证明：两端微分 $ydx+xdy=k(dx-dy)\Rightarrow ydx+xdy=\dfrac{1+xy}{x-y}(dx-dy)$

$$(x-y)(ydx+xdy)=(1+xy)(dx-dy)\Rightarrow(1+x^2)dy=(1+y^2)dx\Rightarrow\frac{dx}{1+x^2}=\frac{dy}{1+y^2}$$

2．由三元方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的二元函数 $z=f(x,y)$ 或 $x=g(y,z)$ 等的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial x}{\partial y}$ 等的求法（与上面相应）

⑴　显化：一般行不通

⑵　视 z 为 x,y 的函数，两边分别对 x,y 求导，则可得到 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$

⑶ 隐函数的求导公式 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$

⑷ 利用微分

隐函数存在定理 2 设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0,F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，并且有 $\frac{\partial z}{dx}=-\frac{F_x}{F_z}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$。证明类似。

例 设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$

法 1 两边对 x 求偏导得：$2x+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-4\frac{\partial z}{\partial x}=0$，所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{z-2}$

法 2 $F(x,y,z)=\ x^2+y^2+z^2-4z$，

$F_x=2x,F_y=2y,F_z=2z-4,$所以$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{z-2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{z-2}$

法 3 两边微分有：$2xdx+2ydy+2zdz-4dz=0$

从而 $dz=-\frac{x}{z-2}dx-\frac{y}{z-2}dy$，所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{z-2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{z-2}$

例 设由方程 $x+y+z=e^z$ 确定 z 是 x,y 的函数,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$（同济大学、华东化工学院等）

例 4 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 所确定，求 $3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$。

解 令 $F(x,y,z)=e^{2x-3z}+2y-z$，由定理 2，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2e^{2x-3z}}{-3e^{2x-3z}-1}=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}$$

于是

$$3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{6e^{2x-3z}+2}{1+3e^{2x-3z}}=2$$

例 设 $z=z(x,y)$ 为由方程 $f(x+y,y+z)=0$ 所确定的函数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

解 令 $F(x,y,z)=f(x+y,y+z)$，则 $F_x=f_1'$， $F_y=f_1'+f_2'$， $F_z=f_2'$

$\therefore \quad \dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=-\dfrac{f_1'}{f_2'} \quad , \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}=-\dfrac{f_1'+f_2'}{f_2'}$

$\therefore \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{f_1'}{f_2'}\right)=-\dfrac{(f_{11}''+f_{12}''\cdot z_x)f_2'-f_1'(f_{21}''+f_{22}''\cdot z_x)}{\left(f_2'\right)^2}$

$$=\frac{f_1' f_{12}''-f_2' f_{11}''}{\left(f_2'\right)^2}+\frac{f_1' f_2' f_{21}''-\left(f_1'\right)^2 f_{22}''}{\left(f_2'\right)^3}。$$

例 设 $z=z(x,y)$ 为由方程 $F(x-\dfrac{z}{y},y-\dfrac{z}{x})=0$ 决定的可微函数，这里 F 可微，求证：

$$xz_x'+yz_y'=z+xy$$

3.方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 确定隐函数 $y=y(x),z=z(x)$，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$

定理 3 设三元函数 $F\left(x,y,z\right)$、$G\left(x,y,z\right)$ 在包含点 $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 的某一邻域内满足

（1）$F\left(x,y,z\right)$、$G\left(x,y,z\right)$ 有一阶连续偏导数,

（2）$F\left(x_0,y_0,z_0\right)=0$，$G\left(x_0,y_0,z_0\right)=0$。

（3）$J=\dfrac{\partial\left(F,G\right)}{\partial\left(y,z\right)}\Big|_{\left(x_0,y_0,z_0\right)}=\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix}\Big|_{\left(x_0,y_0,z_0\right)}\neq 0$（称为雅可比行列式）

则 $\begin{cases}F\left(x,y,z\right)=0\\G\left(x,y,z\right)=0\end{cases}$ 在点 $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 的某邻域内唯一确定了一对具有连续偏导数的一元函数 $y=y(x)$、$z=z(x)$，满足 $y_0=y\left(x_0\right)$，$z_0=\left(x_0\right)$，并有

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial\left(F,G\right)}{\partial\left(x,z\right)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_x & F_z\\G_x & G_z\end{vmatrix} \qquad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial\left(F,G\right)}{\partial\left(y,x\right)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_y & F_x\\G_y & G_x\end{vmatrix}$$

通过解下面的线性方程组得到

$$\begin{cases}F_x'+F_y'\dfrac{dy}{dx}+F_z'\dfrac{dz}{dx}=0\\[2mm]G_x'+G_y'\dfrac{dy}{dx}+G_z'\dfrac{dz}{dx}=0\end{cases}$$

例 5 设 $y=y(x)$, $z=z(x)$，由 $\begin{cases}x+y+z+z^2=0\\x+y^2+z+z^3=0\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$.

解 对方程组关于 x 求导，可得 $\begin{cases}1+y'+z'+2zz'=0\\1+2yy'+z'+3z^2z'=0\end{cases}$

求解关于 $y'(x)$、$z'(x)$ 的线性方程组，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y-1}{1+3z^2-2y-4yz},\frac{dz}{dx}=\frac{2z-3z^2}{1+3z^2-2y-4yz}$$

例 设 $y=g(x,z)$,而z是由方程$f(x-z,xy)=0$所确定的x,y的函数，求$\frac{dz}{dx}$

解：由欲求的结果$\frac{dz}{dx}$可知y,z是x的函数，方程组

$\begin{cases} y=g(x,z) \\ f(x-z,xy)=0 \end{cases}$ 两边分别对 x 求导，则得

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx}=g_1'+g_2'\frac{dz}{dx} \\ f_1'\cdot(1-\frac{dz}{dx})+f_2'\cdot(y+x\frac{dy}{dx})=0 \end{cases} \quad \text{解得} \frac{dz}{dx}=\frac{f_1'+yf_2'+xf_2'g_1'}{f_1'-xf_2'g_2'}$$

另解：由题知 $f(x-z,xg(x,z))=0$，利用复合函数的求导法则即可求得。

例 7 设 $z=x\,f(x+y),F(x,y,z)=0$ 其中 f 与 F 分别具有一阶导数或偏导数，求$\frac{dz}{dx}$。

解：方程两边对 x 求导，得

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx}=f+xf'\cdot(1+\frac{dy}{dx}) \\ F_1'+F_2'\cdot\frac{dy}{dx}+F_3'\frac{dz}{dx}=0 \end{cases} \text{整理得} \begin{cases} -xf'\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=f+xf' \\ F_2'\cdot\frac{dy}{dx}+F_3'\frac{dz}{dx}=-F_1' \end{cases}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix} -x\,f' & f+xf' \\ F_2' & -F_1' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -xf' & 1 \\ F_2' & F_3' \end{vmatrix}}=\frac{x\,F_1'f'-xF_2'f'-fF_2'}{-xf'F_3'-F_2'} \qquad (xf'F_3'+F_2'\neq 0)$$

4. 由四个变量两个方程所构成的方程组

定理 4 设四元函数 $F(x,y,u,v)$、$G(x,y,u,v)$在包含点(x_0,y_0,u_0,v_0)的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数,且$F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$。如果行列式

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\bigg|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)}=\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}\bigg|_{(x_0,y_0,u_0v_0)}\neq 0,$$

则方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$$

在点(x_0,y_0,u_0,v_0)的某邻域内唯一确定了一对具有连续偏导数的二元函数$u=u(x,y)$及$v=v(x,y)$，满足$u_0=u(x_0,y_0)$，$v_0=v(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}$$

下面推导公式（6）：

方程组$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$两端对$x$求导，通过解下面方程组

$\begin{cases}F'_x+F'_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+F'_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\ G'_x+G'_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+G'_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}$得到$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$，同理可得$\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}$

例 设$xu-yv=0, yu+xv=1,$求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$

例 从方程组$\begin{cases}x+y+u+v=1\\ x^2+y^2+u^2+v^2=2\end{cases}$中求出$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

解：方程组两边对x求偏导得

$$\begin{cases}1+\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\ x+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x-u}{v-u},\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{u-x}{v-u}$$

上方程两边再对x求偏导得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0\\ 1+(\dfrac{\partial u}{\partial x})^2+u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(\dfrac{\partial v}{\partial x})^2+v\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0\end{cases}$$

解得$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{(v-u)^2+(x-v)^2+(u-x)^2}{(v-u)^3}$，　$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\dfrac{(v-u)^2+(x-v)^2+(u-x)^2}{(u-v)^3}$，

例 设u、v为方程组$\begin{cases}x^2+y^2-uv=0\\ xy-u^2+v^2=0\end{cases}$所确定的变量$x$、$y$的隐函数，且$u^2+v^2\neq 0$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$。

解：就题设两个方程对x求偏导，得：$\begin{cases}2x-(u_xv+uv_x)=0\\ y-2uu_x+2vv_x=0\end{cases}$，　因为$u^2+v^2\neq 0$，求解关于$u_x$, v_x的线性方程组，得$u_x=\dfrac{4xv+uy}{2(u^2+v^2)}$，$v_x=\dfrac{4xu-yv}{2(u^2+v^2)}$。

练习题

1．设$u=f(x,y,z)$有连续 的一阶偏导数，又函数$y=y(x)$与$z=z(x)$分别由下列两式确定：$e^{xy}-xy=2$和$e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$，求$\frac{du}{dx}$.

解：$\frac{du}{dx}=f'_x+f'_y\cdot y'(x)+f'_z\cdot z'(x)$

$$e^{xy}-xy=2\Rightarrow e^{xy}(y+xy')-(y+xy')=0\Rightarrow (e^{xy}-1)(y+xy')=0\Rightarrow y+xy'=0\Rightarrow y'=-\frac{y}{x}$$

$$e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt\Rightarrow e^x=\frac{\sin(x-z)}{x-z}(1-z')\Rightarrow z'=1-\frac{x-z}{\sin(x-z)}e^x$$

联立三式即得所求。

2. 设$u=f(x,y,z)$有连续 的一阶偏导数，$z=z(x,y)$由方程$xe^x-ye^y=ze^z$所确定，并设$z\neq-1$，求du.

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_x+f'_z\cdot\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}=f'_y+f'_z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$

$$F(x,y,z)=xe^x-ye^y-ze^z,F_x=e^x+xe^x,F_y=-(e^y+ye^y),F_z=-(e^z+ze^z)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{e^x+xe^x}{e^z+ze^z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{e^y+ye^y}{e^z+ze^z}$$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=(f'_x+f'_z\cdot\frac{1+x}{1+z}e^{x-z})dx+(f'_y-f'_z\cdot\frac{1+y}{1+z}e^{x-z})dy$$

教学要求和注意点

教学要求：

1． 会求由一个方程确定的隐函数的导数

2．会求由方程组确定的隐函数的导数

教学注意点：

在计算由方程组确定的隐函数的导数时，要注意区分哪些是自变量，哪些是因变量，一般来说，有多少个方程就可以确定多少个因变量，剩下的全是自变量。

第六节 多元函数微分学的几何应用（讲授法 2 学时）

讲稿内容

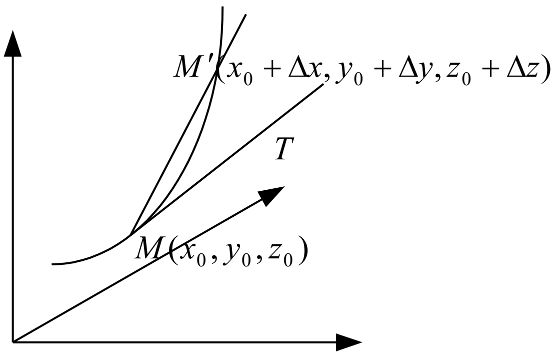
一、空间曲线的切线与法平面

(1) 设空间曲线的参数方程为

$\Gamma: x = x(t), y = y(t), z = z(t),$ 参数 $t = t_0$ 与空间直角点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 相对应为切点

则切线向量为 $\vec{s} = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$

切线方程为 $\dfrac{x - x_0}{x'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{y'(t_0)} = \dfrac{z - z_0}{z'(t_0)}$



法平面方程为

$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$

（过切点 M 而与切线垂直的平面称为**曲线** Γ **在点** M **处的法平面**。）

推导：设 $t = t_0 + \Delta t$ 对应的直角坐标点为 $M'(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$，由解析几何知道，曲线的割线 MM' 的方程是

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} = \frac{z - z_0}{\Delta z}$$

由切线的定义知，当 M' 沿曲线 Γ 趋于 M 时（此时必有 $\Delta t \to 0$），割线 MM' 的极限位置 MT 就是曲线 Γ 在点 M 的切线。上式分母同除 Δt，并让 $\Delta t \to 0$，得

$$\frac{x - x_0}{\lim\limits_{\Delta t \to 0}(\Delta x / \Delta t)} = \frac{y - y_0}{\lim\limits_{\Delta t \to 0}(\Delta y / \Delta t)} = \frac{z - z_0}{\lim\limits_{\Delta t \to 0}(\Delta z / \Delta t)} \Rightarrow \frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$

例 求曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线及法平面。

例 在曲线 $x = t, y = -t^2, z = t^3$ 的所有切线中，与平面 $x + 2y + z = 4$ 平行的切线（B）

（A）只有 1 条　　（B）只有 2 条，　　（C）至少有 3 条，　　（D）不存在

例 求曲线 $x = t^e, y = -e^t, z = t^t$ 在对应于 $t = e$ 点处的切线方程和法平面方程。

解 $t = e$ 对应点 $(e^e, -e^e, e^e)$ 又 $\{x'(t), y'(t), z'(t)\} = \left(et^{e-1}, -e^t, (\ln t + 1)t^t\right)$

对应点的切线方向向量 $\vec{S} = \{e^e, -e^e, 2e^e\} = e^e\{1, -1, 2\}$

切线方程 $x - e^e = \dfrac{y + e^e}{-1} = \dfrac{z - e^e}{2}$

法平面方程 $(x - e^e) - (y + e^e) + 2(z - e^e) = 0$ 或 $x - y + 2z = 4e^e$

特别地，若空间曲线 Γ 由方程 $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$ 表示，只要将 x 视为参数，则曲线 Γ 仍为参数式

$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$，则曲线$\Gamma$在点$x_0$处的切线方程及法平面方程分别为：

$$\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y(x_0)}{y'(x_0)} = \frac{z-z(x_0)}{z'(x_0)}$$

$$(x-x_0)+y'(x_0)(y-y(x_0))+z'(x_0)(z-z(x_0))=0 \text{。}$$

⑵ 设空间曲线的一般方程为$\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，　切点为$(x_0,y_0,z_0)$

则切线向量为$\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)} = \{m,n,p\}$，或为$\{1,y'(x),z'(x)\}_{(x_0,y_0,z_0)}$（将曲线方程看成是以$x$为参数的参数方程）

切线方程为$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

法平面方程为$m(x-x_0)+n(y-y_0)+p(z-z_0)=0$

推导：$\{1,y'(x),z'(x)\}=\left\{1,-\dfrac{\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}},-\dfrac{\begin{vmatrix} F_y & F_x \\ G_y & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}\right\}$

$$=\frac{1}{J}\left\{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} F_y & F_x \\ G_y & G_x \end{vmatrix}\right\}=\frac{1}{J}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}$$

例　求曲线$x^2+y^2+z^2=6, x+y+z=0$在点$(1,-2,1)$处的切线及法平面方程。

解：$\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,-2,1)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-6,0,6)$

所求切线方程为$\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-2}{1}$

法平面方程为$x-z=0$

例 求曲线$\begin{cases} z = xy + 5 \\ xyz + 6 = 0 \end{cases}$在点$(1,-2,3)$处的切线及法平面方程。

解 在方程组中视y、z为x的函数：$y = y(x)$和$z = z(x)$；

对方程组关于x求导，得$\begin{cases} y + xy' - z' = 0 \\ yz + xzy' + xyz' = 0 \end{cases}$，代入点$(1,-2,3)$

解得$y'|_{(1,-2,3)} = 2$，$z'|_{(1,-2,3)} = 0$

对应的切线方向向量 $\vec{S} = \{1,2,0\}$，从而

切线方程 $x - 1 = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{0}$ 或 $\begin{cases} 2(x-1) = y + 2 \\ z = 3 \end{cases}$

法平面方程为 $(x-1) + 2(y+2) = 0$ 或 $x + 2y + 3 = 0$

$\vec{s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ y & x & -1 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & -1 \\ -6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (1,2,0)$

4-6

例 求过直线$\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x - y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$，且与曲线$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}z^2 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$在点$(1,-1,2)$处的切线平行的平面方程。

解：$(F_x, F_y, F_z)|_{(1,-1,2)} = (2x, 2y, -z)|_{(1,-1,2)} = (2,-2,-2)$

$(G_x, G_y, G_z)|_{(1,-1,2)} = (1,1,2)|_{(1,-1,2)} = (1,1,2)$

所以曲线的切线的方向向量为$\{-1,-3,2\}$

过直线的平面束方程为$x + 2y + z - 1 + \lambda(x - y - 2z + 3) = 0$

即$(1+\lambda)x + (2-\lambda)y + (1-2\lambda)z + 3\lambda - 1 = 0$，由已知应有

$\{-1,-3,2\} \cdot \{1+\lambda, 2-\lambda, 1-2\lambda\} = 0$，得$\lambda = -\dfrac{5}{2}$

所求平面方程为$3x - 9y - 12z + 17 = 0$

另：所求平面的法线向量等于直线的方向向量与曲线的切线向量的叉乘，直线上的点即在平面上，利用平面方程的点法式即可求得，此时需把已知直线方程转化为点向式。

二、空间曲面的切平面与法线

(1) 设曲面方程为$\sum: F(x,y,z) = 0, M_0(x_0, y_0, z_0)$为切点

首先，如何得到一个已知曲面在一个已知点的切平面呢？

过已知点M_0在曲面$\sum$上任意引一条曲线Γ

$\Gamma: x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t)$

设M_0点对应的参数为$t = t_0$，则曲线Γ在M_0处切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

过点M_0另外任意引一条曲线，同样可得到此点的另一条切线，下面我们证明所有这些切线位于同个平面内，这个平面就称为**曲面在点M_0处的切平面。**

因为曲线Γ完全在曲面$F(x,y,z)=0$内，所以有

$F(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\equiv 0$　　等式两边对t求导，

（当然这里要假设F在M_0处的偏导数存在，且$\varphi(t),\psi(t),\omega(t)$可导）

$F_x(x_0,y_0,z_0)\varphi'(t_0)+F_y\cdot\psi'+F_z\cdot\omega'=0$

即　$(F_x,F_y,F_z)\cdot(\varphi',\psi',\omega')=0$

亦即向量$(F_x,F_y,F_z)\perp(\varphi',\psi',\omega')$

这说明在曲面内任意所引的曲线的切线向量(φ',ψ',ω')垂直于同一向量(F_x,F_y,F_z)，所以所有切线在同一平面内，这就是我们要找的切平面。

故切平面的法线向量为$\vec{n}=\{F_x(M_0),F_y(M_0),F_z(M_0)\}=\{A,B,C\}$，$M_0$处的切平面的法线向量也称为**曲面在$M_0$处的法向量**。

切平面方程为：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

法线方程为：$\dfrac{x-x_0}{A}=\dfrac{y-y_0}{B}=\dfrac{z-z_0}{C}$

（过切点垂直于切平面的直线称曲面在该点的法线）

例　求旋转抛物面$z=x^2+y^2-1$在点$(2,1,4)$处的切平面及法线方程。

例 求曲面$x^2+2y^2+3z^2=21$上平行于平面$x+4y+6z=0$的切平面方程。

解：令$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$，曲面上点$(x,y,z)$的切平面的法线向量

$\vec{n}=\{F_x,F_y,F_z\}=\{2x,4y,6z\}$，由已知$\dfrac{2x}{1}=\dfrac{4y}{4}=\dfrac{6y}{6}=k$，所以

切点$x=\dfrac{k}{2},y=k,z=k$，又因切点在曲面上，故$\left(\dfrac{k}{2}\right)^2+2k^2+3k^2=21\Rightarrow k=\pm 2$

即切点为$(1,2,2),(-1,-2,-2)$，对应的切平面方程：

$(x-1)+4(y-2)+6(z-2)=0$ 及 $(x+1)+4(y+2)+6(z+2)=0$

例（填空题。全国，03 年）

曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面的方程是________z

例 设空间曲线 Γ 为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$。试证明：在曲线 Γ 上任意一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线向量等于曲面 $F(x,y,z)=0$ 与 $G(x,y,z)=0$ 在此点处法向量的向量积。

证 因为曲线 Γ 在曲面 Σ_1：$F(x,y,z)=0$ 上，所以曲线 Γ 上点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量 $\vec{s}$ 与曲面 Σ_1 在该点处的法向量 $\{F_x,F_y,F_z\}$ 垂直；

同理曲线 Γ 上点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量 $\vec{s}$ 还与曲面 Σ_2：$G(x,y,z)=0$ 在该点处的法向量 $\{G_x,G_y,G_z\}$ 垂直；

故可取切线向量为 $\vec{s}=\{F_x,F_y,F_z\}\times\{G_x,G_y,G_z\}$。

事实上，由前知：$\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\F_x&F_y&F_z\\G_x&G_y&G_z\end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}=\{F_x,F_y,F_z\}\times\{G_x,G_y,G_z\}$

<u>**我们知道**</u>：两平面交线的方向向量可由两平面的法向量叉乘而得，上面的例子说明两曲面交线在某一点的切向量，也可由两曲面在该点的切平面的法线向量的叉乘而得。

例 设函数 $F(u,v)$ 具有一阶连续的偏导数，且 $F_u'(0,1)=2,F_v'(0,1)=-3$，求曲面

$F(x-y+z,xy-yz+zx)=0$ 在点 $(2,1,-1)$ 处的切平面方程。

解：令 $G(x,y,z)=F(x-y+z,xy-yz+zx)$，则曲面 $G(x,y,z)=0$ 的法向量为

$\left\{G_x',G_y',G_z'\right\}=\left\{F_u'+F_v'\cdot(y+z),-F_u'+F_v'\cdot(x-z),F_u'+F_v'\cdot(x-y)\right\}$

$\left\{G_x',G_y',G_z'\right\}\Big|_{(2,1,-1)}=(2,-11,-1)$

所求切平面为 $2(x-2)-11(y-1)-(z+1)=0$，即 $2x-11y-z+6=0.$

⑵ 设曲面的参数方程为

$\sum: x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),$切点$(x_0,y_0,z_0)$对应的参数为$(u_0,v_0)$

则切平面的法向量为 $\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}=\{A,B,C\}$

切平面方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

法线方程为$\dfrac{x-x_0}{A}=\dfrac{y-y_0}{B}=\dfrac{z-z_0}{C}$

例 设曲面的方程为$x=a\cos\psi\cos\varphi, y=b\cos\psi\sin\varphi, z=c\sin\psi$，求在点$M_0(\varphi_0,\psi_0)$处的切平面和法线方程。

解 1：消参得$F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$

设在$M_0(\varphi_0,\psi_0)$处对应的直角坐标点为(x_0,y_0,z_0)，则

$$F_x(x_0,y_0,z_0)=\frac{2x_0}{a^2},\ F_y(x_0,y_0,z_0)=\frac{2y_0}{b^2},\ F_z(x_0,y_0,z_0)=\frac{2z_0}{c^2}.$$

所以切平面方程为$\dfrac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\dfrac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\dfrac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0$

即
$$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z=1,$$

或
$$\frac{\cos\psi_0\cos\varphi_0}{a}x+\frac{\cos\psi_0\sin\varphi_0}{b}y+\frac{\sin\psi_0}{c}z=1$$

解 2：
$$\vec{n}=\left|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -a\sin\psi\cos\phi & -b\sin\psi\sin\phi & c\cos\psi\\ -a\cos\psi\sin\phi & b\cos\psi\cos\phi & 0\end{matrix}\right|_{(\phi_0,\psi_0)}$$

$$=-\cos\psi_0(bc\cos\psi_0\cos\varphi_0, ac\cos\psi_0\sin\varphi_0, ab\sin\psi_0)$$

练习题

1.设直线$L:\begin{cases}x+y+b=0\\x+ay-z-3=0\end{cases}$在平面$\pi$上，而平面$\pi$与曲面$z=x^2+y^2$相切于点$(1,-2,5)$，求$a,b$之值。

解：令$F(x,y,z)=x^2+y^2-z$，则$(F_x,F_y,F_z)=(2x,2y,-1)$，曲面在点$(1,-2,5)$处的切平面的法向量为$\vec{n}=(2,-4,-1)$，于是切平面方程为$2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0$

即平面π的方程为$2x-4y-z-5=0$。

将直线L写为参数方程$x=x, y=-x-b, z=x-3+a(-x-b)$代入平面方程$\pi$，得

$(5+a)x+4b+ab-2=0$

因为直线 L 在 π 上，故 $5+a=0, 4b+ab-2=0 \Rightarrow a=-5, b=-2.$

另解：过 L 的平面束为: $x+y+b+\lambda(x+ay-z-3)=0$

即 $(1+\lambda)x+(1+a\lambda)y-\lambda z+b-3\lambda=0$,此平面与平面 π 重合，故有

$$\frac{1+\lambda}{2}=\frac{1+a\lambda}{-4}=\frac{-\lambda}{-1}=\frac{b-3\lambda}{-5} \Rightarrow \lambda=1, a=-5, b=-2.$$

教学要求和注意点

教学要求：

2． 会求空间曲线的切线与法平面

2．会求曲面的切平面与法线

教学注意点：

在计算空间曲线的切线与法平面时，关键是要求出其切向量；在计算空间曲面的切平面与法线时，关键是要求出其切平面的法向量。

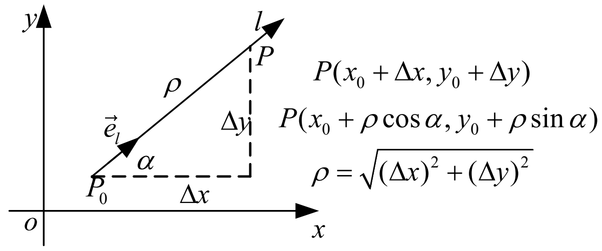
第七节　方向导数与梯度（讲授法　2 学时）

讲稿

一、　方向导数

偏导数反映的是函数沿坐标轴方向的变化率，在许多实际问题中，需要考虑函数沿任何指定方向的变化率，这就是本节要讨论的方向导数。

设l是xoy平面上以$P_0(x_0,y_0)$为始点的一条射线，l的方向用与l同向的单位向量$\vec{e}_l=(\cos\alpha,\sin\alpha)$来表示，



在l上另取一点P，设P_0,P的距离为ρ，则l的方程可用参数方程表示为

$x=x_0+\rho\cos\alpha,y=y_0+\rho\sin\alpha\quad(\rho\geq 0)$

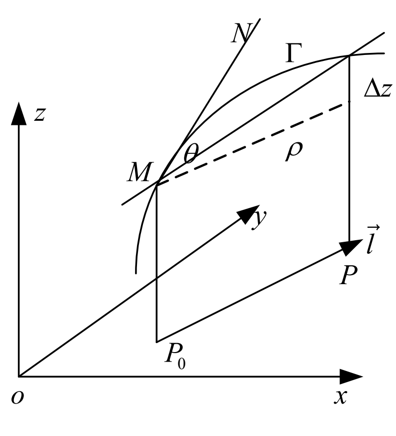
定义：设函数$z=f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$的某个邻域内有定义，$P(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha)$为$l$上另一点，则当$P$沿着$l$趋于$P_0$时，函数的增量$f(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha)-f(x_0,y_0)$与两点距离$|PP_0|$之比的极限值称为函数$z=f(x,y)$在点$P_0$沿$l$方向的<u>**方向导数**</u>，记为$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$，

即 $$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\rho\to 0+}\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha)-f(x_0,y_0)}{\rho}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

它反映了函数$z=f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$处沿l方向的变化率。

方向导数的几何意义：



如图，$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

因此，$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho}=\tan\theta$，其中$\theta$为切线$MN$与$\vec{l}$的夹角。

故<u>方向导数的几何意义是</u>：曲面$z=f(x,y)$与过点$P_0(x_0,y_0)$且平行于$\vec{l}$以及垂直于坐标面xoy的平面的交线Γ，在点$M(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$处的切线的斜率。

例：在$P_0(x_0,y_0)$点沿x轴正向（$\alpha=0$或$\Delta y=0,\Delta x\to 0+$）的方向导数为：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\rho\to 0+}\frac{f(x_0+\rho,y_0)-f(x_0,y_0)}{\rho}=f_x(x_0,y_0)$$（假设偏导数存在）

在$P_0(x_0,y_0)$点沿y轴负向（$\alpha=-\pi/2$或$\Delta x=0,\Delta y\to 0-$）的方向导数为：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\rho\to 0+}\frac{f(x_0,y_0-\rho)-f(x_0,y_0)}{\rho}=-f_y(x_0,y_0)$$（假设偏导数存在）

关于方向导数的存在及计算有以下定理

定理　如果$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$可微，则在该点沿任一方向l的方向导数存在，且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\sin\alpha$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta$是方向l的方向余弦。

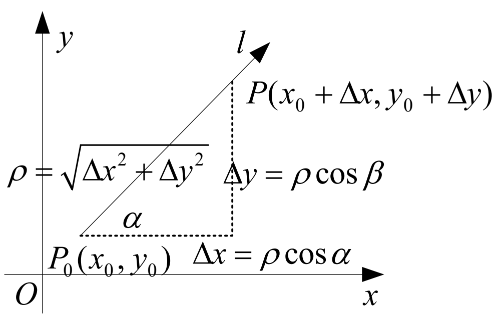
证明：由假设$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$可微，故

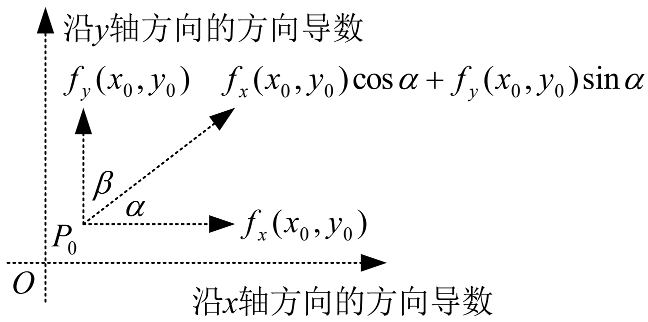
$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$

故 $$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$（为方向导数的另一种定义形式）

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[f_x(x_0,y_0)\cdot\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}+f_y(x_0,y_0)\cdot\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right]$$

$$=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$





以上方向导数的概念及计算公式**可以推广到三元及三元以上的多元函数**．以三元函数为例，若函数$f(x,y,z)$在点(x,y,z)可微，则函数沿方向$\vec{l}^{\,0}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$的方向导

数存在，且 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=f_x\cdot\cos\alpha+f_y\cdot\cos\beta+f_z\cdot\cos\gamma$

例 求 $z=xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处沿从点 $P(1,0)$ 到点 $Q(2,-1)$ 的方向的方向导数。

解：l 的方向为 $\overrightarrow{PQ}=(1,-1)$，与 l 同方向的单位向量为 $\vec{e}_l=(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{-1}{\sqrt{2}})=(\cos\alpha,\cos\beta)$

$(z_x,z_y)\big|_{(1,0)}=(e^{2y},2xe^{2y})\big|_{(1,0)}=(1,2)$，所以 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,0)}=1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+2\cdot\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

例 1 求函数 $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ 在点 $(1,1)$ 处沿从点 $P(1,2)$ 到点 $Q\left(2,2+\sqrt{3}\right)$ 方向的方向导数.

解 这里方向是 $\overrightarrow{PQ}=\left(1,\sqrt{3}\right)$，与其同方向的单位向量为 $\vec{l}^{\,0}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

因为函数可微分，且

$$f_x(x,y)\big|_{(1,1)}=\left.\frac{2x}{x^2+y^2}\right|_{(1,1)}=1,\qquad f_y(x,y)\big|_{(1,1)}=\left.\frac{2y}{x^2+y^2}\right|_{(1,1)}=1,$$

故所求方向导数为 $\dfrac{\partial f}{\partial l}(1,1)=1\cdot\dfrac{1}{2}+1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

例 求 $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ 在点 $(1,1,2)$ 沿方向 l 的方向导数，其中 l 的方向角分别为 $60^\circ,45^\circ,60^\circ.$

解：
$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=f_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+f_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma$$
$$=\frac{1}{2}(5+3\sqrt{2}).$$

例 2 求函数 $z=3x^2y-y^2$ 在点 $P(2,3)$ 沿曲线 $y=x^2-1$ 朝 x 增大方向的方向导数.

解 将已知曲线用参数方程表示为

$$\begin{cases}x=x\\ y=x^2-1\end{cases}$$

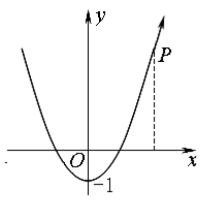


图 8-11

它在点 P 的切向量为 $(1,2x)\big|_{x=2}=(1,4)$

所以 $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{17}}$，$\cos\beta=\dfrac{4}{\sqrt{17}}$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_P=\left[6xy\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}+(3x^2-2y)\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\right]\Bigg|_{(2,3)}=\frac{60}{\sqrt{17}}$$

二、梯度

梯度与方向导数密切相关。方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 描述了函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 沿方向 $\vec{l}^{\,0}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 的变化率．那么在点 (x,y) 引出的无穷多个方向中，函数沿哪个方向变化得最快呢？那就是梯度。

定义 设 $f(x,y)$ 在平面区域 D 内具有偏导数，$P_0(x_0,y_0)\in D$，

称向量 $f_x(x_0,y_0)\cdot\vec{i}+f_y(x_0,y_0)\cdot\vec{j}$ 为函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的**梯度**，记为 $gradf(x_0,y_0)$

即 $gradf(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\cdot\vec{i}+f_y(x_0,y_0)\cdot\vec{j}=\nabla f(x_0,y_0)$

方向导数与梯度的关系：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta=gradf(x_0,y_0)\cdot\vec{l}^{\,0}=\left|gradf(x_0,y_0)\right|\cdot\cos\theta$$

其中 θ 是 $gradf$ 与 $\vec{l}^{\,0}$ 的夹角。由此可知函数 $f(x,y)$ 沿方向 $\vec{l}^{\,0}$ 的方向导数就是向量 $gradf(x_0,y_0)$ 在方向 $\vec{l}^{\,0}$ 上的投影，由上式知，当方向 $\vec{l}^{\,0}$ 与梯度的方向一致时，方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 达最大值 $|gradf(x_0,y_0)|$。所以

函数在一点的梯度是一个向量，它的方向是函数在这一点的方向导数取得最大值的方向，它的模就等于方向导数的最大值。由于方向导数表示变化率，而梯度的模表示最大方向导数，**故，函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处沿梯度方向变化最快．**

（同理有 $gradf(x_0,y_0,z_0)=f_x(x_0,y_0,z_0)\cdot\vec{i}+f_y(x_0,y_0,z_0)\cdot\vec{j}+f_z(x_0,y_0,z_0)\cdot\vec{k}$ ）

梯度的运算：（证明其中一个）

$$grad(u\pm v)=gradu\pm gradv,\qquad grad(uv)=vgradu+ugradv$$

$$grad\frac{u}{v}=\frac{1}{v^2}(vgradu-ugradv),\qquad gradf(u)=f'(u)gradu$$

例 求 $grad\dfrac{1}{x^2+y^2}=\dfrac{-1}{(x^2+y^2)^2}grad(x^2+y^2)=\dfrac{-1}{(x^2+y^2)^2}\{2x,2y\}$

例 设 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$,求$gradf(1,-1,2)$

$gradf(1,-1,2)=(2x,2y,2z)\big|_{(1,-1,2)}=(2,-2,4)$

例 求 $grad\dfrac{m}{r},m>0$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

解：$grad\dfrac{m}{r}=-\dfrac{m}{r^2}grad\ r=-\dfrac{m}{r^2}\left\{\dfrac{x}{r},\dfrac{y}{r},\dfrac{z}{r}\right\}=-\dfrac{m}{r^3}\{x,y,z\}.$

例 3 设 $f(x,y)=xe^y$。

（1）求函数 $f(x,y)$ 在点 $P(2,0)$ 处沿从 P 到 $Q\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ 方向的变化率；

（2）问函数 $f(x,y)$ 在点 $P(2,0)$ 处沿什么方向具有最大的增长率？最大增长率为多少？

解 （1）从点 $P(2,0)$ 处到 $Q\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ 的单位方向向量为 $\vec{l}^{\,0}=\left\{-\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right\}$

又 $gradf=\{e^y,xe^y\}$，所以 $\dfrac{\partial f}{\partial l}(2,0)=gradf(2,0)\cdot\vec{l}^{\,0}=\{1,2\}\cdot\left\{-\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right\}=1$。

（2）函数 $f(x,y)$ 在点 $P(2,0)$ 处沿梯度方向 $gradf(2,0)=\{1,2\}$ 的方向上具有最大的增长率，最大增长率为

$$|gradf(2,0)|=\sqrt{5}\text{。}$$

例 求函数 $u(x,y,z)$ 沿 $v(x,y,z)$ 的梯度方向的方向导数，并问在什么情况下，这个方向导数等于零？

解：$gradv=\left\{\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial z}\right\}$，对应的单位向量为 $\dfrac{1}{|gradv|}\left\{\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial z}\right\}=\vec{l}^{\,0}$

$$\frac{\partial u}{\partial l}=gradu\cdot\vec{l}^{\,0}=\frac{gradu\cdot gradv}{|gradv|}$$

当 $gradu\cdot gradv=0$，即两梯度垂直时，方向导数等于 0

思考题：方向导数的存在与偏导数的存在有没有关系？

（1）方向导数存在，不一定推出偏导数存在，当然不一定可微。

例如 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 点处沿任何方向的方向导数 l 存在。事实上

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\lim_{\rho\to0}\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}-0}{\rho}=1$$

但 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 点处的偏导数 $f_x(0,0),f_y(0,0)$ 不存在，也不可微。

（2）偏导数存在不一定推出方向导数存在。

例如 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

在 $(0,0)$ 点处 $f_x(0,0)=0, f_y(0,0)=0$，但

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}}\frac{k}{1+k^2}\sin\frac{1}{(1+k^2)\Delta x^2}$$，不存在。

故方向导数的存在与偏导数的存在没有必然联系。

教学要求和注意点

教学要求：

1．会求二元和三元函数沿任意方向的方向导数

2．理解梯度的定义。

教学注意点：

偏导数只研究了函数沿坐标轴方向的变化率，而实际问题中往往要求知道函数沿任何方向的变化率；另外要强调梯度的模就是方向导数的最大值，梯度的方向就是函数值增加得最快的方向。

第八节　多元函数的极值及其求法（讲授法　2 学时）

讲稿内容

先回顾一元函数极值的定义，取极值的充分或必要条件等。

一、　多元函数的极值

定义：$f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，对该邻域的任意一点 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$ 都

有① $f(x,y)<f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)有极大值$f(x_0,y_0)$

② $f(x,y)>f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)有极小值$f(x_0,y_0)$

极大值、极小值统称为**极值**，使函数取得极值的点称为**极值点**。

例　$f(x,y)=3x^2+4y^2$在$(0,0)$处有极小值。

例　$f(x,y)=-\sqrt{x^2+y^2}$在$(0,0)$处有极大值。

例　$f(x,y)=xy$在$(0,0)$处既不是极大值，　也不是极小值。

上面所举的例子比较特殊，根据定义容易知道函数的极值。但对一般函数就不那么容易，我们有必要进一步研究取极值的必要或充分条件。

例 设 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{\sin(x^2+y^2)}=-1$，则（　　）

（A） $f_x'(0,0)$ 不存在　　　　（B） $f_x'(0,0)$ 存在但不为零

（C） $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取极小值　　（D） $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取极大值

答案：D

解：由极限的保号性与 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续及 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{\sin(x^2+y^2)}=-1$ 知

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$ 且 $\dfrac{f(x,y)}{\sin(x^2+y^2)}<0$。

又因为$\sin(x^2+y^2)>0,(x,y)\in\overset{\circ}{U}(0,0)$，故 $f(x,y)<0=f(0,0),(x,y)\in\overset{\circ}{U}(0,0)$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取极大值。

另：函数 $f(x,y)=-(x^2+y^2)$ 满足题设条件，但 $f_x'(0,0)=0$，而 $f(0,0)=0$ 为 $f(x,y)$ 的极大值。

定理（取极值的必要条件） $f(x,y)$在点(x_0,y_0) 有偏导数，且在点 (x_0,y_0) 处有极值，

则 $f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$。

使 $f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$ 的点 (x_0,y_0)，**称为 $f(x,y)$ 的驻点。**

<u>**上定理可改写为**</u>：在偏导数存在的前提条件上，极值点必为驻点。

证明：设 $f(x,y)$在点(x_0,y_0) 取极大值，据定义，在点 (x_0,y_0) 的某去心邻域内任意一点 (x,y) 均有不等式 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$ 成立，

特别地取 $y=y_0, x\neq x_0$ 得 $f(x,y_0)<f(x_0,y_0)$，即一元函数 $z=f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处取极大值，由一元函数取极值的必要条件知：$f_x(x_0,y_0)=0.$

同理可得 $f_y(x_0,y_0)=0$

注 1：上面证明了在偏导数存在的前提下，极值点必是驻点，值得注意是反之不成立，如 $z=xy$，点 $(0,0)$ 为驻点，但不是极值点

又如 $z=y^2-x^2$，点 $(0,0)$ 为驻点，但不是极值点

注 2：函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极大（小）值，则对应的两个一元函数 $z=f(x,y_0)$ 和 $z=f(x_0,y)$，分别在 $x=x_0, y=y_0$ 点取得极大（小）值。

$z=f(x,y_0)\Leftrightarrow\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=y_0\end{cases}$，即曲面与平面的交线。可推广为：曲面 $z=f(x,y)$ 与过点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 的任意平面或曲面的交线在点 (x_0,y_0) 均取极值。

该说明也可用于证明某点不是极值点。

如 $z=y^2-x^2$，在原点的去心邻域内有 $z(x,0)=-x^2<z(0,0), z(0,y)=y^2>z(0,0)$，故 $(0,0)$ 不是 $z=y^2-x^2$ 的极值。

注 3：从几何上看，曲面 $z=f(x,y)$ 在极限点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面为：

$$-f_y(x_0,y_0)(x-x_0)-f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+(z-z_0)=0 \quad 即 \quad z-z_0=0$$

该切平面与坐标面 xOy 平行于的平面，即曲面在极值点处的切平面平行于 xOy 面；这一条恰好与一元函数在极值点处的切线平行与 x 轴相吻合。

驻点不一定是极值点，那么驻点满足怎样的条件才一定是极值点呢？

定理 2（取极值的充分条件） $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$，令

$A=f_{xx}(x_0,y_0), B=f_{xy}(x_0,y_0), C=f_{yy}(x_0,y_0)$，则

① $B^2-AC<0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 是极值，且 $A>0(<0)$ 时是极小（大）值

② $B^2-AC>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 不是极值

③ $B^2-AC=0$，不能肯定 $f(x_0,y_0)$ 是否是极值，还需另作讨论。

上面的充分条件也给出了求极值的步骤：

第一步：求驻点：解方程组 $f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$

第二步：对每一个驻点，求出相应的 A,B,C

第三步：据充分条件得结论。

例（2020 年考研）求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值。

【解析】令 $\begin{cases} f_x'=3x^2-y=0 \\ f_y'=24y^2-x=0 \end{cases}$ 得驻点 $(x,y)=(0,0),(\frac{1}{6},\frac{1}{12})$

$f_{xx}''=6x, f_{xy}''=-1, f_{yy}''=48y$

在 $(0,0)$ 点处，$A=0,B=-1,C=0,B^2-AC>0$，不是极值点。

在 $(\frac{1}{6},\frac{1}{12})$ 点处，$A=1,B=-1,C=4,B^2-AC<0$，所以 $f(\frac{1}{6},\frac{1}{12})=-\frac{1}{216}$ 为极小值。

例 4 求函数 $z=x^4+y^4-x^2-y^2-2xy$ 的极值.

解： 第一步：求函数的驻点；

解方程组 $\begin{cases} z_x=4x^3-2x-2y=0 \\ z_y=4y^3-2y-2x=0 \end{cases}$ 得驻点 $(-1,-1)$，$(0,0)$，$(1,1)$

第二步：求二阶偏导数 $z_{xx}=12x^2-2$，$z_{xy}=-2$，$z_{yy}=12y^2-2$

① 在驻点 $(-1,-1)$ 处：$A=10,B=-2,C=10,B^2-AC<0$，

所以有极小值 $z(-1,-1)=-2$；

② 在驻点 $(1,1)$ 处：$A=10,B=-2,C=10,B^2-AC<0$

所以有极小值$z(1,1)=-2$；

③ 在驻点$(0,0)$处：$A=-2,B=-2,C=-2,B^2-AC=0$，用定理无法断定，须用其他方法判别.

若取$y=x$，则函数变为$z=2x^4-x^2-x^2-2x^2=2x^2(x^2-2)$

在$(0,0)$附近，$2x^2(x^2-2)<0=z(0,0)$

若取$y=-x$，则函数变为$z=2x^4-x^2-x^2+2x^2=2x^4$

在$(0,0)$附近，$2x^4>0=z(0,0)$，所以$(0,0)$不是极值点.

例 求$z=e^{x^2-y}(5-2x+y)$的极值。

解：解方程组$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2e^{x^2-y}(5x-2x^2+xy-1)=0,\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{x^2-y}(2x-y-4)=0$

得驻点$P(1,-2)$。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2e^{x^2-y}(10x^2-4x^3+2x^2y-6x+y+5)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2e^{x^2-y}(2x^2-xy-4x+1)，\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{x^2-y}(3-2x+y)$$

在P点，$A=-2e^3,B=2e^3,C=-e^3,B^2-AC=2e^6>0$，无极值。

例（2016年考研） 已知函数$z=z(x,y)$由方程$(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$确定求$z=z(x,y)$的极值.

解：由$(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$，两边分别同时对$x,y$求偏导数得：

$$\begin{cases}2xz+(x^2+y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x}+2=0 & (1)\\ 2yz+(x^2+y^2)\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial y}+2=0 & (2)\end{cases}$$

令$\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$（3）得：$x=y,xz=-1$，代入原方程有$\ln z-\dfrac{2}{z}+2=0\Rightarrow z=1$

于是驻点：$x=-1,y=-1,z=1$（4）

又对（1）关于x求偏导数，（1）对y求偏导数，（2）对y求偏导数，再把（3），（4）代入即得：

$$2z+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

$$2z+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

$$(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

得：$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2}{3},B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2}{3}$

又 $AC-B^2>0,A<0,$故 $z=z(x,y)$ 在 $(-1,-1)$ 取得极大值，极大值为 $z(-1,-1)=1$

二、多元函数的最值

与一元函数类似，我们可利用函数的极值来求函数的最值。设 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，则该函数在 D 上必有最值，其最值点可能在 D 的边界上取得，也可能在 D 的内部取得，如果在 D 的内部取得，其最值点必是极值点。因此，求函数最值的方法为：

1．求出函数 $f(x,y)$ 在 D 内的全部驻点的函数值

2．求出边界上最值

3．比较这些函数值的大小，谁最大即为最大值，谁最小即最小值。

注： 在实际问题中，往往函数的最值在 D 的内部取得，且驻点只有一个，可以肯定驻点处的函数值即为最值（是最大或最小根据实际问题可以确定）。

例　求函数 $z = x^2 - xy + y^2$ 在区域 $|x| + |y| \le 1$ 上的最大值和最小值。

解：令 $\begin{cases} z_x = 2x - y = 0 \\ z_y = -x + 2y = 0 \end{cases}$，解得驻点为 $(0,0), z(0,0) = 0$

若要确定该值是极大或极小值，可用取极值的第二充分条件来判定；也可用

$z = x^2 - xy + y^2 \ge \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + (x-y)^2) \ge 0$ 来判定。**即 $z = 0$ 为最小值。**

下求边界上的最值：区域的边界为下面四条直线段

① $x + y = 1, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$，此时 $z = x^2 - xy + y^2 = 3x^2 - 3x + 1$

可利用一元求最值的方法求出其最值：$x = 0,1$ 时取最大 $z = 1$，$x = \dfrac{1}{2}$ 时，取最小 $z = \dfrac{1}{4}$.

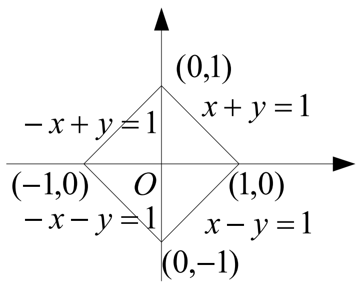
其余三条直线段，同理可求。

② $x - y = 1, 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 0$，

此时 $z = x^2 - x + 1, x \in [0,1]$

③ $-x + y = 1, -1 \le x \le 0, 0 \le y \le 1$

④ $-x - y = 1, -1 \le x \le 0, -1 \le y \le 0$



综上所述，函数的最小值为 $z(0,0) = 0$，最大值为 1，并在 $(0,\pm1),(\pm1,0)$ 处取得。

例　求函数 $f(x,y) = 2(x^2 + y^2) + (x-1)^2 + (y-1)^2$ 在由 x 轴、y 轴及直线 $x + y = 1$ 所围成的三角形区域（如图 8-15）上的最大值与最小值。

解　首先求出函数在三角形区域内的极值点。

$f_x(x,y) = 4x + 2(x-1)$，　$f_y(x,y) = 4y + 2(y-1)$

令 $\begin{cases}4x+2(x-1)=0\\4y+2(y-1)=0\end{cases}$，解得驻点$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$。

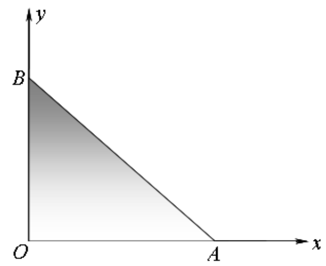


图 8-15

易知，点$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$在三角形区域内。

现在求函数在三角形边界上的最值。如图 8-15。

① 在边界OA上：$y=0$，$0\le x\le 1$，

于是$f(x,0)=2x^2+(x-1)^2+1$。求得可能最值点$x=\dfrac{1}{3}$、$x=1$及$x=0$；对应于三角形区域上的点为：$\left(\dfrac{1}{3},0\right)$、$(1,0)$、$(0,0)$。

② 在边界OB上，$x=0$，$0\le y\le 1$，于是$f(0,y)=2y^2+(y-1)^2+1$。求得可能最值点：$y=\dfrac{1}{3}$、$y=1$及$y=0$；对应于三角形区域上的点：$\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$、$(0,1)$、$(0,0)$。

③ 在边界AB上：$y=1-x$，$0\le x\le 1$。于是$f(x,y)=3x^2+3(x-1)^2$。求得可能最值点：$x=\dfrac{1}{2}$、$x=1$及$x=0$；对应于三角形区域上的点：$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$、$(1,0)$、$(0,1)$。

最后将所求各值进行比较：

$$f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3},\quad f\left(\frac{1}{3},0\right)=\frac{5}{3},\quad f(1,0)=3,\quad f(0,0)=2,$$

$$f\left(0,\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3},\quad f(0,1)=3,\quad f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2};$$

可见函数在点$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$处取得最小值$f\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{3}$；在点$(1,0)$及$(0,1)$处取得最大值$f(1,0)=f(0,1)=3$。

例 将正数a分成三个正数之和，问应如何分，才能使它们的乘积为最大。

解 设三个正数为x,y,z， 则$x+y+z=a$

乘积为 $S=xyz=xy(a-x-y)=axy-x^2y-xy^2$，$(0<x<a,\ 0<y<a)$，

解方程组 $\begin{cases}S_x=ay-2xy-y^2=0\\S_y=ax-2xy-x^2=0\end{cases}$，得驻点 $x=\dfrac{a}{3}$，$y=\dfrac{a}{3}$

二阶偏导数：$S_{xx}=-2y$，$S_{xy}=a-2x-2y$，$S_{yy}=-2x$

因为${S_{xy}}^2\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3}\right)-S_{xx}\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3}\right)\cdot S_{yy}\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3}\right)<0$，且$S_{xx}\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3}\right)<0$，所以$(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3})$ 是S的唯一的极大值点；而该问题的最大值存在，所以最大值为$M=\dfrac{a^3}{27}$。

三、条件极值 *Lagrange*乘数法

条件极值：除自变量限制在定义域内以外，还附加其它条件。

如上面例子，$S = xyz$

自变量要求满足条件$x + y + z = a$

无条件极值：除自变量限制在定义域内以外，没有其它附加条件。

下面求$z = f(x, y)$在条件$\varphi(x, y) = 0$下的极值。

条件极值的几何意义

函数$z = f(x, y)$的图形是一张空间曲面，而方程$\varphi(x, y) = 0$（柱面）的准线是xOy面上的一条曲线，当点(x, y)在曲线上变动时，对应的点(x, y, z)形成在曲面上的一条曲线L，在图 8-17 中P_1是条件极大值点，而P_2是无条件极大值点.

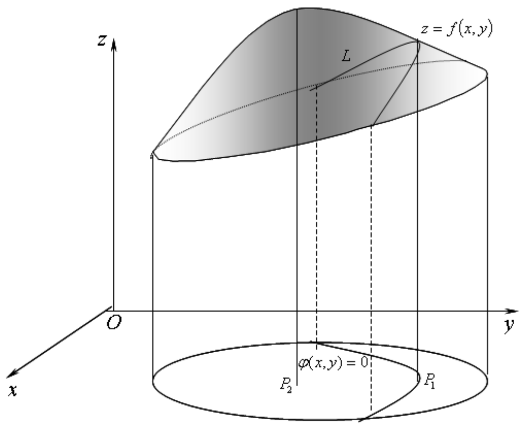


图 8-17

条件极值与无条件极值是可以相互转化的，但在大多数情况下，其转化并不易，下面我们介绍一种直接求条件极值的方法————**拉格朗日（Lagrange）乘数法**，这种方法能有效地求出驻点，至于驻点是否是极值点往往可由实际问题本身的性质来确定。

假设要找$z = f(x, y)$在附加条件$\varphi(x, y) = 0$下的可能极值点，

首先，将问题转化为无条件极值：设$\varphi(x, y) = 0$确定了y是x的隐函数$y = y(x)$，将它代入$z = f(x, y)$，于是，问题转化为求函数$z = f(x, y(x))$的无条件极值.

其次，设某点(x, y)为驻点，则在此点必有

$$\frac{dz}{dx} = f_x(x, y) + f_y(x, y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \qquad (1)$$

对约束条件$\varphi(x, y) = 0$，用隐函数求导法，有：$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\varphi_x(x, y)}{\varphi_y(x, y)}$ （2）

代（2）入（1），得 $f_x(x, y) - f_y(x, y) \cdot \dfrac{\varphi_x(x, y)}{\varphi_y(x, y)} = 0$ （3）

由此得比例式 $$\frac{f_y(x,y)}{\varphi_y(x,y)}=\frac{f_x(x,y)}{\varphi_x(x,y)} \tag{4}$$

引入参数λ，使得 $$\frac{f_y(x,y)}{\varphi_y(x,y)}=\frac{f_x(x,y)}{\varphi_x(x,y)}=-\lambda \tag{5}$$

则（5）可以写成 $f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0$、$f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0$

再注意到其中的x、y还应满足约束条件$\varphi(x,y)=0$，所以得到：**条件极值的必要条件是x、y必须满足**

$$\begin{cases} f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases} \tag{6}$$

以上方法综合起来称为拉格朗日乘数法

拉格朗日乘数法 要找$z=f(x,y)$在附加条件$\varphi(x,y)=0$下的可能极值点

作拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

令 $$\begin{cases} L_x=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0 \\ L_y=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0 \\ L_\lambda=\varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

求出(x,y)就是函数$z=f(x,y)$在附加条件$\varphi(x,y)=0$下的可能极值点。

拉格朗日乘数法可以推广到多个自变量、多个附加条件的情形。

例 求表面积为a^2而体积为最大的长方体的体积。

解 设长方体的长、宽、高分别为x,y,z，则问题就是在条件

$$2(xy+yz+zx)=a^2$$

下，求函数 $V=xyz \quad (x>0,y>0,z>0)$的最大值，

作拉格朗日函数$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda[2(xy+yz+zx)-a^2]$

令$L_x=0,L_y=0,L_z=0,L_\lambda=0$得

$yz+2\lambda(y+z)=0$

$xz+2\lambda(x+z)=0$

$xy+2\lambda(x+y)=0$

$2(xy+yz+zx)-a^2=0$

由前三式分别相减得 $x=y=z$，代入后一式得 $x=y=z=\sqrt{6}a/6.$　　$V=\sqrt{6}a^3/36$

例 在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上求一点，使其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短。

解：椭圆上的点 (x,y) 到直线的距离为 $d=\dfrac{|2x+3y-6|}{\sqrt{13}}$

即求 $d^2=\dfrac{1}{13}(2x+3y-6)^2$ 在约束条件 $x^2+4y^2=4$ 下的最小值

利用拉格朗日乘数法得驻点 $(\dfrac{8}{5},\dfrac{3}{5}),(-\dfrac{8}{5},-\dfrac{3}{5})$

由实际意义知最短距离是存在的，点 $(\dfrac{8}{5},\dfrac{3}{5})$ 即为所求，最小 $d=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$

例 在椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 内作内接长方体，问长方体的长、宽、高为何值时其体积最大？

解：设长方体在第一卦限的顶点坐标为 (x,y,z)，求函数 $V=8xyz$ 在条件 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 下的极值 $(x>0,y>0,z>0)$

作 $F(x,y,z,\lambda)=8xyz+\lambda(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1)$

解方程组 $F'_x=0,F'_y=0,F'_z=0,F'_\lambda=0$ 得驻点 $x=\dfrac{a}{\sqrt{3}},y=\dfrac{b}{\sqrt{3}},z=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$，易知这时 $V=\dfrac{8}{3\sqrt{3}}abc$ 为最大，内接长方体的长、宽、高分别为 $\dfrac{2a}{\sqrt{3}},\dfrac{2b}{\sqrt{3}},\dfrac{2c}{\sqrt{3}}.$

例 求 $u=xy^2z^3$ 在条件 $x+2y+3z=a(x>0,y>0,z>0,a>0)$ 下的极值，并说明是极大值还是极小值？

解：设 $w=\ln x+2\ln y+3\ln z$，$F(x,y,z,\lambda)=w+\lambda(x+2y+3z-a)$

解方程组 $F'_x=\dfrac{1}{x}+\lambda=0,F'_y=\dfrac{2}{y}+2\lambda=0,F'_z=\dfrac{3}{z}+3\lambda=0,F'_\lambda=x+2y+3z-a=0$

得驻点 $x=y=z=\dfrac{a}{6}$

因函数 w 在平面 $x+2y+3z=a$ 于第一卦限内的边界由三条直线组成

$\begin{cases}x+2y=a\\z=0\end{cases},\begin{cases}x+3z=a\\y=0\end{cases},\begin{cases}2y+3z=a\\x=0\end{cases}$

当点 P 趋于边界时 $w\to-\infty$，因此，w 在区域内取得最大值，因而也是极大值。

综上，u 的极大值为 $\left(\dfrac{a}{6}\right)^6$.

例 求函数 $z=x^2+y^2-12x+16y$ 在 $x^2+y^2\le 25$ 上的最大值与最小值。

解：先求 $z(x,y)$ 在 $D:x^2+y^2\le 25$ 内的驻点

令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-12=0,\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y+16=0$ 得 $(x,y)=(6,-8)$，但 $(6,-8)\notin D$ 内，即在 D 内没有极值点。

再求 $z(x,y)$ 在边界 $x^2+y^2=25$ 下的最值。

$$F(x,y,\lambda)=x^2+y^2-12x+16y+\lambda(x^2+y^2-25)$$

$$=25-12x+16y+\lambda(x^2+y^2-25)$$

令 $F_x'=-12+2\lambda x=0,F_y'=16+2\lambda y=0,F_\lambda'=x^2+y^2-25=0$

解得 $(x_1,y_1)=(3,-4),(x_2,y_2)=(-3,4)$，故 $z(3,-4)=-75,z(-3,4)=125$

题设所求最大值为125，最小值为 -75.

例 若 $n\ge 1$ 及 $x\ge 0,y\ge 0$，证明不等式 $\dfrac{x^n+y^n}{2}\ge\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$.

证明：（1）当 $x=y=0$ 时，不等式显然成立。

（2）考虑函数 $z=\dfrac{x^n+y^n}{2}$ 在条件 $x+y=2a,a>0,x\ge 0,y\ge 0$ 的最小值。

设 $L(x,y,\lambda)=\dfrac{x^n+y^n}{2}+\lambda(x+y-2a)$

解方程组 $L_x=\dfrac{1}{2}nx^{n-1}+\lambda=0,L_y=\dfrac{1}{2}ny^{n-1}+\lambda=0,L_\lambda=x+y-2a=0$

得 $x=y=a$。故 $z(a,a)=a^n$，边界点的函数值 $z(0,a)=a^n=z(a,0)$

故函数 $z=\dfrac{x^n+y^n}{2}$ 在条件 $x+y=2a,a>0,x\ge 0,y\ge 0$ 的最小值为 a^n

于是 $\frac{x^n+y^n}{2}\geq a^n=\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$

综上，所证不等式成立。

例 设有一小山，取它的底面所在的平面为 xoy 坐标面，其底部所占的区域为 $D=\{(x,y)|x^2+y^2-xy\leq 75\}$，小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy.$

（1）设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 D 上一点，问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$，试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式。

（2）现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点，也就是说，要在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出（1）中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点，试确定攀登起点的位置。

解：（1）因为 $grad h(x,y)|_{(x_0,y_0)}=(y_0-2x_0)\vec{i}+(x_0-2y_0)\vec{j}$

我们知道沿梯度方向的方向导数最大，且最大值为梯度的模，所以

$g(x_0,y_0)=\sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}.$

（2） 令 $f(x,y)=g^2(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$，据题意，只需求 $f(x,y)$ 在约束条件 $75-x^2-y^2+xy=0$ 下的最大值点，利用拉格朗日函数法求得驻点

$M_1(5,-5),M_2(-5,5),M_3(5\sqrt{3},5\sqrt{3}),M_4(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3})$

由于 $f(M_1)=f(M_2)=450,f(M_3)=f(M_4)=150$

故 $M_1或M_2$ 可作为攀登的起点。

练习题：

例 求函数 $z=xy\ln(x^2+y^2)$ 的极值。

解：解方程组 $z_x=y\ln(x^2+y^2)+\frac{2x^2y}{x^2+y^2}=0,z_y=x\ln(x^2+y^2)+\frac{2xy^2}{x^2+y^2}=0$

前式乘 x 减去后式乘 y 得：$\frac{2xy}{x^2+y^2}(x^2-y^2)=0$

于是 $x=0,y=0,x=y,x=-y$ 为四组解，对应的驻点为

$P_1(0,1),P_2(0,-1),P_3(1,0),P_4(-1,0),$

$P_5(\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}),P_6(-\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}),P_7(\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}),P_8(-\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}})$

易知：在 P_1,P_2,P_3,P_4 邻域内函数值可正可负，函数无极值。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2xy(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\ln(x^2+y^2)+\frac{2(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

在 P_5,P_6 点，因 $A=2,B=0,C=2,B^2-AC=-4<0$，故函数取极小值 $z(P_5)=z(P_6)=-\frac{1}{2e}$

在 P_7,P_8 点，因 $A=-2,B=0,C=-2,B^2-AC=-4<0$，故函数取极大值 $z(P_7)=z(P_8)=\frac{1}{2e}$。

例 设函数 $f(x),g(x)$ 均有二阶连续导数，满足 $f(0)>0,g(0)<0$，且

$f'(0)=g'(0)=0$，则函数 $z=f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是【A】

（A） $f''(0)<0,g''(0)>0$　　（B） $f''(0)<0,g''(0)<0$

（C） $f''(0)>0,g''(0)>0$　　（D） $f''(0)>0,g''(0)<0$

解： $z'_x=f'(x)g(y),z'_y=f(x)g'(y)\Rightarrow z'_x(0,0)=0,z'_y(0,0)=0$

$z''_{xx}=f''(x)g(y),A=z''_{xx}(0,0)=f''(0)g(0)$

$z''_{xy}=f'(x)g'(y),B=z''_{xy}(0,0)=0$

$z''_{yy}=f(x)g''(y),C=z''_{yy}(0,0)=f(0)g''(0)$

当 $B^2-AC=-f(0)g(0)f''(0)g''(0)<0$ 且 $A=f''(0)g(0)>0$ 时， $z=f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值，故有 $f''(0)<0,g''(0)>0$。　选 A

例 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$,则在点 $(0,0)$【D】

(A) 不是 $f(x,y)$ 的连续点　　(B)不是 $f(x,y)$ 的极值点

(C)是 $f(x,y)$ 的极大值点　　(D)是 $f(x,y)$ 的极小值点

解: 因 $z=f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$,故选 D

另解:因 $f'_x=x,f'_y=y,f'_x(0,0)=0,f'_y(0,0)=0$,

$A=f''_{xx}(0,0)=1>0,B=f''_{xy}(0,0)=0,C=f''_{yy}(0,0)=1$,且 $B^2-AC<0$,所以 $(0,0)$ 点为 $f(x,y)$

的极小值点.

例.已知函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的某个邻域内连续，且$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则（　　）

（A）点$(0,0)$不是$f(x,y)$的极值点　　（B）点$(0,0)$是$f(x,y)$的极大值点

（C）点$(0,0)$是$f(x,y)$的极小值点　　（D）根据所给条件无法判断点点$(0,0)$是否为$f(x,y)$的极值点

答案：A

解：由$f(x,y)$在点$(0,0)$连续及$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$知$f(0,0)=0$，且

$$\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1+\alpha,\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\alpha=0$$

则$f(x,y)=xy+(x^2+y^2)^2+\alpha(x^2+y^2)^2$

令$y=x$得$f(x,x)=x^2+4x^4+4x^4\alpha=x^2+o(x^2)$

令$y=-x$得$f(x,-x)=-x^2+4x^4+4x^4\alpha=-x^2+o(x^2)$

从而可知$f(x,y)$在点$(0,0)$的任何去心邻域内始终可正可负，而$f(0,0)=0$，由极值的定义知$(0,0)$点不是$f(x,y)$的极值点。

例 设$f(x,y)$有二阶连续偏导数，$g(x,y)=f(e^{xy},x^2+y^2)$，且$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)+x+y-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$，证明$g(x,y)$在$(0,0)$取得极值，判断此极值是极大值还是极小值，并求出此极值。

证明：由$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)+x+y-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$知

$$f(x,y)=-(x-1)-y+o(\rho),\rho=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

则$f(1,0)=0,f'_x(1,0)=-1,f'_y(1,0)=-1$

$$g'_x=f'_1\cdot ye^{xy}+f'_2\cdot 2x\Rightarrow g'_x(0,0)=0$$

$$g'_y=f'_1\cdot xe^{xy}+f'_2\cdot 2y\Rightarrow g'_y(0,0)=0$$

$$g''_{xx}=y^2e^{xy}f'_1+ye^{xy}(f''_{11}\cdot ye^{xy}+f''_{12}\cdot 2x)+2f'_2+2x(f''_{21}\cdot ye^{xy}+f''_{22}\cdot 2x)$$

$\Rightarrow A = g''_{xx}(0,0) = 2f'_2(1,0) = -2$

或 $g'_x(x,0) = 2xf'_2(1,x^2) \Rightarrow g''_{xx}(x,0) = 2f'_2(1,x^2) + 2xf''_{22}(1,x^2)\cdot 2x$

$\Rightarrow A = g''_{xx}(0,0) = 2f'_2(1,0) = -2$

同理，$g'_x(0,y) = yf'_1(1,y^2) \Rightarrow g''_{xy}(0,y) = f'_1(1,y^2) + yf''_{12}(1,y^2)\cdot 2y$

$\Rightarrow B = g''_{xy}(0,0) = f'_x(1,0) = -1$

$g'_y(0,y) = 2yf'_2(1,y^2) \Rightarrow g''_{yy}(0,y) = 2f'_2(1,y^2) + 2yf''_{22}(1,y^2)\cdot 2y$

$\Rightarrow C = g''_{yy}(0,0) = 2f'_2(1,0) = -2$

于是 $B^2 - AC = -3 < 0$ 且 $A < 0$，从而 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 取得极大值，

极大值为 $g(0,0) = f(1,0) = 0$。

例 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 4$ 下的最大值与最小值。

答案：驻点 $(1,1,2),(-2,-2,8)$，最值：72，6

教学要求和注意点

教学要求：

1. 理解多元函数极值和条件极值的概念，
2. 掌握多元函数极值存在的必要条件，了解二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值，会用拉格朗日乘数法求条件极值。
3. 会求简单多元函数的最大值和最小值，并会解决一些简单的应用问题。

教学注意点：

实际问题一般总要受到多个因素的制约，因此有必要研究多元函数的极值与最值问题。最值点可能在区域的内部，也可能在区域的边界上，因此，求函数的最值时，要求出它在区域内部的所有极值以及在边界上的最值，再加以比较，从中找出函数在整个区域上的最值；研究条件极值的基本方法是将条件极值转化为无条件极值，即所谓的$Lagrange$乘数法。