20214272 韩昊辰

A组：2，5，7

B组：2

2. 一颗骰子抛两次，设随机变量 X 表示两次中出现的最小点数.试求：（1）X 的分布律；（2）X 的分布函数.

(1)

$P(X=1)=1-\frac{C_5^1C_5^1}{6^2}=\frac{11}{36}$

$P(X=2)=\frac{2\times C_1^1C_4^1+C_1^1C_1^1}{6^2}=\frac{9}{36}$

$P(X=3)=\frac{2\times C_1^1C_3^1+C_1^1C_1^1}{6^2}=\frac{7}{36}$

$P(X=4)=\frac{2\times C_1^1C_2^1+1}{6^2}=\frac{5}{36}$

$P(X=5)=\frac{2C_1^1C_1^1+1}{6^2}=\frac{3}{36}$

$P(X=6)=\frac{1}{36}$

$\therefore X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ \frac{11}{36} & \frac{9}{36} & \frac{7}{36} & \frac{5}{36} & \frac{3}{36} & \frac{1}{36}\end{pmatrix}$

(2)

$$F(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{11}{36} & 1\le x<2\\ \frac{5}{9} & 2\le x<3\\ \frac{27}{36} & 3\le x<4\\ \frac{8}{9} & 4\le x<5\\ \frac{35}{36} & 5\le x<6\\ 1 & 6\le x\end{cases}$$

5. 5. 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\beta\lambda^k$, $k=1,2,\cdots$, 且 $P\{X>1\}=\frac{1}{4}$, 试确定参数 β,λ.

$P\{X>1\}=1-P\{X\le 1\}=1-\beta\lambda=\frac{1}{4}\Rightarrow\beta\lambda=\frac{3}{4}\quad\cdots ①$

又：$\sum_{k=1}^{\infty}\beta\lambda^k=\beta\cdot\frac{\lambda(1-\lambda^\infty)}{1-\lambda}=\frac{\lambda\beta}{1-\lambda}=1$

代入得，$\lambda = \frac{1}{4}$　$\beta = 3$

7. 从学校乘汽车到火车站的途中有 4 个交通岗，设在各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的，且概率都是 $\frac{1}{2}$，以 X 表示汽车停下时通过的交通岗个数，求 X 的分布律.

$P(X=0) = \frac{1}{2}$

$P(X=1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(X=2) = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$

$P(X=3) = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$

$P(X=4) = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$

$\therefore X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$

2. 设某物理试验成功的概率为 $\frac{3}{4}$，失败的概率为 $\frac{1}{4}$，实验员做独立重复的试验直到成功两次为止，用 X 表示所需进行的试验次数，求 X 的分布律.

设进行 n次实验 $(n>1)$

$P(X=n) = (\frac{1}{4})^{n-2} \cdot \frac{3}{4} \cdot C_{n-1}^{1} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9(n-1)}{4^n}$　$(n>2)$

A组：10，11，12，13，15

B组：7，8，9

10. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \ln x, & 1 \leq x < e, \\ 1, & x \geq e \end{cases}$$

(1) 求概率 $P\{X < 1.5\}$，$P\{2 < X \leq 3\}$；

(2) 求 X 的密度函数 $f(x)$.

(1) $P(X<1.5) = F(1.5) = \ln(1.5)$

$P(2<X\leqslant 3) = F(3)-F(2) = 1-\ln 2$

(2) $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & x<1 \text{ 或 } x\geqslant e \\ \frac{1}{x} & 1\leqslant x<e \end{cases}$

11. 设随机变量 X 具有密度函数

$$f(x)=\begin{cases} cx^2+x, & 0\leqslant x\leqslant 0.5, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

（1）求常数 c；（2）求 $P\left\{X<\frac{2}{3}\right\}$；（3）求 X 的分布函数.

(1) $\int_0^{0.5} f(x)dx = \left[\frac{c}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{0.5} = \frac{c}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1 \Rightarrow c=21$

(2).(3)

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 7x^3+\frac{1}{2}x^2 & 0\leqslant x\leqslant 0.5 \\ 1 & x>0.5 \end{cases}$

$P\left\{x<\frac{2}{3}\right\} = F\left(\frac{2}{3}\right)=1$

12. 设随机变量 X 与 Y 同分布，X 具有密度函数

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & 0<x<2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

已知事件 $A=\{X>a\}$ 与 $B=\{Y>a\}$ 独立，且 $P\{A\cup B\}=\frac{3}{4}$，求常数 a.

$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(AB)$

$= P(A)+P(B)-P(A)P(B) \quad \cdots \quad ※$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \begin{cases} 0 & x\leqslant 0 \\ \frac{x^3}{8} & 0<x<2 \\ 1 & x\geqslant 2. \end{cases}$

$\therefore P(A)=P(B)=1-P\{X\leqslant a\} = 1-F(a) = 1-\frac{a^3}{8} \quad (a\in(0,2))$

$\therefore$ 代入※： $2-\frac{a^3}{4}-\left(1-\frac{a^3}{8}\right)^2=\frac{3}{4} \Rightarrow a=2\sqrt{2}$

13. 设随机变量 $X \sim N(3,4)$.

(1) 求概率 $P\{2 < X \leqslant 5\}$, $P\{-4 < X < 10\}$, $P\{|X| > 2\}$;

(2) 确定常数 c, 使得 $P\{X > c\} = P\{X \leqslant c\}$.

(1) $P\{2<X\le 5\} = F(5)-F(2)$

$= \Phi\left(\frac{5-3}{2}\right)-\Phi\left(\frac{2-3}{2}\right)$

$= \Phi(1)-\Phi(-\frac{1}{2})$

$= \Phi(1)-(1-\Phi(\frac{1}{2}))$

$= 0.8413-1+0.6915 = 0.5328$

$P\{-4<X<10\} = F(10)-F(-4)$

$= \Phi(3.5)-\Phi(-3.5)$

$= 2\Phi(3.5)-1 \approx 1$

$P\{|X|>2\} = 1-P\{|X|\le 2\}$

$= 1-(F(2)-F(-2))$

$= 1-(\Phi(-0.5)-F(-2.5))$

$= 1-(\Phi(2.5)-\Phi(0.5))$

$= 1-0.9938+0.6915$

$= 0.6977$

(2) 易知: $C=3$

15. 设一工厂生产的电子元件的寿命 $X \sim N(160,\sigma^2)$, 若要求 $P\{120 \leqslant X < 200\} \geqslant 0.8$, 问标准差 σ 的允许上限为多少?

$P\{120 \le X < 200\} = F(200) - F(120)$

$= \Phi(\frac{40}{\sigma}) - \Phi(-\frac{40}{\sigma})$

$= 2\Phi(\frac{40}{\sigma}) - 1 \geq 0.8$

$\Rightarrow \Phi(\frac{40}{\sigma}) \geq 0.9 \Rightarrow \frac{40}{\sigma} \geq 1.28 \Rightarrow \sigma \le 31.25$

7. 已知某型号电子管的使用寿命为 X(单位:h),其密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^3}, & x > 50, \\ 0, & x \leqslant 50 \end{cases}$$

(1) 求常数 a;

(2) 已知一设备装有 3 只这样的电子管,每只电子管能否正常工作相互独立,求在使用的最初 500 h 内只有一只损坏的概率.

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{50}^{+\infty} \frac{a}{x^3} dx = \frac{a}{5000} = 1 \Rightarrow a = 5000.$

(2) $F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 50. \\ -\frac{2500}{x^2} + 1 & x > 50. \end{cases}$

$\therefore P\{X \le 500\} = F(500) = \frac{99}{100} = 0.99 = p.$

A = "最初500h内有一只电子管损坏"

$P(A) = C_3^1 p(1-p)^2 = 3 \times 0.99 \times 0.01^2 = 0.000297$

8. 一群户外探险者在某次深山探险中意外迷路了,队长组织大家每间隔 5 min 集体发出一次瞬时求救信号,以便前来的直升机搜救人员获得探险队伍的具体位置.问在能收到搜救信号的范围内,随机到达的搜救人员至少要在上空盘旋多长时间才能以 90% 的概率收到求救信号?

设至少停 x min

由几何概型: $\frac{x}{5} = 0.9 \Rightarrow x = 4.5$ min.

9. 在电源电压不超过 200 V、200～240 V 和超过 240 V 三种情况下，某电子元件损坏的概率分别为 0.1，0.001 和 0.2. 假设电源电压服从正态分布 $N(220, 25^2)$，试求：

（1）该电子元件损坏的概率 α.

（2）当该电子元件损坏时，电压在 200～240V 的概率 β.

(1) 设电源电压为 XV； $X \sim N(220, 25^2)$

$$P_1\{X \le 200\} = F(200) = \Phi\left(-\frac{4}{5}\right) = 1 - \Phi(0.8) = 1 - 0.7881 = 0.2119$$

$$P_2\{200 < X \le 240\} = F(240) - F(200) = \Phi\left(\frac{4}{5}\right) - F(200) = 0.7881 - 0.2119 = 0.5762$$

$$P_3\{240 < X\} = 1 - F(240) = 0.2119.$$

设 $A_{1,2,3}$ = "电压 $\begin{cases} <200V & i=1 \\ 200\sim240V & i=2 \\ >240V & i=3 \end{cases}$ "， B = "损坏"

$$\alpha = \sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)P(A_i) = 0.2119 \times 0.1 + 0.5762 \times 0.001 + 0.2119 \times 0.2 = 0.0641462$$

(2) $$\beta = \frac{P(B|X\in(200,240)) \cdot P(X\in(200,240))}{\alpha} = \frac{0.001 \times 0.5762}{0.0641462} = 0.00898261$$