考试教室＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 年级＿＿＿＿ 专业、班＿＿＿＿ 学院＿＿＿＿

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密　封　线

重庆大学《概率论与数理统计Ⅱ》课程试卷

◉ A卷　○ B卷

2020—2021 学年　第一学期

开课学院：数统学院　课程号：MATH20042　考试日期：2020.12.28

考试方式：○开卷 ◉闭卷 ○其他　　考试时间：120 分钟

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得 分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

2.考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

分位数：$u_{0.692}=0.5$，$u_{0.975}=1.96$，$\mu_{0.95}=1.645$，$\mu_{0.9123}=1.355$，

$t_{0.975}(35)=2.031$，$t_{0.95}(11)$=1.796，$t_{0.975}(15)=2.131$

一、填空题（每空 3 分，共 42 分）

1. 设 A,B 为两事件，且 $P(A)=0.6, P(A\cup B)=0.8$，那么 $P(\bar{B}|\bar{A})=$ 0.5 。

   0.5

   $P(B)=0.5$　$AB=0.3$　$0.6+0.5-?=0.8$　$\frac{P(\bar A\bar B)}{P(\bar A)}=$

2. 有 3 位客人从车库 LG 层进入电梯。设每位客人在 1~10 层楼下电梯是等可能的，且相互独立，则他们在不同楼层下电梯的概率为 0.943 。

   0.72

   $1-\left(\frac{1}{10}\right)^3-\frac{1}{10}\times\left(\frac{1}{9}\right)^2\times A_{10}^2$

   $1-\frac{1}{1000}-\frac{1}{810}\times 90.$

3. 设连续型随机变量 X 的密度函数为：$f(x)=\begin{cases}ce^{-3x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$，则常数 c 的值为 3 ；设 $Y=\frac{1}{2}(X+1)$ 的密度函数 $f_Y(y)=$ $\begin{cases}6e^{-3(2y-1)}, & y>\frac{1}{2}\\ 0, & 其他\end{cases}$。

   c=3;；$f_Y(y)=\begin{cases}6e^{-6y+3}, & y>0.5\\ 0, & 其他\end{cases}$

   $\int_0^{+\infty}e^{-3x}\,d(-3x)=-\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{3}$　$2\cdot 3\cdot e^{-3(2y-1)}$；$2y-1>0$

4. 已知 $\begin{array}{c|ccc}X_i & -1 & 0 & 1\\ \hline P & 0.25 & 0.5 & 0.25\end{array}$，$i=1,2$。且 $P\{X_1+X_2=0\}=1$，则 $P\{X_1=X_2\}=$＿＿＿＿。0.5

5. 设相关系数为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的两变量分别服从 $X\sim U[0,2]$，$Y\sim\Gamma(1,1)$，则

   $P\{X<1,Y<1\}+P\{X<1,Y\geq 1\}=$＿＿＿＿，

   $P\{X\leq 2,Y>1\}+P\{X<1,Y\leq 0\}=$ e^{-1} 。0.5，e^{-1}

   $f=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}\\ 0\end{cases}$　$F=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}\\ 0\end{cases}\Big|_{x=1}=1-e^{-\lambda}$

6. 设随机变量 X 和 Y 独立同分布于 $U[2,8]$。令 $Z=2X-Y$，则 $DZ=$ 1 ；

   $\rho(Z,Y)=$＿＿＿＿。

   $\frac{cov(2X-Y,Y)}{\sqrt{DZ}\sqrt{DY}}$　$4DX+DY=5DX$

7. 已知随机变量 X 有 $E(X)=5, D(X)=4$，则利用契比雪夫不等式估计

   $P\{0\leq X\leq 10\}\geq$ $1-\frac{4}{25}$ 。0.84

   $P\{|X-EX|\leq 5\}\geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$　$0\leq X\leq 10$

8. 重庆冬天是一个多雨的季节。设每周下雨天数 X 服从二项分布 $B(7,0.6)$。现从 X 中随机抽取一组样本 $X_1,X_2,\ldots,X_7$，设 $\bar{X}$、S^2 是总体的样本均值、样本方差，则 $E(S^2+\bar{X}^2)=$ 19.56 ；19.56($\frac{489}{25}$)

   $ES^2=\sigma^2=7\times 0.6\times 0.4=1.68$

   $E\bar{X}^2=$　$\frac{np(1-p)}{n}$

   $D\bar{X}=E\bar{X}^2-E^2\bar{X}$

命题人：潘致锋　组题人：荣腾中　审题人：荣腾中　命题时间：2020.11.25　教务处制

$0.6\times0.4=E\bar{X}^2-(7\times0.6)^2$

$0.24+$

9. 已知 $X\sim N(1,\sigma^2)$， X_1,X_2,Λ,X_n 是一组样本，则 $E(\bar{X}M_2^*)=$ $\frac{n-1}{n}\sigma^2$，

$D(M_2^*)=$ $\frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2}$。 $\frac{n-1}{n}\sigma^2,\frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4$　　$\frac{n-1}{n}S^2$　　$D2X=4DX$.

10. 设 $X_1,X_2,L\ ,X_9$ 为总体 $X\sim N(\mu,1)$ 的一组样本，对于

$H_0:\mu=0,\ H_1:\mu=1$，拒绝域为 $\{3\bar{X}>u_{0.95}\}$，则犯第二类错误的概率为

____

二、(12 分) 设一袋中有 1 个红球，2 个白球，3 个黑球。有放回地从袋中取两次球。X,Y,Z 分别表示两次取得的红球，白球，黑球的个数。求：

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2$　　$\frac{1}{2}\times7$

(1) (X,Y) 的联合分布律；

(2) X 和 Z 的协方差。

$\frac{4}{9}+\frac{1}{4}=$

解：(1) X,Y 的可能取值分别为 0，1，2

联合分布律为

X \ Y	0	1	2	
0	1/4	1/3	1/9	25/36
1	1/6	1/9	0	5/18
2	1/36	0	0	1/36
	4/9	4/9	1/9	

(2) 由联合分布

$EX=0\times25/36+1\times5/18+2\times1/36=1/3$

$EY=0\times4/9+1\times4/9+2\times1/9=2/3$

$EXY=1/9,\mathrm{cov}(X,Y)=1/9-2/9=-1/9$

因为 $Z=2-X-Y$，所以

$\mathrm{cov}(X,Z)=\mathrm{cov}(X,2-X-Y)=-\mathrm{cov}(X,X)-\mathrm{cov}(X,Y)=-\frac{7}{9}+\frac{1}{9}=-\frac{2}{3}$

三（16 分）设二维随机变量 (X,Y) 具有联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}Axy^2, & 0<y<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求：(1) 常数 A；

(2) 边缘密度函数 $f_X(x),f_Y(y)$，判断 X,Y 的独立性；

(3) 求 $Z=X+Y$ 的密度函数。

解：(1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1\Rightarrow A=15$

(2) $f_X(x)=\begin{cases}5x^4,0<x<1\\ 0,其他\end{cases}$，$f_Y(x)=\begin{cases}\frac{15}{2}(y^2-y^4),0<y<1\\ 0,其他\end{cases}$

(3) $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$

$0<z\le1$ 时，$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{z}15x(z-x)^2dx=\frac{25}{64}z^4$

$1<z<2$ 时，$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{1}15x(z-x)^2dx=-\frac{55}{64}z^4+\frac{15}{2}z^2-10z+\frac{15}{4}$

其他，$f_Z(z)=0$

四、(12 分) 设 $X_1,X_2,L\ L\ ,X_n$ 是来自总体 X 的样本，且总体 X 的密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}\lambda x^{\lambda-1}, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

其中，参数$\lambda>0$且未知。求：
（1）参数λ的矩估计量；
（2）参数λ的极大似然估计量。

(1) $EX=\int_0^1 xf(x)dx=\lambda\int_0^1 x^{\lambda}dx=\frac{\lambda}{\lambda+1}x^{\lambda+1}\Big]_0^1=\frac{\lambda}{\lambda+1}\hat{=}\bar{X}$

$\therefore\ \hat{\lambda}=\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$

解：1）因 $f(x)=\begin{cases}\lambda x^{\lambda-1}, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

则：$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}\lambda x x^{\lambda-1}dx=\frac{\lambda}{\lambda+1}$

(2) $L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\lambda^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\lambda-1}$

令：$EX=\bar{X}$，则可得λ的矩估计量为：$\hat{\lambda}=\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$。

$\ln L=n\ln\lambda+(\lambda-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

2）构造似然函数：

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\lambda x_i^{\lambda-1}=\lambda^n(x_1\cdots x_n)^{\lambda-1}$$

$\frac{d\ln L}{d\lambda}=\frac{n}{\lambda}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

对似然函数取对数：

$\lambda=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

$$\ln L(\lambda)=n\ln\lambda+(\lambda-1)\ln(x_1\cdots x_n)$$

对上式左右两边对λ求导并令其为0，可得：

$$(\ln L(\lambda))'=\frac{n}{\lambda}+\ln(x_1\cdots x_n)=0$$

则$\lambda=-\frac{n}{\ln(x_1\cdots x_n)}$。故$\lambda$的极大似然估计量为：$\hat{\lambda}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$。

五、（10 分）据调查，肾功能障碍患者的尿蛋白含量大于 130mg/24h。卡托普利是一种用来减少肾功能障碍患者尿蛋白的药物。为检验其疗效，随机抽取 12 名患者做临床试验。测得服药 8 周后的尿蛋白含量均值为 126（单位：mg/24h），方差为 81。设人的尿蛋白含量服从正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$。问能否根据试验数据认为卡托普利对肾功能障碍患者有效？

建立 H_0，$H_1: \mu_1<\mu_0$

令 $U=\frac{\bar{x}-\mu_0}{6/\sqrt{n}}=\frac{126-130}{9/\sqrt{12}}=-\frac{4\sqrt{3}}{3}\approx-2.309$

解：设人的尿蛋白含量为随机变量 X，由题意可知，$X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$且对应的样本均值为$\bar{x}=126$，样本方差为$s^2=81$，$n=12$

（1）建立统计假设：$H_0:\mu\geq\mu_0(=130)$；$H_1:\mu<\mu_0(=130)$

（2）由于总体方差未知，故检验统计量为：$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

（3）检验的拒绝域为：$\chi_0=\{t<-t_{1-\alpha}(n-1)\}=\left\{\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}<-1.796\right\}$

（4）因统计量的样本值：$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=-1.540\notin\chi_0$，即样本值没有落在拒绝域中，

不能拒绝 H_0，表明卡托普利对肾功能障碍患者无显著效果。

六、（8 分）设某仪器有三个零件，每个零件损坏的概率为 0.2，并且相互独立。当有一个零件损坏时，仪器发生故障的概率为 0.25；当有两个零件损坏时，仪器发生故障的概率为 0.6；当有三个零件损坏时，仪器发生故障的概率为 0.9。求：
（1）仪器发生故障的概率；
（2）当仪器发生故障时，是因为三个零件都损坏的概率。

解：设A_i表示"……零件损坏"，$i=1,2,3$，则

(1) 设 A_i：i个零件损坏

B：仪器故障

$P(B_0)=0.8^3=0.512$，$P(B_1)=0.384$，$P(B_2)=0.096$，$P(B_3)=0.008$，

$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(B|A_i)P(A_i)$

$P(A|B_0)=0$，$P(A|B_1)=0.25$，$P(A|B_2)=0.6$，$P(A|B_3)=0.9$。

由全概率公式得：$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=0.1608$，

$=0.25\times(0.2\times0.8^2\times C_3^1)+0.6\times(0.2^2\times0.8\times C_3^2)$
$+0.9\times0.2^3$
$=0.096+0.0576+0.0072$
$=0.1608$

(2) $P(A_3|B)=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{\ }$ 0.0072

$= \frac{}{0.1608} = 0.0448$

令 $\alpha = 0.025$

$u < u_\alpha = |u_{1-\frac{\alpha}{2}}| = u_{0.975} = 1.96$

由贝叶斯公式得：$P(B_3|A)=\frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(A)}=0.0448$。

∴ 有 0.975 把握认为有效