第　二　篇

集　合　论

前　　言

集合是数学中最基本的概念之一，是现代数学的重要基础，并且已渗透到各种科学与技术领域中。对计算机工作者来说，集合论是不可缺少的数学工具，例如在编译原理、开关理论、数据库原理、有限状态机和形式语言等领域中，都已得到广泛的应用。

集合论的创始人是康托（G.Cantor，1845—1918）。他所做的工作一般称为朴素集合论。由于朴素集合论在定义集合的方法上缺乏限制，从而出现了称之为悖论的某些矛盾。为了消除这些悖论，很多数学家，象Hilbert、Fraenkel和Zermelo等都认真研究了产生悖论的原因，并在致力于问题解决的过程中，获得了种种出色的发现，由此导致了公理化的集合论系统的建立，使集合理论日臻完善。

第三章

集合与关系

第三章 集合与关系（Sets and Relations)

本章首先采用朴素集合论的方法，介绍有关集合的一些基本知识，内容显得较为直观，学起来易于接受。但集合及其相关的概念是本门课程后面各章内容的基础，同学们务必熟练的掌握。本章重点讨论关系（主要是二元关系），它仍然是一种集合，但它是一种更为复杂的集合。它的元素是有序二元组的形式，这些有序二元组中的两个元素来自于两个不同或者相同的集合。因此，关系是建立在其它集合基础之上的集合。关系中的有序二元组反映了不同集合中元素与元素之间的关系，或者同一集合中元素之间的关系。本章讨论这些关系的表示方法、关系的运算以及关系的性质，最后讨论集合A上几类特殊的关系。

第三章 集合与关系

3-1 集合的概念和表示

3-2 集合运算

3-3 包含排斥原理

3-4 序偶与笛卡尔积

3-5 关系及其表示

3-6 关系的性质

3-7 复合关系和逆关系

3-8 关系的闭包运算

3-9 集合的划分与覆盖

3-10 等价关系与等价类

3-11 相容关系

3-12 序关系

3–1 集合的概念和表示法

3.1.1 集合和元素(Sets & Elements)

把具有共同性质的一些东西,汇集成一个整体,就形成了一个**集合**。

组成集合的对象称为集合的**成员**（*member*）或**元素**（*elements*）。

一般用大写字母表示集合，用小写字母表示元素。

例如A表示一个集合，a表示元素，如果a是A的元素，记为：$a \in A$，读作"a属于A"、"a是A的元素"、"a是A的成员"、"a在A之中"、"A 包含a"。

如果a不是A的元素，记为：$a \notin A$，读作"a不属于A".

几个常用集合的表示符号:

N：所有自然数的集合。 Q：所有有理数的集合。

I(或Z)：所有整数的集合。P：所有素数的集合。

R：所有实数的集合。N_m：从1到m，这m个正整数的集合。

C: 所有复数的集合。 Z_m：从0到m-1，这m个非负整数的集合。

R^+：所有正实数的集合。R^-：所有负实数的集合。

于是$2 \in N$，$2.5 \notin N$，$-3 \notin N$，但$2.5 \in Q$，$-3 \in I$。

集合的描述方式有二种:

第一种是列举法。就是把集合中的元素一一列举出来。例如“所有小于5的正整数”这个集合的元素为1, 2, 3, 4, 除这4个元素外, 再没有别的元素了。

如果把这个集合命名为A, 就可记为

$$A=\{1, 2, 3, 4\}$$

在能清楚表示集合成员的情况下可使用省略号, 例如, 从1 到50 的整数集合可记为{1, 2, 3, …, 50}, 偶数集合可记为{…,−4,−2,0,2,4,…}。

第二种是叙述法。就是用谓词描述出集合元素的共同特征来表示这个集合。例如，上述各例可分别写成

$$A=\{a|a\in I\wedge 0<a\wedge a<5\},\ \{a|a\in I\wedge 1\le a\le 50\}$$

和

$$\{x\mid(\exists y)(y\in I\wedge x=2y)\}$$

这里I表示整数集合。一般地

$$S=\{a|P(a)\}$$

表示$a\in S$当且仅当$P(a)$是真。

注意：1、集合的元素是确定的；

2、集合中每个元素均不相同，没有先后次序；

3、集合的元素可以是一个集合，例如$A=\{a,b,c,D\}$，而$D=\{0,1\}$。

仅含有一个元素的集合称为单元素集合。应把单元素集合与这个元素区别开来。例如$\{A\}$与A不同，$\{A\}$表示仅以A为元素的集合，而A对$\{A\}$而言仅是一个元素，当然这个元素也可以是一个集合，如$A=\{1,2\}$。

称含有有限个元素的集合为有限集。称不是有限集合的集合为无限集或无穷集。有限集合的元素个数称为该集合的基数或势。集合A的基数记为$|A|$，例如若 $A=\{a, b\}$，则 $|A|=2$，又$|\{A\}|=1$

练习

1. 用列举法表示下列集合

（1）$A=\{a|a\in \text{P}且a<20\}$ $\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$

（2）$\text{B}=\{a||a|<4且a为奇数\}$ $\{-3,-1,1,3\}$

2. 用描述法表示下列集合

(1) $A=\{0,2,4,\ldots,200\}$ $\{2x|x\in \text{Z}且x\leq 100\}$

(2) $B=\{2,4,8,\ldots,1024\}$ $\{2^{n}|n\in \text{N}且n\leq 10\}$

3.1.2 集合间的关系(Relations between sets)

集合的相等和包含是集合间的两个基本关系。

1. 集合的相等

外延性原理：

两个集合是相等的，当且仅当它们有相同的成员。即对任意集合A、B,

$$A=B \Leftrightarrow \forall x(x\in A \leftrightarrow x\in B)$$ 或

$$A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B) \wedge \forall x(x \in B \to x \in A)$$

例如 设$A=\{x \mid x\in \mathrm{N}$ 且 x能整除$24\}$，

$B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

则 $A=B$

又例如

（1）$\{a, b, c\}=\{b, c, a\}$　　（2）$\{a, b, c, c\}=\{a, b, c\}$

（3）$\{a, \{b, c\}\}\neq\{\{a, b\}, c\}$　　（4）$\{\varnothing\}\neq\varnothing$

2.集合的包含

定义3-1.1 设A、B是任意两个集合，假如A的每一个元素都是B的成员，则称A是B的子集，或A包含在B内，或B包含A。记作$A\subseteq B$；或称B包含A，记为$B\supseteq A$。

即 $$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow x\in B)$$

若A不是B的子集，则记作$A\not\subseteq B$

$$A\not\subseteq B \Leftrightarrow (\exists x)(x\in A\wedge x\notin B)$$

例如 设 $A=\{a, b, c, d\}$，$B=\{a, e, x, y, z\}$，$C=\{a, x\}$

则 $C\subseteq B$，$C\not\subseteq A$，$B\not\subseteq A$，$A\not\subseteq B$。

集合的包含关系具有如下几条性质：

（1）对任意集合A，$\varnothing \subseteq A$；

（2）对任意集合A，$A \subseteq A$；

（3）对任意集合A、B、C，若 $A \subseteq B$，$B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$。

证明（1）

（反证法）假设 $\varnothing \not\subseteq A$，则至少有一个元素 $x \in \varnothing$，

但 $x \notin A$，这与空集的定义相矛盾，因此结论成立。

定理3-1.1　集合A和集合B相等的充分必要条件是这两个集合互为子集 。
即

$$A=B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A 。$$

证明思路：第一步先证充分性：

$$A=B \Leftarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

（或$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A=B$）

（见P-83页倒数第1段）。

第二步再证必要性：

$$A=B \Rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

（见P-83页倒数第2段）

3. 集合的真包含

定义3-1.2 如果 集合A的每一个元素都属于B，但集合B中至少有一个元素不属于A，则称 A为 B 的真子集，记为$A \subset B$ 。

$A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x(x \notin A \wedge x \in B)$

$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

例如 设$A=\{0,1\}$，$B=\{0,1,2\}$，$C=\{0\}$

则 $A \subset B$ $C \subset B$ $\varnothing \subset B$ 但 $B \not\subset B$

*真包含($\subset$)的性质

1. $A \not\subset A$ （反自反性）

证明: $A \subset A \Leftrightarrow A \subseteq A \land A \neq A \Leftrightarrow T \land F \Leftrightarrow F$.

2. 若$A \subset B$,则 $B \not\subset A$ （反对称性）

证明: (反证) 设$B \subset A$, 则

$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \land A \neq B \Rightarrow A \subseteq B$ (化简)

$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \land B \neq A \Rightarrow B \subseteq A$

所以 $A \subseteq B \land B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$ (=定义)

但是 $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \land A \neq B \Rightarrow A \neq B$ (化简) 矛盾!

3．若$A \subset B$,且$B \subset C$, 则$A \subset C$ （传递性）

证明：$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B \Rightarrow A \subseteq B$ (化简),

同理 $B \subset C \Rightarrow B \subseteq C$, 所以$A \subseteq C$.

假设$A=C$, 则$B \subseteq C \Leftrightarrow B \subseteq A$, 又$A \subseteq B$, 故$A=B$, 此与$A \subset B$矛盾, 所以$A \neq C$.

所以, $A \subset C$. #

4. 空集

定义3-1.3 不包含任何元素的集合是空集，记为$\varnothing$。

定理3-1.2 对于任意一个集合A，$\varnothing \subseteq A$。即空集是任意集合的子集。

证明：反证法。

对于每一个非空集合A，至少有两个不同的子集，A和$\varnothing$，称为A的平凡子集。

*【推论】空集是唯一的

证明 假设有两个空集$\varnothing_1$和$\varnothing_2$，

因为空集被包含于每一个集合中，

所以有 $\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$，$\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$，

由集合相等定义,$\varnothing_1 = \varnothing_2$，故空集是唯一的。

5. 全集(合)

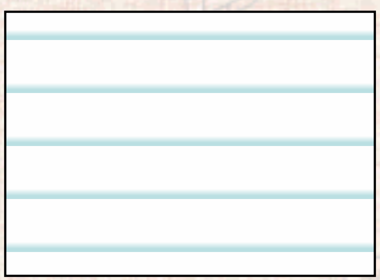
定义3-1.4 在一定范围内，如果所有集合均为某一集合的子集，则称该集合为全集，记为E。即

$$\forall x(x \in E)\text{恒真}$$

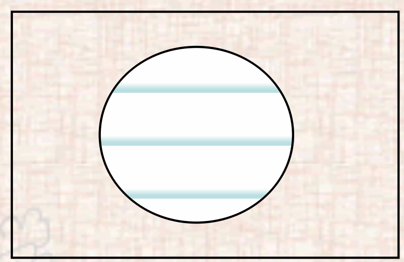
$$\text{或}E=\{\, x \mid P(x) \vee \neg P(x) \,\}$$

6. 文氏图

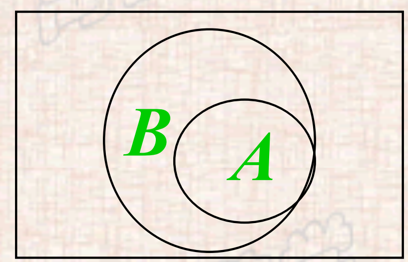
例如



E



A



$A \subseteq B$

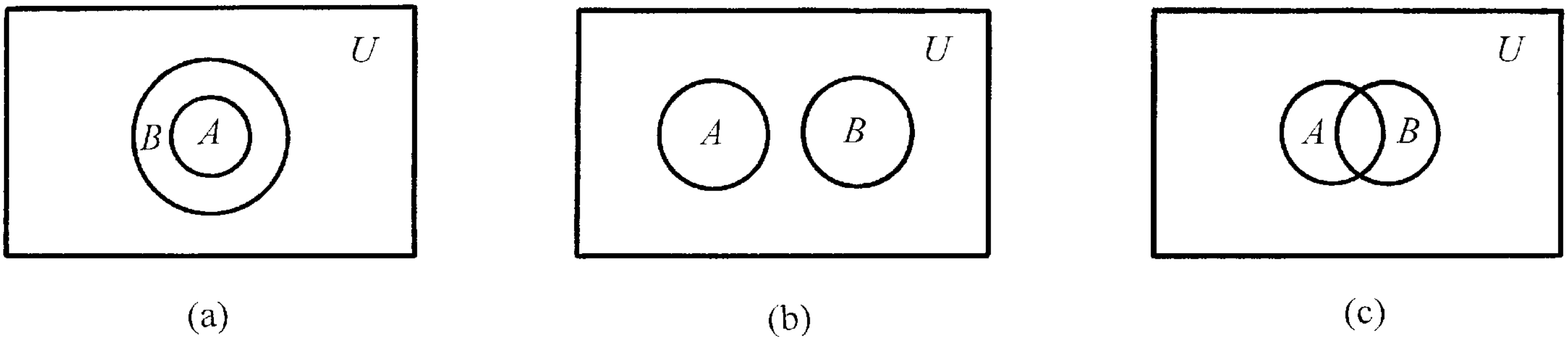


图 3-1

练习3.1.2

1 试判断下列各式是否正确，并将正确的题号填入括号内。

A. $\{a\} \in \{\{a\}\}$

B. $\{a\} \in \{\{a\}, a\}$

C. $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$

D. $\{a\} \subseteq \{\{a\}, a\}$

答案： A B D

2 设 $S = \{\{a\}, 3, 4, \varnothing\}$,试判断下列各式是否正确，并将正确的题号填入括号内。

A. $\varnothing \subseteq S$

B. $\{\varnothing\} \subseteq S$

C. $\varnothing \in S$

D. $\{\varnothing\} \in S$

答案： A B C

3.1.3 幂集(Power set)

设集合 A={a,b,c}，则它所有可能的子集有：

$S_0=\varnothing$, $S_1=\{a\}$, $S_2=\{b\}$, $S_3=\{c\}$, $S_4=\{a,b\}$, $S_5=\{a,c\}$, $S_6=\{b,c\}$, $S_7=\{a,b,c\}$。

这些子集都包含在E中，即$S_i \subseteq E$, 但$S_i \notin E$，如果把S_i作为元素，将可以另外组成一种集合。

定义3-1.5 给定集合 A，由集合A的所有子集为元素组成的集合，称为集合A的**幂集**（*Power set*），记为

$$\rho(A)=\{A_i \mid A_i \subseteq A\}$$

此种运算称为集合A的求幂运算。

定理3-1.3 如果有限集合A 有 n个元素，则其幂集ρ(A)有2^n个元素。

证明思路：利用从n个元素中选k个元素来组成子集，计算所有可能的选法为C_n^k种，

子集的总数是$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$

根据二项式定理$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^k \cdot y^{n-k}$

再令x=1，y=1，代入上式后定理得证。

幂集的编码方法：

人们常常给有限集的子集编码，用以表示的幂集的各个元素。具体方法是：

设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则A的子集B按照含 a_i 记1、不含 a_i 记0的规定依次写成一个n位二进制数，便得子集B的编码。

例如，若 $B=\{a_1,a_n\}$，则B的编码是 $100\cdots01$，当然还可将它化成十进制数。如果n=4，那么这个十进制数为9，此时特别记 $B=\{a_1,a_4\}$ 为 B_9 。

例1. 设 $A=\varnothing$， $B=\{\varnothing, a, \{a\}\}$,求ρ(A)和ρ(B)

解 对于集合A，它只有一个子集 $\varnothing$,即 $2^A=\{\varnothing\}$
对于集合B，有:

0个元素的子集: $\varnothing$

1个元素的子集: $\{\varnothing\}$, $\{a\}$, $\{\{a\}\}$

2个元素的子集: $\{\varnothing, a\}$, $\{\varnothing, \{a\}\}$, $\{a, \{a\}\}$

3个元素的子集: $\{\varnothing, a, \{a\}\}$

因此 $2^B=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{a\}, \{\{a\}\}, \{\varnothing, a\}, \{\varnothing, \{a\}\},$

$\{a, \{a\}\}, \{\varnothing, a, \{a\}\}\}$

例2. 设 $A=\varnothing$ ，$B=2^{(2^A)}$ ，判断下列论断是否正确，并将“Y”或“N”填入相应论断后面的括号中。

(1) $\varnothing \in B$ (Y) $\varnothing \subseteq B$ (Y)

(2) $\{\varnothing\} \in B$ (Y) $\{\varnothing\} \subseteq B$ (Y)

(3) $\{\{\varnothing\}\} \in B$ (N) $\{\{\varnothing\}\} \subseteq B$ (Y)

(4) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \in B$ (N) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \subseteq B$ (Y)

令 $C = 2^A = \{\varnothing\}$

则 $B = 2^C = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

小结：本节介绍了集合、集合的基数、集合的幂集的概念。重点掌握集合的基数及幂集的概念。

作业：P85

(6)

(9)

(10)

3-2 集合的运算

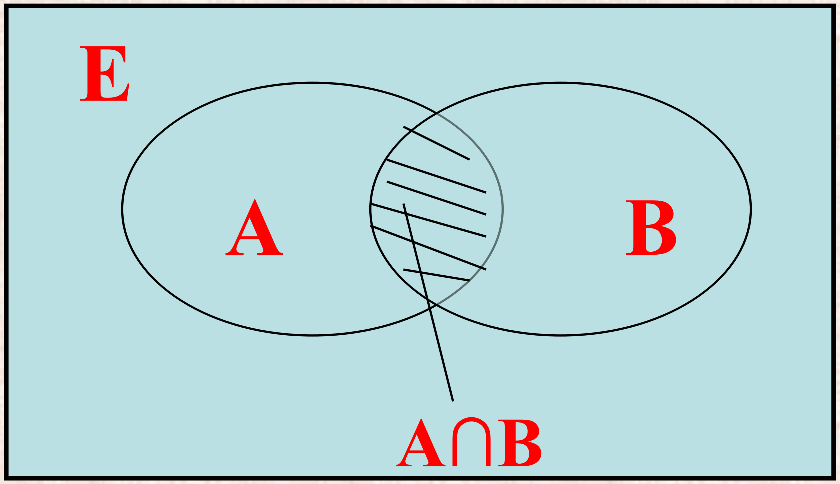
集合的运算，就是以给定集合为对象，按照确定的规则得到另外一些集合。

(1) 集合的交

定义3-2.1 设任意两个集合A和集合B，由集合A和集合B的所有共同元素组成的集合S，称为A和B的**交集**，记作 $A\cap B$。即

$$S=A\cap B=\{x \mid (x\in A)\wedge(x\in B)\}$$

$A\cap B$的文氏图如下：



交运算性质：

a) $A \cap A = A$ 幂等律

b) $A \cap \varnothing = \varnothing$ 0律

c) $A \cap E = A$ 1律

d) $A \cap B = B \cap A$ 交换律

e) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ 结合律

对e)的证明思路：根据交运算的定义，利用谓词逻辑中的联结词“$\wedge$”的结合律推导，再利用交运算的定义，转换为集合交运算“$\cap$”的结合律。

详细证明过程见P-88页。

因为集合交运算满足结合律，故n个集合的交记为：

$$P = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

例1: 设$A_n=\{x\in R|n-1\le x\le n\}$,n=1,2,…,10,则

$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \varnothing$

例2: 设$A_n=\{x\in R|0\le x\le 1/n\}$,n=1,2,…,则

$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots = \{0\}$

例如 设$A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{d,f,a\}$，$C=\{e,f,g\}$

则 $A\cap B=\{d,a\}$

$A\cap C=\varnothing$

$B\cap C=\{f\}$

由定义3-2.1可知,

$A\cap B\subseteq A \quad A\cap B\subseteq B$

不相交(disjoint)

定义：若集合A、B没有共同元素，则可写成$A \cap B = \varnothing$，此时亦称A与B不相交。

互不相交：设$A_1, A_2, \ldots$是可数多个集合，若对于任意的$i \neq j$, 都有$A_i \cap A_j = \varnothing$, 则说它们互不相交。

例: 设 $A_n = \{x \in R \mid n-1 < x < n\}$,

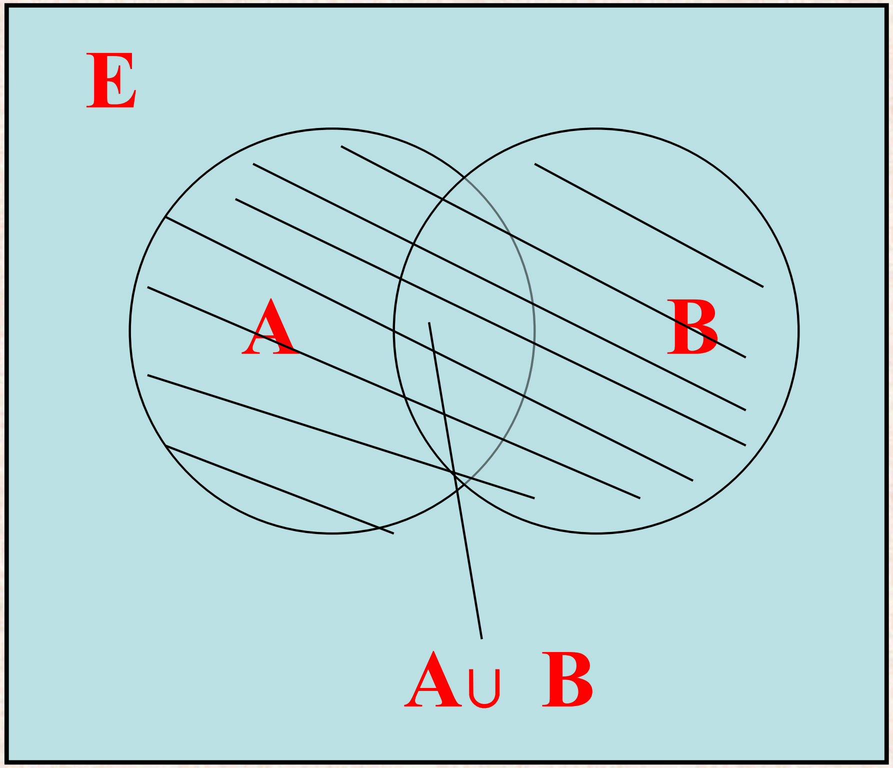
$n=1,2,\ldots,10$, 则 $A_1, A_2, \ldots$是不相交的

(2) 集合的并

定义3-2.2 设任意两个集合A和集合B，所有属于A或属于B的元素组成的集合S，称为A和B的**并集**，记作 $A \cup B$。即

$$S = A \cup B = \{ x \mid (x \in A) \vee (x \in B) \}$$

$A \cup B$的文氏图如下：



例1：设$A_n=\{x\in R|n-1\le x\le n\}, n=1,2,\ldots,10$，则

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n= \{x|x\in R \wedge 0\le x\le 10\}$

例2: 设$A_n=\{x\in R|0\le x\le 1/n\}, n=1,2,\ldots$，则

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = \{x|x\in R \wedge 0\le x\le 1\}$

例如 设$A=\{a,b,c\}$，$B=\{c,d,f\}$，$C=\{b,e\}$

则 $A\bigcup B=\{a,b,c,d,f\}$

$A\bigcup C=\{a,b,c,e\}$

$B\bigcup C=\{b,c,d,e,f\}$

由定义3.1.3知，$A\subseteq A\bigcup B, B\subseteq A\bigcup B$

并运算性质：

a) $A\cup A=A$ 幂等律

b) $A\cup \varnothing =A$ 0律

c) $A\cup E =E$ 1律

d) $A\cup B = B\cup A$ 交换律

e) $(A\cup B) \cup C= A\cup (B\cup C)$ 结合律

对e)的证明思路：根据并运算的定义，利用谓词逻辑中的联结词“$\vee$”的结合律推导，再利用并运算的定义，转换为集合并运算“$\cup$”的结合律。

因为集合并运算满足结合律，故n个集合的并记为：

$$P=A_1\cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

定理3-2.1 设 A、B、C 为三个集合，则下列分配律成立：

a) $A\cap (B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ （交对并分配）

b) $A\cup (B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ （并对交分配）

证明思路：

根据并运算和交运算的定义，

先证：等式的左端 $\subseteq$ 等式的右端。

对任意$x\in$左端 $\Rightarrow x\in$右端

再证：等式的右端 $\subseteq$ 等式的左端。

对任意$x\in$右端 $\Rightarrow x\in$左端

定理3-2.2 设 A、B 为任意两个集合，则下列关系式（吸收律）成立：

a) $A\cup(A\cap B)=A$

b) $A\cap(A\cup B)=A$

证明思路：

先证a)：根据1律，将等式左端的第一个A 换成"$A\cap E$"，再根据分配律提出A，得到$A\cap(E\cup B)$，再根据1律即得右端。

再证b)：根据幂等律，将等式左端的第一个A 换成"$A\cup A$"，再根据分配律提出A，得到$A\cup(A\cap B)$，再根据刚证出的a)式即得右端。

定理3-2.3 $A \subseteq B$ 当且仅当 $A \cup B = B$ 或 $A \cap B = A$ 成立。

证明思路：本定理表示成如下两式：

a) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

b) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

a)式的证明步骤：

先证 $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$: 以“$A \subseteq B$”为条件推导出“$A \cup B = B$”的结论。

再证 $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$: 以“$A \cup B = B$”为条件推导出“$A \subseteq B$”的结论。

b)式的证明步骤与a)式类似。

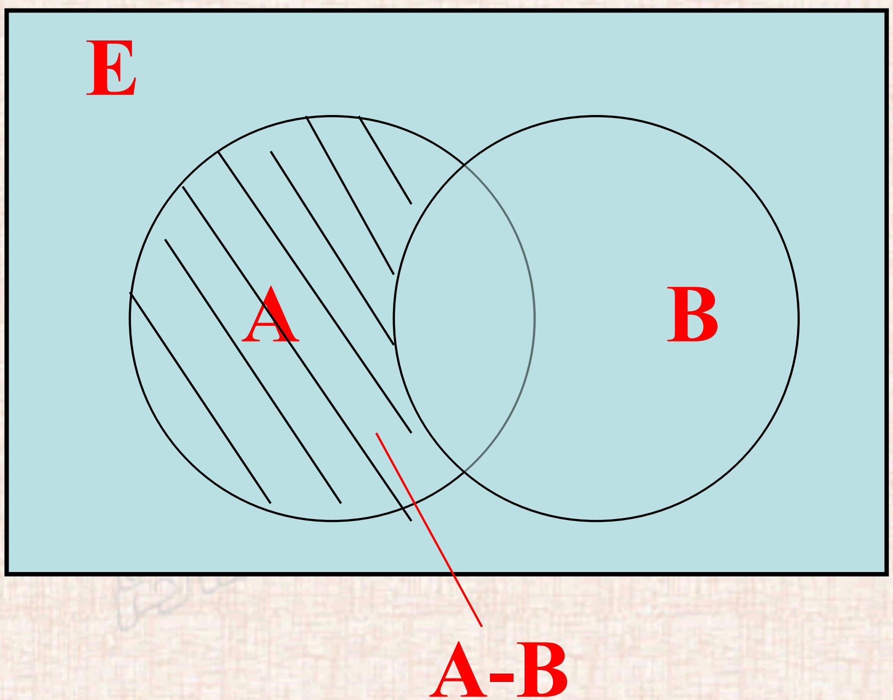
（3）集合的补

定义3-2.3 设A、B为任意两个集合，所有属于A而不属于B的一切元素组成的集合S，称为集合B对于A的**补集**，或**相对补**，记为A-B，又称为A与B的差。即

$$S = A-B = \{\ x \mid (x\in A) \wedge (x\notin B)\ \}$$
$$= \{\ x \mid (x\in A) \wedge \neg(x\in B)\ \}$$

A-B的文氏图如下：

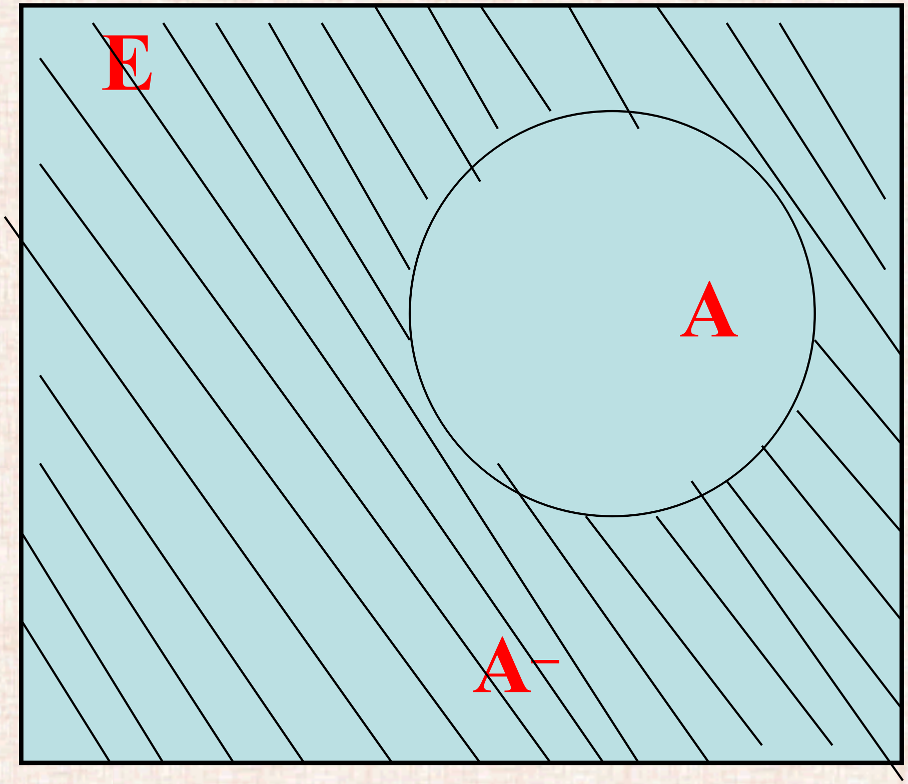
$x\in$



定义3-2.4 设E为全集，对任一集合A关于E的补集E-A,称为集合A的**绝对补**，记作~ A 。即

$$S= E-A =\{ x \mid (x\in E) \wedge (x\notin A) \}$$
$$=\{ x \mid (x\in E) \wedge \neg(x\in A) \}$$

~A的文氏图如下：



例如 设U={1，2，3，4，…，10}，

A={2，4，6，8，10}

则 $\overline{A}=U-A=\{1,3,5,7,9\}$

又例如 设U=I（I是整数集），

$$A=\{i\mid i\in I,且i>0\}$$

则 $\overline{A}=U-A=\{i\mid i\in I且i\leq 0\}$

补集的性质： 对任意集合 A，B，C，下式成立：

a) $\sim(\sim A) = A$ （双重否定律）

b) $\sim E = \varnothing$, $\sim\varnothing = E$ 补余律

c) $A \cup \sim A = E$, $A \cap \sim A = \varnothing$ 互否律

d) $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$, $\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$ 德·摩根定律(见定理3-2.4

e) $A - B = A \cap \sim B$, $A - B = A - (A \cap B)$ (见定理3-2.5)

f) $A - A = \varnothing$, $A - \varnothing = A$, $A - E = \varnothing$ 0-1律

g) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$, $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ 分配律

德·摩根律(见定理3-2.4) 的证明:

$$\sim(A\cup B)=\{x \mid x\in\sim(A\cup B)\}$$
$$=\{x \mid x\notin (A\cup B)\}$$
$$=\{x \mid (x\notin A)\wedge(x\notin B)\}$$
$$=\{x \mid (x\in\sim A)\wedge(x\in\sim B)\}$$
$$=\sim A\cap\sim B$$

$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$的证明同上。

定理3-2.5第2式$A-B=A-(A\cap B)$的证明思路:

先证$A-B\subseteq A-(A\cap B)$

从对于任意的 $x\in A-B$出发，推出$x\in A-(A\cap B)$

再证$A-(A\cap B)\subseteq A-B$

从对于任意的$x\in A-(A\cap B)$ 出发，推出$x\in A-B$

定理3-2.6 设A、B、C为三个集合，则：

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

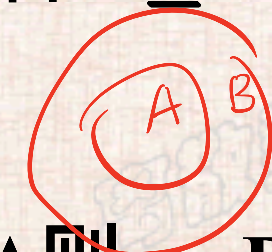
证明思路：

先将"～"运算转换成"∩"运算，利用"∩运算结合律"和"德·摩根律"进行集合运算。

定理3-2.7 设A，B为两个集合，若$A \subseteq B$，则

a) $\sim B \subseteq \sim A$

b) $(B-A) \cup A = B$



证明思路：a) $A \subseteq B \Rightarrow$ 若 $x \in A$ 则 $x \in B \Rightarrow$ 若非 $x \in B$ 则非 $x \in A \Rightarrow$ 若 $x \in \sim B$ 则 $x \in \sim A \Rightarrow \sim B \subseteq \sim A$

b)先将"～"运算转换成"∩"运算，利用"∩运算分配律"进行集合运算。

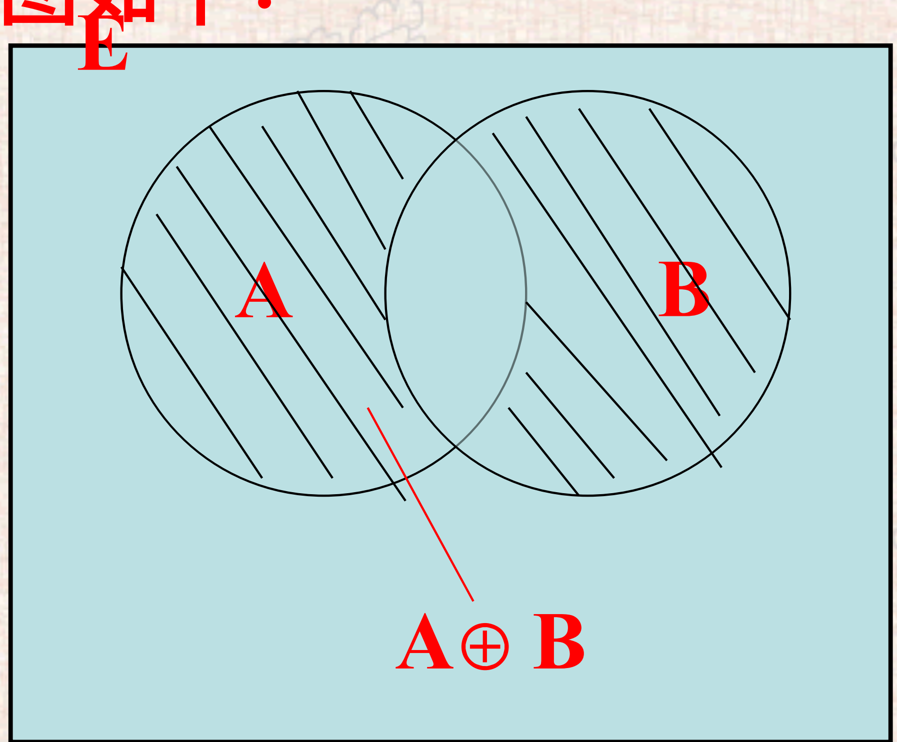
(4) 集合的对称差

定义3-2.5 设A、B为任意两个集合， A和B的**对称差**为集合**S**，其元素或属于A，或属于B，但不能即属于A又属于B，记作$A\oplus B$（布尔和）。即

$$S = A\oplus B = (A-B)\cup(B-A)$$

$$= \{\ x \mid (x\in A)\ \overline{\vee}\ (x\in B)\ \}$$

A-B的文氏图如下：



对称差的性质：对任意集合 A，B，C，下式成立:

a) $A \oplus B = B \oplus A$　　交换律

b) $A \oplus \varnothing = A$

c) $A \oplus A = \varnothing$

d) $A \oplus B = (A \cap {\sim}B) \cup ({\sim}A \cap B)$

e) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$　　结合律

结合律e)式的证明思路:

见P-92页~94页。

集合运算的性质（集合恒等式）

(1) 幂等律(idempotent laws)

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$

(2) 结合律(associative laws)

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) 交换律(commutative laws)

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

(4) 分配律(distributive laws)

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(5) 对合律(double complement law)

$\sim\sim A = A$

(6) 零律(dominance laws)

$A \cup E = E$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

(7) 同一律(identity laws)

$A \cup \varnothing = A$

$A \cap E = A$

(8) 排中律(excluded middle)

$A \cup {\sim}A = E$

(9) 矛盾律(contradiction)

$A \cap {\sim}A = \varnothing$

(10) 全补律

${\sim}\varnothing = E$

${\sim}E = \varnothing$

(11) 吸收律(absorption laws)

$A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

(12) 德.摩根律(DeMorgan’s laws)

$\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$

$\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$

(13) 补交转换律(difference as intersection)

$A - B = A \cap \sim B$

集合恒等式证明(方法)

（1）逻辑演算法:

利用逻辑等价式和逻辑推理规则

（2）集合演算法:

利用集合恒等式和已知的集合结论

（1）逻辑演算法(格式)

题型: $A \subseteq B$.

证明: $\forall x,\ x \in A$

$\Rightarrow \ldots(????)$

$\Rightarrow x \in B$

$\therefore A \subseteq B$证毕.

题型: A=B.

证明: $\forall x,\ x \in A$

$\Leftrightarrow \ldots(????)$

$\Leftrightarrow x \in B$

$\therefore A=B$ 证毕.

或证明: $\forall x,\ x \in A \Rightarrow \ldots\ (????) \Rightarrow x \in B$.

另, $\forall x,\ x \in B \Rightarrow \ldots\ (????) \Rightarrow x \in A$.

$\therefore A=B$证毕.

例1：分配律(证明)

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

证明: $\forall x,\quad x\in A\cup(B\cap C)$

$\Leftrightarrow x\in A \vee x\in(B\cap C)$ (∪定义)

$\Leftrightarrow x\in A \vee (x\in B \wedge x\in C)$ (∩定义)

$\Leftrightarrow (x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)$ (命题逻辑分配律)

$\Leftrightarrow (x\in A\cup B)\wedge(x\in A\cup C)$ (∪定义)

$\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$ (∩定义)

$\therefore A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$成立

例2：零律(证明)

$A \cap \varnothing = \varnothing$

证明: $\forall x,\ x \in A \cap \varnothing$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \varnothing$ (∩定义)

$\Leftrightarrow x \in A \wedge F$ (∅定义)

$\Leftrightarrow F$ (命题逻辑零律)

$\therefore A \cap \varnothing = \varnothing$ 成立

例3. 排中律(证明)

$A \cup \sim A = E$

证明: $\forall x,\ x \in A \cup \sim A$

$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in \sim A$ (∪定义)

$\Leftrightarrow x \in A \vee x \notin A$ (~定义)

$\Leftrightarrow x \in A \vee \neg(x \in A)$ (∉定义)

$\Leftrightarrow T$ (命题逻辑排中律)

$\therefore A \cup \sim A = E$ 成立

(2) 集合演算法（格式）

题型: A=B.

证明: A

=…(????)

=B

∴ A=B. #

题型: A⊆B.

证明: A

⊆ …(????)

⊆B

∴ A⊆B. #

例1：吸收律(一式证明)

$A\cup(A\cap B)=A$

证明: $A\cup(A\cap B)$

$= (A\cap E)\cup(A\cap B)$ (同一律)

$= A\cap(E\cup B)$ (逆用分配律)

$= A\cap E$ (零律)

$= A$ (同一律)

$\therefore A\cup(A\cap B)=A$

例2：吸收律(二式证明)

$A \cap (A \cup B) = A$

证明: $A \cap (A \cup B)$

$= (A \cap A) \cup (A \cap B)$ (分配律)

$= A \cup (A \cap B)$ (幂等律)

$= A$ (吸收律第一式)

$\therefore A \cap (A \cup B) = A$

(2) 集合演算法（格式）续

题型: A=B

证明: $(\subseteq)$ …

$\therefore A \subseteq B$

$(\supseteq)$ …

$\therefore A \supseteq B$

$\therefore A = B.$ #

说明: 把=分成$\subseteq$与$\supseteq$

题型: $A \subseteq B$

证明: $A \cap B$ (或$A \cup B$)

$= \ldots (????)$

$= A$ (或B)

$\therefore A \subseteq B.$ #

说明: 化$\subseteq$成=

$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$

$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$

集合恒等式证明(举例)

1. 基本集合恒等式

例如：①补交转换律

$A-B = A\cap\sim B$

证明: $\forall x,\ x\in A-B$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin B$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge x\in\sim B$

$\Leftrightarrow x \in A\cap\sim B$

$A-B = A\cap\sim B$.

②德•摩根律的相对形式

$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

证明: $A-(B\cup C)$

$= A\cap\sim(B\cup C)$ (补交转换律)

$= A\cap(\sim B\cap\sim C)$ (德•摩根律)

$= (A\cap A)\cap(\sim B\cap\sim C)$ (幂等律)

$= (A\cap\sim B)\cap(A\cap\sim C)$ (交换律,结合律)

$= (A-B)\cap(B-A)$ (补交转换律). #

练习3.2

1 设A、B、C是任意集合，判断下述论断是否正确，并将正确的题号填入括号内。

A. 若 $A \cup B = A \cup C$，则 $B=C$

B. 若 $A \cap B = A \cap C$，则 $B=C$

C. 若$A-B=A-C$，则 $B=C$

D. 若 $\overline{A} = \overline{B}$，则 $A=B$ （D）

反例 设$A=\{a, b, c\}$, $B=\{b, d\}$, $C=\{c, d\}$

则 $A \cup B = A \cup C = \{a, b, c, d\}$

但 $B \neq C$

2 设$U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$A=\{2, 4\}$，$B=\{4, 3, 5\}$，$C=\{2, 5, 3\}$，确定下列集合的元素，将其填入相应的花括号内。

(1) $A \cap \overline{B} = \{\ 2\ \}$

(2) $(A \cap B) \cup \overline{C} = \{\ 1, 4\ \}$

(3) $A \cup (B \cap C) = \{2, 3, 4, 5\}$

(4) $A - C = \{\ 4\ \}$

(5) $(A - C) - B = \varnothing$

3 设U表示刘平拥有的所有书的集合，，其中A是离散数学参考书的集合，B是操作系统参考书的集合，C是今年出版的新书的集合，D是从图书馆借来的书的集合。现知道如下情形：

（1）所有离散数学参考书都是今年出版的新书。（ 3 ）

（2）所有操作系统参考书都是从图书馆借来的。（ 1 ）

（3）今年出版的新书不是从图书馆借来的。（ 5 ）

（4）没有一本操作系统的参考书是今年出版的。（ 7 ）

试用集合的方法分别表示上述四种情形，可供选择的答案如下，请从下述答案中挑选出相应表达式的编号填入每一种情形后面的括号中。

1. $B \subseteq D$ 2. $C \subseteq B$ 3. $A \subseteq C$ 4. $A \cap D = \varnothing$

5. $C \cap D = \varnothing$ 6. $B \subseteq C$ 7. $B \cap C = \varnothing$

4 判断下列论断是否正确，对正确的论断在相应题后的括号中标入“Y”，对错误的论断在相应题后的括号中标入“N”。

1） 若 ，则 （ ）

2） 若 $a \in A$ ，则 $a \in A \cup B$ （ Y ）

3） 若 $a \in A$ ，则 $a \in A \cap B$ （ N ）

4） 若 $a \in A \cup B$ ，则 $a \in B$ （ N ）

5） 若 $a \in A \cap B$ ，则 $a \in B$ （ Y ）

6） 若 $A \subseteq B$ ，则 $A \cap B = B$ （ N ）

7） 若 $A \subseteq B$ ，则 $A \cap B = A$ （ Y ）

8） 若 $a \notin A$ ，则 $a \notin A \cup B$ （ N ）

$a \notin A$ $a \notin A \cap B$ Y

作业(3-2)：

P94

(1)

(3) c) d)

(4)

((5))a) (6)

*3-3 包含排斥原理

集合的运算，可用于有限个元素的计数问题。

设A_1，A_2为有限集合，其元素个数分别记为$|A_1|$，$|A_2|$，根据集合运算的定义，显然以下各式成立。

$|A_1 \cup A_2| \le |A_1|+|A_2|$

$|A_1 \cap A_2| \le \min(|A_1|, |A_2|)$

$|A_1 - A_2| \ge |A_1|-|A_2|$

$|A_1 \oplus A_2| = |A_1|+|A_2|-2|A_1 \cap A_2|$

3-3 包含排斥原理

定理3-3.1 设A_1，A_2为有限集合，其元素个数分别为$|A_1|$，$|A_2|$，则

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

证明：见P96

推理：对于任意三个有限集合A_1，A_2和A_3，则

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

3-3 包含排斥原理

定理3-3.2

见P97

例题1：P96

例题2：P97

3–4 序偶与笛卡尔积

两个具有固定次序的客体组成一个有序序列，称为**序偶**（*ordered pairs*），简记为$<a,b>$，它常常表达两个客体之间的关系。称a为$<a,b>$的**第一元素**，称b为**第二元素**。

定义3-4.1 两个序偶相等，$<x, y> = <u, v>$, iff $x = u$, $y = v$。

- 可将序偶的概念推广到三元组的情况。三元组是一个序偶，其第一元素本身也是一个序偶，可形式化表示为$\langle\langle x,y\rangle,z\rangle$。由序偶相等的定义，可以知道$\langle\langle x,y\rangle,z\rangle=\langle\langle u,v\rangle,w\rangle$ iff $\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle,z=w$，即$x=u,y=v,z=w$。今后约定三元组可记为$\langle x,y,x\rangle$。注意：当$x\neq y$，$\langle\langle x,y\rangle,z\rangle\neq\langle x,\langle y,z\rangle\rangle$，$\langle x,y,z\rangle\neq\langle y,x,z\rangle$。
- 同样也可以推广到n元有序组，它的第一分量是(n-1)元有序组，并记为$\langle\langle x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\rangle,x_n\rangle$，或记为$\langle x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\rangle$。类似地定义两个$n$元有序组相等：
- $\langle x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\rangle=\langle y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},y_n\rangle$ *iff* $(x_1=y_1)\wedge(x_2=y_2)\wedge\cdots\wedge(x_{n-1}=y_{n-1})\wedge(x_n=y_n)$

- 定义3-4.2 令A和B是任意两个集合，若序偶的第一个成员是A的元素，第二个成员是B的元素，所有这样的序偶集合，称为集合A和B的**笛卡尔乘积**或**直积**，记为$A\times B$，$A\times B=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in B\}$

一般情况下，**笛卡尔积不满足交换律和结合律。**

例4.1 （1）A={a，b}，B={c，d}，求A×B。

（2）A={a，b}，B={c，d}，求B×A。

（3）A={a，b}，B={1，2}，C={c}，求（A×B）×C和A×（B×C）。

解 （1）A×B={a，b}×{c，d}={<a，c>，<a，d>，<b，c>，<b，d>}。

（2）B×A={c，d}×{a，b}={<c，a>，<c，b>，<d，a>，<d，b>}。

（3）（A×B）={a，b}×{1，2}={<a，1>，<a，2>，<b，1>，<b，2>}。

$(A\times B)\times C=\{\langle\langle a, 1\rangle, c\rangle, \langle\langle a, 2\rangle, c\rangle, \langle\langle b, 1\rangle, c\rangle, \langle\langle b, 2\rangle, c\rangle\}$

$\langle a, \langle 1, c\rangle\rangle$

? $=\{\langle a, 1, c\rangle, \langle a, 2, c\rangle, \langle b, 1, c\rangle, \langle b, 2, c\rangle\}$。

$B\times C=\{1, 2\}\times\{c\}=\{\langle 1, c\rangle, \langle 2, c\rangle\}$。

$A\times(B\times C)=\{\langle a, \langle 1, c\rangle\rangle, \langle a, \langle 2, c\rangle\rangle, \langle b, \langle 1, c\rangle\rangle, \langle b, \langle 2, c\rangle\rangle\}$。

练习: $A=\{\varnothing,a\}$, $B=\{1,2,3\}$. 求: $A\times B$, $B\times A$, $A\times A$, $B\times B$

解:

$A\times B=$

$\{\langle\varnothing,1\rangle,\langle\varnothing,2\rangle,\langle\varnothing,3\rangle,\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle a,3\rangle\}$.

$B\times A=$

$\{\langle 1,\varnothing\rangle,\langle 1,a\rangle,\langle 2,\varnothing\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,\varnothing\rangle,\langle 3,a\rangle\}$.

$A\times A=$

$\{\langle\varnothing,\varnothing\rangle, \langle\varnothing,a\rangle, \langle a,\varnothing\rangle, \langle a,a\rangle\}$.

$B\times B=$

$\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,$
$\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$.

笛卡尔积的性质:

- **定理3-4.1** 设A，B，C为任意三个集合，则有

  a) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

  b) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

  c) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$

  d) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$

笛卡尔积分配律(证明(1))

$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

证明: $\forall\langle x,y\rangle$, $\langle x,y\rangle\in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A \land y\in (B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A \land (y\in B \lor y\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\land y\in B)\lor(x\in A\land y\in C)$

$\Leftrightarrow (\langle x,y\rangle\in A\times B)\lor(\langle x,y\rangle\in A\times C)$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in(A\times B)\cup(A\times C)$

$\therefore A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$. #

定理3-4.2 若$C \neq \phi$，则：

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (A \times C \subseteq B \times C) \Leftrightarrow (C \times A \subseteq C \times B)$$

- **定理前半部分证明思路** :(谓词演算法)

先证明$A \subseteq B \Rightarrow (A \times C \subseteq B \times C)$

以$A \subseteq B$为条件，从$<x,y> \in A \times C$出发，推出$<x,y> \in B \times C$

得出$(A \times C \subseteq B \times C)$结论。

再证明$(A \times C \subseteq B \times C) \Rightarrow A \subseteq B$

以$C \neq \phi$为条件，从$x \in A$出发，对于$y \in C$，利用$\Rightarrow$附加式，推出$x \in B$

得出$(A \subseteq B)$结论。 见P-103页。 ◘

定理3-4.3 设A, B, C, D为任意四个非空集合，则：

$A\times B\subseteq C\times D$的充分必要条件为$A\subseteq C$，$B\subseteq D$

■**证明思路**:(谓词演算法)

先证明必要性： $A\times B\subseteq C\times D\Rightarrow A\subseteq C$，$B\subseteq D$

对于任意的$x\in A$、$y\in B$，从$\langle x,y\rangle\in A\times B$出发，利用条件$A\times B\subseteq C\times D$， $\langle x,y\rangle\in C\times D$，推出$x\in C$， $y\in D$。

再证明充分性： $A\subseteq C$，$B\subseteq D\Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$

对于任意的$x\in A$、$y\in B$，从$\langle x,y\rangle\in A\times B$出发，推出$\langle x,y\rangle\in C\times D$。 见P-104页。 ■

推广：n维笛卡尔积

定义［n维笛卡尔积］：

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n$

$= \{ <x_1, x_2, \ldots, x_n> \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge x_n \in A_n \}$

记：$A \times A \times \ldots \times A = A^n$

$|A_i| = n_i$, $i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow$

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_n.$$

n维笛卡尔积性质与2维笛卡尔积类似.

作业(3-4)：

P104

(1)

(2)

(5)

3-5关系及其表示

3-5.1关系的概念及记号

兄弟关系、长幼关系、同学关系、邻居关系，上下级关系等。

在数学上有大于关系、小于关系，整除关系。

例如：“3小于5”，“x大于y”， “点a在b与c之间”。

我们又知道序偶可以表达两个客体、三个客体或n个客体之间的联系，因此用序偶表达这个概念是非常自然的。

例如：火车票与座位之间有对号关系。

设X表示火车票的集合，Y表示座位的集合，

则对于任意的 $x \in X$ 和 $y \in Y$，

必定有 x 与y有“对号”关系

x 与y没有“对号”关系。二者之一

令R表示“对号”关系，

则上述问题可以表示为 xRy 或 $x\not R y$ 。

亦可表示为 $\langle x,y\rangle \in R$ 或 $\langle x,y\rangle \notin R$,

因此我们看到对号关系是序偶的集合。

定义3-5.1 任一序偶的集合确定一个**二元关系R**，R中的任一序偶$\langle x,y\rangle$可记为$\langle x,y\rangle \in R$，或xRy。不在R中序偶$\langle x,y\rangle$记为$\langle x,y\rangle \notin R$，或$x\not R y$。

定义3-5.2 令R为一个二元关系，由$\langle x,y\rangle \in R$的所有x组成的集合domR称为R的**前域**，即

$$\mathrm{dom}R = \{x \mid (\exists y)(\langle x,y\rangle \in R)\}$$

由$\langle x,y\rangle \in R$的所有y组成的集合ranR称为R的**值域**，即

$$\mathrm{ran}R = \{ y \mid (\exists x)(\langle x,y\rangle \in R)\}$$

R的前域和值域一起称作R的域，记为FLDR，即

$$\mathrm{FLD}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R\text{。}$$

例1: 在实数中关系“≥”可记作

“≥ ”$=\{\langle x,y\rangle \mid x,y$是实数且$x \geq y\}$。

例2: $R_1=\{\langle 1,2\rangle,\langle \alpha,\beta\rangle,\langle a,b\rangle\}$

R_1是二元关系.

例3: $A=\{\langle a,b\rangle,\langle 1,2,3\rangle,a,1\}$

A不是关系.

例　设A={a，b，c，d，e}，B={1，2，3}，R={<a，2>，<b，3>，<c，2>}，求R的定义域和值域。

解　dom（R）={a，b，c}，ran（R）={2，3}。

例　设A={1，3，5，7}，R是A上的二元关系，当a，b∈A且a<b时，<a，b>∈R，求R和它的定义域和值域。

解　R={<1，3>，<1，5>，<1，7>，<3，5>，<3，7>，<5，7>}

Dom(R)={1，3，5}，ran(R)={3，5，7}。

二元关系的记号：

设R是二元关系，则$<x,y> \in R$

$\Leftrightarrow$ x与y具有R关系

$\Leftrightarrow$ xRy。

对比： xRy   (中缀(infix)记号)

$<x,y> \in R$ (后缀(suffix)记号)

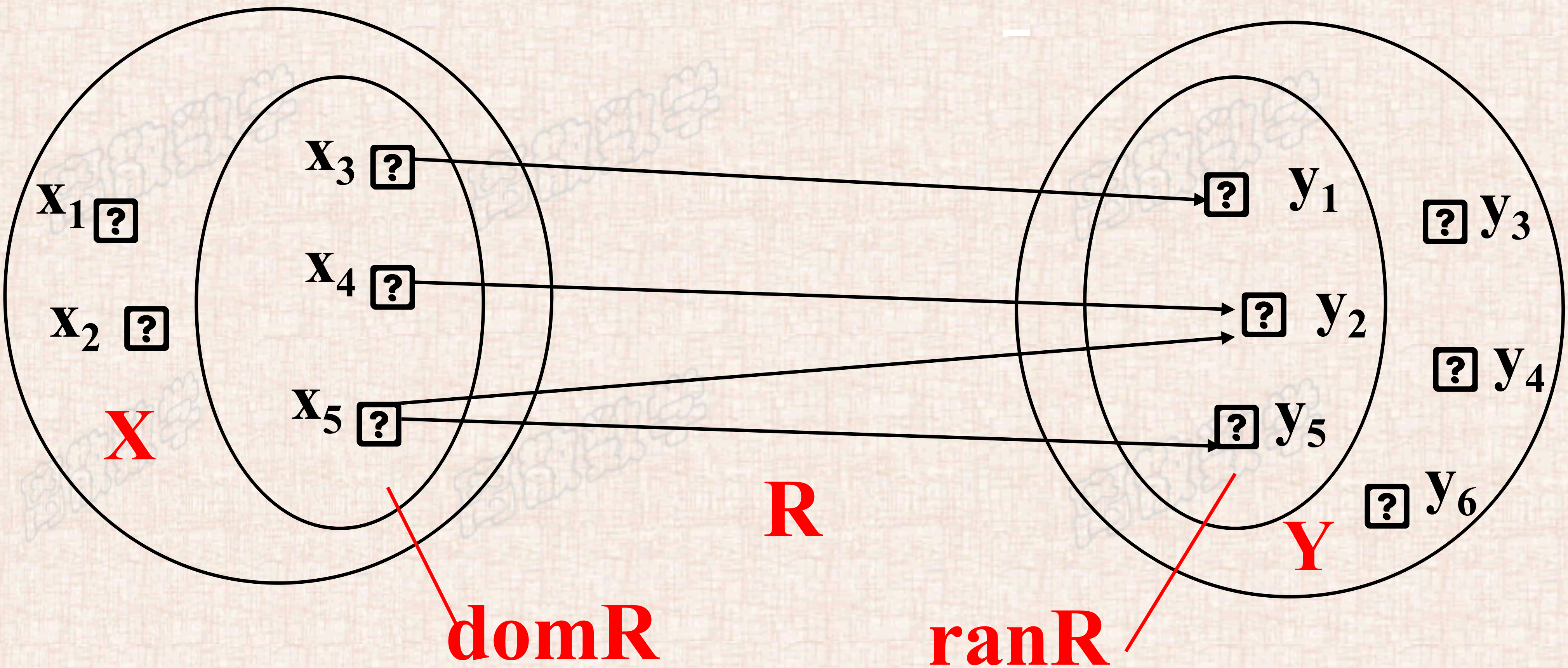
R(x,y)   (前缀(prefix)记号)

例如：$2<15 \Leftrightarrow <(2,15) \Leftrightarrow <2,15> \in <$。

$<1,2> \in R \Leftrightarrow 1\ R\ 2$，

$<5,4> \notin R \Leftrightarrow 5 \not{R}\, 4$。

定义3-5.3 令X和Y是任意两个集合，直积X×Y的子集 R称为X到Y的二元关系。



见P107页例题2、3。

几个特殊的二元关系

$\mathrm{dom}R \subseteq X$

$\mathrm{ran}R \subseteq Y$

$\mathrm{FLD}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R \subseteq X \times Y$ 序偶 ?

$\varnothing \subseteq X \times Y$，称$\varnothing$为X到Y的**空关系**。

$X \times Y \subseteq X \times Y$，称$X \times Y$为X到Y的**全域关系**。

$I_X = \{\langle x,x\rangle \mid x \in X\}$，称为X上**恒等关系**。(定义3-5 .4)

定义3-5.4 设I_X为集合X上的二元关系，且满足$I_X=\{\langle x, x\rangle \mid x \in X\}$，则称$I_X$为集合X上的**恒等关系**。

关系并、交、补、差运算示例见P107页例题4。

关系的交、并、差、补运算

例　　设X={1，2，3，4，5}，若A={<x，y>|x与y的差能被2整除}，B={<x，y>|x与y的差为正且能被3整除}，求A∪ B，A∩B，A-B，B-A，~A。

解 A={<1, 1>, <1, 3>, <1, 5>, <2, 2>, <2, 4>, <3, 1>, <3, 3>, <3, 5>, <4, 2>, <4, 4>, <5, 1>, <5, 3>, <5, 5>}

B={<4, 1>, <5, 2>}

A∪ B={<1, 1>, <1, 3>, <1, 5>, <2, 2>, <2, 4>, <3, 1>, <3, 3>, <3, 5>, <4, 1>, <4, 2>, <4, 4>, <5, 1>, <5, 2>, <5, 3>, <5, 5>}

A∩B=∅

A-B={<1, 1>, <1, 3>, <1, 5>, <2, 2>, <2, 4>, <3, 1>, <3, 3>, <3, 5>, <4, 2>, <4, 4>, <5, 1>, <5, 3>, <5, 5>}

$B-A=\{\langle 4, 1\rangle, \langle 5, 2\rangle\}$

$\sim A=\{1, 2, 3, 4, 5\}\times\{1, 2, 3, 4, 5\}-\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 3, 5\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 5, 1\rangle, \langle 5, 3\rangle, \langle 5, 5\rangle\}$

$=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 5, 2\rangle, \langle 5, 4\rangle\}$

定理3-5.1　若Z和S是从集合X到集合Y的两个关系，则Z、S的并、交、补、差仍是从集合X到集合Y的关系。

◘证明思路：根据“关系是直积的子集”立即可得。◘

二元关系的表示

1、关系矩阵表示法：

设给定两个有限集合X= $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，Y = $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ 。R为从X到Y的一个二元关系。则对应于关系R有一个矩阵$M_R=[r_{ij}]_{m\times n}$,其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当} < x_i, y_j > \in R \\ 0 & \text{当} < x_i, y_j > \notin R\end{cases}$$

$$(i=1,2,\ldots,m;\ \ j=1,2,\ldots,n)$$

示例见P108页例题5、6。

例题：P103 例题5

例如: A={a,b,c},

$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$,

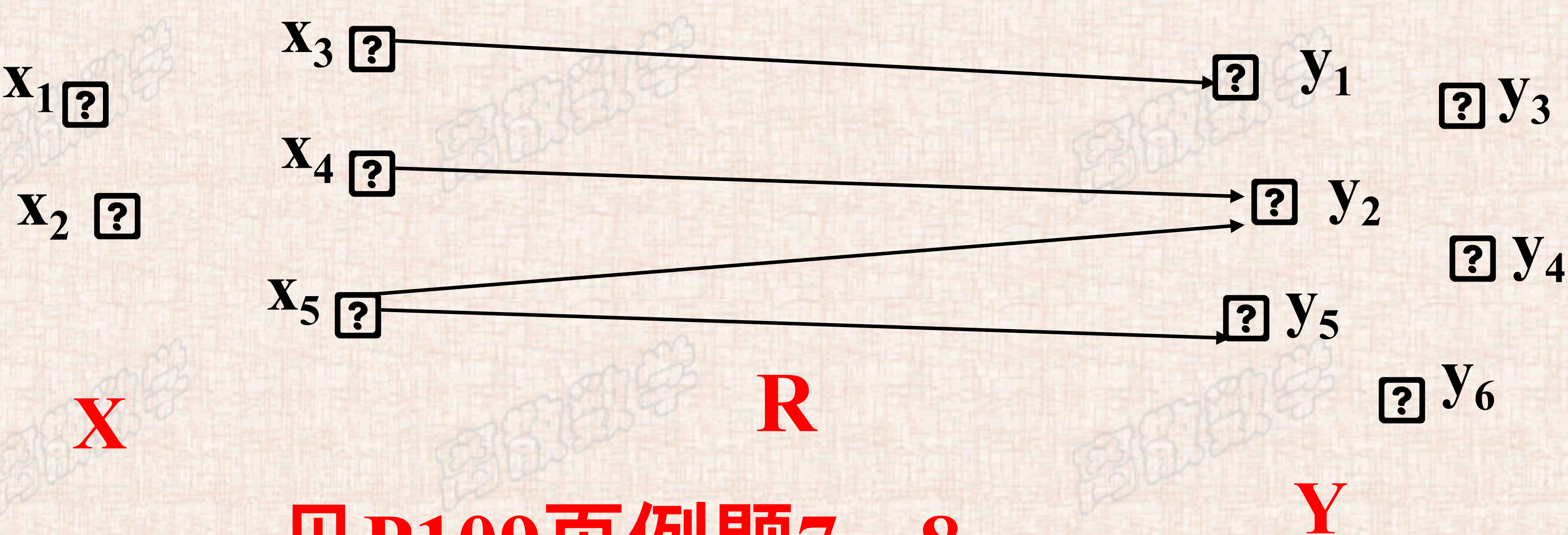
$R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$, 则

$$M_{R1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{R2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2、关系图表示法：

设给定两个有限集合X= $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，Y = $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ 。R为从X到Y的一个二元关系。分别用m个结点表示$x_1, x_2, \ldots, x_m$，用n个结点表示$y_1, y_2, \ldots, y_n$。

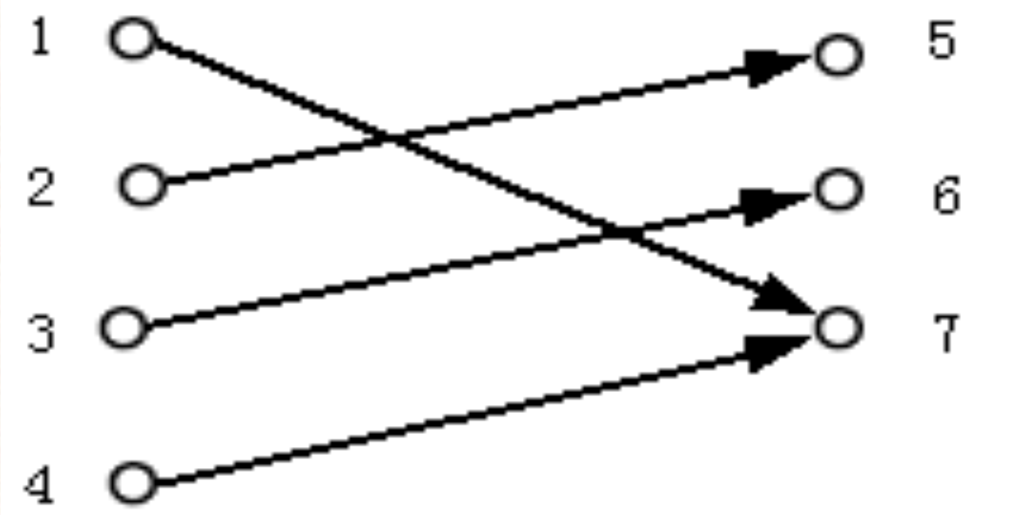
如果$< x_i, y_j > \in R$，则自结点x_i向结点y_j做一有向弧，箭头指向y_j；如果 $< x_i, y_j > \notin R$，则自结点x_i到结点y_j之间不做有向弧。



见P109页例题7、8。

例 A={1，2，3，4}，B={5，6，7}，R={<1，7>，<2，5>，<3，6>，<4，7>}，作出R的关系图。

解 R的关系图，如图所示：

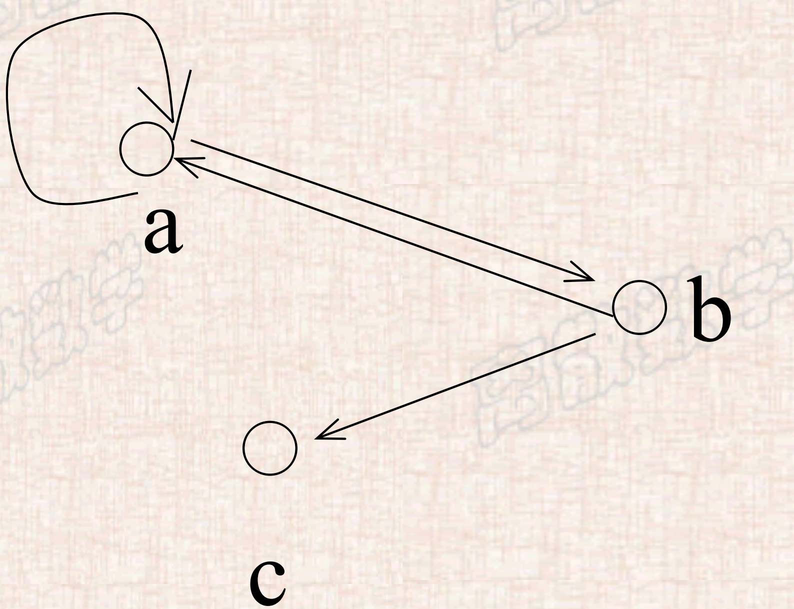


定义在集合A上的关系图有所不同

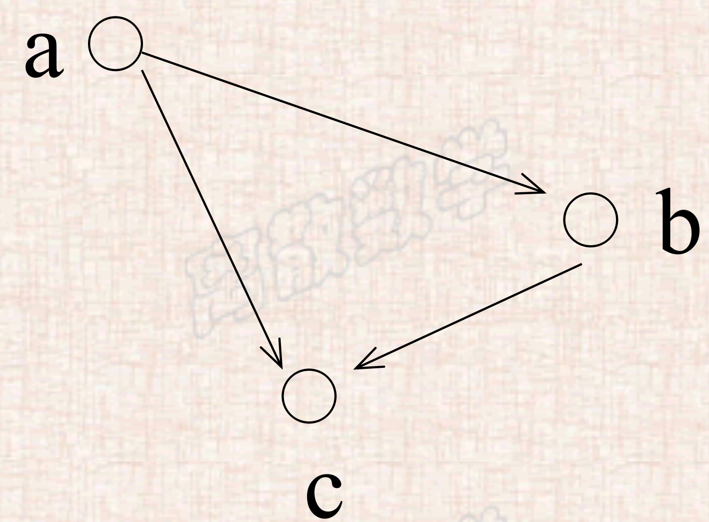
例如, A={a,b,c},

R1={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>},

R2={<a,b>,<a,c>,<b,c>}, 则关系图如下：



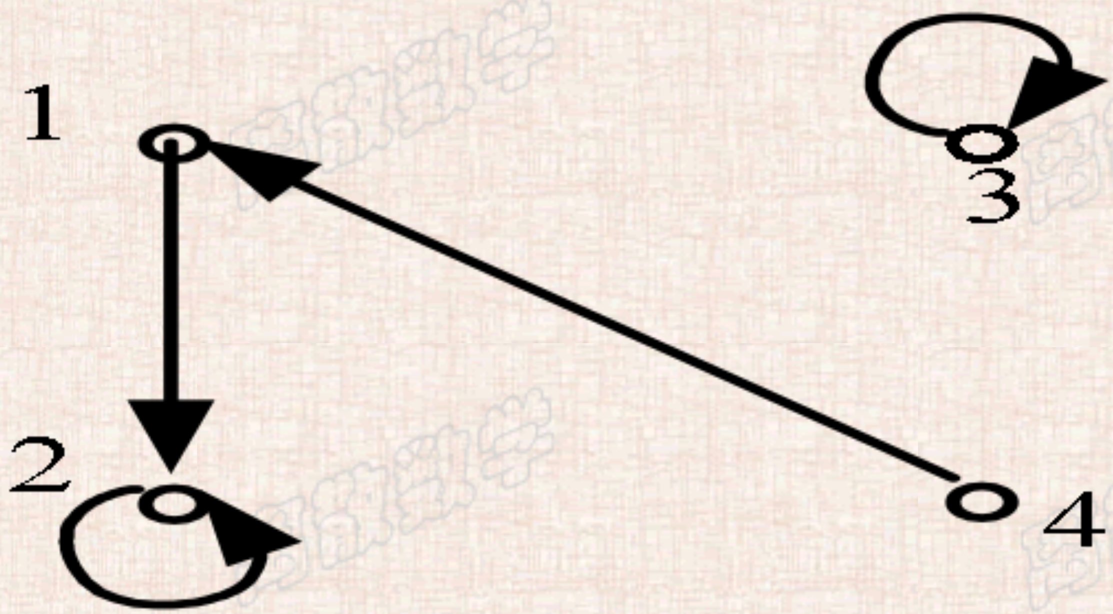
G_{R1}



G_{R2}

练习：　设A={1，2，3，4}，R={<1，2>，<2，2>，<3，3>，<4，1>}。画出A上的关系图和关系矩阵。

解　A上的关系图如图所示。



需要指出：

从X到Y的关系R是$X \times Y$ 的子集，即$R \subseteq X \times Y$，
而$X \times Y \subseteq (X \cup Y) \times (X \cup Y)$
所以 $R \subseteq (X \cup Y) \times (X \cup Y)$
令$Z = X \cup Y$，则$R \subseteq Z \times Z$
因此，我们今后通常限于讨论同一集合上的关系。

作业(3-5)

P109 (2)

(5) b) d) 给出关系图和关系矩阵

3–6 关系的性质

(1)　自反性(reflexivity)

(2)　反自反性(irreflexivity)

(3)　对称性(symmetry)

(4)　反对称性(antisymmetry)

(5)　传递性(transitivity)

3-6.1自反性(reflexivity)

定义3-6.1（自反性reflexivity）：设R为定义在集合X上的二元关系(即$R \subseteq X \times X$), 如果对于每一个$x \in X$，有xRx ($<x,x> \in R$)，则称二元关系R是自反的。

R在X上是自反的 $\Leftrightarrow$

$$(\forall x)(x \in X \rightarrow xRx)$$

R在X上不是自反的 $\Leftrightarrow$

$$(\exists x)(x \in X \wedge <x,x> \notin R)。$$

定理： R是自反的$\Leftrightarrow I_X \subseteq R$

$\Leftrightarrow M_R$主对角线上的元素全为1

$\Leftrightarrow G_R$的每个顶点处均有环。

自反性(举例)：

平面上三角形的全等关系，

实数集中实数的小于等于关系，

幂集上的集合的相等、包含关系，

命题集合上的命题的等价、蕴含关系。

3-6.2 对称性(symmetry)

定义3-6.2（对称性symmetry）：

设R为定义在集合X上的二元关系，如果对于每个 $x,y\in X$，**每当 xRy，就有 yRx**，则称集合X上的关系R是对称的。

R在X上对称 $\Leftrightarrow$

$$(\forall x)(\forall y)(x\in X\wedge y\in X\wedge xRy\rightarrow yRx).$$

R在X上不对称 $\Leftrightarrow$

$$(\exists x)(\exists y)(x\in X\wedge y\in X\wedge xRy\wedge y\not R x)$$

定理： R是对称的$\Leftrightarrow$ M_R是对称的

$\Leftrightarrow$ G_R的任何两个顶点之间若有边, 则必有两条方向相反的有向边.

对称性(举例)：

平面上三角形的相似关系,

人群中人之间的同学、同事、邻居关系,

幂集中集合相等的关系。

命题集合上的命题的等价关系。

例题：设A={2，3，5，7}，R={<x，y>|(x-y)/2是整数}，验证R在A上是自反的和对称的。

解法1：列举法

R={<2，2>，<3，3>，<3，5>，<3，7>，<5，3>，<5，5>，<5，7>，<7，3>，<7，5>，<7，7>}

满足自反性和对称性。

解法2：根据定义：

对于任意的x∈A，（x-x）/2=0是整数，即<x,x>∈R，故R是自反滴。

再证对称性。如果<x,y>∈R,要证<y,x>∈R

3-6.3 传递性(transitivity)

定义3-6.3（传递性transitivity）：设R为定义在集合X上的二元关系, 如果对于任意的$x,y,z \in X$, 每当xRy， yRz 时就有xRz，称关系R在X上是传递的。

R在X上是传递的$\Leftrightarrow$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$$

R不传递$\Leftrightarrow$

$$(\exists x)(\exists y)(\exists z)(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge xRy \wedge yRz \wedge x \not R z)$$。

定理： R是传递的

$\Leftrightarrow$ 在G_R中, $\forall x_i\ \forall x_j\ \forall x_k (i \neq j \neq k)$, 若有有向边$\langle x_i, x_j \rangle$和$\langle x_j, x_k \rangle$, 则必有$\langle x_i, x_k \rangle$ 。

传递性(举例)：

实数集中的实数之间的小于等于、小于、等于关系;

幂集上的集合之间的包含、真包含关系;

命题集合上的命题的等价、蕴含关系。

人群中人之间的同姓关系。

3-6.4 反自反性(irreflexivity)

定义3-6.4（反自反性irreflexivity）：设R为定义在集合X上二元关系，如果**对于每一个$x \in X$，有$\langle x,x\rangle \notin R$**，则称二元关系R是反自反的。

R在X上是反自反的 $\Leftrightarrow$

$$(\forall x)(x \in X \rightarrow \langle x,x\rangle \notin R)。$$

R在X上不是反自反的 $\Leftrightarrow$

$$(\exists x)(x \in X \wedge xRx)$$

定理： R是反自反的$\Leftrightarrow I_A \cap R=\varnothing$

$\Leftrightarrow M_R$主对角线上的元素全为0

$\Leftrightarrow G_R$的每个顶点处均无自回路（无环）。

反自反性(举例)：

数的大于关系，幂集上的集合之间的真包含关系。

注意：不是自反不一定是反自反的。

即存在有关系既不是自反的也不是反自反的。

3-6.5 反对称性(antisymmetry)

定义3-6.5（反对称性antisymmetry）：设R是集合X上的二元关系,如果对于每个x,y∈X,**每当 xRy 和yRx，必有x=y**，则称集合X上的关系R是反对称的。

R是反对称的⇔

$(\forall x)(\forall y)(x\in X\wedge y\in X\wedge xRy \wedge yRx\rightarrow x=y)$

$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)(x\in X\wedge y\in X\wedge x\neq y \wedge xRy \rightarrow y\not R x)$.

R不是反对称⇔

$(\exists x)(\exists y)(x\in X \wedge y\in X \wedge xRy \wedge yRx \wedge x\neq y)$

定理：R是反对称的

$\Leftrightarrow$ 在M_R中, $\forall x_i \forall x_j(i\neq j \wedge r_{ij}=1\rightarrow r_{ji}=0)$

$\Leftrightarrow$ 在G_R中，$\forall x_i \ \forall x_j \ (i\neq j)$，若有有向边$<x_i,x_j>$, 则必没有$<x_j,x_i>$。

反对称性(举例)：

实数集中的小于等于关系、整数的整除关系，集合的包含关系、命题的蕴含关系。

注意：不是对称的不一定反对称；可能有某种关系即是对称的又是反对称的。

例如：$A=\{1,2,3\}$,

$S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$

S在A上即是对称的又是反对称的。

$N=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$

N在A上即不是对称的又不是反对称的。

关系性质的判定

1. 自反性的判定方法

定理　设R是A上的二元关系，则R在A上是自反的当且仅当$I_A \subseteq R$。

证明　先证必要性。

任取$<x, x> \in I_A$，由于R在A上是自反的，则有$<x, x> \in R$

从而证明了$I_A \subseteq R$。

再证充分性。任取$x \in A$，有

$x \in A \Rightarrow <x, x> \in I_A \Rightarrow <x, x> \in R$

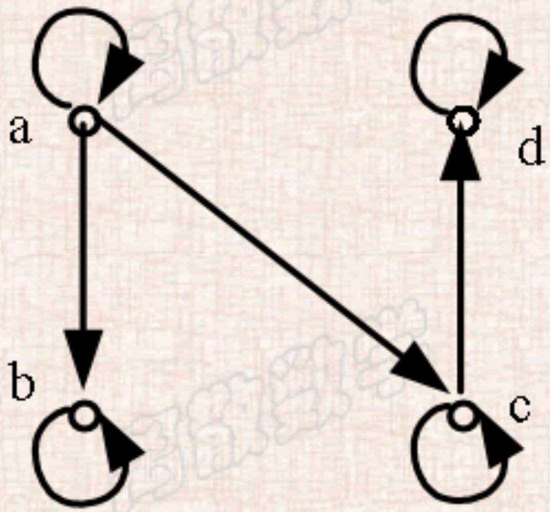
因此，R在A上是自反的。

1. 自反性的判定方法

R的关系矩阵为：

$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\1&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

R的关系图为：



2. 反自反性的判定方法

定理 设R是A上的二元关系，则R在A上是反自反的当且仅当$I_A \cap R=\varnothing$。

例 设集合A={a，b，c，d}，A上的二元关系R={<a，b>，<a，c>，<b，a>，<b，c>，<c，a>，<c，d>，<d，c>}，讨论R的性质，写出R的关系矩阵，画出R的关系图。

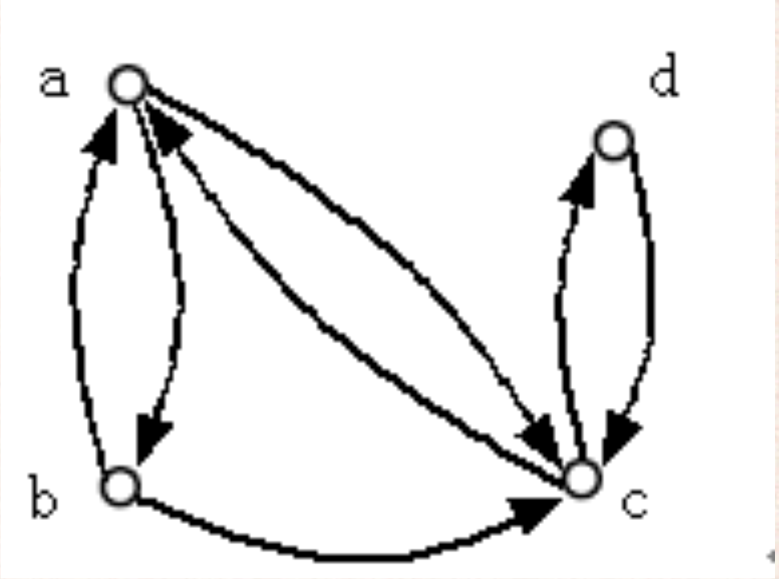
解 由于<a，a>，<b，b>，<c，c>，<d，d>$\notin$R，即$I_A \cap R=\varnothing$，所以R是反自反的。

2. 反自反性的判定方法

R的关系矩阵为：

R的关系图为：

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



3．对称性的判定方法

定理　设R是A上的二元关系，则R在A上是对称的当且仅当$R=R^{-1}$。

例　设集合A={a，b，c，d}，A上的二元关系R={<a，b>，<a，c>，<b，a>，<b，c>，<c，a>，<c，b>，<c，d>，<d，c>，<d，d>}，讨论R的性质，写出R的关系矩阵，画出R的关系图。

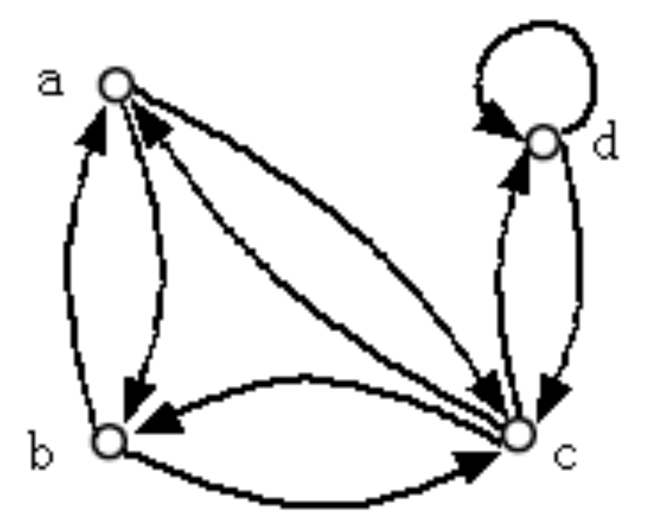
解　因为$\langle a, a\rangle \notin R$，所以R不是自反的。由于$\langle d, d\rangle \in R$，即$I_A \cap R \neq \varnothing$，所以R不是反自反的。

R^{-1}={<a，b>，<a，c>，<b，a>，<b，c>，<c，a>，<c，b>，<c，d>，<d，c>，<d，d>}，$R=R^{-1}$，由上面的定理可知，关系R是对称的。

3．对称性的判定方法

R的关系矩阵为：　　　　　　R的关系图为：

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



4. 反对称性的判定方法

定理 设R是A上的二元关系，则R在A上是反对称的当且仅当$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$。

例 设集合A={a，b，c，d}，A上的二元关系R={<a，c>，<b，a>，<b，c>，<c，d>，<d，a>，<d，d>}，讨论R的性质，写出R的关系矩阵，画出R的关系图。

解 因为$\langle a, a\rangle\notin R$，所以R不是自反的。

由于$\langle d, d\rangle\in R$，即$I_A\cap R\neq\varnothing$，所以R不是反自反的。

因为$R^{-1}=\{\langle a, b\rangle, \langle a, d\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle d, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$，$R\neq R^{-1}$，所以关系R不是对称的。

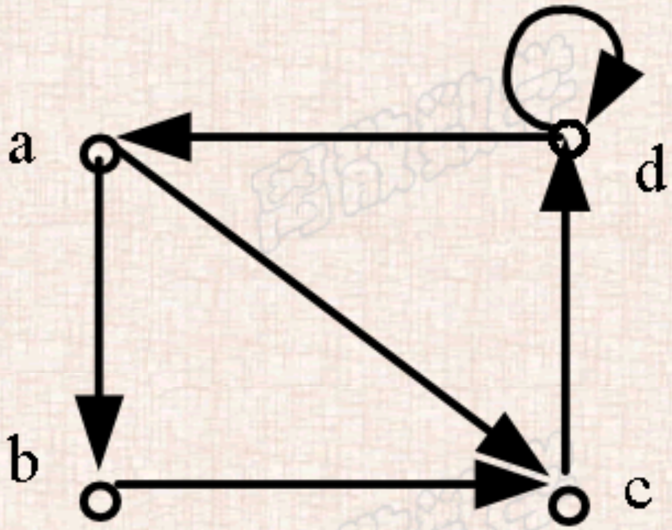
$R\cap R^{-1}=\{\langle d, d\rangle\}\subseteq I_A$），由上面的定理可知，R是反对称的。

4. 反对称性的判定方法

R的关系矩阵为：

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

R的关系图为：



5. 传递性的判定方法

定理 设R是A上的二元关系，则R在A上是传递的当且仅当 $R\circ R \subseteq R$。

$R=\{<1,2>,<2,1>\}$ $R\circ R=\{<1,1>,<2,2>\}$

定理 设集合$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，R是A上的二元关系，R的关系矩阵为$M_R$，令$M=M_R\circ M_R$，则R在A上是传递的当且仅当矩阵M的第i行，第j列元素为1时，M_R的第i行，第j列元素必为1。

定义3-6.5

(1) 若关系R是自反的，当且仅当在关系矩阵中，对角线上的所有元素都是1，在关系图上每个结点都有环。

(2) 若关系R是对称的，当且仅当在关系矩阵是对称的，且在关系图上，任两个结点间若有定向弧线，必是成对出现的。

(3) 若关系R是反自反的，当且仅当在关系矩阵中，对角线上的所有元素都是0，在关系图上每个结点都无环。

(4) 若关系R是反对称的，当且仅当在关系矩阵中，以主对角线对称的元素不能同时为1，在关系图上两个结点间的定向弧线不可能成对出现。

(1)、(2)的证明过程见P-112页例题4、5。

3-6.6 举例

例1：在 N = {0,1,2,…} 上：

$\leq=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x\leq y\}$

自反,反对称,传递

$\geq=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x\geq y\}$

自反,反对称,传递

$<=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x<y\}$

反自反,反对称,传递

接上页

$>=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x>y\}$ (大于关系)

反自反,反对称,传递

$D=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x|y\}$ (整除关系)

反对称,传递($\neg 0|0$)

$I_N=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x=y\}$ (恒等关系)

自反,对称,反对称,传递

$E_N=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\}=N\times N$ (全域关系)

自反,对称,传递

练习：判断以下关系所具有的性质。

$A=\{a,b,c\}$

$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle\}$,

$R_2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$,

$R_3=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,c\rangle\}$,

$R_4=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,c\rangle\}$,

$R_5=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$,

$R_6=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,a\rangle\}$,

$R_7=\varnothing$

解答:

$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle\}$反对称,传递

$R_2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$反对称

$R_3=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,c\rangle\}$自反,对称,传递

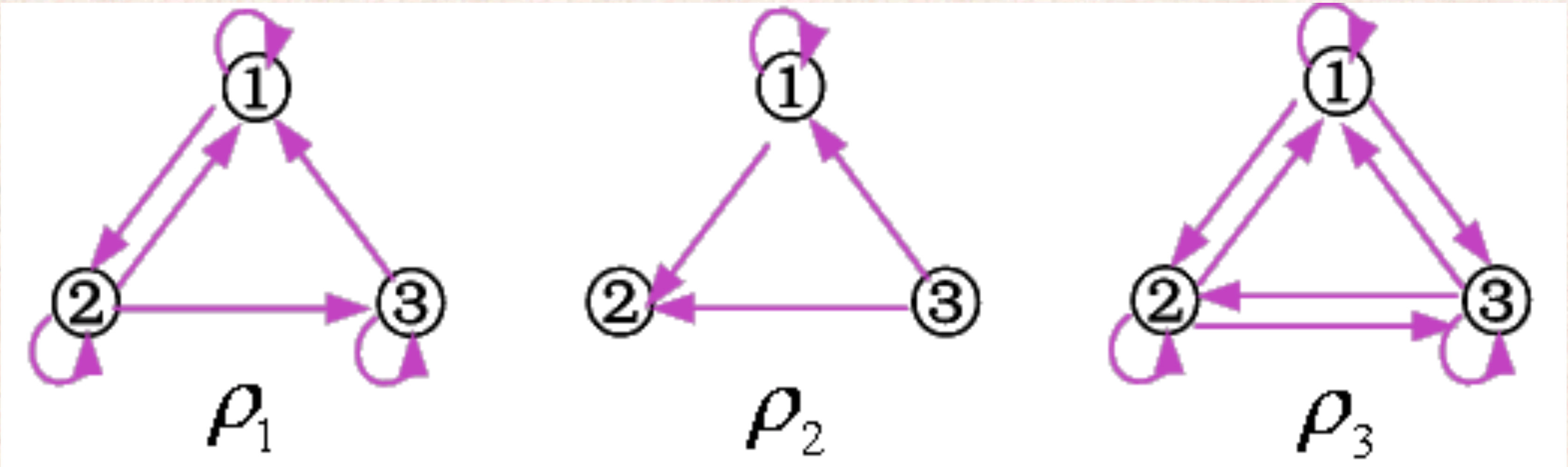
$R_4=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,c\rangle\}$对称

$R_5=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$自反,反对称,传递

$R_6=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,a\rangle\}$

$R_6=\varnothing$ （空关系）反自反，对称，传递，反对称.

练习 设 $A=\{1,2,3\}$，下面分别给出集合A上三个关系的关系图，试判断它们的性质。



解 （1） ρ_1 是自反的，非对称，不是反对称，不可传递

$\langle 1,2\rangle \in \rho_1, \langle 2,3\rangle \in \rho_1$ 但 $\langle 1,3\rangle \notin \rho_1$.

（2） ρ_2 非自反，也不是反自反，非对称，反对称，可传递。

（3） ρ_3 是自反的，对称的，可传递的，不是反自反，也不是反对称。

作业(3-6)：

P113 （3）

（6）

3-7 复合关系和逆关系

1、复合关系的定义

定义3-7.1 设R为X到Y的二元关系，S为Y到Z的二元关系，则R°S称为R和S的复合关系（*compositions*），表示为

$$R\circ S=\{\langle x,z\rangle \mid x\in X\wedge z\in Z\wedge \exists y(y\in Y\wedge \langle x,y\rangle\in R\wedge \langle y,z\rangle\in R)\}$$

从R和S,求R°S称为关系的合成运算。

例 1 设 $A = B = C$ 是所有人的集合

$$\rho_1 = \{\langle a, b\rangle \mid a, b \in A, a\text{是}b\text{的兄弟}\}$$

$$\rho_2 = \{\langle b, c\rangle \mid b, c \in A, b\text{是}c\text{的父亲}\}$$

于是复合关系

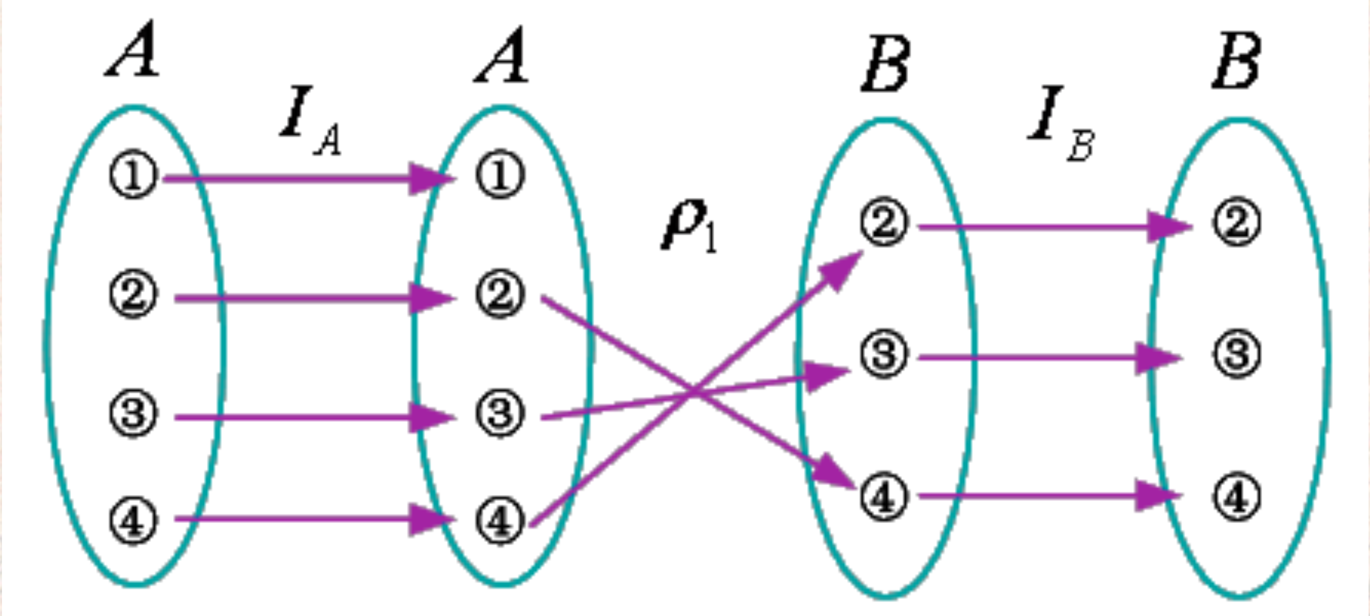
$$\rho_1 \circ \rho_2 = \{\langle a, c\rangle \mid a, c \in A, a\text{是}c\text{的叔伯}\}$$

2. 关系复合运算的性质

定理 设 ρ 是由集合A到B的关系，则

$$I_A \circ \rho = \rho \circ I_B = \rho$$

例2 以前例中的关系ρ_1 为例，$\rho_1 = \{\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,2\rangle\}$



从关系图，可得 $I_A \cdot \rho_1 = \rho_1$，$\rho_1 \cdot I_B = \rho_1$

定理 设 ρ_1 是由A到B的关系，ρ_2是由B到C的关系，则有

(1) $dom(\rho_1 \circ \rho_2) \subseteq dom\,\rho_1$

(2) $ran(\rho_1 \circ \rho_2) \subseteq ran\,\rho_2$

(3) 若$ran\,\rho_1 \cap dom\,\rho_2 = \phi$,则$\rho_1 \circ \rho_2 = \phi$

证: (3)反设 $\rho_1 \circ \rho_2 \neq \phi$,

则必存在$x \in A, z \in C$, 使$x\rho_1 \circ \rho_2 z$，从而 $\exists y \in B$,

使 $x\rho_1 y, y\rho_2 z$, 故 $y \in ran\,\rho_1$,且$y \in dom\,\rho_2$,

所以 $y \in ran\,\rho_1 \cap dom\,\rho_2$ ，这就与

$ran\,\rho_1 \cap dom\,\rho_2) = \phi$ 矛盾。

定理

(1) 设 ρ_1是由A到B的关系，ρ_2是由B到C的关系，ρ_3是由C到D的关系，则有

$$(\rho_1 \circ \rho_2) \circ \rho_3 = \rho_1 \circ (\rho_2 \circ \rho_3)$$

(2)设 ρ_1是由A到B的关系，ρ_2，ρ_3是由B到C的关系，

则有 $\rho_1 \circ (\rho_2 \cup \rho_3) = (\rho_1 \circ \rho_2) \cup (\rho_1 \circ \rho_3)$

(3)设 ρ_1，ρ_2是由A到B的关系，ρ_3是由B到C的关系，

则有 $(\rho_1 \cup \rho_2) \circ \rho_3 = (\rho_1 \circ \rho_3) \cup (\rho_2 \circ \rho_3)$

例3 设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,3,4\}$，

$C=\{1,2,3\}$，$D=\{4,5,6\}$.

*A*到*B*的关系 $\rho_1=\{\langle 2,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

*B*到*C*的关系 $\rho_2=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,3\rangle\}$

*C*到*D*的关系 $\rho_3=\{\langle 2,4\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 3,6\rangle\}$

则*A*到*C*的关系 $\rho_1\circ\rho_2=\{\langle 2,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 4,1\rangle\}$

因此 $(\rho_1\circ\rho_2)\circ\rho_3=\{\langle 2,6\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,5\rangle\}$

$\rho_2\circ\rho_3=\{\langle 2,5\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 4,6\rangle\}$

因此 $\rho_1\circ(\rho_2\circ\rho_3)=\{\langle 2,6\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,5\rangle\}$

所以 $(\rho_1\circ\rho_2)\circ\rho_3=\rho_1\circ(\rho_2\circ\rho_3)$

由复合关系满足结合律，可以把关系R本身所组成的复合关系写成：

$R \circ R$，　$R \circ R \circ R$，　…，　$R \circ R \circ \ldots \circ R$(m个)，

分别记作

$R^{(2)}$，　$R^{(3)}$，　…，　$R^{(m)}$。

可以证明复合关系不满足交换律。

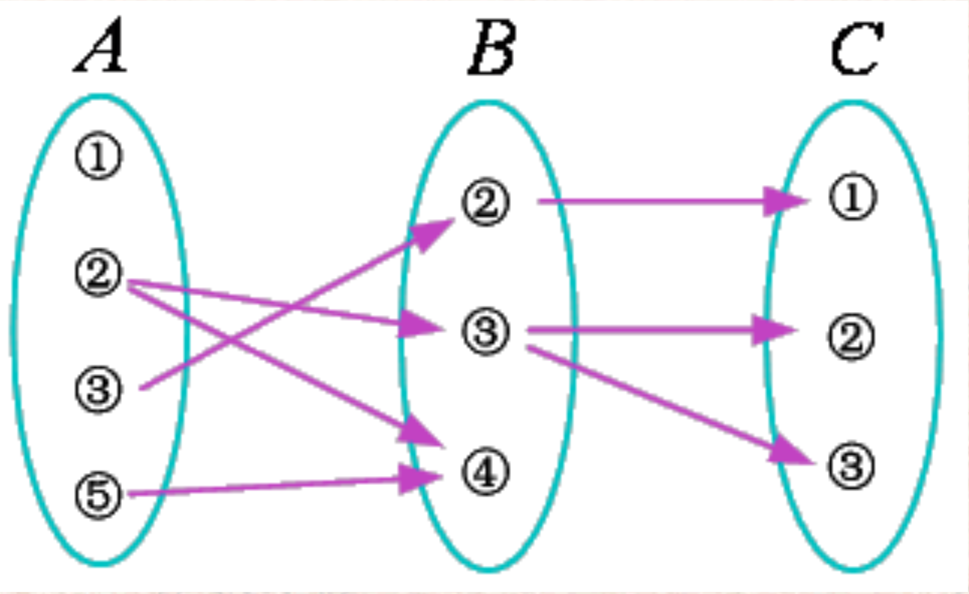
$R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1$

3. 求复合关系的几种方法

(1) 根据复合关系的定义求复合关系

例3中求复合关系采用的就是这种方法。

又例如，下面的关系图给出了从集合A到B的关系 R_1 和从B到C的关系 R_2



$$R_1 \circ R_2 = \{\langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle\}$$

- 关系矩阵的乘积

对两个关系矩阵求其乘积时，其运算法则与一般矩阵的乘法是相同的，但其中的加法运算和乘法运算应改为布尔加和布尔乘。

例4 设 M_1 和 M_2 是两个关系矩阵

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$M_1 \cdot M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 复合关系的关系矩阵

定理 设A、B、C均是有限集，R_1是一由A到B的关系,R_2是一由B到C的关系，它们的关系矩阵分别为 M_{R_1}和 M_{R_2}，则复合关系$R_1 \circ R_2$的关系矩阵

$$M_{R_1 \circ R_2} = M_{R_1} \cdot M_{R_2}$$

例5

设有集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,3,4\}$，$C=\{1,2,3\}$

A到B的关系 $R_1=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

B到C的关系 $R_2=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,3\rangle\}$

则 $R_1\circ R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle\}$

$$M_{R_1}=\begin{array}{c|ccc} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\qquad M_{R_2}=\begin{array}{c|ccc} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\qquad M_{R_1\circ R_2}=\begin{array}{c|ccc} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

与例4比较得 $M_{R_1\circ R_2}=M_{R_1}\cdot M_{R_2}$

例6 设 $A=\{a,b,c,d\}$ ，A上的关系

$$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle b,c\rangle\}$$

试求$R^{(2)}$和$R^{(3)}$。

解 作出的关系矩阵

$$M_R=\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

则

$$M_{R^{(2)}}=M_R\cdot M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因此 $R^{(2)}=\{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$

又 $R^{(3)}=R\circ R^{(2)}$，所以

$$M_{R^{(3)}}=M_R\cdot M_{R^{(2)}}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

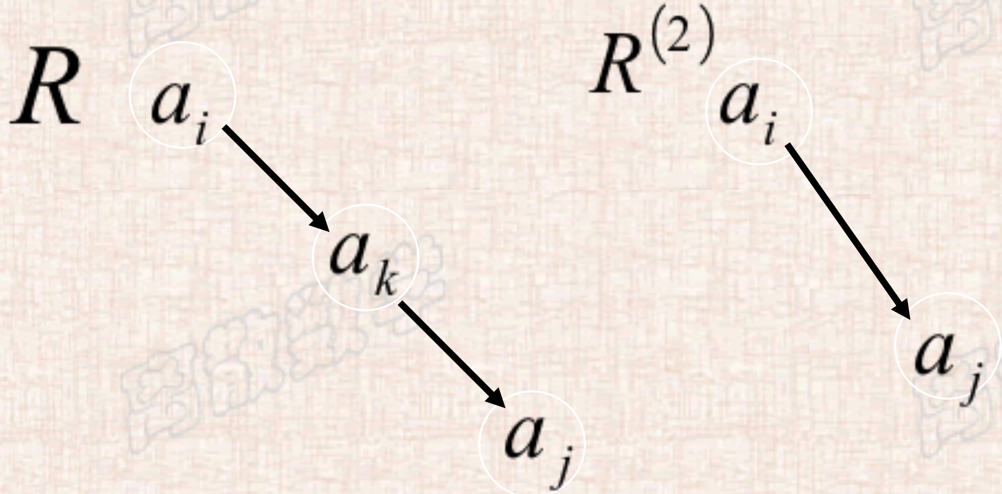
因此

$$R^{(3)}=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$$

(3) 利用关系图求复合关系 $R^{(n)}$

设 R 是有限集A上的关系，则复合关系$R^{(2)}$也是A上的关系，由复合关系的定义，对于任意的 $a_i, a_j \in A$，当且 仅当 $a_k \in A$ 存在，使得 $a_i R a_k, a_k R a_j$时，有$a_i R^{(2)} a_j$。

反映在关系图上，这意味着，当且仅当 在 R 的关系图中有某一结点 a_k 存在，使得有边由a_i指向a_k且 有边由 指向a_k时，a_j在$R^{(2)}$的关系图中有边从a_i 指向a_j 。



类似地，对于任意正整数n，当且仅当在 R 的关系图中存在n-1个结点 $a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots, a_{k_{n-1}}$,使得有边由 a_i 指向 a_{k_1},由 a_{k_1}指向 a_{k_2}，…由 $a_{k_{n-1}}$指向 a_j 时，在 $R^{(n)}$的关系图中，有边由结点 a_i 指向 a_j 。

根据 R 的关系图构造出 $R^{(n)}$的关系图：

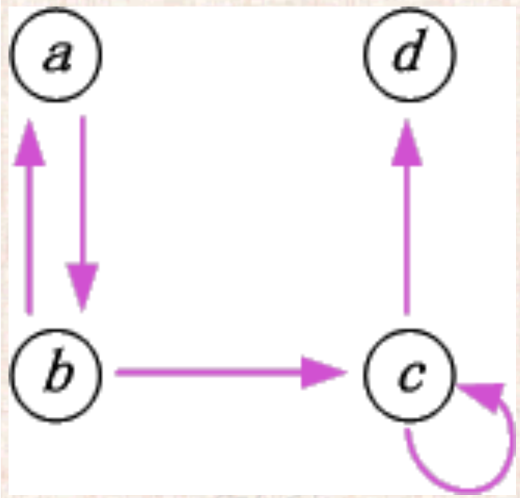
对于 R 的关系图中的每一结点 a_i，找出从 a_i 经过长为***n***的路能够到达的结点，这些结点在 $R^{(n)}$的关系图中，边必须由 a_i指向它们。

例7　试利用构造$R^{(2)}$和$R^{(3)}$的关系图的方法求例8中的 $R^{(2)}$ 和 $R^{(3)}$。例中

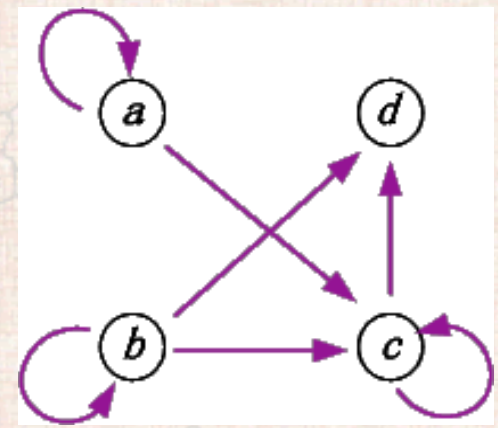
$$R = \{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle b,c\rangle\}$$

解 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle b,c\rangle\}$

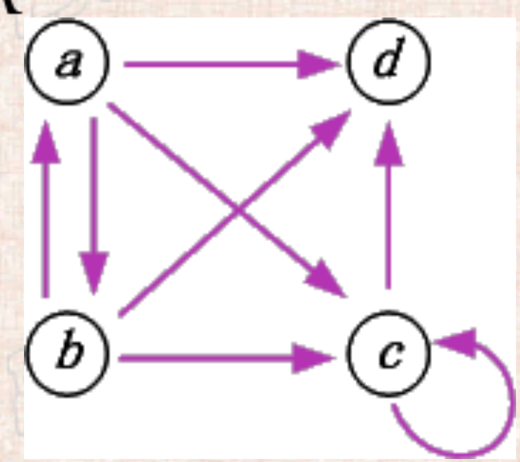
（1）先作出 R 的关系图



（2）构造 $R^{(2)}$ 的关系图。在R的关系图中寻找长为2的路。

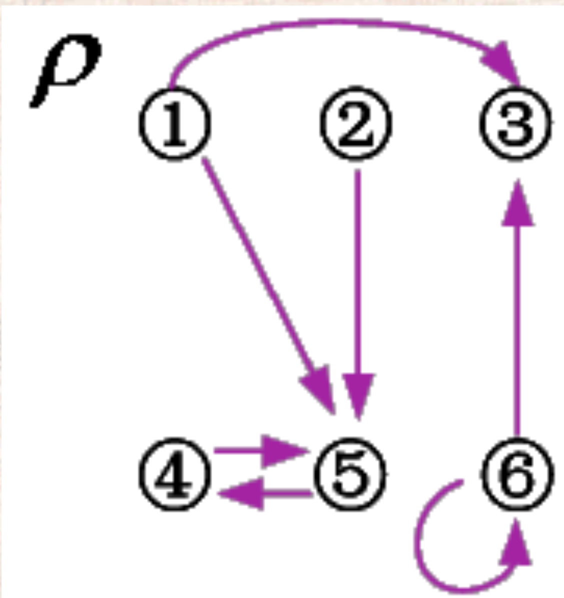


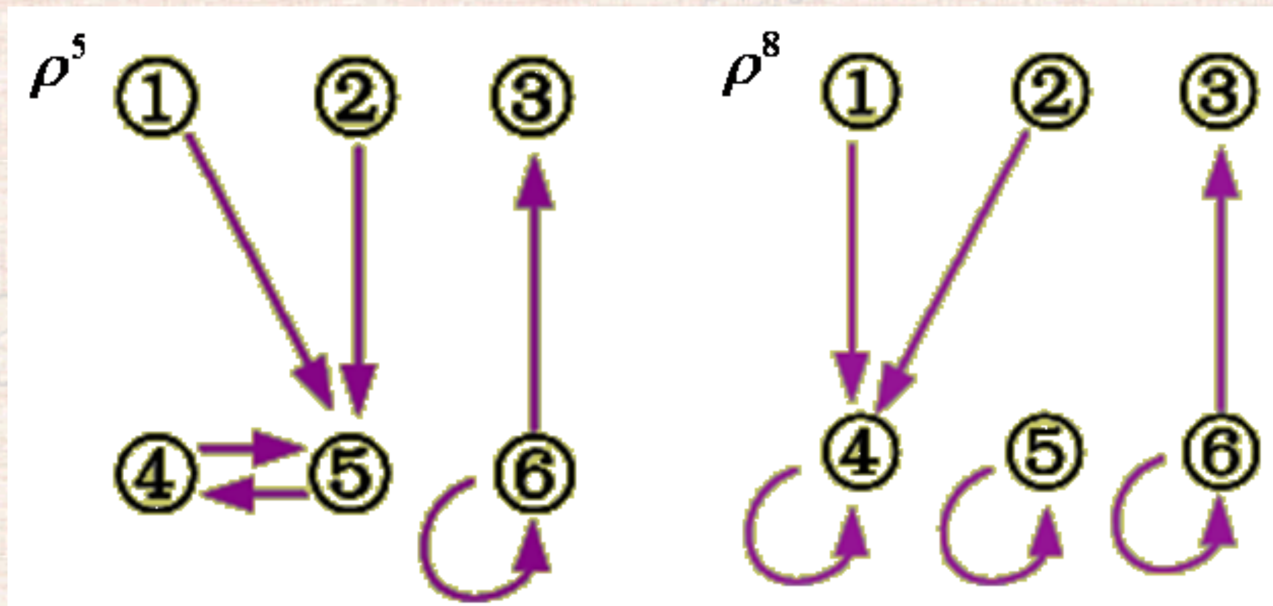
（3）构造 $R^{(3)}$ 的关系图。在R的关系图中寻找长为3的路.



（4）根据 $R^{(2)}$ 和 $R^{(3)}$ 的关系图直接写出 $R^{(2)}$ 和 $R^{(3)}$ 中的序偶.

例8. 下图给出了集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ 上的关系 ρ 的关系图，试画出关系 ρ^5 和 ρ^8 的关系图。





定义3-7.2 设R为X到Y的二元关系，如将R中每一序偶的元素顺序互换，所得到的集合称为R的**逆关系**或**逆**（*converse*），记作R^c，即：

$$R^c = \{\langle y,x\rangle \mid \langle x,y\rangle \in R\}$$

定理3-7.1 设R，R_1和R_2都是从A到B的二元关系，则下列各式成立：

（a） $(R_1 \cup R_2)^c = R_1^c \cup R_2^c$

（b） $(R_1 \cap R_2)^c = R_1^c \cap R_2^c$

（c） $(A\times B)^c = B\times A$

（d） $(\overline{R})^c = \overline{R^c}$ 这里$\overline{R} = A\times B - R$

（e） $(R_1 - R_2)^c = R_1^c - R_2^c$

■证明思路：见P-117页

■

例: 设 $R=\{ \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \}$,

$S=\{ \langle b,e\rangle,\langle d,c\rangle \}$.

求: (1) R^c，S^c.

(2) $R\circ S$, $S\circ R$

解: (1) $R^c = \{\langle b,a\rangle,\langle d,c\rangle\}$

$S^c = \{\langle e,b\rangle,\langle c,d\rangle\}$.

(2) $R\circ S=\{\langle a,e\rangle ,\langle c,c\rangle\}$

$S\circ R=\{\langle d,d\rangle\}$.

例:（书上的例题2，第115页）

定理3-7.2 设T为从X到Y的二元关系，S为从Y到Z的二元关系，证明

$$(T \circ S)^c = S^c \circ T^c$$

■证明思路：$<z, x> \in (T \circ S)^c \Leftrightarrow <x,z> \in T \circ S$

$\Leftrightarrow \exists y(y \in Y \wedge <x,y> \in T \wedge <y,z> \in S)$

$\Leftrightarrow \exists y(y \in Y \wedge <y,x> \in T^c \wedge <z,y> \in S^c)$

$\Leftrightarrow \exists y(y \in Y \wedge <z,y> \in S^c \wedge <y,x> \in T^c)$

$\Leftrightarrow <z, x> \in S^c \circ T^c$ ■

定理3-7.3　设R为X上的二元关系，则

a) R是对称的当且仅当$R=R^c$

b) R是反对称的当且仅当$R \cap R^c \subseteq I_X$

▣ a)证明思路：先证 R是对称的 $\Rightarrow R=R^c$

若R是对称的, $\langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R^c$

$\Rightarrow R=R^c$

再证 $R=R^c \Rightarrow$ R是对称的

若$R=R^c$，$\langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R^c \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R$

$\Rightarrow$ R是对称的　▣

见P-118页例题4。

练习: 设 $A=\{a,b,c\}$,

$R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>\}$,

$R_2=\{<a,b>,<a,c>,<b,c>\}$,

用M_{R1}, M_{R2}确定M_{R1^c}, M_{R2^c}, $M_{R1\circ R1}$, $M_{R1\circ R2}$, $M_{R2\circ R1}$, 从而求出它们的集合表达式.

$$M_{R1}= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{R1c}= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R2}= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{R2c}= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R1\circ R2} = M_{R1} \bullet M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_1 \circ R_2 = \{<a,b>,<a,c>,<b,b>,<b,c>\}.$

$$M_{R1\circ R1} = M_{R1} \bullet M_{R1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_1 \circ R_1 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,b\rangle\}$.

$$M_{R2\circ R1} = M_{R2} \bullet M_{R1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_2 \circ R_1 = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle\}$.

解: $R_1^c = \{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,b>\}$

$R_2^c = \{<b,a>,<c,a>,<c,b>\}$

$R_1 \circ R_1 =$

$\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,a>,<b,b>\}.$

$R_1 \circ R_2 = \{<a,b>,<a,c>,<b,b>,<b,c>\}.$

$R_2 \circ R_1 = \{<a,b>,<a,c>\}.$

作业(3-7)：

P118 (1)

(2)

(4)

3–8 关系的闭包运算

3.8.1 关系的闭包的概念(The definitions of closures of relations)

例1. 设 R 是由 *A*上的关系， *A*={1,2,3},

$$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$

(1)求*A*上的关系 R'使得$R\subseteq R$且 R'是自反的。
(2)这样的关系共有多少个?
解:

定义3-8.1 设R是集合X上二元关系，如果有另一个二元关系R’满足：

(1) R’是自反（对称的，传递的）。

(2) $R' \supseteq R$ (或$R \subseteq R'$)。

(3) 对于任何自反的(对称的，传递的)关系R”，如果有$R'' \supseteq R$，就有$R'' \supseteq R'$。则称R’为R的 **自反闭包（对称闭包，传递闭包）**，分别记为：r(R), (s(R)，t(R))

上述定义的含义：R’是包含R的“最小”关系，如果还有包含R的关系R”，那么，R’比R”要小。

定理3-8.1 设R是X上的二元关系，那么

a）R是自反的，当且仅当 $r(R) = R$ 。

b）R是对称的，当且仅当 $s(R) = R$ 。

c）R是传递的，当且仅当 $t(R) = R$ 。

■ a)证明思路：先证R自反 $\Rightarrow$ $r(R) = R$

若R是自反的，因为 $R \supseteq R$ ，且对于任何包含R的自反关系R''，都有 $R'' \supseteq R$ ，故R就是满足自反闭包的定义，即：$r(R) = R$

再证 $r(R) = R$ $\Rightarrow$ R自反

若 $r(R) = R$ $\Rightarrow$ 根据r(R)的定义， r(R)自反推出R自反。 ■

3.8.2关系的闭包的求法(How to find the closures of relations)

1.由定义求 R的闭包

定理3-8.2 设R是集合X上的二元关系，则

$$r(R) = R \cup I_X$$

- 证明思路：先证$I_X \cup R$在X上自反

因为$<x,x> \in I_X$，所以$<x,x> \in I_X \cup R$，得证。

再证 $I_X \cup R$是最小的包含R的自反关系

又 $R \subseteq I_X \cup R$，若还有自反关系R''，且$R \subseteq R''$,由自反性知

$I_X \subseteq R''$,据r(R)的定义， $r(R)=I_X \cup R$。 ▪

定理3-8.3 设R是集合X上的二元关系，则

$s(R) = R\cup R^c$

- 证明思路：先证$R\cup R^c$在X上对称

$R \subseteq R\cup R^c$，若：$<x,y>\in R\cup R^c$，

则：$<x,y>\in R$，或$<x,y>\in R^c$。

即：$<y,x>\in R^c$，或$<y,x>\in R$。

故：$<y,x>\in R\cup R^c$。$R\cup R^c$对称性得证。

再证 $R\cup R^c$是最小的包含R的对称关系

$R \subseteq R\cup R^c$，若还有对称关系R”,且$R\subseteq R''$,

对任意的$<x,y>$，若：$<x,y>\in R\cup R^c$，

则：$<x,y>\in R$，或$<x,y>\in R^c$。

当 $<x,y>\in R$时，$<x,y>\in R''$;

当$<x,y>\in R^c$时，$<y,x>\in R$，$<y,x>\in R''$,

$<x,y>\in R''$;

综合以上了两种情况得：$R\cup R^c\subseteq R''$。

根据传递闭包的定义，得 $s(R) = R\cup R^c$。■

定理3-8.4 设R是X上的二元关系，则

$$t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i = R\cup R^2\cup R^3\cup \ldots$$

■ 证明思路：先证 $\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i \subseteq t(R)$

用归纳法：当i=1时，$R\subseteq t(R)$，关系式成立；

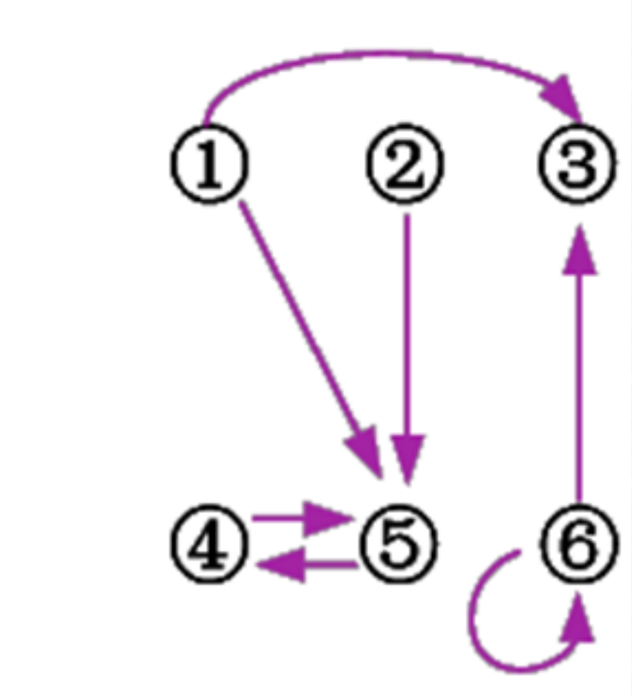
设当i=n(n>1)时，$R^n\subseteq t(R)$ 关系式成立；要证i=n+1时，$R^{n+1}\subseteq t(R)$ 关系式成立。$R^{n+1}=R^n\circ R$，存在$c\in X$，使得$<x,c>\in R^n$,$<c,y>\in R$,从而$<x,c>\in t(R)$, $<c,y>\in t(R)$,即$<x,y>\in t(R)$; 推得$R^{n+1}\subseteq t(R)$。归纳法证完。

再证 $t(R)\subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$ $\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i = R^+$

设$<x,y>\in R^+$，$<y,z>\in R^+$，必存在整数s和t，使得$<x,y>\in R^s$，$<y,z>\in R^t$，这样$<x,z>\in R^s\circ R^t$,即$<x,z>\in R^+$，所以R^+是传递的。根据t(R)的定义,结论得证。■

见P-121页例题1。

例.下图给出了集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$上的关系 R 的关系图，试画 $r(R)$、$s(R)$ 和 $t(R)$ 。



解: 由关系图知:

$$R=\{\langle 1,5\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 5,4\rangle,\langle 6,3\rangle,\langle 6,6\rangle\}$$

$$R=\{\langle 1,5\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 5,4\rangle,\langle 6,3\rangle,\langle 6,6\rangle\}$$

则 $r(R)= R\cup\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 5,5\rangle\}$

$$s(R)=R\cup\{\langle 5,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 5,2\rangle,\langle 3,6\rangle\}$$

$$R^{(2)}=\{\langle 1,4\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 6,3\rangle,\langle 6,6\rangle\}$$

$$R^{(3)}=\{\langle 1,5\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 5,4\rangle,\langle 6,3\rangle,\langle 6,6\rangle\}$$

$$R^{(4)}=\{\langle 1,4\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 6,3\rangle,\langle 6,6\rangle\}=R^{(2)}$$

$$R^{(5)}=R^{(3)}$$

$$R^{(6)}=R^{(2)}$$

$$\vdots$$

$$t(R)=\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 5,4\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 6,3\rangle,\langle 6,6\rangle\}$$

定理3-8.5 设X是含有n个元素的集合，R是X上二元关系，则存在一个正整数$k \le n$，使得

$$t(R)=\bigcup_{i=1}^{k} R^i = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^k$$

■ 证明思路：采用反证法(先做反正假设，再推出矛盾)。

设有$x_i,x_j \in X$,记$t(R)=R^+$，如果$\langle x_i,x_j\rangle \in R^+$,则存在整数$p>0$，使得$\langle x_i,x_j\rangle \in R^p$成立，即存在一个序列$e_1,e_2,\ldots,e_{p-1}$,满足$\langle x_i, e_1\rangle \in R,\langle e_1, e_2\rangle \in R,\ldots,\langle e_{p-1},x_j\rangle \in R$,

设满足上述条件的p大于n（反正假设）

则在序列$e_1,e_2,\ldots,e_{p-1}$中，必存在整数t和q,$0\le t<q\le p$,使得$e_t=e_q$(鸽笼原理),因此序列就成为

$\langle x_i, e_1\rangle \in R,\langle e_1, e_2\rangle \in R,\ldots, \langle e_{t-1},e_t\rangle \in R$；$\langle e_t,e_{q+1}\rangle \in R$，…, $\langle e_{p-1},x_j\rangle \in R$,“;”前有t个,“;”后有p-q个,令$k=t+p-q$,

使得$\langle x_i,x_j\rangle \in R^k$成立。但是$k=t+p-q=p-(q-t)<p$，矛盾。■

见P-123页例题2。

2. 利用关系矩阵求 R 的闭包

例3 设 $A=\{a,b,c,d\}$ ，A上的关系

$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$

求 $r(R),s(R),t(R)$。

解（1）

$$M_R=\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad M_{I_A}=\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

因为 $r(R) = R \cup I_A$

所以

$$M_{r(R)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

于是

$$r(R) = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,c\rangle, \langle c,d\rangle, \langle d,d\rangle\}$$

(2) 若 $\langle a_i, a_j \rangle \in R$，则 $\langle a_j, a_i \rangle \in R^C$；若 $\langle a_i, a_j \rangle \notin R$，则$\langle a_j, a_i \rangle \notin R^C$，即为若$M_R$中$r_{ij}=1$，则 M_{R^C}中 $r'_{ji}=1$

若 M_R中 $r_{ij}=0$，则M_{R^C} 中 $r'_{ji}=0$。这说明 M_{R^C}是 M_R 的转置矩阵。

根据 $s(R)=R\cup R^{C}, s(R)$ 的关系矩阵

$$M_{s(R)}=M_R+M_{R^C}$$

于是

$$M_{s(R)}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}=\begin{array}{c}\\a\\b\\c\\d\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}a&b&c&d\end{array}\\\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\end{array}$$

$$s(R)=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle\}$$

(3) 因为 $|A|=4$，所以 $t(R)=\bigcup_{i=1}^{4} R^{i}=R\cup R^{2}\cup R^{3}\cup R^{4}$

对任意 $\langle a,b\rangle \in A\times A$，只要 $\langle a,b\rangle$ 属于 R, R^{2}, R^{3}, R^{4} 中任何一个关系，则 $\langle a,b\rangle \in t(R)$，于是

$$M_{t(R)}=M_{R}+M_{R^{2}}+M_{R^{3}}+M_{R^{4}}$$

$$M_{R^{2}}=M_{R}\cdot M_{R}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M_{R^{3}}=M_{R}\cdot M_{R^{2}}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M_{R^4}=M_R\cdot M_{R^3}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M_{t(R)}=M_R+M_{R^2}+M_{R^3}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{array}{c}a\\b\\c\\d\end{array}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

于是

$$t(R)=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,d\rangle\}$$

求传递闭包的另一种方法：

当有限集X的元素较多时，矩阵运算很繁琐，Warshall 在1962年提出了R^+的一个有效算法如下：

（1）置新矩阵A:=M

（2）置i:=1

（3）对所有j如果A[j, i]=1，则对k=1,2,…,n

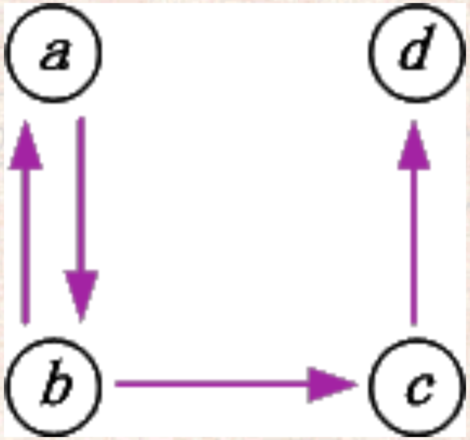
A[j,k]:=A[j,k]+A[i,k]

（4） i:= i+1

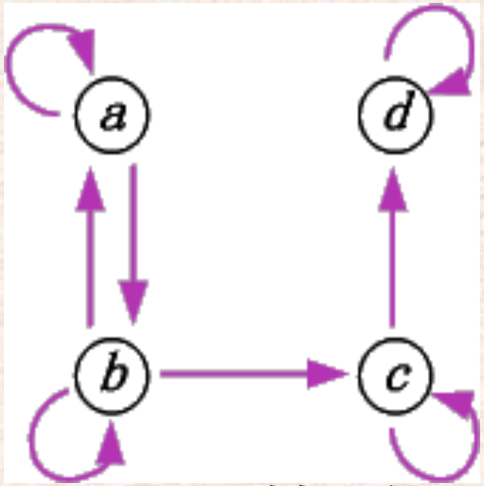
（5）如果 i≤ n,则转到步骤（3）,否则停止。

3.利用关系图求 R 的闭包

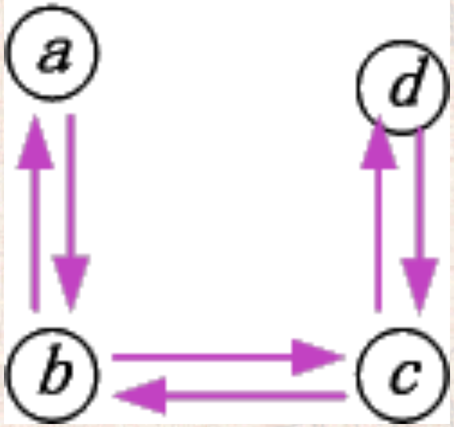
例4 对例3中的关系 R ，利用关系图求其闭包。



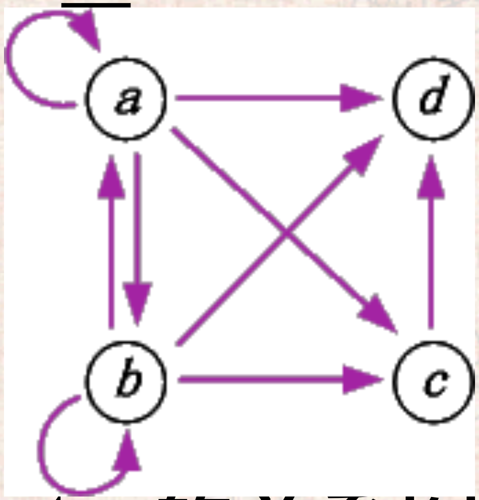
R的关系图



r(R) 的关系



s(R)的关系图



t(R)的关系图

定理3-8.6 设X是集合，R是X上的二元关系，则

a） $rs(R)=sr(R)$ (对称闭包之自反=自反闭包之对称)

b） $rt(R)=tr(R)$ (传递闭包之自反=自反闭包之传递)

c） $st(R)\subseteq ts(R)$ (对称闭包之传递⊆传递闭包之对称)

- 证明思路：利用$r(R)=I_X\cup R$

  $s(R)=R\cup R^c$

  “∪”交换律、“∪”结合律

  和“并之逆=逆之并”证明

-

证明： (1) $rs(R) = r(s(R)) = r(R \cup R^c)$

$= I_X \cup (R \cup R^c) = (I_X \cup R) \cup (I_X^c \cup R^c)$

$= (I_X \cup R) \cup (I_X \cup R)^c = r(R) \cup r(R)^c$

$= s(r(R)) = sr(R).$

$\therefore$ $rs(R) = sr(R).$

(2)证明: $rt(R) = r(t(R)) = r(R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots)$

$= I_X \cup (R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots)$

$= (I_X \cup R) \cup (I_X \cup R \cup R^2) \cup (I_X \cup R \cup R^2 \cup R^3) \cup \dots$

$= (I_X \cup R) \cup (I_X \cup R)^2 \cup (I_X \cup R)^3 \cup \dots$

$= r(R) \cup r(R)^2 \cup r(R)^3 \cup \dots = t(r(R)).$

$\therefore \ rt(R) = tr(R).$

(3) $st(R) \subseteq ts(R)$;

证明: $st(R) \subseteq st(s(R))$

$= sts(R)$

$= s(ts(R))$ ($ts(R)$对称)

$= ts(R)$

$\therefore st(R) \subseteq ts(R)$.

作业(3-8)：

P127 (1)

(2)

(7)

3–9 集合的划分与覆盖

定义3-9.1 若把一个集合A分成若干个叫做分块的非空子集，使得A中每个元素至少属于一个分块，那么，这些分块的全体构成的集合叫做**A的一个覆盖**。如果A中每个元素属于且仅属于一个分块，那么，这些分块的全体构成的集合叫做**A的一个划分（*partitions*）**，**（或分划）**。

定义3-9.1' 令A为给定非空集合，$S=\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$，其中$S_i \subseteq A, S_i \neq \phi (i=1,2,\ldots,m)$且$\bigcup_{i=1}^{m} S_i = A$，集合S称为集合A的覆盖。

如果除上述条件外，另有$S_i \cap S_j$（$i \neq j$）则集合S称为集合A的划分。

例:判断以下集合是否为集合A的覆盖? 其中 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$

（1）$S_1=\{\varnothing, \{a,b\},\{c,d\},\{f\}\}$ 不是

（2）$S_2=\{\{a,b\},\{c,d\},\{f,g\}\}$ 不是

（3）$S_3=\{\{a,b\},\{c,d\},\{f\}\}$ 不是

（4）$S_4=\{\{a,b\},\{c,d,e\},\{e,f\}\}$ 是

例: 判断以下集合是否为集合A的划分? 其中$A=\{a,b,c,d,e,f\}$

（1）$S_1=\{\varnothing, \{a,b,c,d\},\{f\}\}$ 不是

（2）$S_4=\{\{a,b\},\{c,d,e\},\{e,f\}\}$ 不是

（3）$S_5=\{\{a,b\},\{c,d\},\{e,f\}\}$ 是

（4）$S_6=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\}\}$ 是 最大划分

（5）$S_7=\{\{a,b,c,d,e,f\}\}$ 是 最小划分

我们看到对于一个给定集合, 划分不唯一

定义3-9.2 若$\{A_1,A_2,\ldots,A_r\}$与$\{B_1,B_2,\ldots,B_s\}$是同一集合A的两种划分。则其中所有$A_i \cap B_j \neq \phi$组成的集合，称为是原来两个划分的**交叉划分**。

例如：X：所有生物的集合，可分割成{P，A}，其中，P：植物，A：动物。X也可构成{E，F}，其中，E：史前生物，F：史后生物，则其交叉划分为Q={P ∩E，P ∩F， A ∩E， A∩F}

定理3-9.1 设$\{A_1,A_2,\ldots,A_r\}$与$\{B_1,B_2,\ldots,B_s\}$是同一集合X的两种划分。则其交叉划分$A_i\cap B_j$亦是原集合的一种划分。

■ 证明思路：先证：任意两块之交=φ

考察交叉划分集合中的任意两个元素：$A_i\cap B_h$和$A_i\cap B_k$中之交“$(A_i\cap B_h)\cap(A_i\cap B_k)$”

再证：所有$A_i\cap B_j$之并=X

反方向使用∩对∪ 的分配律，提取公因子。■

定义3-9.3 给定X的任意两个划分$\{A_1,A_2,\ldots,A_r\}$和$\{B_1,B_2,\ldots,B_s\}$，若对于每一个A_j均有B_k使$A_j\subseteq B_k$，则$\{A_1,A_2,\ldots,A_r\}$称为是$\{B_1,B_2,\ldots,B_s\}$的加细.

定理3-9.2 任何两种划分的交叉划分，都是原来各划分的加细。

证明思路：设划分$\{A_1,A_2,\ldots,A_r\}$和$\{B_1,B_2,\ldots,B_s\}$的交叉划分为T，对T中任意元素$A_i \cap B_j$必有 $A_i \cap B_j \subseteq A_i$和$A_i \cap B_j \subseteq B_j$，故T必是原划分的加细。

作业(3-9)：

P130 (1)

(2)

3-10 等价关系

1. 等价关系的定义(The Definition of Equivalence Relation)

2. 等价类(Equivalence Classes)

3. 等价关系与划分(Equivalence Relations & Partitions)

1. 等价关系的定义(The Definition of Equivalence Relation)

定义3-10.1 设**R**为定义在集合**A**上的一个关系，若**R**是**自反、对称的和传递的**，则**R称为等价关系**（***equivalent relation***）。

例如 数的相等关系是任何数集上的等价关系。

又例如 一群人的集合中姓氏相同的关系也是等价关系。

但父子关系不是等价关系，因为它不可传递。

例 设A是任意集合，则A上的恒等关系和全域关系U_A均是A上的等价关系。

例 设 $A=\{a,b,c,d\}$，A上的关系

$$R=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$$

R是A上的等价关系。

例 设k为一个正整数，整数集I上的同余关系

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x\equiv y(\operatorname{mod} k)\}$$

证明R是集合I上的等价关系，称为I上的模k同余关系。有时也记作：

$$R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in I, x-y\text{能够被}k\text{整除}\}$$

$$R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in I, x\text{和}y\text{被}k\text{整除余数相同}\}$$

设R是集合*A*上的等价关系，若元素*a*R*b*，则称*a*与*b*等价，或称*b*与*a*等价。

2. 等价类(Equivalence Classes)

定义3-10.2 设R为集合A上的**等价关系**。对任何$a \in A$，集合$[a]_R = \{x \mid x \in A \wedge xRa\}$称为元素a形成的**等价类**（*equivalent class*）（或简单地记为[a]

a称为$[a]_R$的代表元素。

例 对于前例中的R来说

$$[a]_R = \{a,b\}, \qquad [b]_R = \{a,b\}$$

$$[c]_R = \{c,d\}, \qquad [d]_R = \{c,d\}$$

例 整数集I关于模3同余关系R的等价类共有三个：

$$I_1 = [0]_R = \{\cdots,-3n,\cdots,-6,-3,0,3,6,\cdots,3n,\cdots\},$$

$$I_2 = [1]_R = \{\cdots,-3n+1,\cdots,-5,-2,1,4,7,\cdots,3n+1,\cdots\},$$

$$I_3 = [2]_R = \{\cdots,-3n+2,\cdots,-4,-1,2,5,8,\cdots,3n+2,\cdots\},$$

显然有 $[0]_R = [3]_R = [-3]_R = [6]_R = \cdots$

$[1]_R = [4]_R = [-2]_R = \cdots$

$[2]_R = [5]_R = [-1]_R = \cdots$

而 I_1, I_2, I_3 恰好为 I 的一个划分。

等价类的性质(The Properties of Equivalence class)

(1) 对任意 $a \in A, \ [a]_R \neq \phi$.

因为对于任意的a∈ A,有aRa，所以 $a \in [a]_R$ 。

(2) TH3-10.1 给定集合A上的等价关系R，那么，有aRb当且仅当 $[a]_R = [b]_R$ 。

定理3-10.1 给定集合A上的等价关系R，那么，对任意a，$b \in A$，有aRb iff $[a]_R=[b]_R$

- 证明思路：先证：$[a]_R=[b]_R \Rightarrow aRb$

从$[a]_R=[b]_R$出发，推出aRb，

设$a \in [a]_R$，则$a \in [b]_R$，即aRb。

再证：$aRb \Rightarrow [a]_R=[b]_R$

从aRb出发，推出$[a]_R=[b]_R$，

设$c \in [a]_R$，则aRc，由对称性cRa，又aRb,由传递性cRb。即$c \in [b]_R$，证出：$[a]_R \subseteq [b]_R$

再设$c \in [b]_R$，则bRc，又已知aRb，由传递性aRc。即$c \in [a]_R$，证出：$[b]_R \subseteq [a]_R$

$[a]_R=[b]_R$证完。 ▫

(3).对任意 $a,b\in$ 若 $a\not R b$，则 $[a]_R\cap[b]_R=\phi$

证明（用反证法）

假设 $[a]_R\cap[b]_R\neq\phi$ 则A中至少有一元素 $x\in[a]_R\cap[b]_R$

因此 $x\in[a]_R$ 且 $x\in[b]_R$，即 xRa，且 xRb，

于是由 aRx，xRb，得 aRb，与 $a\not R b$ 相矛盾。

故 $[a]_R\cap[b]_R=\phi$

例 设$A=\{a,b,c,d\}$，A上的关系

$$R=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,a\rangle,\langle d,d\rangle\}$$

R是A上的等价关系

$$[a]_R=[b]_R=[c]_R=\{a,b,c\}$$

$$[d]_R=\{d\}$$

同一个等价类中元素均相互等价。不同等价类中的元素互不等价。

3.等价关系与划分(Equivalence Relations & Partitions)

集合*A*上的等价关系与集合*A*上的划分具有一一对应关系.

定义3-10.3 集合A上的等价关系R，其等价类集合$\{[a]_R |\ a\in A\}$称作A关于R的商集（*quotient sets*），记作A/R。

例如 在集合$A=\{a,b,c,d\}$上，例6中A关于等价关系R的商集为

$$A/R=\{\{a,b\},\{c,d\}\}=\{[a]_\rho,[c]_\rho\}$$

例9中I关于模3同余关系R的商集为

$$A/R=\{[0]_R,[1]_R,[2]_R\}$$

例10中A关于等价关系R的商集为

$$A/R=\{\{a,b,c\},\{d\}\}=\{[b]_R,[d]_R\}$$

定理3-10.2 集合A上的等价关系R，决定了A的一个划分，该划分就是商集A/R。

- 证明思路：先做A的元素a的R等价类：$[a]_R$，所有这样的等价类构成集合A的R商集A/R。

再用3步证：A/R确实是A的一个划分。

第一步：证所有等价类之并=集合A

第二步：集合A的每一个元素确实属于一个分块等价类

第三步：用反证法证明每一个元素只属于一个分块等价类。

定理3-10.3 集合A的一个划分确定 **A的元素间的一个等价关系**。

- 证明思路：设集合A有一个划分$S=\{S_1,S_2,\ldots,S_m\}$，现定义一个关系R，$\langle a,b\rangle\in R$当且仅当a,b在同一分块中。可以证明，这样规定的关系R是一个等价关系。

用3步证明"**自反性**"、"**对称性**"和"**传递性**"。

证明： 在集合A上定义一个关系R，对于任意的$a,b\in A$，当且仅当a与b在同一分块中时，有$a\mathrm{R}b$。

对任意$a\in A$，a与a在同一分块中，所以有$a\mathrm{R}a$，即R自反。

又对任意的 $a,b\in A$,若a与b在同一分块中,则b与a在同一分块中. 即,若aRb,则bRa ,因此R是对称的.

对于任意$a,b,c\in A$，若a与b在同一分块中,b与c在同一分划块中，因为

$$A_i \bigcap A_j = \phi(i \neq j)$$

所以a与c也在同一分块中，此即,若aRb，bRc,则必有aRc，因此R是可传递的。

由定理可知:

由集合*A*的划分 $S=\{A_1, A_2, \cdots, A_r\}$ 所确定的*A*上的等价关系R为

$$\rho = A_1 \times A_1 \bigcup A_2 \times A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_r \times A_r$$

例11 设$A=\{a,b,c,d\}$，A上的划分

$$S_1=\{\{a\},\{b,c\},\{d\}\}$$

$$S_2=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$$

试求出等价关系 R_1 和 R_2，使得 R_1 和 R_2 的等价类分别是 S_1 和 S_2 的分划块。

解 定义A上等价关系

$$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$$

则

$$A/R_1=S_1=\{\{a\},\{b,c\},\{d\}\}$$

定义A上的等价关系 $R_2=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$

则

$$A/R_2=S_2=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$$

例12 设$A=\{a,b,c\}$，求出A上所有的等价关系。

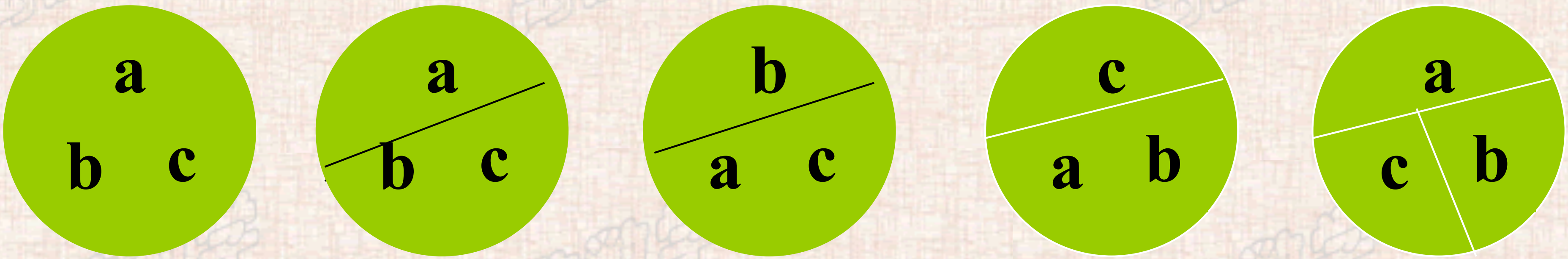
解 先求出A上有多少个不同的分划。

- 分成一个分划块的分划 $S_1=\{\{a,b,c\}\}$
- 分成两个分划块的分划 $S_2=\{\{a\},\{b,c\}\}$

$S_3=\{\{b\},\{a,c\}\}$ $S_4=\{\{c\},\{a,b\}\}$

- 分成三个分划块的分划 $S_5=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$

因此，*A*上有5个不同的分划，如下图所示



S_1 S_2 S_3 S_4 S_5

记与分划 S_i 相对应的等价关系为 R_i

$$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,c\rangle\}=U_A$$

$$R_2=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$$

$$R_3=\{\langle b,b\rangle,\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,c\rangle\}$$

$$R_4=\{\langle c,c\rangle,\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle\}$$

$$R_5=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}=I_A$$

定理3-10.4 设R_1和R_2为非空集合A上的**等价关系**，则，$R_1=R_2$ 当且仅当$A/R_1=A/R_2$。

- 证明思路： 先证$R_1=R_2 \Rightarrow A/R_1=A/R_2$

若$R_1=R_2$，对任意$a\in A$, 则

$[a]_{R1}=\{x|x\in A,<a,x>\in R_1\}=\{x|x\in A,<a,x>\in R_2\}= [a]_{R2}$

故 $\{[a]_{R1}|a\in A\}=\{[a]_{R2}|a\in A\}$即 $A/R_1=A/R_2$

再证：$A/R_1=A/R_2 \Rightarrow R_1=R_2$

设$\{[a]_{R1}|a\in A\}=\{[a]_{R2}|a\in A\}$出发，对任意$[a]_{R1}\in A/R_1$, 必存在$[c]_{R2}\in A/R_2$，使得$[a]_{R1} = [c]_{R2}$，

故$<a,b>\in R_1 \Leftrightarrow a\in [a]_{R1} \wedge b\in [a]_{R1}$

$\Leftrightarrow a\in [c]_{R1} \wedge b\in [c]_{R1}$

$\Rightarrow <a,b> \in R_2$

得$R_1 \subseteq R_2$,同理可证 $R_2 \subseteq R_1$,$R_1=R_2$证出，定理证毕。■

作业（3-10）

P134 (2)

(3)

(4)

(5)

3-11 相容关系

1. 相容关系的定义(The definition of Compatibility relations)
2. 相容关系与覆盖(Compatibility Relations & covers)

1. 相容关系的定义(The definition of Compatibility relations)

定义3-11.1　给定集合A上的关系r，若r是自反、对称的，则称r是相容关系。

示例见P-131页例题1、2。

示例：　设r为定义在集合A上的二元关系，其中：

A={ cat, teacher, cold, desk, knife, by }

r={ <x,y> |x,y ∈ A 且 x和y有相同字母 }

验证关系R是相容关系。

解：根据定义，只需验证r是自反、对称的。

关系r的矩阵M_r如下：

右元y

$$\text{左元}x \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \text{cat} & \text{teacher} & \text{cold} & \text{desk} & \text{knife} & \text{by} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{cat} \\ \text{teacher} \\ \text{cold} \\ \text{desk} \\ \text{knife} \\ \text{by} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \; M_R$$

M_R 主对角线元素全是1,且对称,所以R是自反、对称的。

例13 设集合A={216，243，357，648}.定义A上的关系R={$\langle x,y\rangle$ |$x,y\in A$，且x与y中至少有一个相同数字}，

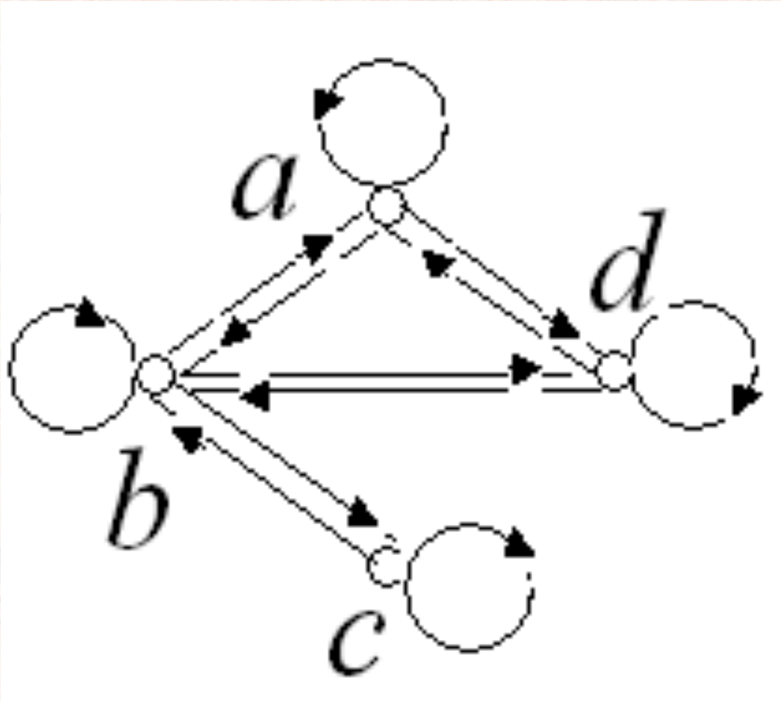
则r是A上的一个相容关系。但r不是等价关系。

令 a =216，b =243，c = 357，d = 648，则 R可表示为

$$R=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,b\rangle,$$

$$\langle c,c\rangle,\langle d,a\rangle,\langle d,b\rangle,\langle d,d\rangle\}$$

R的关系图为:



R的关系矩阵为:

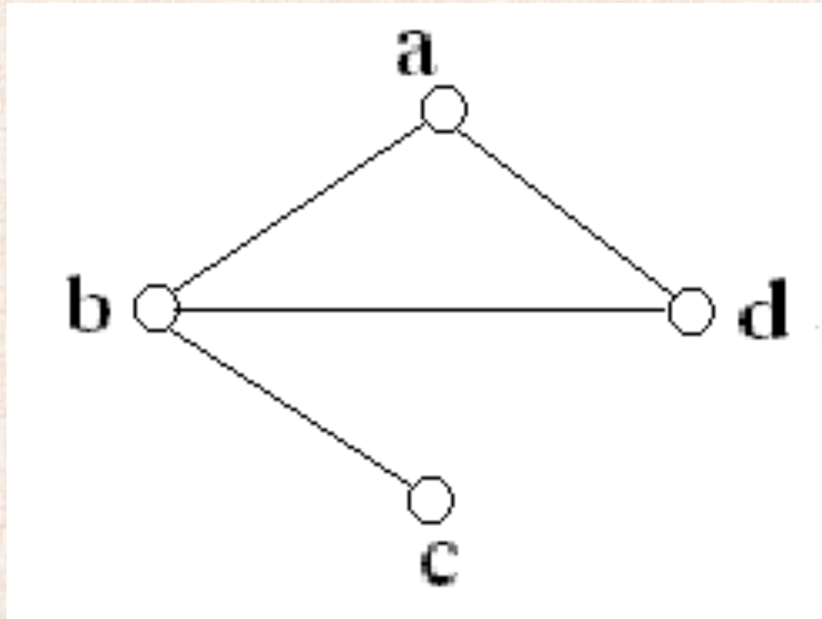
$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可以看出相容关系的关系图有以下特点:

(1)每个结点都有自环;

(2)任意两个结点之间,若有弧线,则必为双向的,否则没有弧线.

因此我们可以将例13中R 的关系图简化为:



我们也可以省去 M_r 中阶梯折线以上的部分，只用下边的梯形表示相容关系R 。

a			
b	1		
c	0	1	
d	1	1	0

例14 设 $A=\{T_1,T_2,T_3,T_4,T_5,T_6\}$ 是某台微机上6项任务的集合，有五个子程序 S_1，S_2，S_3，S_4和 S_5供它们选择调用，下表列出了它们调用子程序的情况。

任务名称	调用的子程序
T_1	S_1,S_2
T_2	S_2,S_3
T_3	S_3,S_1
T_4	S_5
T_5	S_4
T_6	S_5

任务名称	调用的子程序
T_1	S_1, S_2
T_2	S_2, S_3
T_3	S_3, S_1
T_4	S_5
T_5	S_4
T_6	S_5

定义A上的关系R={(x,y)|x,$y\in$ A且x与y调用了相同的子程序}，R是一个相容关系.

$$R=\{\langle T_1,T_1\rangle,\langle T_1,T_2\rangle,\langle T_2,T_1\rangle,\langle T_2 T_2\rangle,\langle T_1,T_3\rangle,\langle T_3,T_1\rangle,\langle T_2 T_3\rangle,$$
$$\langle T_3,T_2\rangle,\langle T_3,T_3\rangle,\langle T_4,T_4\rangle,\langle T_4,T_6\rangle,\langle T_6,T_4\rangle,\langle T_6,T_6\rangle,\langle T_5,T_5\rangle\}$$

R同时也是一个等价关系.

2. 相容关系与覆盖(Compatibility Relations & covers)

定义3-11.2 设r是定义在集合A上的**相容关系**，若$C\subseteq A$，如果对于C中任意两个元素a_1,a_2有$a_1 r a_2$,称集合C是由相容关系R**产生的相容类**。

示例见P-131页例题1、2。

定义3-11.3 设r是集合A上的**相容关系**，不能真包含在任何其他相容类中的相容类，称作**最大相容类**，记为C_r。

例如 例13中相容关系R的最大相容类是

$$\{b,c\},\{a,b,d\}$$

例14中相容关系R的最大相容类是

$$\{T_1,T_2,T_3\},\{T_4,T_6\},\{T_5\}$$

定理3-11.1 设r是有限集A上的**相容关系**。C是一个**相容类**，那么，**必存在一个最大相容类C_r**，使得$C \subseteq C_r$。

- 证明思路：设$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$,构造相容类序列

$$C=C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \ldots,$$

且$C_{i+1} = C_i \cup \{a_j\}$，其中j是满足$a_j \notin C_i$而$a_j$与$C_i$中各元素都有相容关系的最小足标。

由于A的元素个数$|A|=n$，所以至多经过$n-|C|$步，就使这个过程终止，而此序列的最后一个相容类，就是所要找的最大相容类。 ◘

根据最大相容类的定义，它可以从相容关系r的简化关系图求得，具体方法是：

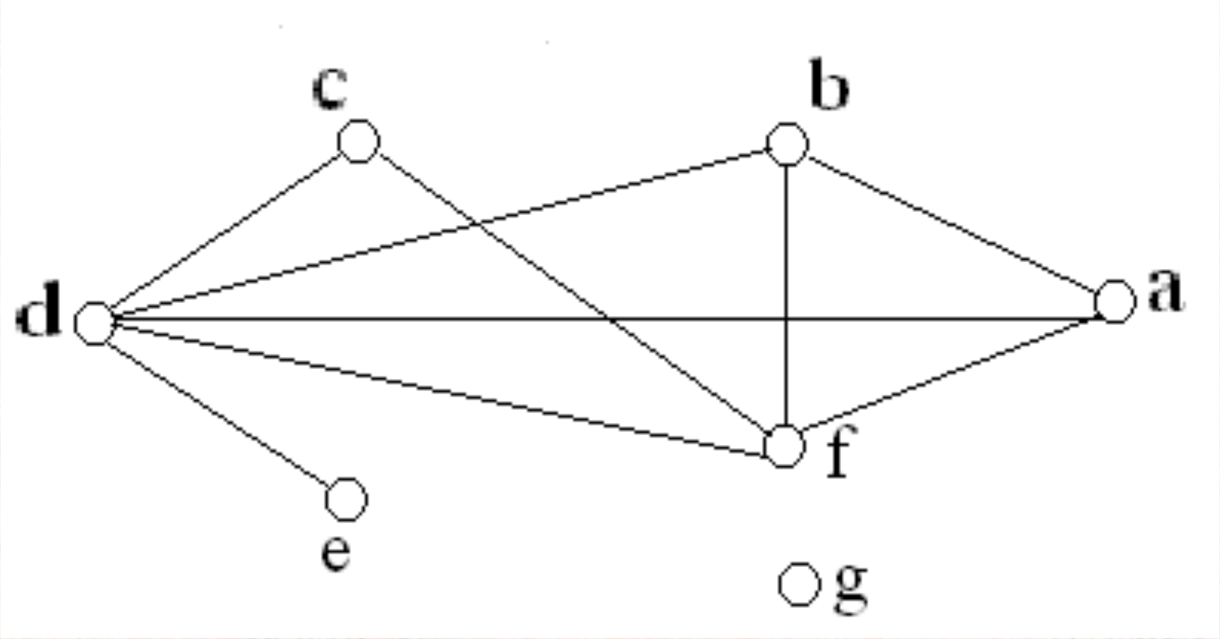
（1）r的简化关系图中，每一个最大完全多边形的顶点集合，是一个最大相容类。

最大完全多边形:其每个顶点都与其它顶点连接的多边形.

（2）r的简化关系图中，不在完全多边形中的边的两个顶点的集合，也是一个最大相容类。

（3）r的简化关系图中，每一个孤立结点的单点集合，是一个最大相容类。

例15 设给定相容关系R 的简化关系图如下：



求出它 R的最大相容类。

解：R的最大相容类为：

$\{a,b,d,f\},\{c,d,f\},\{d,e\},\{g\}$

定义3-11.4 在集合A上给定相容关系r，其最大相容类的集合称作集合A的完全覆盖，记作$C_r(A)$。

给定相容关系r，只能对应唯一的完全覆盖。

示例见P-138页例。

定理3-11.2 给定集合A的覆盖$\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$,由它确定的关系

$$R= A_1\times A_1 \cup A_2 \times A_2 \cup \ldots \cup A_n \times A_n$$

是相容关系。

■ 证明思路：第一步证r是自反的

因为所有分块A_r之并=全集A，所以对于任意的$x\in A$分必存在某个$j>0$使得$x\in A_j$，$\langle x,x\rangle\in A_j\times A_j$，即，自反性证毕。

第二步证r是对称的

对于任意$x,y\in A$，且$\langle x,y\rangle\in r$，则必存在某个$h>0$，使得$\langle x,y\rangle\in A_h\times A_h$，故必有$\langle y,x\rangle\in A_h\times A_h$，即$\langle y,x\rangle\in r$，所以r是对称的。对称性证毕。■

定理3-11.3 集合A上的相容关系r与完全覆盖$C_r(A)$存在一一对应。

■ 证明思路：■

注意:由定理3-11.2可知,给定集合A的任意一个覆盖,必可在A上构造一个对应于此覆盖的一个相容关系,但是两个不同的覆盖却能构造出的相同的相容关系.

例16 设$A=\{a,b,c,d\}$,集合

$$S_1=\{\{a,b\},\{b,c,d\}\}$$ 和

$$S_2=\{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{b,d\}\}$$

是A的两个不同的覆盖，但根据它们构造出的相容关系均是

$$\rho=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,d\rangle,$$
$$\langle d,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle d,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$$

作业（3-11）

P139 (1)

(2)

(5)

3-12 序关系

在这一节中，我们将介绍以下一些序关系：

- 偏序关系
- 全序关系
- 良序关系
- 拟序关系*

1. 偏序关系的定义(Partially Ordered Relations)
2. 偏序关系的哈斯图(The Hasse Diagram of Posets)
3. 偏序集中特殊位置的元素
4. 几种特殊的偏序集

1. 偏序关系的定义(Partially Ordered Relations)

定义3-12.1　设A是一个集合,如果A上的一个关系R,满足自反性、反对称性和传递性，则称R是A上的一个偏序关系，并把它记做“≤”；如果集合A上有偏序关系≤，则称A为偏序集，用序偶<A，≤>表示之。

例1: 验证实数集R上的小于等于关系“≤” 是偏序关系。（见书140页例题1）。

证明：1. 对于任何实数$a \in R$,有$a \le a$成立，故“≤”是自反的。

2. 对于任何实数$a,b \in R$，如果$a \le b$，$b \le a$，则必有$a=b$，故“≤”是反对称的。

3. 如果$a \le b$，$b \le c$ 那么必有$a \le c$，故“≤”是传递的。

因此“≤” 是一个偏序关系。

例2 全集合U的幂集上的“$\subseteq$”关系也是一个偏序关系。

证明 对于任意$S \subseteq U$，有$S \subseteq S$，所以“$\subseteq$”是自反的。

对任意$S_i, S_j \subseteq U$，若$S_i \subseteq S_j$ 且 $S_j \subseteq S_i$，则 $S_i = S_j$

所以“$\subseteq$”是反对称的。

对任意 $S_i, S_j, S_k \subseteq U$，若$S_i \subseteq S_j$，$S_j \subseteq S_k$，则$S_i \subseteq S_k$

所以“$\subseteq$”是可传递的。

例3　设$A=\{1,2,3,4,6,8,12\}$，定义A上的整除关系R如下：

$$R=\{\langle a,b\rangle \mid a,b\in A, a\text{整除}b\}$$

则R是A上的偏序关系。

例4　正整数集上的整除关系是偏序关系。

实数集R上的“$<$”关系不是偏序关系。

真包含关系“$\subset$”也不是偏序关系。

2. 偏序关系的哈斯图(The Hasse Diagram of Posets)

定义3-12.2 在偏序集合<A，≤>中，如果 $x,y \in A$，$x \le y$，$x \neq y$，且没有其他元素z 满足$x \le z$、$z \le y$，则称**元素y盖住元素x**。并且记

COV={<x，y>|x，y∈A；y盖住x}

称 $\operatorname{cov} A$ 为偏序集 $\langle A, \le \rangle$ 中的盖住关系

显然 $\operatorname{cov} A \subseteq \le$ 。

例5：求盖住集。P140 例2

给定集合A={2，3，6，8}，令

"≤" ={<x,y>|x|y}，验证"≤"是偏序关系并求偏序集。

COVA={<2,6>, <2,8> ,<3,6> }

前面例3： P140 例3

设A是正整数12的因子的集合，并设≤为整除关系，求COV A

COVA={<1,2>,<1,3>,<2,4>,<2,6>,<3,6>,<4,12>,<6,12> }。

哈斯(Hasse)根据盖住的概念给出了偏序关系关系图的一种画法,这种画法画出的图称为哈斯图,作图规则如下：

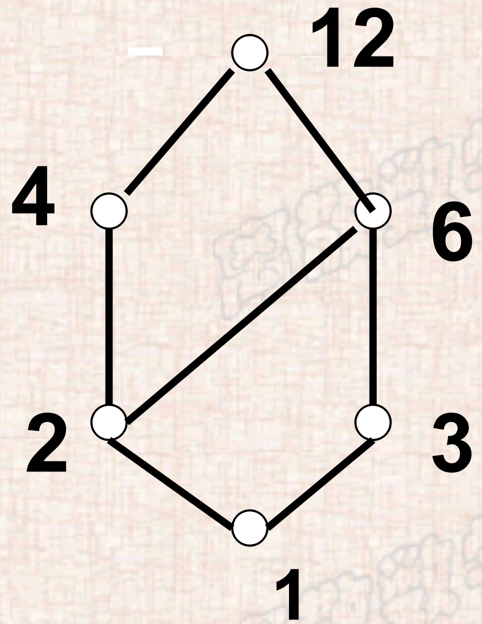
（1）用小圆圈代表元素。

（2）如果 $x \le y$，且 $x \neq y$，则将代表 y 的小圆圈画在代表 x 的小圆圈之上。

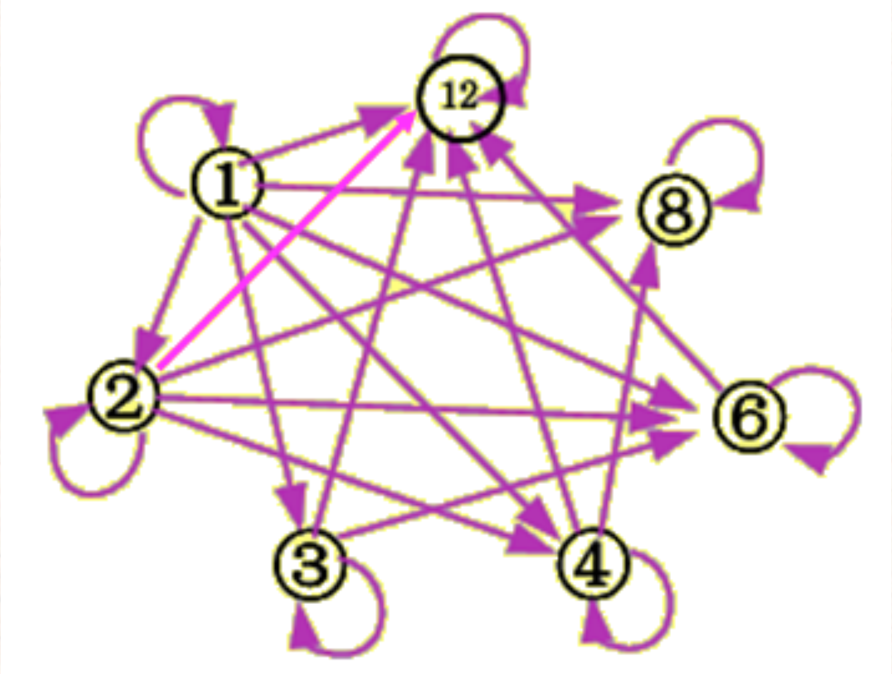
（3）如果 $\langle x,y\rangle \in COV\ A$,则在 x 与 y 之间用直线连接。

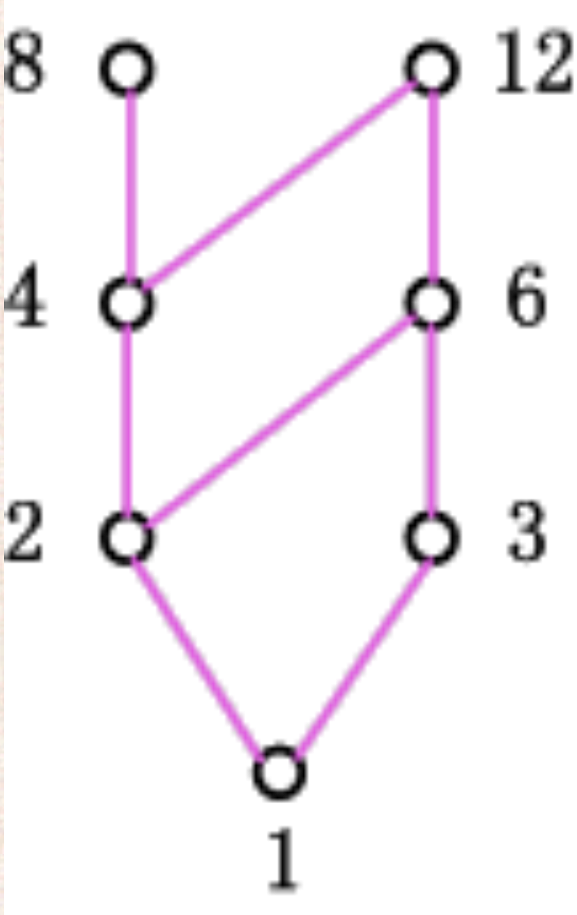
例3的哈斯图

COVA={<1,2>,<1,3>,<2,4>,<2,6>,<3,6>,<4,12>,<6,12> }



注意到：哈斯图中的边不再需要用有向边。因为若u，v两点间有边，且u在v的下层，则表示u ≤ v，所以边的方向一定是从下层结点指向上层结点的。

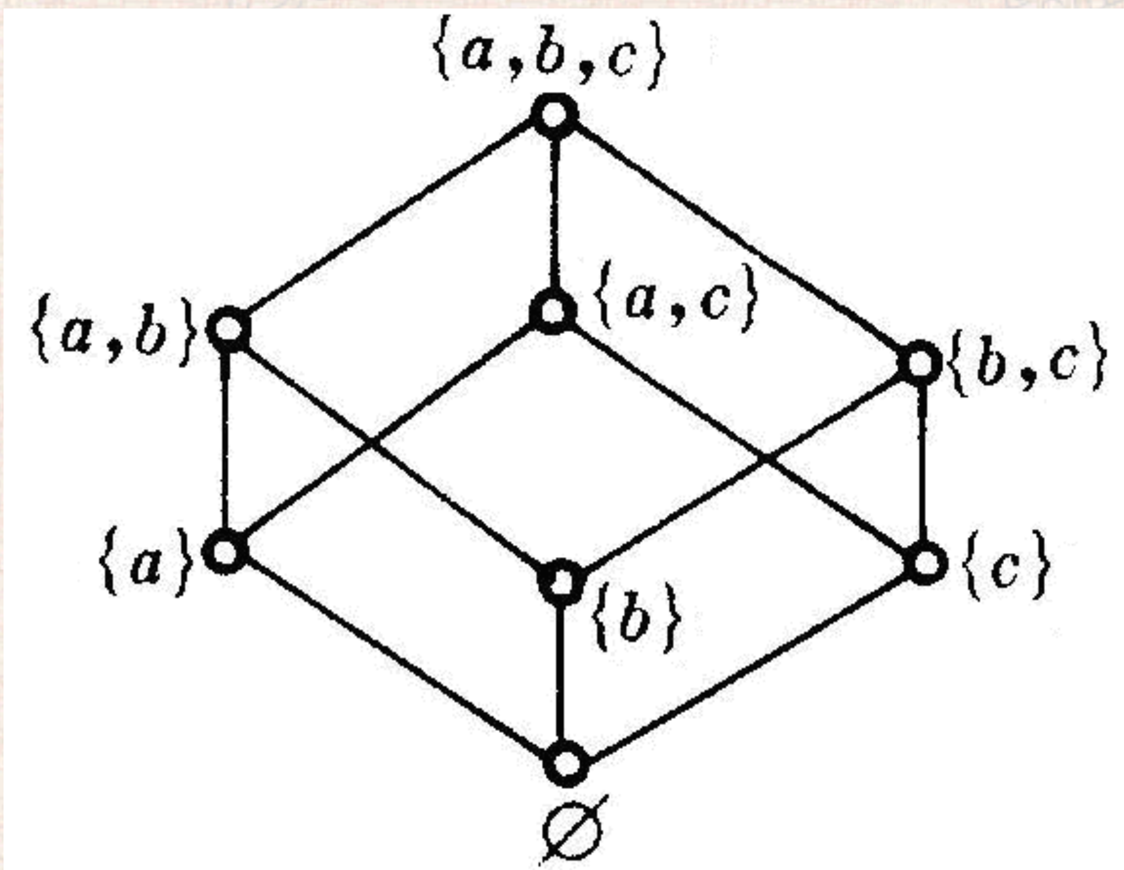

12
1
8
2
6
3
4


8
12
4
6
2
3
1

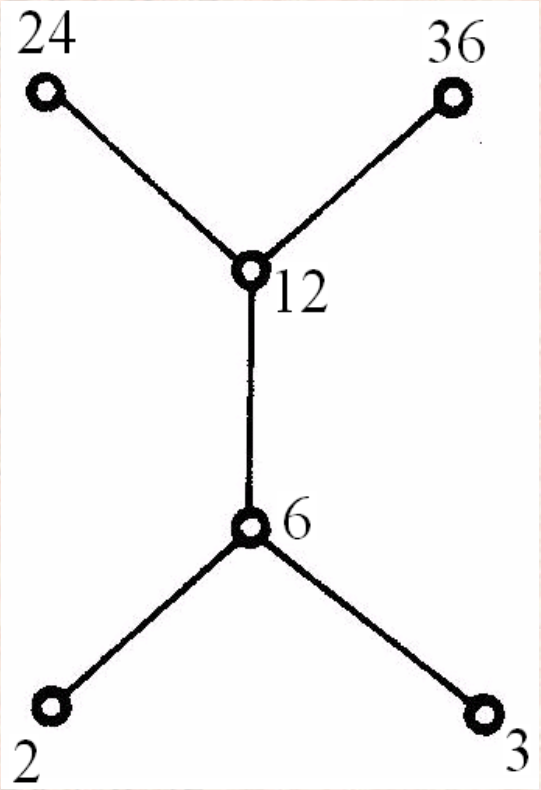
例6　设$A=\{a,b,c\}$，则"$\subseteq$"关系是A的幂集上的偏序关系，

$$\rho(A)=\{\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

偏序关系"$\subseteq$"的哈斯图：



例7　设A={2,3,6,12,24,36}，A上的整除关系“　　”≤是一偏序关系，其哈斯图如下：



3. 偏序集中特殊位置的元素

既然偏序集的元素之间 具有分明的层次关系，则其中必有一些处于特殊位置的元素。

定义3-12.5、6　设$\langle A, \leq \rangle$是一个偏序集合，$B \subseteq A$。

（1）如果$b \in B$，并且没有$x \in B$，$x \neq b$，使得$b \leq x$，则称b为B的极大元（*maximal element*）。即

$$b\text{为}B\text{之极大元} \Leftrightarrow b \in B \wedge \neg \exists x(x \in B \wedge x \neq b \wedge b \leq x)$$

（2）如果$b \in B$，并且没有$x \in B$，$x \neq b$，使得$x \leq b$，则称b为B的极小元（*minimal element*）。即

$$b\text{为}B\text{之极小元} \Leftrightarrow b \in B \wedge \neg \exists x(x \in B \wedge x \neq b \wedge x \leq b)$$

（3）如果$b \in B$，并且对每一$x \in B$，$x \leq b$，则称b为B的最大元（*greatest element*）。即

$$b\text{为}B\text{之最大元} \Leftrightarrow b \in B \wedge \forall x(x \in B \rightarrow x \leq b)$$

（4）如果$b \in B$且对每一$x \in B$，$b \leq x$，则称b为B的最小元（*least element*）。即

$$b\text{为}B\text{之最小元} \Leftrightarrow b \in B \wedge \forall x(x \in B \rightarrow b \leq x)$$

例题8 设$\langle A, \prec \rangle$为偏序集， $B \subseteq A$，其中

$A=\{ 2，3，5，7，14，15，21 \}$

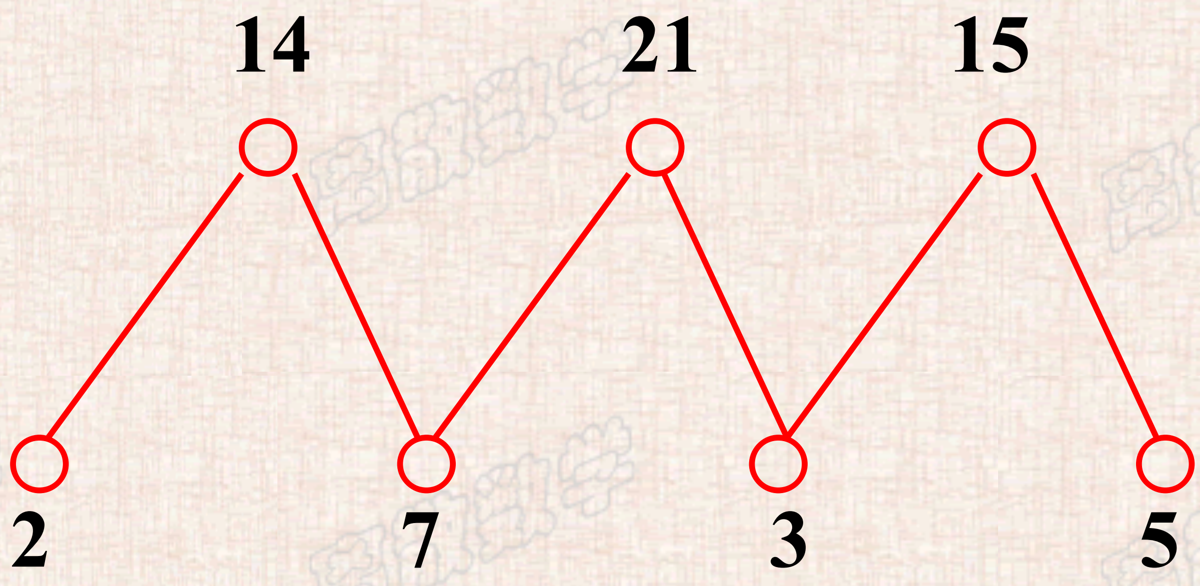
$\prec=\{\langle 2,14\rangle,\langle 3,15\rangle,\langle 3,21\rangle,\langle 5,15\rangle,\langle 7,14\rangle,\langle 7,21\rangle,$
$\langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 7,7\rangle, \langle 14,14\rangle, \langle 15,15\rangle, \langle 21,21\rangle\}$

$B =\{2，3，7，14，21 \}$。

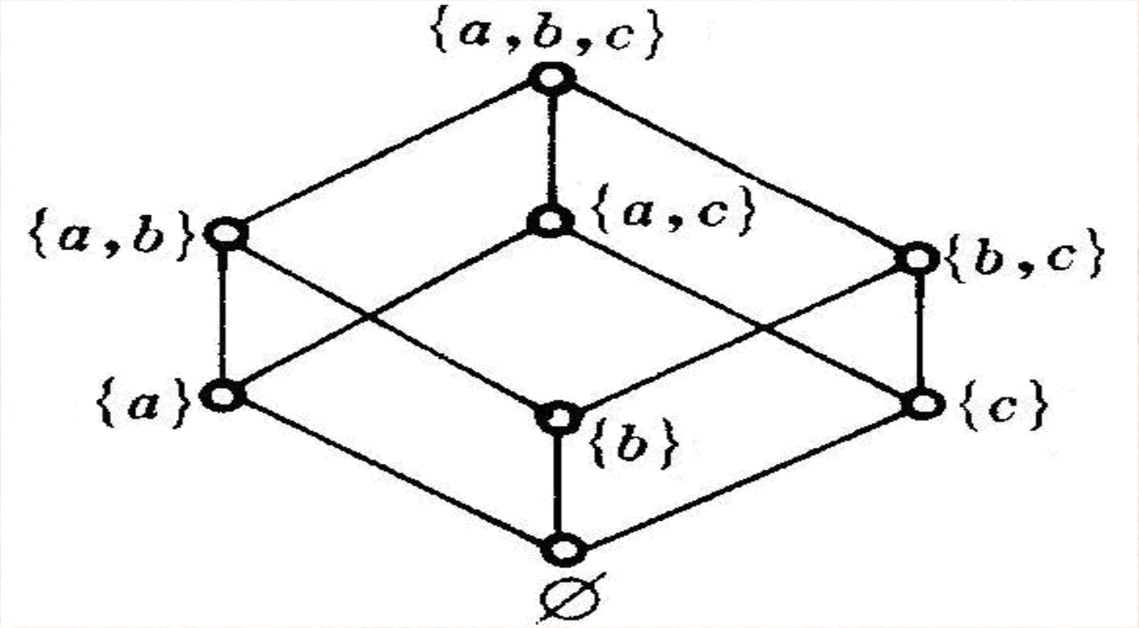
求B的极小元, 极大元。

$\mathrm{COV}\ B =\{\langle 2,14\rangle,\langle 3,15\rangle,\langle 3,21\rangle,\langle 5,15\rangle,\langle 7,14\rangle,\langle 7,21\rangle\}$

B之极小元= $=\{2，3，7 \}$, B之极大元= $=\{14，21 \}$。

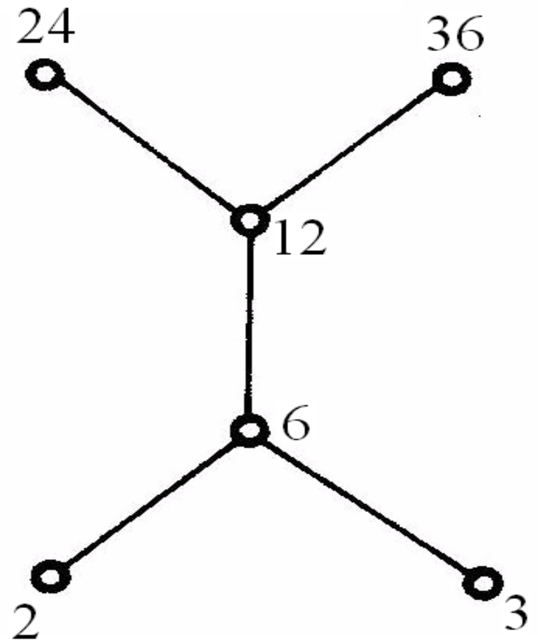


例9. 设$A=\{a,b,c\}$，对于偏序集 $\langle \rho(A),\subseteq\rangle$



集合	极大元	极小元	最大元	最小元
$\rho(A)$	$\{a,b,c\}$	Φ	$\{a,b,c\}$	Φ
$\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$	$\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$	$\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$	无	无
$\{\{a\},\{a,b\}\}$	$\{a,b\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a\}$

例10 在例7中取B={6，12}，C={2，3，6}，则



A={2,3,6,12,24,36},

的整除关系“

集合	极大元	极小元	最大元	最小元
A	24,36	2,3	无	无
{6,12}	12	6	12	6
{2,3,6}	6	2,3	6	无

最大（小）元和极大（小）元的性质：

定理3-12.1 令 $<A, \le>$ 为偏序集，且 $B \subseteq A$。

（1）若b为B的最大（最小）元，则b 为B的极大（极小）元。

（2）若B有最大（最小）元，则B的最大（最小）元唯一。

（3）若B为有限集，则B的极大元、极小元恒存在。

□证明思路：（1）的证明根据定义，有最大（最小）元的条件比有极大（极小）元的条件严格。

（2）的证明利用反证法；

（3）的证明根据定义，直接比较有限个元素，可得到B的极大元、极小元。□

定义3-12.7、8 设$<A, \leq>$为一偏序集，对于$B \subseteq A$。

（1）如果$a \in A$，且对每一$x \in B$，$x \leq a$，则称a为B的上界（*upper bound*）。即

$$a\text{为}B\text{的上界} \Leftrightarrow a \in A \wedge \forall x(x \in B \rightarrow x \leq a)$$

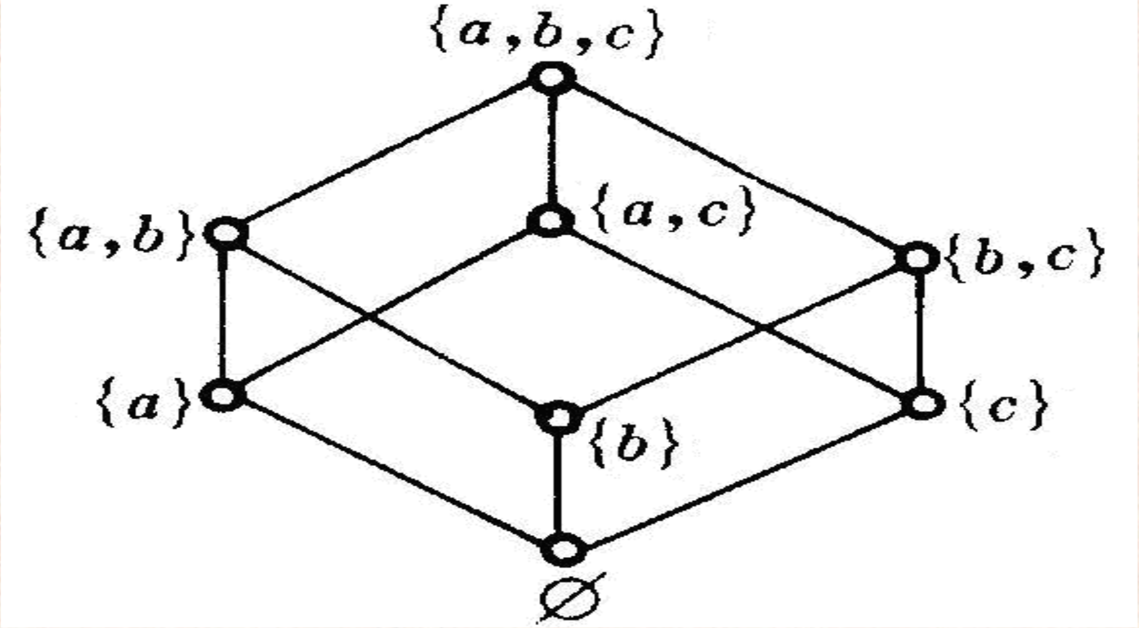
（2）如果$a \in A$，且对每一$x \in B$，$a \leq x$，则称a为B的下界（*lower bound*），即

$$a\text{为}B\text{的下界} \Leftrightarrow a \in A \wedge \forall x(x \in B \rightarrow a \leq x)$$

（3）如果a是B的所有上界的集合中的最小元。则称a为 B的最小上界或上确界LUB（*Least Upper Bound*）。

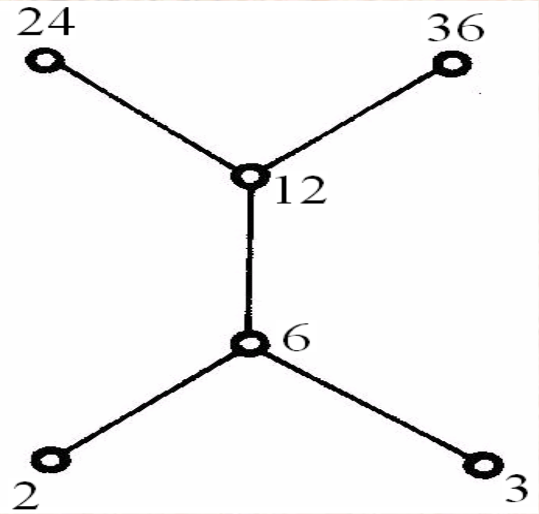
（4）如果a是B的所有下界的集合中的最大元。 则称a为 B的最大下界或下确界GLB(*Greatest Lower Bound*)。

例11 设A＝ $\{a,b,c\}$ ，对于偏序集 $\langle \rho(A), \subseteq \rangle$



集合	上界	下界	上确界	下确界
$\rho(A)$	$\{a,b,c\}$	ϕ	$\{a,b,c\}$	ϕ
$\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$	$\{a,b,c\}$	ϕ	$\{a,b,c\}$	ϕ
$\{\{a\},\{a,b\}\}$	$\{a,b\}$, $\{a,b,c\}$	$\{a\}$, ϕ	$\{a,b\}$	$\{a\}$

例12 在例7中取B={12,24,36}，C={2，3，6}，则



集合	上界	下界	上确界	下确界
A	none	none	none	none
{12,24,36}	none	2,3,6,12	none	12
{2,3,6}	6,12,24,36	none	6	none
{6,12}	12,24,36	2,3,6	12	6
{24,36}	none	2,3,6,12	none	12

通过以上例子可以看出界有以下性质：

（1）一个集合可能没有上界或下界，若有，则不一定唯一，并且它们可能在B中，也可能在B外；

（2）一个集合若有上下确界，必定是唯一的，并且若是B的最大（小）元素，则它必是B的上（下）确界。

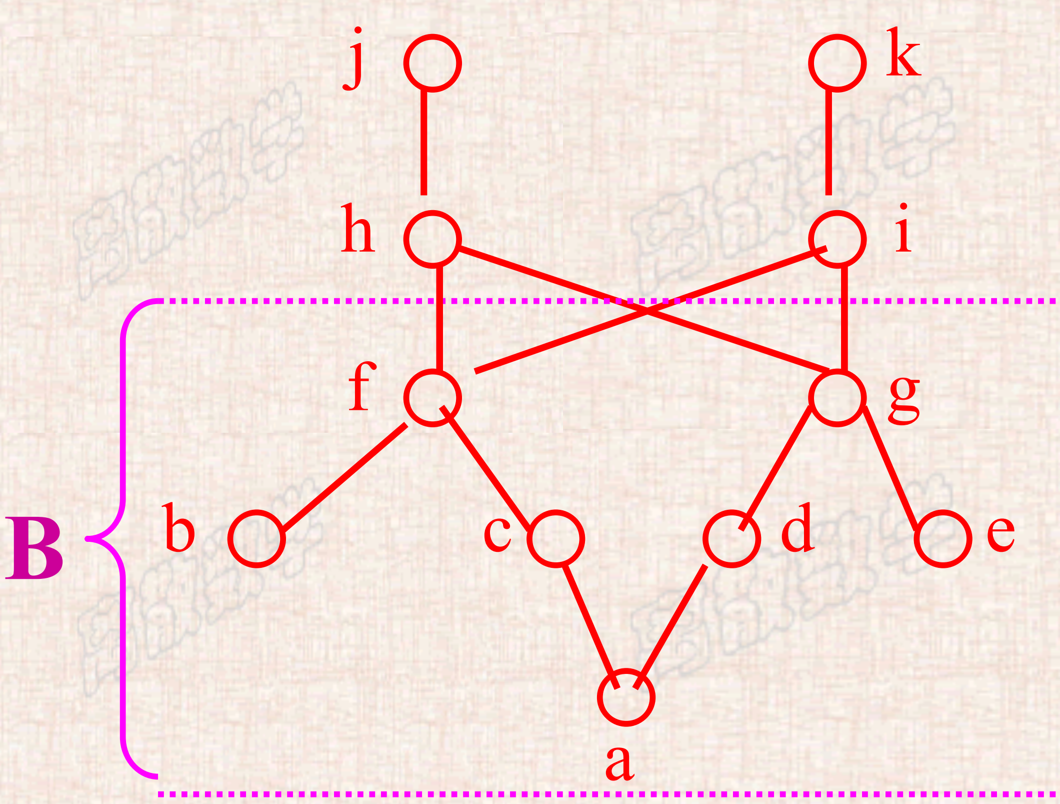
练习：设$<A, \prec>$为有序集，$B \subseteq A$。

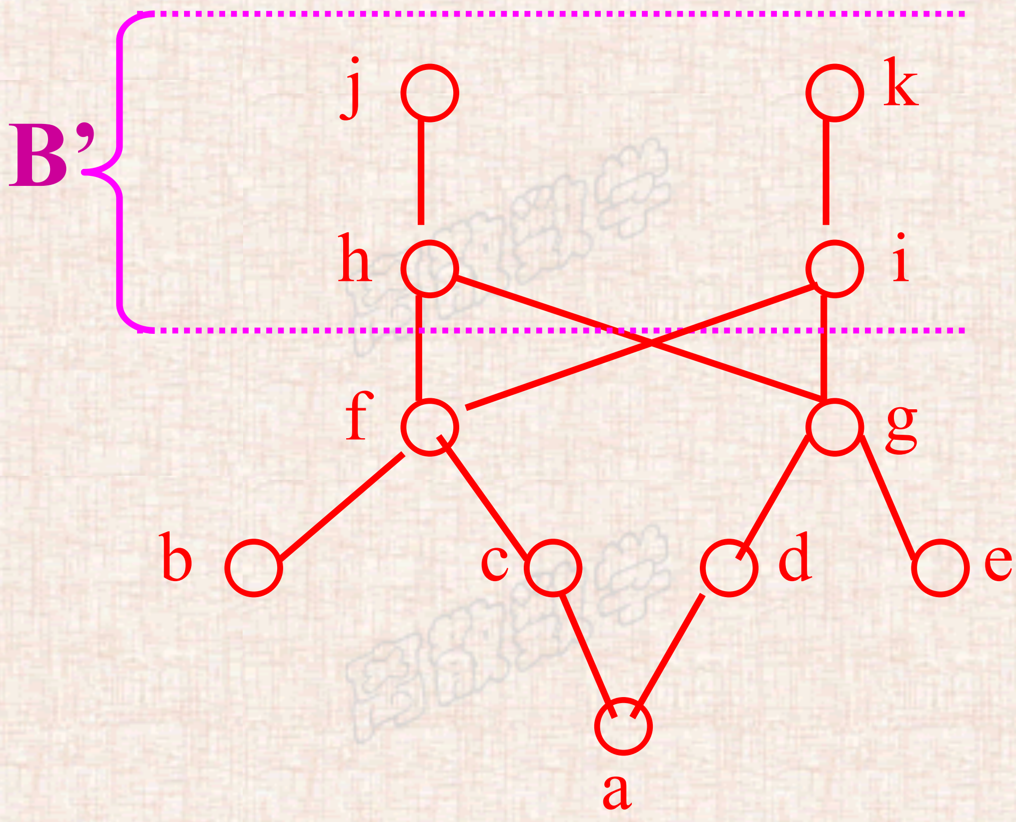
$A=\{ a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k \}$

$\prec$的哈斯图如下所示。

$B =\{ a, b, c, d, e, f, g \}$

$B' =\{ h, i, j, k \}$





4. 两种特殊的偏序集

(1) 全序或者线序

定义3-12.3 设<A, ≤ >是一个偏序集合，在A的一个子集B中,如果每两个元素都是有关系的，即

$$\forall x \forall y(x,y \in B \rightarrow x \leq y \vee y \leq x)$$

则称这个子集为链（*chain*），

在A的一个子集B中，如果每两个元素都是无关的，即 $\forall x \forall y(x,y \in B \wedge x \neq y \rightarrow \neg x \leq y \wedge \neg y \leq x)$

则称B为反链（*antichain*），

| B |称为链或反链的长度。

定义3-12.4 在偏序集<A，≤>中，如果A是一个链，则称<A，≤>为全序集合或称线序集合，在这种情况下，二元关系≤称为全序关系或称线序关系。

全序集<A，≤>就是对任意$x,y \in A$，或者有$x \le y$，或者有$y \le x$成立。

自然数集合N上的“小于等于”关系≤是偏序关系，且对任意N，必有

（$x \le y$）或（$y \le x$）成立，

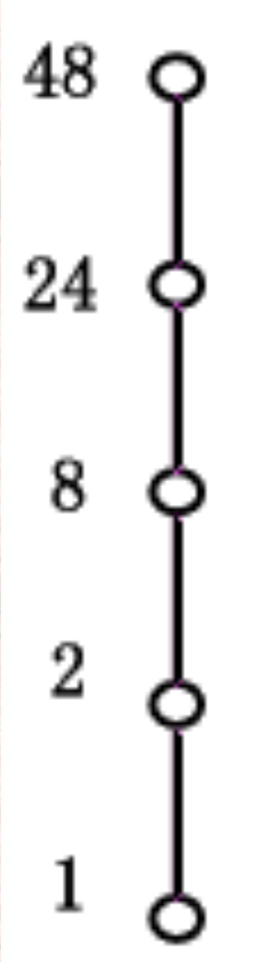
所以<A，≤>也是全序关系。

例6：$P=\{\{\phi\},\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$上的包含关系⊆是全序关系，<P，⊆>是全序集。

例如 实数集R上的数之间的小于或等于关系"≤"就是R上的一个全序，

N上的整除关系就仅是一个偏序而不是全序。

例13 设$A=\{1,2,8,24,48\}$，则A上的整除关系是A上的偏序，并且也是一个全序.



2.良序

定义3-12.9 任一偏序集合,假如它的每一个非空子集存在最小元素,这种偏序集称为良序的.

例如 (1)正整数集N上的小于等于关系“≤”是良序关系。

(2)I_n ={1,2,…,n}上的小于等于关系“≤”是良序关系。

(3)整数集Z和实数集R上的小于等于关系“≤”不是良序关系 (因为Z或R本身无最小元) 。

定理3-12.2 每一个良序集合，一定是全序集合。

■ 证明：设$<A, \leq>$是良序集，那么对任意两个元素$x,y \in A$可构成子集$\{x,y\}$，必存在最小元素，这个最小元素不是x就是y，因此一定有$x \leq y$或$y \leq x$。 ■

注意：定理3-12.2的逆不成立。

例如：整数集Z和实数集R上的小于等于关系“≤”是全序关系，但不是良序关系。

但是，对于有限的全序集，定理3-12.2的逆也成立。即有

定理3-12.3 每一个有限的全序集合，一定是良序集合。

◘ 证明：设$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$，令$\langle A, \prec \rangle$是全序集，现假定$\langle A, \prec \rangle$不是良序集合，那么必存在一个非空集合$B \subseteq A$，在B中不存在最小元素，由于B是一个有限集合，故一定可以找到两个元素x与y是无关的，由于$\langle A, \prec \rangle$是全序集，$x,y \in A$，所以x,y必有关系，得出矛盾。故$\langle A, \prec \rangle$是良序集合。 ◘

上述结论对于无限的全序集合不一定成立。

拟序关系是一种反自反的、可传递的二元关系。

$$\text{关系}\begin{cases}\text{等价关系}\\ \text{偏序关系}\end{cases}$$

偏序集 $\supseteq$ 全序集 $\supseteq$ 良序集

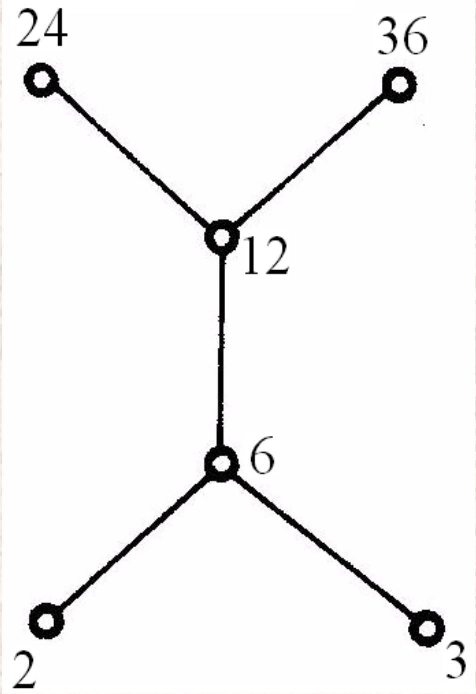
（链）　（有最小元的全序集）

综合练习

1.对下述论断判断正确与否，在相应括号中键入“Y”或“N”。

（1）设A={2,3,6,12,24,36}，A上的整除关系是一偏序关系，用“≤”表示。

（a）该偏序关系的哈斯图是 （ Y ）



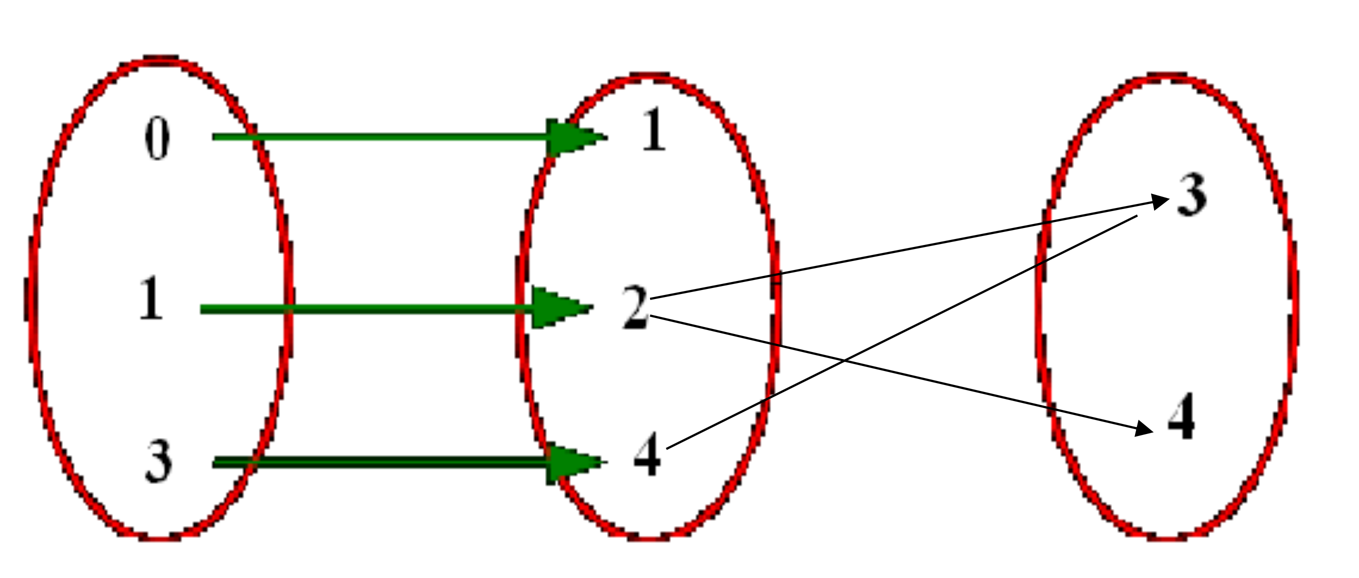
(b)“≤”={〈2,2〉，〈2,6〉，〈3,3〉，〈3,6〉，〈6,6〉，〈6,12〉，〈12,12〉，〈12,24〉，〈24,24〉，〈36,36〉}

（ N ）

（2）集合A={3,9,27,54}上的整除关系是A上的全序

（ Y ）

2．给定R_1= {⟨0,1⟩，⟨1,2⟩，⟨3,4⟩}, $R_1 \cdot R_2$ = {⟨1,3⟩，⟨1,4⟩， ⟨3,3⟩}，求满足上述条件的一个基数最小的关系 R_2. 一般地说,若给定R_1和$R_1 \cdot R_2$，R_2 能被唯一地确定吗？基数最小的R_2能被唯一确定吗？



解　　满足上述条件的最小基数的关系

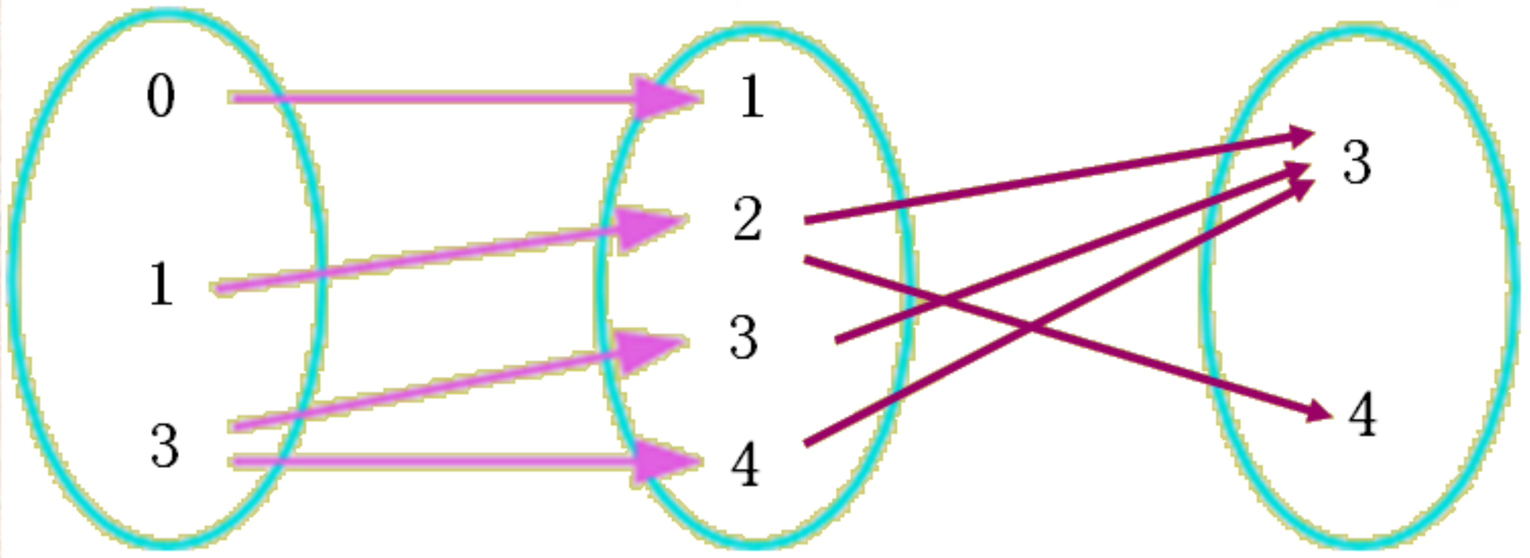
R_2 ={⟨2,3⟩，⟨2,4⟩，⟨4,3⟩}

一般说，给定R_1和$R_1 \cdot R_2$，不能唯一的确定R_2 。例如R_2= {⟨2,3⟩，⟨2,4⟩，⟨4,3⟩，⟨0,0⟩，⟨3,3⟩}也可以.

给定R_1和$R_1 \cdot R_2$，也不能唯一的确定出最小基数的R_2。

例如$R_1 = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle\}$，

$R_1 \cdot R_2 = \{\langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 3,3\rangle\}$，



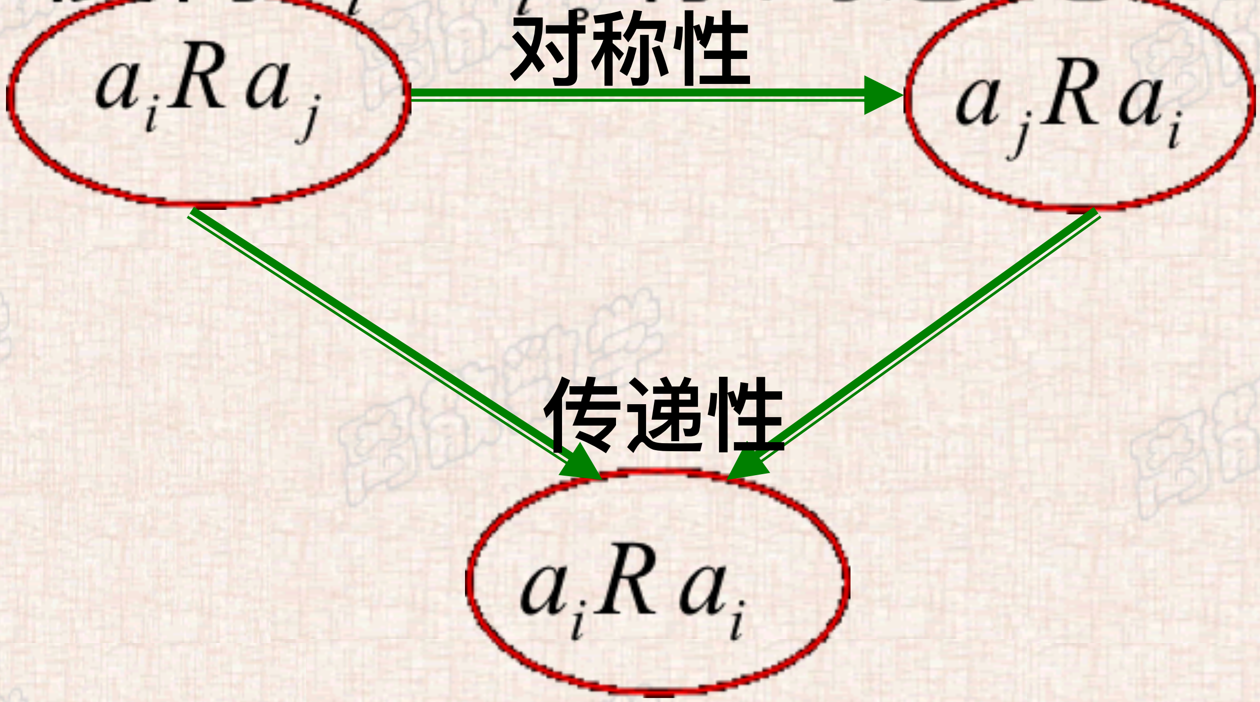
则$R_2 = \{\langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 4,3\rangle\}$或

$R_2 = \{\langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle\}$都可以。

3 .有人说，集合A上的关系R，如果是对称的且可传递，则它也是自反的。其理由是，从 $a_i R a_j$，

由对称性得 $a_j R a_i$，再由可传递性

便得 $a_i R a_i$。你的意见如何?



例 设 $A=\{1,2,3\}$

$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

作业：(3-12)

P145　（1）

（6）

（7）

第三章 小结

主要知识点：

(1) 集合和元素的概念，集合与元素之间的关系（属于和不属于），集合及元素的表示。

(2) 子集的概念，集合间相等、包含、真包含，集合的幂集的概念。

(3) 集合的基本运算，如并、交，补（绝对补）、差（相对补）、对称差的概念及性质。

(4) 序偶（二元组）、n元组，笛卡尔积（直积）的概念及性质。

(5) 二元关系、n元关系的概念，表示方法（集合表达式、关系矩阵和关系图），关系的定义域和值域的概念。

(6) 二元关系的性质：自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性；掌握利用关系的不同表示获得关系所具有性质的方法。

(7) 特殊的二元关系：空关系、恒等关系、全域关系、等价关系、序关系（偏序关系、全序关系、良序关系、拟序关系）

(8) 等价类、商集的概念。

(9) 等价关系对应一个划分，相容关系对应一个覆盖。

(10) 关系的运算及其性质。关系的基本运算就是集合的基本运算，即并、交、补、差、对称差；关系的复合（合成）运算及逆运算、闭包运算（自反闭包、对称闭包、传递闭包）。闭包的有关性质。

⑾ 偏序关系是一种具备自反性、反对称性和传递性的二元关系，而（A，≤）称为偏序集。

⑿ 偏序关系的关系图用哈斯图表示，哈斯图中一定没有三角形那样的子图。一般地，哈斯图中没有水平方向的边。

⒀ 重点掌握利用哈斯图判断成员关系的方法，如：最大元、最小元、极大元、极小元、上界、下界、最小上界（上确界）、最大下界（下确界）的概念及判定。

(14) 全序关系要求偏序集中的任意两个元素都要可以比较；良序关系要求偏序集的任意一个子集均有最小元。拟序关系是一种反自反的、反对称的和可传递的二元关系。

结　束

谢　谢！