《高等数学》Ⅱ—Ⅰ课程教案

一.　课程名称：高等数学 ii　\Calculus ii

二.　学时与学分：80 学时　5 学分

三.　适用专业：大面积工科和经管类（理科）专业。

四.　课程教材：《高等数学》，　重庆大学主编，高等教育出版社

1．陈传璋等编，《数学分析》，高等教育出版社，北京，1983。
2．刘玉链等编，《数学分析讲义》，高等教育出版社，北京，1992。
4．李心灿编，《高等数学应用 205 例》，高等教育出版社，北京，1986。
5．喻德生等编，《高等数学学习引导》，化学工业出版社，北京，2003。
6．菲赫金哥尔茨编，《数学分析原理》，吴视人等译，人民教育出版社，1957。
7．胡乃　　等译，《微积分》高等教育出版社
8．马知恩等编，《工科数学分析基础》高等教育出版社

五.　课程的性质、目的和任务：高等数学是工科大学生最重要的基础理论课之一，它作为工程教育中的一个重要内容，目的在于培养工程技术人员必备的基本数学素质。任务：通过本课程的学习，使学生理解微积分中极限、导数、积分等基本概念；掌握基本的运算技巧；使学生能用所学的知识去解决各种领域中的一些实际问题；训练学生数学推理的严密性，使学生具有一定的数学修养和对实际问题具有抽象、归纳、推广的能力，能用数学的语言描述各种概念和现象，能理解其它学科中所用的数学理论和方法；培养学生学习数学的兴趣，帮助学生养成自学数学教材和其它数学知识的能力，为以后学习其它学科打下良好的基础。

六、**教学方式（手段）：**主要采用讲授新课的方式

第一章 极限论

一、教学目标与基本要求

1、理解函数的概念，会求函数的定义域、表达式及函数值。会求分段函数的定义域、函数值，并会作出简单的分段函数图像，掌握函数的表示方法。

2、了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性。

3、理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念。

4、掌握基本初等函数的性质及其图形。

5、会建立简单应用问题中的函数关系式。

6、理解极限的概念，理解函数在极限与右极限的概念，以及极限存在与左、右极限之间的关系。

7、掌握极限的性质及四则运算法则。

8、掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法。

9、理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限。

10、理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型。

11、了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值、最小值定理和介值定理），并会应用这些性质。

二、教学内容及学时分配：

第一节	微积分的一些基本问题	
第二节	映射与函数	课时
第三节	数列的极限	课时
第四节	函数的极限	课时
第五节	函数极限与连续	课时

三、教学内容的重点及难点：

1．数列的极限、函数的极限的概念
2．极限的性质及四则运算法则；
3．极限存在的两个准则，利用两个重要极限求极限；
4．无穷小的比较，用等价无穷小求极限；
5．闭区间上连续函数的性质。

四、教学内容的深化和拓宽：

1．数列极限的的深刻背景，函数极限的几何意义；
2．两个重要极限、等价无穷小的应用；
3．极限与无穷小的关系；
4．连续的实质，闭区间上连续函数的性质，用介值定理推证一些简单命题。

五、思考题与习题

六、教学方式（手段）

本章主要采用讲授新课的方式。

第一节 微积分的一些基本问题

高等数学与初等数学的差别在于研究对象的不同，初等数学主要是以常量为研究对象，而高等数学主要是以变量为研究对象，变量与变量之间通过函数联系，所以函数的概念是高等数学中的一个基本概念。高等数学的另一基本概念是极限，高等数学中的重要内容之一是微积分，而微分、积分这两大概念均是通过极限来定义的，可见极限概念的重要性。高等数学的概念、理论来源于生产实际，它的重要性胜过望远镜对天文学，显微镜对生物学的重要性。

下面通例子说明高等数学的基本思想与方法。

一、面积问题

1．圆的面积

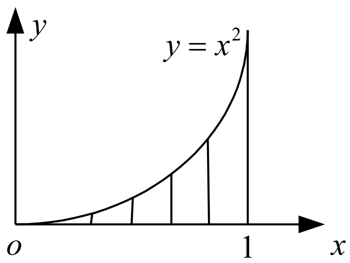
在初等数学中，我们知道矩形、三角形、梯形、正多边形、圆等图形的面积公式，比如圆的面积是怎么得来的呢？

首先，正n边形的面积公式为$A_n=\dfrac{1}{2}l_nh_n$，l_n—正n边形的周长，h_n—边心距。

其次，圆的面积可看成是正多边的面积逼近。当正多边的边数n无限增大时，圆的面积与正多边形的面积越来越接近，正多边形面积的极限值即为圆的面积。

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}l_nh_n=\frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot r=\pi r^2.$$

2．曲边三角形的面积



求如图所示的曲边三角形的面积

为了简单起见，将$[0,1]$区间n等份，每个小区间的长度为$\dfrac{1}{n}$。用小矩形的面积$\left(\dfrac{i}{n}\right)^2\cdot\dfrac{1}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$近似代替对应的曲边梯形的面积，曲边三角形的面积近似值为

$$S_n=\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2)=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

这种近似代替随着n的增大其近似程度越高，当$n\to\infty$时的极限值即为曲边三角形的面积

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}.$$

上面两个例子实际上是极限思想在几何上的应用，主要方法是“以直代曲”。

3．切线问题

4．变速直线运的瞬时速度问题（这两个问题在给出导数定义时讲）

第二节　映射与函数

一、内容要点

基本概念

集合, 区间, 邻域, 常量与变量, 绝对值.

函数的概念

函数的特性：有界性,单调性,奇偶性,周期性.

反函数,复合函数,基本初等函数与初等函数

二、教学要求和注意点

本部分属基本概念，对其中的每一个定义都应加以仔细推敲，透彻理解和牢固其精神实质，从而为学习本课程奠定好基础。

从实际问题建立变量之间的关系是数学应用与实际问题的第一步，也是比较困难的一步，要注意这方面的训练，以便逐步培养分析问题解决问题的能力。

讲稿内容

高等数学与初等数学的差别就在于研究对象的不同，高等数学是以变量为研究对象的一门学科，变量之间通过函数联系，而初等数学的研究对象则基本上是常量。因此首先我们介绍一些基本基本概念，如集合、常量、变量、函数等。

一、集合

集合是数学中的一个基本概念，在我们的日常生活中经常使用，如全班、全年级、全校、全国的学生均构成集合，商店的所有电视机或所有冰箱或所有衣服等也都构成集合，全体实数构成一个集合，等等。

1 集合的的概念

集合是指具有某种特定性质的事物的全体（总体）。组成这个集合的事物称为该集合的元素。

集合一般用大写字母$A,B,C,\cdots$来表示，其中的元素用小写字母$a,b,c,\cdots$表示。如果a是集合 A 中的元素，记为$a\in A$，否则记为$a\notin A$。

集合的表示：

列举法：把集合的元素一一列举出来，表成$\{a,b,c,d\}=A$

描述法：把集合的特性描述出来，表成$\{x|x\text{具有某种性质}\}=B$

如：$B=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{(x,y)|x^2+y^2=1,x,y\in R\}$，$C=\{\text{能被3整除的数}\}$

集合的分类：

有限集：组成集合的元素的个数有限。

无限集：元素个数无限。

空集：不含任何元素的集合，记为Φ。如$\{x|x^2+1=0,x\in R\}$

2 集合的运算

（1）子集

语言文字描述：集合 A 的元素都包含在集合 B 中，则称 A 是 B 的子集，记为$A\subset B$（读作 A 包含于 B 或 B 包含 A）。

数学语言描述：$\forall x\in A\Rightarrow x\in B$，则$A\subset B$

图示：

子集具有下列性质：

① $A \subset A$，② $\Phi \subset A$，③ $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$，④ $A \subset B, B \subset A \Leftrightarrow A = B$

（2）并集

语言文字描述：由集合A或集合B的元素所构成的集合，称为A与B的并，记为 $A \bigcup B$（读作A并B）。

数学语言描述：$x \in A, 或 x \in B \Leftrightarrow x \in A \bigcup B = \{x | x \in A, 或 x \in B\}$

图示：

并集具有下列性质：

① $A \bigcup B = B \bigcup A$，② $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$，③ $A \bigcup \Phi = A$，④ $A \bigcup A = A$

⑤ $若 A \subset B, 则 A \bigcup B = B$。

（3）交集

语言文字描述：由同时属于A和B的所有元素所组成的集合，称为A与B的交集，记为 $A \bigcap B$，或 AB（读作A交B）。

数学语言描述：$x \in A, 且 x \in B \Leftrightarrow x \in A \bigcap B = \{x | x \in A, 且 x \in B\}$

图示：

交集满足下列运算规律：

① $A \bigcap B = B \bigcap A$，② $(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C) = A \bigcap B \bigcap C$，③ $A \bigcap \Phi = \Phi$

④ $A \bigcap A = A$，⑤ $若 A \subset B, 则 A \bigcap B = A$，⑥ $(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C)$，$A \bigcup (B \bigcap C) = A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$。

（4）差集、余集

差集的语言文字描述：由属于A但不属于B的所有元素组成的集合，称为A与B的差集，记为 $A - B$，或 $A \setminus B$（读作A差B）。

差集的数学语言描述：$x \in A, 且 x \notin B \Leftrightarrow x \in A - B = \{x | x \in A, 且 x \notin B\}$

差集的图示：

余集的语言文字描述：若B是A的子集，A与B的差集称为B关于A的余集，记为 $\overline{B}_A$，或 B_A^C（读作B关于A的余集）。若所考虑的集合均是集合I的子集，则A关于I的余集简记为 $\overline{B}, 或 B^C$，此时I称为全集

余集的数学语言描述：若 $B \subset A, 则 x \in A - B \Leftrightarrow x \in \overline{B}_A$

余集的图示：

差集、余集满足下列运算规律：

① $\overline{\Phi} = I, \bar{I} = \Phi$

② $\overline{\overline{A}} = A, A \bigcup \overline{A} = I, A \bigcap \overline{A} = \Phi$

③ $若 A \subset B, 则 \overline{A} \supset \overline{B}; 若 A = B, 则 \overline{A} = \overline{B}$

④ $A - \Phi = A, A - I = \Phi$

⑤ $A-B=A\cap\overline{B}=A-A\cap B$

⑥ $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

例 $A=\{x|-1<x<2\},B=\{x|x\geq 0\}$

则 $A\cup B=\{x|x>-1\}$，$A\cap B=\{x|0\leq x<2\}$

$A-B=\{x|-1<x<0\}$，$B-A=\{x|2\leq x\}$

$\overline{B}_R=\{x|x<0\}$，$\overline{(B-A)}_R=\{x|x<2\}$

3.实数及其性质

由于生产的发展，人们对数的认识是逐步深入的。

$$\boxed{\text{自然数 N}}\xrightarrow{\text{添加负整数、零}}\boxed{\text{整数 I}}\xrightarrow{\text{添加分数}}\boxed{\text{有理数}}\xrightarrow{\text{添加无理数}}\boxed{\text{实数}}\xrightarrow{\text{添加纯虚数}}\text{复数}$$

对加法封闭　　对加减乘封闭　对四则运算封闭　　四则乘方　　四则乘开方

反过来，即

$$\text{复数}\begin{cases}\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数及零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{有限小数}\\\text{无限循环小数}\end{cases}\end{cases}\\\text{无理数(无限不循环小数)}\end{cases}\\\text{虚数}\end{cases}$$

实数与数轴上的点可建立一一对应关系。所谓数轴：规定了原点、方向和长度单位的直线，叫数轴。进一步可建立平面、空间直角坐标系，从而把数与形，代数与几何建立联系，代数方程与几何图形建立联系，研究了代数方程也就研究几何图形，研究了几何图形也就研究代数方程。

在数轴上，有理数、无理数、实数是稠密的，即任何两个有理数（无理数、实数）间有无穷多个有理数（无理数、实数）。

4 区间和邻域

为了应用方便，我们引用区间来表示**数集**。

闭区间：$[a,b]=\{x|a\leq x\leq b\}$

开区间：$(a,b)=\{x|a<x<b\}$

半开半闭区间：$(a,b]=\{x|a<x\leq b\}$

半闭半开区间：$[a,b)=\{x|a\leq x<b\}$

以上区间均为有限区间（区间的长度有限）。下列区间为无限（穷）区间。

$(-\infty,b],(-\infty,b),[a,+\infty),(a,+\infty),(-\infty,+\infty)$

高等数学经常用到邻域的概念。

邻域：动点x到定点a的距离小于定长δ的一切点的集合。记为$U(a,\delta)$，即$U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}$，其中定点$a$称为邻域的中心，定长$\delta$称为邻域的半径。邻域实际上是以$a$为中心的开区间，因有$U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$。

该邻域的概念可以推广到多维的情形。

去心邻域：$\overset{\circ}{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\bigcup(a,a+\delta)=U(a,\delta)-\{a\}$

左邻域：$U_{-}(a,\delta)=(a-\delta,a]$，**右邻域**：$U_{+}(a,\delta)=[a,a+\delta)$

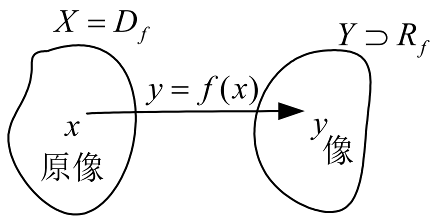
去心左邻域：$\overset{\circ}{U}_{-}(a,\delta)=(a-\delta,a)$，**去心右邻域**：$\overset{\circ}{U}_{+}(a,\delta)=(a,a+\delta)$

二、映射

1 映射的概念

定义　设X,Y是两个非空集合，如果存在法则f，使$x\in X$，按法则f，总有唯一确定$y\in Y$与之对应，则称f为从X到Y的映射，记为$f:X\to Y.$

其中，y称为元素x在映射f下的**像**，记为$f(x)$,即$y=f(x)$，而x称为元素y在映射f下的**原像**。



集合X称为映射f的定义域,记作D_f,即$D_f=X$；X中所有像所组成的集合称为f的值域，记为R_f或$f(X)$，即$R_f=f(X)=\{y|y=f(x),x\in X\}$。

从映射的定义中应注意：

（1）映射的三要素：定义域、值域、法则。

（2）x的像y唯一，但像y的原像则不一定唯一。

（3）$R_f\subset Y$

例：$f:R\to R,y=x^2$是一个映射。（说明上面三条）

例：$f:\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\to[-1,1],f(x)=\sin x$　是一个映射。

一些特殊的映射：

设f是从X到Y的映射，

（1）若$R_f=Y$，称f为X到Y的满射。

（2）若$x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$，称$f$为$X$到$Y$的单射。

（3）既是满射，又是单射，称f为X到Y一一映射（或双射）。

根据集合X，Y的不同情形，在不同的数学分支中，映射（算子）又有不同的名称：

非空集合X到数集Y映射称为X上的**泛函**。

非空集合X到自身的映射称为X上的**变换**。

实数集X到实数集Y的映射称为X上的**函数**。

2 逆映射与复合映射

逆映射：设f是从X到Y的单射，则对$\forall y\in R_f$,存在唯一$x\in X$,使$f(x)=y$，于是可定义一个新的映射$g:R_f\to X,g(y)=x$，称映射g为f的逆映射，记为f^{-1}。

从定义可知：映射的定义域是其逆映射的值域，即 $D_f = X = R_g$，

映射的值域是其逆映射的定义域，即 $R_f = D_g$

如 $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1], f(x)=\sin x$ 是一个单射，

其逆映射 $f^{-1}(x)=\arcsin x, x\in[-1,1]$

复合映射：设有两映射 $g: X \to Y_1, f: Y_2 \to Z, Y_1 \subset Y_2$，

则称 $f\circ g: X \to Z$ 为 g 和 f 构成的复合映射，记为 $f\circ g$，即 $f\circ g(x) = f(g(x))$

三、函数

1 函数的概念

定义：设 X,Y 是两个数集，若 $\forall x\in X$，按照一定的法则 f，总存在（唯一）确定的 $y\in Y$ 与之对应，则称 y是x 的函数，记为

$f: X\to Y$，或 $x \to f(x)$，或 $y=f(x)$。

如 $y=x^2:(-\infty,+\infty)\to[0,+\infty)$

其中 x——自变量，y——因变量，f——法则或规律，X——定义域，用 D_f 表示，值域 $R_f=\{y|y=f(x),x\in X\}\subset Y$。

在纯数学研究中，定义域（自然定义域）是使法则有意义的点的全体。因此，函数的五个因素中，函数的定义域和法则称为函数的两要素，函数的两要素相同，称这两个函数是相等的。

如圆的面积 $A=\pi r^2$

在实际意义下的定义域为 $[0,R]$，只考虑抽象数学表达式时其定义域为 $(-\infty,+\infty)$。

函数分为多值函数与单值函数。

若 $\forall x\in X$，按照一定的法则 f，总存在唯一确定的 $y\in Y$ 与之对应，则称 y是x 的**单值函数**，即上面定义的函数是单值函数。

例如 $y=x^2, y=e^x$ 等

若 $\forall x\in X$，按照一定的法则 f，总存在两个以上的确定的 $y\in Y$ 与之对应，则称 y是x 的**多值函数。**

如关系式 $x^2+y^2=r^2$ 确定一个多值函数，$\forall x\in[-r,r]$，总有 $\pm\sqrt{r^2-x^2}$ 与之对应，所以 y是x 的多值函数。若附加条件，可将多值函数化为单值函数，此时的单值函数称该多值函数的一个单值分支。

如 $x^2+y^2=r^2$ 且 $y\ge 0$，则 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 为单值函数，称为 $x^2+y^2=r^2$ 的一单值支；$y=-\sqrt{r^2-x^2}$ 是 $x^2+y^2=r^2$ 的另一单值支。

例：下列表达式中 y 是否是 x 的函数，并指出定义域、值域。

（1）$y=|x|$，$D_f=[-\infty,+\infty), R_f=[0,+\infty)$

（2）$y=2, D_f=R, R_f=\{2\}$

（3）$x=3$，不是函数

（4） $f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1,x>0\\0,x=0\\-1,x<0\end{cases}$ ，称为符号函数，$D_f=R,R_f=\{1,0,-1\}$。$|x|=x\cdot\operatorname{sgn}x$

（5） $y=\sqrt{-x}$；当 $x\in(-\infty,0]$ 时，是函数，当 $x\in(0,+\infty)$ 时不是函数。

例 下列函数是否相等。

（1） $f(x)=x,g(x)=\sqrt{x^2}$ ， $f(x)\neq g(x)$

（2） $f(x)=\dfrac{x}{x(1+x)},g(x)=\dfrac{1}{1+x},f\neq g$

（3） $f(x)=\sin^2x+\cos^2x,g(x)=1,f=g$

（4） $y=f(x),u=f(t),$ 相等。

例 求函数的定义域

（1） $y=\ln\sin\dfrac{\pi}{x}$；　（2） $y=\dfrac{1}{|x|-x}$

解 要使函数有意义，必有

$\sin\dfrac{\pi}{x}>0\Leftrightarrow 2k\pi<\dfrac{\pi}{x}<2k\pi+\pi\Leftrightarrow\dfrac{1}{2k+1}<x<\dfrac{1}{2k},k=0,\pm1,\pm2,\cdots$（$k=0$ 的区间可单独列出，此时 $x>1$）

（2）$|x|-x\neq0\Leftrightarrow|x|\neq x\Leftrightarrow x<0$

（3）已知 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，问 $f(x^2),f(\sin x),f(x+1)+f(x-1)$ 的定义域。

例　已知 $f(x+1)=x^2-3x+2,$ 求 $f(x),f(x-1)$

例　已知 $f(x+\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2},$ 求 $f(x)$

函数的表示：

（1）**公式法**：用数学式子表示自变量和因变量之间对应关系的方法叫公式法。

优点：准确，简明，便于理论分析；

缺点；不直观，实际问题中遇到的函数关系式很难用公式法表示。

分段函数：用公式法表示函数时，在自变量的不同变化范围中对应的法则用不同式子来表示的函数。

如 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x} & 0\leq x\leq1\\1+x & x>1\end{cases}$ 是一分段函数。

（2）**表格法**：把自变量的值与对应的函数值列成表格，这种表示函数的方法叫表格法。如平方表，对数表，三角函数表等

优点：直观，便于应用。

缺点：不准确，不便理论分析。

（3）**图示法**：用函数的图形（图象）来表示函数的方法。

对于函数 $y=f(x)$， $\forall x\in D,\exists1y=f(x)$ 与 x 相对应，在平面直角坐标系下， x,y 这一有序数对就定出一个点 $M(x,y)$，当 x 变化时，点 $M(x,y)$ 在平面上运动就描绘出一条曲线，这条曲线称为 $y=f(x)$ 的图形。

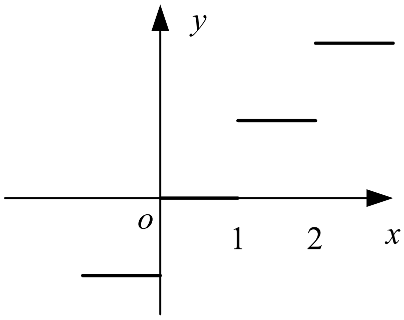
优点：直观

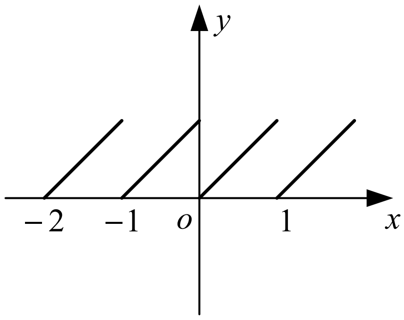
缺点：不准确，不便于理论分析。

（4）**语句法**：用一语句来表达一个函数。

例　“y 是不超过 x 的最大整数”，通常记为 $y=[x]$

$[0.9]=0,[1,2]=1,[5]=5,[-2.8]=-3$ 等，显然满足函数的定义





例　“y 是 x 的小数部分”，通常记为 $y=\{x\}=x-[x]$

$\{1.2\}=0.2,\{9.8\}=0.8,\{7\}=0,\{-0.8\}=0.2,\{-1.9\}=0.1$ 等，显然满足函数的定义。

注：$x=[x]+\{x\}$，$x-1<[x]\le x$

2 函数的特性

（1）有界性：设 $f(x)$ 在 D（定义域的子集）内有定义，若 $\forall x\in D$

$\exists K_1$，使 $f(x)\le K_1$，则称 $f(x)$ 在 D 上有**上界**，K_1 称为 $f(x)$ 在 D 上的一个上界；上界只要存在就不唯一，所有上界的最小者称为 $f(x)$ 在 D 上的**上确界**。

$\exists K_2$，使 $f(x)\ge K_2$，则称 $f(x)$ 在 D 上有**下界**，K_2 称为 $f(x)$ 在 D 上的一个下界；下界只要存在就不唯一，所有下界的最大者称为 $f(x)$ 在 D 上的**下确界**。

$\exists M>0,\forall\in D$，使 $|f(x)|\le M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界，否则**称 $f(x)$ 在 D 上无界**，即 $\forall M>0,\exists x_0\in D$，使 $|f(x_0)|>M$

显然有：

$f(x)$ 在 D 上有界 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 D 上既有上界，又有下界。即

$\exists M>0$，使 $|f(x)|\le M$ $\Leftrightarrow\exists k_1,k_2$，使 $k_1\le f(x)\le k_2$

如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1)$上有 $1<\dfrac{1}{x}<+\infty$，故 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1)$上有下界，无上界。

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$(1,5)$上有 $\dfrac{1}{5}<\dfrac{1}{x}<20$，故 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$(1,5)$上既有下界，也有上界。

又如 $-10<\sin x<10$，$\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上既有上界，也有下界，故有界。

注意：$\sin x,\cos x,\arcsin x,\arccos x,\arctan x,arc\cot x$ 为有界函数（在其整个定义域内有界）

（2）单调性

语言文字描述：若 $f(x)$在(a,b) 上的函数值随自变量 x 的增大而增大或随 x 的减小而减少，则称 $f(x)$在(a,b) 上是单调增加的；

若 $f(x)$在(a,b) 的函数值随自变量 x 的增大而减小或随 x 的减小而增大，则称 $f(x)$在(a,b)上是单调减少的。

数学语言描述：$f(x)$在(a,b)上有定义，$\forall x_1,x_2\in(a,b)$,且$x_1<x_2$

若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$在(a,b)上是单调增加的；（$\Leftrightarrow (x_1-x_2)(f(x_1)-f(x_2))>0$）

若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$在(a,b)上是单调减少的。（$\Leftrightarrow (x_1-x_2)(f(x_1)-f(x_2))<0$）

例 证明 $f(x)=2x+\sin x$在$(-\infty,+\infty)$ 单增。

证：$\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$,且$x_1<x_2$，则

$f(x_1)-f(x_2)=2(x_1-x_2)+\sin x_1-\sin x_2$，

$$\left|\sin x_1-\sin x_2\right|=2\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|\le\left|x_1-x_2\right|=-(x_1-x_2)$$

于是 $f(x_1)-f(x_2)=2(x_1-x_2)+\sin x_1-\sin x_2\le 2(x_1-x_2)-(x_1-x_2)=(x_1-x_2)<0$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单增。

（**3**）**奇偶性**：设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，$\forall x\in D$

若 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数。

若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数。

$f(x)$ 既不是奇函数，也不是偶函数，则称 $f(x)$ 是非奇非偶函数。

例 函数 $f(x)+f(-x)$ 为偶函数，$f(x)-f(-x)$ 为奇函数，且有

$f(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)+f(-x)\right]+\frac{1}{2}\left[f(x)-f(-x)\right]$，即任何一个函数均可表为一个偶函数与一个奇函数之和。

例 讨论下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=\sin x+\cos x$，（2）$f(x)=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$

$$f(-x)=\log_a(-x+\sqrt{1+x^2})=\log_a\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\log_a(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$$

（3）$f(x)=\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}$，奇函数。

奇函数的图形关于原点对称。

因：若点 $(x,f(x))$ 在图形上，则 $(-x,f(-x))=(-x,-f(x))$ 也在图形上，而点 $(x,f(x))$ 与点 $(-x,-f(x))$ 关于原点对称，故图形关于原点对称。

偶函数的图形关于 y 轴对称。

问：函数满足怎样条件时，图形关于 x 轴对称？（关于 y 是偶函数）

奇偶函数的运算：一般地有

奇±奇=奇，偶±偶=偶，奇±偶=非奇非偶

奇×奇=偶，奇×偶=奇，偶×偶=偶

奇÷奇=偶，奇÷偶=奇，偶÷偶=偶

（4）周期性

设 $f(x)$ 的定义域为 D，存在 $T\ne 0$，使 $\forall x\in D$，有 $f(T+x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数。周期是不唯一的，一个周期的任意整数倍仍然是该函数的周期，因

此，我们说周期函数的周期是指它的最小正周期（也叫基本周期）。

如$\sin x, \cos x$以2π等为周期, $\tan x, \cot x$以π等为周期。

但要注意：并不是任何周期函数都有最小正周期，如常数函数以任何实数为周期，显然没有最小正的实数。又如狄立赫莱（Dirichlet）函数:

$$D(x)=\begin{cases}1, 当x为有理数时\\ 0, 当x为无理数时\end{cases}$$

以任何有理数r为周期，但没有最小正周期，事实上

$$D(r+x)=\begin{cases}1, 当x为有理数时(r+x也为有理数)\\ 0, 当x为无理数时(r+x也为无理数)\end{cases}=D(x)$$

结论：

① 周期函数与常数的四则运算仍为周期函数，且周期不变。

② T 是$f(x)$的周期，则kT（k为非零整数）也是$f(x)$周期

③ $f(x)$以 T 为周期，则$f(ax)$是以$\dfrac{T}{a}$为周期。

例 求下列函数的周期。

（1）$f(x)=\sin x+\sin 2x+\sin 3x, T=2\pi$，（2）$g(x)=\sin x+\sin\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{3}, T=12\pi$

（3）$h(x)=\sin x+\sin\sqrt{2}x$，不是周期函数

④ $f(x), g(x)$ 分别是以 T_1, T_2 为周期的函数，若 $\dfrac{T_1}{T_2}=a$（a 为有理数），则 $f(x)+g(x), f(x)g$仍是周期函数。

3 反函数与复合函数

反函数是逆映射的特例。

给定函数$y=f(x)$可以确定$x=\varphi(y)$，则称$x=\varphi(y)$是$f(x)$的反函数，而$y=f(x)$称为直接函数。由于习惯上的原因，反函数$x=\varphi(y)$通常记为$y=\varphi(x)=f^{-1}(x)$

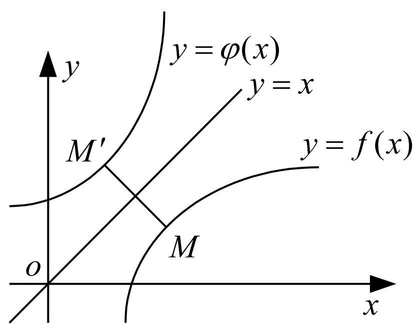
例　$y=2x-1\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}(y+1)$，故所给函数的反函数为$y=\dfrac{1}{2}(x+1)$

例　$y=x^3$的反函数为$y=\sqrt[3]{x}$。

例　$y=x^2, x\in(-\infty,0)$，其反函数为$y=-\sqrt{x}$；$y=x^2, x\in(0,+\infty)$，其反函数为$y=\sqrt{x}$

定理（反函数的存在定理）严格单调增加（减少）函数必有反函数，且其反函数在相应的区间也是严格单调增加（减少）的函数。

反函数与直接函数的关系：



（1)反函数的定义域和值域是直接函数的值域和定义域。

（2）反函数与直接函数有相同的单调性。

（3）函数与其反函数的图形关于直线$y=x$对称。

设$M(a,b)$是$y=f(x)$上的一点，即$b=f(a)$，由反函数的定义$a=\varphi(b)$成立，即$M'(b,a)$是$y=\varphi(x)$上的一点，而点$M(a,b)$与点$M'(b,a)$关于直线$y=x$对称（只

须证 MM' 被直线 $y=x$ 垂直平分），所以它们对应的图形关于 $y=x$ 对称。

复合映射的特例即为**复合函数。**

设 $y=f(u),u=\varphi(x)$且$\varphi(x)$ 的函数值全部或部分在 $f(u)$ 的定义域之内，则 y是x 的函数，称这个函数是由 $y=f(u)$及$u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数，记为 $y=f(\varphi(x))$，u 称为中间变量。

$$y=f(u),u=\varphi(x)\underset{\text{分解}}{\overset{\text{复合}}{\rightleftarrows}}y=f(\varphi(x))$$

例：设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|\ge 1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}0, & |x|\le 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$，求 $f(g(x))$.

解: $f(g(x))=\begin{cases}1, & |g(x)|<1\\ 0, & |g(x)|\ge 1\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$

例　$y=\arcsin u,u=2+x^2$ 不构成复合函数。

4 函数的延拓

定义：如果 $D_g\subset D_f$ 且当 $x\in D_g$ 时 $f(x)=g(x)$ 则称函数 f 是函数 g 的延拓.

例 1 将函数 $f(x)=x,x\in[0,1]$ 延拓成整个实数轴上周期为 2 的偶函数.

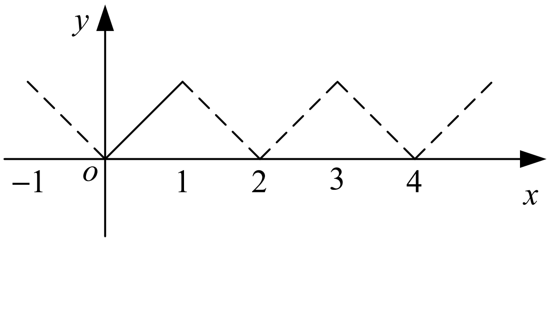
解：先将 f 进行偶性延拓，得函数

$$g(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1\\ -x, & -1\le x\le 0\end{cases}，\text{事实上 } g(-x)=\begin{cases}-x, & 0\le -x\le 1\\ x, & -1\le -x\le 0\end{cases}=\begin{cases}-x, & -1\le x\le 0\\ x, & 0\le x\le 1\end{cases}=g(x)$$

再将函数 g 进行周期延拓，得

$$G(x)=\begin{cases}x-2n, & 2n\le x\le 2n+1\\ -[x-2n], & 2n-1\le x\le 2n\end{cases}\qquad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

或 $h(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1\le x\le 2\end{cases}$，$G(x)=\begin{cases}x-2n, 2n\le x\le 2n+1\\ 2-(x-2n)=-[x-2(n+1)], 2n+1\le x\le 2(n+1)\end{cases}$



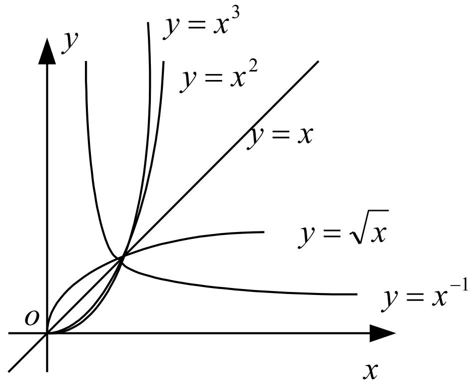
5 初等函数

首先复习五个**基本初等函数**：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数。由这五个基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合，并能用一个式子表示的函数，就是**初等函数**。再介绍一些新的函数。

（1）幂函数 $y=x^{\mu}$

$y=x^{\mu}$ 的定义域 D 随 μ 的改变有所不同，但在 $(0,+\infty)$ 上总有定义。

当 $\mu==1,2,3,\frac{1}{2},-1$ 的图形为：



性质：①在第Ⅰ象限内

$\mu>0$ 时，$y=x^{\mu}$ 单增；

$\mu<0$ 时，$y=x^{\mu}$ 单减。

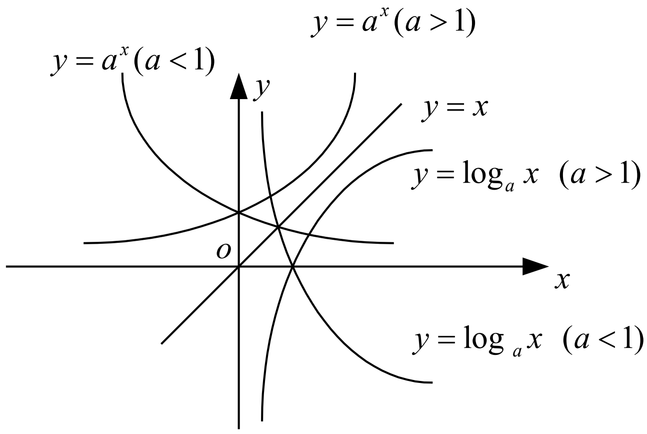
②图形恒过 $(1,1)$

（2）指数函数与对数函数

指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$

①定义域 $(-\infty,+\infty)$，②值域 $(0,+\infty)$

③图形为：



④图形总在 x 轴上方，恒过 $(0,1)$，

$a>1$时,$y=a^x$ 单增， $a<1$时,$y=a^x$ 单减；

⑤ $y=a^x$与$y=(\frac{1}{a})^x$ 的图形关于 y 轴对称。

对数函数（指数函数的反函数） $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$

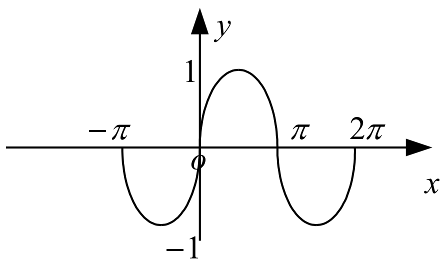
①定义域 $(0,+\infty)$，②值域 $(-\infty,+\infty)$

③图形为：与指数函数的图形关于直线 $y=x$ 对称。

④图形总在 y 轴右方，恒过 $(1,0)$， $a>1$时,$y=\log_a x$ 单增， $a<1$时,$y=\log_a x$ 单减

当 $a=e$ 时，记 $\log_a x=\ln x$，称为自然对数。

（3）三角函数与反三角函数



三角函数

$y=\sin x$

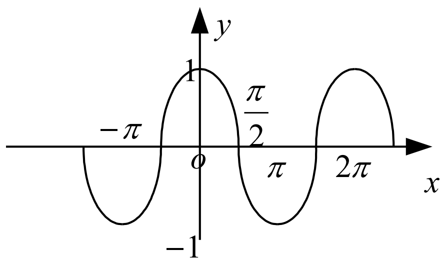
①定义域 $(-\infty,+\infty)$，②值域 $[-1,1]$，③有界，

④奇函数，

⑤单调性：$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 单增，$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ 单减，

⑥周期$T=2\pi$

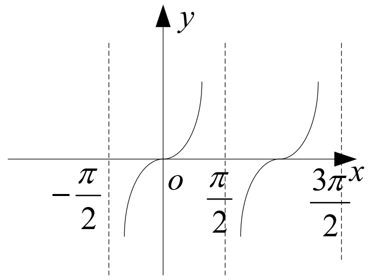
$y=\cos x$



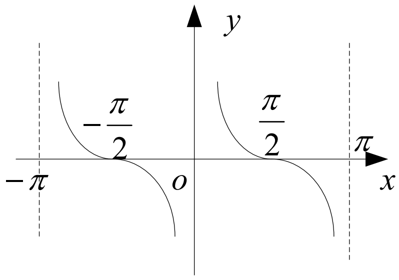
①定义域$(-\infty,+\infty)$，②值域$[-1,1]$，
③有界，④偶函数，
⑤单调性：$[2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi]$单增，$[2k\pi,2k\pi+\pi]$单减，⑥周期$T=2\pi$

$y=\tan x$

①定义域$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，②值域$(-\infty,+\infty)$，③无界，④奇函数，⑤每个定义区间上单增，⑥周期$T=\pi$



$y=\tan x$



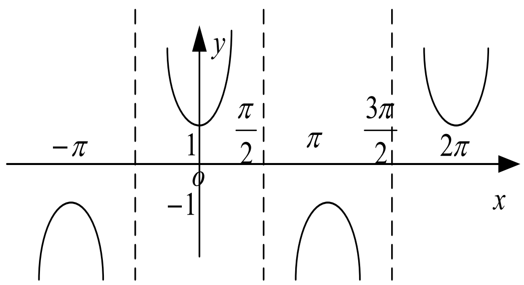
$y=\cot x$

$y=\cot x$

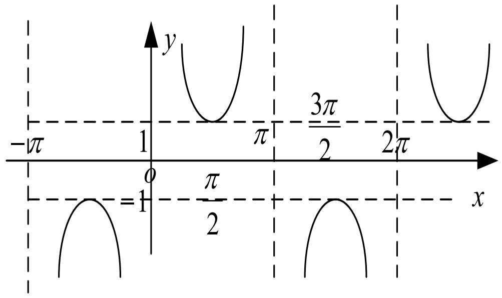
①定义域$x\neq k\pi$，②值域$(-\infty,+\infty)$，③无界，④奇函数，⑤每个定义区间上单减，⑥周期$T=\pi$

$y=\sec x$

①定义域$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，②值域$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，③无界，④偶函数，⑥周期$T=2\pi$



$y=\tan x$



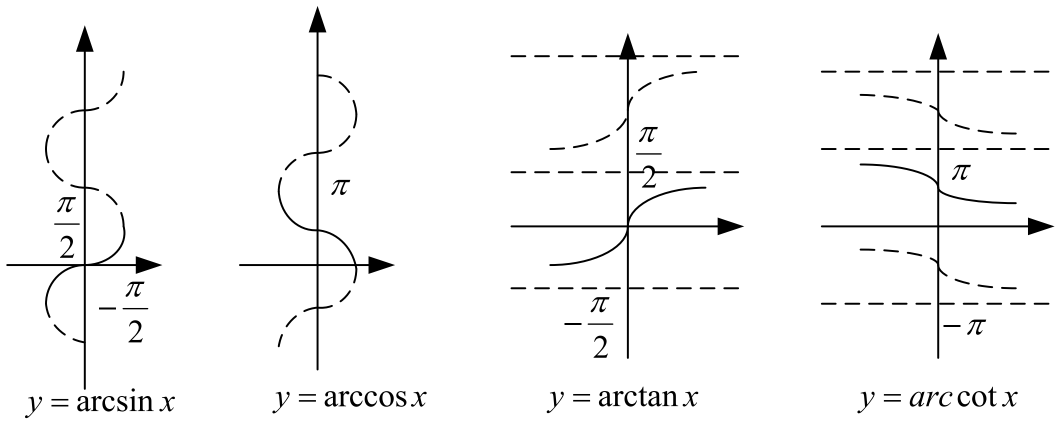
$y=\csc x$

$y=\csc x$

①定义域$x\neq k\pi$，②值域$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，③无界，④奇函数，⑥周期$T=2\pi$

反三角函数：三角函数的反函数称为反三角函数。
反正弦函数：$y=Arc\sin x, D=[-1,1], R=(-\infty,+\infty)$
反余弦函数：$y=Arc\cos x, D=[-1,1], R=(-\infty,+\infty)$
反正切函数：$y=Arc\tan x, D=(-\infty,+\infty), y\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$

反余切函数： $y=Arc\cot x, D=(-\infty,+\infty), y\neq k\pi$



这些函数均是多值函数，如果将函数的值限制在某一区域，即选取函数的单值支，从而得到单值函数，该单值函数称为反函数的主值。

限制 $y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], y=Arc\sin x$ 的主值记为 $y=\arcsin x$

限制 $y\in[0,\pi], y=Arc\cos x$ 的主值记为 $y=\arccos x$

限制 $y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}), y=Arc\tan x$ 的主值记为 $y=\arctan x$

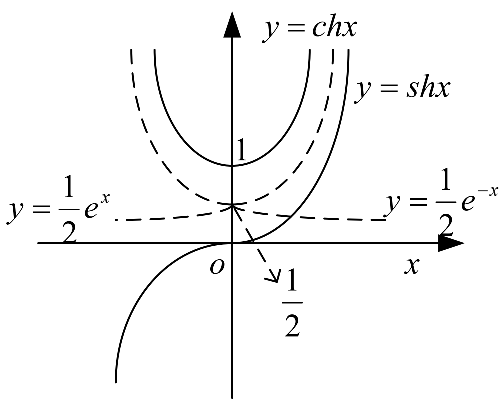
限制 $y\in(0.\pi), y=Arc\cot x$ 的主值记为 $y=arc\cot x$

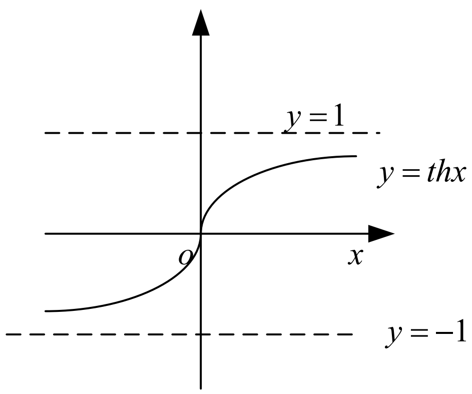
双曲函数

双曲正弦： $y=shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，奇函数，单增

双曲余弦： $y=chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，偶函数，$(-\infty,0)$ 单减，$(0,+\infty)$ 单增。

双曲正切： $y=thx=\frac{shx}{chx}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，奇函数，单增。图形夹在 $y=\pm1$ 之间。





用定义可直接验证下列式子成立：

$sh(x\pm y)=shxchy\pm chxshy$，特别地 $sh2x=2shxchx$

$ch(x\pm y)=chxchy\pm shxshy$，特别地 $ch^2x+sh^2y=ch2x$， $ch^2x-sh^2y=1$

反双曲函数

反双曲正弦：$y=arshx=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，奇函数，单增

反双曲余弦（双曲余弦反函数的主值支）：$y=archx=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，定义域$[1,+\infty)$，单增。

反双曲正切：$y=arthx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$，定义域$(-1,1)$，奇函数，单增。

图形可利用直接函数与反函数的图形关系得到。

亲爱的，你是我的对称轴，如果没有你，我找不到另一半自己；
亲爱的，你是我的值域，如果没有你，我不知道该去哪里；
亲爱的，你是我的公理，如果没有你，我没有一点头绪；
亲爱的，你是我的必要条件，　也许你可以没有我，但是，我绝对不能没有你；
我多么希望我们的爱情是一条直线，只有起点没有终点。

第三节　数列的极限

一、内容要点

（1）数列，数列极限的定义；

（2）收敛的性质：极限的唯一性、收敛数列的有界性、收敛数列的保号性、收敛数列与其子列的关系。

二、教学要求和注意点

数列:研究其变化规律;

数列极限:极限思想、精确定义、几何意义;

收敛数列的性质:有界性、唯一性、子数列的收敛性.

极限理论是高等数学的理论基础。极限概念比较抽象而且严谨，既是学习中的重点也是学习中的难点。因此要逐字逐句地推敲务求领会它的精神实质。

讲稿内容

一、数列极限的定义

1 数列：按照某一法则，使得任意的自然数n都对应着一个确定的数x_n，这列有次序的数$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$叫**数列**，数列中的每个数叫数列的**项**，第n项叫数列的**一般项**。

从数列的定义我们看到：数列实际上是一个特殊函数的函数值的全体，其定义域为自然数集。

例①$1,2,3,\cdots,n,\cdots$　　$x_n=n$

②$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$　　$x_n=\frac{n}{n+1}$

③$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$　　$x_n=\frac{1}{2^n}$

④$1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$

⑤$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$

2 数列的极限

极限的概念是由于求某些实际问题的**精确解**而产生的。如我国古代数学家刘徽利用圆内接正多边形的面积来推算圆的面积的方法——割圆术（“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”），就是极限思想在几何上的一个应用。

首先在圆内作一个内接正六边形，其面积记为A_1

在圆内作一个内接正十二边形，其面积记为A_2

……

在圆内作一个内接正$6\times 2^{n-1}$边形，其面积记为A_n

……

这样就得到圆的内接正多边形面积组成的数列：

$$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$$

在这个数列中，n越大，内接正多边形的面积与圆的面积相差就越小，但不论n如何大，只要取定n，A_n终究只是正多边形的面积，而不是圆的面积。如果我们设想n不取定，而是“无限增大”，那么A_n就“无限地接近”于某一定值，这个定值肯定存在，即圆的面积。这种思想就是极限的思想，在实际问题中形成的这种极限方法已成为高等数学的一

种基本方法。

观察前面的数列②③⑤，也有同样的特点。

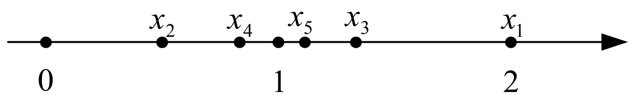
如⑤：$x_n=\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$，当$n$无限增大时，$x_n$无限接近于 1。

但数列①④没有这种特点。

因此<u>**我们讨论的主要问题是**</u>：当n无限增大时，x_n是否趋于一个确定的数，如果是，这个数等于多少。

我们首先要解决的问题是如何用数学语言来描述“无限增大”，“无限接近”这些概念，也就是说如何用数学语言来定义极限这一概念。

先从数轴上看一下，n无限增大，$x_n=\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}$接近于 1 这个过程：



我们知道：任意两点的接近程度可用两点的距离表示，x_n无限接近于 1，就是x_n与 1 的距离无限接近于 0，事实上，

$|x_n-1|=\left|1+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}\right|=\dfrac{1}{n}$

$|x_n-1|$无限接近于 0，即$|x_n-1|$要多么小就有多小，也就是说：无论你预先给定多么小的一个正数(ε)，我们总能够找到某一项(N)，使从这一项开始的以后各项x_n都有$|x_n-1|$比你给出的数(ε)还要小。事实上，

取$\varepsilon=\dfrac{1}{100}$，要使$|x_n-1|=\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{100}$，只须取$N=100$

取$\varepsilon=\dfrac{1}{1000}$，要使$|x_n-1|=\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{1000}$，只须取$N=1000$

取$\varepsilon=\dfrac{1}{10^{10}}$，要使$|x_n-1|=\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{10^{10}}$，只须取$N=10^{10}$

此时，我们称 1 为数列x_n当n无限增大的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1.$

定义 如果数列$\{x_n\}$与常数a有下列关系：对于任意给定的正数ε，总存在正整数N，使得对于$n>N$时的一切x_n不等式$|x_n-a|<\varepsilon$都成立，则称常数a是数列$\{x_n\}$的极限，或者称数列$\{x_n\}$收敛于a，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,或x_n\to a(n\to\infty)$。如果数列$\{x_n\}$没有极限，则说$\{x_n\}$是发散的。

<u>**极限的定义即**</u>：$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,当n>N时,使|x_n-a|<\varepsilon,则\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

几何解释：$\forall\varepsilon>0,\exists N,使x_{N+1},x_{N+2},\cdots,落入(a-\varepsilon,a+\varepsilon)内$

注：

① $N与\varepsilon$有关，一般ε越小，N越大；但$N与\varepsilon$不是函数关系。

② 据定义，只要找到一个N，使得当$n>N$时有$|x_n-a|<\varepsilon$成立就行了，不要求满足不等式$|x_n-a|<\varepsilon$的最小N，因此式子$|x_n-a|$可以适当放大后再让其小于ε。

③ ε具有任意性，又有相对固定性。由于ε的任意性，才能刻划$x_n与a$的无限接近；

又由于它的相对固定才能找到数列$\{x_n\}$从那一项N开始，才有$|x_n-a|<\varepsilon$成立。

④ x_n趋于a的过程无形式限定。

⑤ 不能用来求极限，只能验证某数列的极限为某一确定的值。

⑥ 该定义与下面的定义等价：

$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,$当$n>(\geq)N$时,使$|x_n-a|<(\leq)M\varepsilon,$则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，其中 M 为正数。

⑦$\forall\varepsilon>0$，若数列$\{x_n\}$落在$U(a,\varepsilon)$之外只有有限项，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

⑧在数列中去掉、增加、改变有限项不影响数列的敛散性，收敛时其极限值不变。

悟：在数列极限的解题中只需考虑n充分大。悟人生：过去不重要，将来更重要。人要有极限精神，朝着目标无怨无悔、逼近、再近、…

例 已知$x_n=\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}$，证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$

证：$\forall\varepsilon>0$，

要使$|x_n-1|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$

只须$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$

取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$

则当$n>N$时，有$|x_n-1|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$

知识是学来的
能力是练来的
聪慧是悟来的

例 已知$x_n=\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$，证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

证 1：$\forall\varepsilon>0$，要使$|x_n-0|=\dfrac{1}{(n+1)^2}<\varepsilon$

只须$n>\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}-1$，取$N=\max\left\{\left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}-1\right],1\right\}$

则当$n>N$时，有$|x_n-0|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

证 2：$\forall\varepsilon>0$，要使$|x_n-0|=\dfrac{1}{(n+1)^2}<\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$

只须$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$

则当$n>N$时，有$|x_n-0|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

注意比较两种证明，并说明前面“定义注②”

例 证$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^5}{n^8+3n+2}=0$（必须放大）

<u>**从上面的例子可以看到**</u>：在利用数列极限定义来验证常数a是x_n的极限时，只须指出定义中的N确实存在，使N以后的各项满足$|x_n-a|<\varepsilon$。如何找N呢？假设$|x_n-a|<\varepsilon$成立，把其中的n当作未知数求解，其解一定是$n>(与\varepsilon有关的表达式)$，然后把表达式取整，因为N表示的是数列的项。由于不需要找最小的N，因此式子$|x_n-a|$可以适当放大。

例　设$|q|<1, x_n=q^{n-1}$，证$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$

证：$\forall\varepsilon>0$，要使$|x_n-0|=|q|^{n-1}<\varepsilon$

只须$n>1+\log_{|q|}\varepsilon=1+\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$，取$N=\max\left\{\left[1+\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right],1\right\}$

则当$n>N$时，有$|x_n-0|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$

例　证$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$

证：不妨设$a>1$，当$0<a\le 1$时，同理可证。

$\varepsilon>0$，要使$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon$，只须$n>\dfrac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}$

取$N=\left[\dfrac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}\right]$，则当$n>N$时，有$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$。

例　证明数列$0.1,0.11,0.111,\cdots,0.\overbrace{1\cdots1}^{n},\cdots$的极限为$\dfrac{1}{9}$.

证：　$\forall\varepsilon>0$，要使$\left|x_n-\dfrac{1}{9}\right|=\left|\dfrac{\overbrace{11\cdots1}^{n}}{10^n}-\dfrac{1}{9}\right|=\left|\dfrac{\overbrace{99\cdots9}^{n}-10^n}{10^n\times 9}\right|=\dfrac{1}{9\times 10^n}<\varepsilon$

只须$n>\lg\dfrac{1}{9\varepsilon}$，取$N=\left[\lg\dfrac{1}{9\varepsilon}\right]$

则当$n>N$时，有$\left|x_n-\dfrac{1}{9}\right|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{1}{9}$

例　证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$

证明：可用数学归纳法证明$\sqrt[n]{n!}\ge\sqrt{n}$。

$\forall\varepsilon>0$，要使得$|x_n-a|=\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}\le\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$，只须$n>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，

取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right]$，则当$n>N$时，有$\left|\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}-0\right|<\varepsilon$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$。

例　证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

分析：$\forall \varepsilon>0$，要通过不等式$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$解出$n$，必须先放大$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|$。

证明：$\forall n>1$有$h=\sqrt[n]{n}-1>0$，于是

$$n=(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n>1+\frac{n(n-1)}{2}h^2$$

即$n-1>\frac{n(n-1)}{2}h^2$，亦即$h=\sqrt[n]{n}-1<\sqrt{\frac{2}{n}}$，所以

$\forall \varepsilon>0$，要使得$\left|x_n-a\right|=\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\sqrt{\frac{2}{n}}<\varepsilon$，只须$n>\frac{2}{\varepsilon^2}$，

取$N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right]$，则当$n>N$时，有$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

例 2.8 设有一数列$\{x_n\}$，证明：若极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，则算术平均的数列

$$y_n=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

的极限也存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明：设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\forall \varepsilon>0,\exists N,$当$n>N$时，恒有$\left|x_n-a\right|<\varepsilon$。于是

$$\left|y_n-a\right|=\frac{\left|x_1+x_2+\cdots+x_N+x_{N+1}+\cdots+x_n-na\right|}{n}$$

$$\le\frac{\left|x_1-a\right|+\left|x_2-a\right|+\cdots+\left|x_N-a\right|+\left|x_{N+1}-a\right|+\cdots+\left|x_n-a\right|}{n}$$

$$<\frac{\left|x_1-a\right|+\left|x_2-a\right|+\cdots+\left|x_N-a\right|}{n}+\frac{n-N}{n}\varepsilon$$

存在N_1，当$n>N_1$时，$\frac{\left|x_1-a\right|+\left|x_2-a\right|+\cdots+\left|x_N-a\right|}{n}<\varepsilon$

取$N_2=\max(N,N_1)$，则当$n>N_2$时，

$$\left|y_n-a\right|<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明极限发散：

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N$，$\forall n$，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - a| < \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 发散 $\Leftrightarrow$ 任何有限数 a 均不是 $\{x_n\}$ 的极限

$$\Leftrightarrow \forall a, \exists\varepsilon_0 > 0, \forall N, \exists n_0\text{，当 } n_0 > N \text{ 时，有 } |x_{n_0} - a| \geq \varepsilon$$

给出两种定义的几何解释

例 证明数列 $\{(-1)^n\}$ 发散。

证明：$\forall a \geq 0$，取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$，对任意的 N，当 $n_0 = 2k+1$ 时，有

$|(-1)^n - a| = |-1-a| \geq \dfrac{1}{2}$

$\forall a < 0$，取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$，对任意 N，当 $n_0 = 2k > N$ 时，有

$|(-1)^n - a| = |1-a| \geq \dfrac{1}{2}$

综上，$\forall a$，存在 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$，对任意 N，当 $n_0 > N$ 时，有 $|(-1)^n - a| \geq \dfrac{1}{2}$

所以数列 $\{(-1)^n\}$ 发散。

例 证明数列 $\left\{(-1)^n \dfrac{n}{n+1}\right\}$ 发散。

证明：$\forall a \geq 0$，取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$，对任意 N，当 $n_0 = 2k+1 > N$ 时，有

$\left|(-1)^n \dfrac{n}{n+1} - a\right| = \left|-\dfrac{2k+1}{2k+2} - a\right| \geq \dfrac{1}{2}$

$\forall a < 0$，取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$，对任意 N，当 $n_0 = 2k > N$ 时，有

$\left|(-1)^n \dfrac{n}{n+1} - a\right| = \left|\dfrac{2k}{2k+1} - a\right| \geq \dfrac{1}{2}$

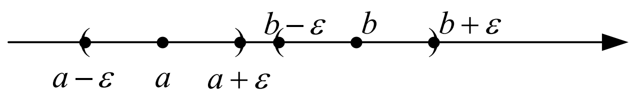
综上，$\forall a$，存在 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$，对任意 N，当 $n_0 > N$ 时，有 $\left|(-1)^n \dfrac{n}{n+1} - a\right| \geq \dfrac{1}{2}$

所以数列 $\left\{(-1) \dfrac{n}{n+1}\right\}$ 发散。

二、收敛数列的性质

定理 1（极限的唯一性） 若数列$\{x_n\}$收敛，则它的极限唯一。

分析 用反证法.假设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b,a<b$,则$\forall\varepsilon>0,\exists N$,当$n>N$时，$x_n$既要落入数轴上的开区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$,同时,又要落入数轴上的开区间$(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$,若两个开区间没有公共部分,即$a+\varepsilon\le b-\varepsilon\Leftrightarrow\varepsilon\le\dfrac{b-a}{2}$,就会产生矛盾.所以只要取$\varepsilon\le\dfrac{b-a}{2}$利用极限的定义均可通过反证法证明收敛数列的唯一定理,而取$\varepsilon=\dfrac{b-a}{2}$对于证明该定理是最方便的.



证：反证法，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，且$a\ne b$，不妨设$a<b$

因$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，所以对$\varepsilon=\dfrac{b-a}{2},\exists N_1>0,$当$n>N_1$时,使$|x_n-a|<\dfrac{b-a}{2}$，

即$\dfrac{3a-b}{2}<x_n<\dfrac{a+b}{2}$

因$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，所以对同样的$\varepsilon=\dfrac{b-a}{2},\exists N_2>0,$当$n>N_2$时,使$|x_n-b|<\dfrac{b-a}{2}$，

即$\dfrac{a+b}{2}<x_n<\dfrac{3b-a}{2}$

取$N=\max\{N_1,N_2\}$，则当$n>N$是，上面两式同时成立，这是不可能的。得证。

例 证明$x_n=(-1)^{n+1}$是发散的。

证（反证法）：设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则对$\varepsilon=\dfrac{1}{10},\exists N>0,$当$n>N$时,使$|x_n-a|<\dfrac{1}{10}$

即$a-\dfrac{1}{10}<x_n<a+\dfrac{1}{10}$，

亦即当$n>N$时，点x_n都要落入区间长度$\dfrac{1}{5}$的开区间$(a-\dfrac{1}{10},a+\dfrac{1}{10})$，这是不可能的。因为$x_n$总是重复地取 1 与$-1$这两个数，不可能同时落入长度只有$\dfrac{1}{5}$的区间内。

悟人生：考查某是否兼职等

定理 2（收敛数列的有界性） 如果$\{x_n\}$收敛，则$\{x_n\}$必有界。

$\{x_n\}$有界：$\exists M>0$，对一切x_n有$|x_n|\le M$

若$x_1>x_2>\cdots>x_n>\cdots$，称数列$\{x_n\}$是单减的；

若$x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots$，称数列$\{x_n\}$是单增的。

证：设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则对$\varepsilon=1,\exists N>0,$当$n>N$时,使$|x_n-a|<1$

从而当$n>N$时，$|x_n|=|x_n-a+a|\le|x_n-a|+|a|\le 1+|a|$

而当$n\le N$时，取$M_1=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots|x_N|\}$，令$M=\max\{M_1,1+|a|\}$

则对一切x_n均有$|x_n|\le M$，所以$\{x_n\}$有界。

推论：$\{x_n\}$无界，则$\{x_n\}$必发散。

定理 3：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$ 且$a>b$，则存在正整数N，当$n>N$时，有 $x_n>y_n$。

与定理 1 的分析一样，只需取$\varepsilon\le\dfrac{a-b}{2}$即可证明。

推论 1：若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，且存在正整数$N$，当$n>N$时，有$x_n>y_n$成立，则$a\ge b$.（反证）.特别地

推论 2（收敛数列的保号性）如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$且$a>b(\text{或}a<b)$，则存在正整数$N>0$，当$n>N$时，都有$x_n>b(\text{或}x_n<b)$.（取$y_n=b$，用定理 3）

推论$2'$（收敛数列的保号性）如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$且$a>0(\text{或}a<0)$，则存在正整数$N>0$，当$n>N$时，都有$x_n>0(\text{或}x_n<0)$.

证：在定理 3 中，取$y_n=0$设$a>0$，取$\varepsilon\le\dfrac{a}{2}$即可证明。

注：从证明过程还可得到结论：$x_n>\dfrac{a}{2}$或$x_n<-\dfrac{a}{2}$等

推论 3：如果$\{x_n\}$从某项起有$x_n\ge b(\text{或}x_n\le b)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$a\ge b(\text{或}a\le b)$

推论$3'$：如果$\{x_n\}$从某项起有$x_n\ge 0(\text{或}x_n\le 0)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$a\ge 0(\text{或}a\le 0)$。

证（反证法）

定理 4（夹挤定理、夹逼定理、两边夹法则）

若（1）$y_n\le x_n\le z_n,n>N$，（2）$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

用夹逼定理来做题时，主要将x_n适当的放大、缩小，且放大缩小后的数列的极限存在相等，则夹在中间的数列x_n的极限也存在且为同一极限。

例 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

例 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$

解：$0\le\left|\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}\right|\le\dfrac{n^{\frac{2}{3}}}{n+1}=\dfrac{n^{-\frac{1}{3}}}{1+\dfrac{1}{n}}\to 0$

例 证明：若 $a_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r<1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

证明：由已知存在 q，使 $r<q<1$，因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r$，由极限的保号性知：存在 N，当 $n\geq N$

时，有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<q\Leftrightarrow a_{n+1}<qa_n<q^2a_{n-1}<\cdots<q^{n-N+1}a_N$（$q$ 的指数与 a 的下标之和为 $n+1$）

即有 $0\leq a_n<q^{n-N}a_N$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}q^{n-N}a_N=0$，由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

例 设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是 k 个正整数，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max\left\{a_1,a_2,\cdots,a_k\right\}=a$$

证明：因为 $a=\sqrt[n]{a^n}\leq\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}\leq\sqrt[n]{ka^n}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}=1$，由夹逼准则知结论成立。

例 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n+5^n}$

法 1：用上面的方法或结论

法 2：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n+5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}5\sqrt[n]{\dfrac{1}{5}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+1}=5$

例 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，

（1）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$

（2）若 $a_n>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$

证（1）前面已证。

（2）因 $a_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，故 $a\geq 0$

①当 $a=0$ 时，由平均值不等式

$$0\leq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$ 及（1）的结论，

由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0=a$

②当 $a\neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a}$，由平均值不等式

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}}\leq\frac{1/a_1+1/a_2+\cdots+1/a_n}{n}$$

于是 $\dfrac{n}{1/a_1+1/a_2+\cdots+1/a_n}\le\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{1/a_1+1/a_2+\cdots+1/a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1/a_1+1/a_2+\cdots+1/a_n}{n}\right)^{-1}\overset{(1)}{=}\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-1}=a$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$

定理 5（收敛数列与其子列间的关系） 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\{x_n\}$ 的一切子列 $\{x_{n_k}\}$ 均收敛，且 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$。

$\{x_n\}$ 的子列：在数列 $\{x_n\}$ 中任意抽取无限多项并保持在原数列中的先后次序，这样得到的一个数列 $\{x_{n_k}\}$ 称为原数列 $\{x_n\}$ 的子数列，简称子列。

$x_n: x_1,x_2,x_3,x_4,\cdots,x_{20},\cdots,x_{30},\cdots,x_{50},\cdots$

$x_{n_k}:\quad x_{n_1}\qquad x_{n_2}\qquad x_{n_3}$

$\boxed{\text{注意}}$：在子列 $\{x_{n_k}\}$ 中，一般项 x_{n_k} 是第 k 项，而 x_{n_k} 在原数列 $\{x_n\}$ 中是第 n_k 项，显然有 $n_k\ge k$，且 $k>l\Leftrightarrow n_k>n_l$

证明：由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，所以 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\text{当}n>N\text{时,使}|x_n-a|<\varepsilon$ 成立。

取 $K=N$，则当 $k>K\text{时},n_k>n_K=n_N\ge N$，于是 $|x_{n_k}-a|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$

或当 $k>K\text{时},n_k>k>K=N$

推论：若数列的两个子列收敛于不同的极限，则该数列一定发散。

例 证明 $x_n=(-1)^{n+1}$ 是发散的

证：取数列的两个子列 $\{y_k\}=\{1\},\{z_k\}=\{-1\}$，显然 $\lim\limits_{k\to\infty}y_k=1,\lim\limits_{k\to\infty}z_k=-1$，所以原数列发散。

定理 6：若数列 $\{x_n\}$ 的所有奇数项构成的子数列 $\{x_{2n-1}\}$ 与所有偶数项构成的子数列 $\{x_{2n}\}$ 都收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=A$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛且极限也为 A.

$\boxed{\text{板书}}$：已知 $\{x_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A.$

证：$\because\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=A,\therefore\forall\varepsilon>0,\exists N_1$，当 $n>N_1$，即 $2n-1>2N_1-1$ 时，有 $|x_{2n-1}-A|<\varepsilon$

又 $\because\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=A$，对上 $\varepsilon,\exists N_2$，当 $n>N_2$，即 $2n>2N_2$ 时，有 $|x_{2n}-A|<\varepsilon$

即 $N=\max\{2N_1-1,2N_2\}$，则当 $n>N$ 时，上面两式同时成立，即不论奇、偶项均有 $|x_n-A|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A.$。

三．数列极限的四则运算法则

数列极限的定义揭示了极限的本质，但利用极限的定义来计算极限是非常困难的.计算极限的最常见的方法还是利用极限的运算法则.

定理 7　设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$ 都存在，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n)$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A \pm B$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n)(\lim\limits_{n\to\infty} y_n) = AB$

(3) 当 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B \neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ 也存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{A}{B}$

问：为什么不限制 $y_n \neq 0$，因为当 $B \neq 0$ 时，必存在 N，当 $n > N$ 时，$y_n \neq 0$（保号性）。

证（2）因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ 及 $M > 0$，当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - A| < \varepsilon, |y_n - B| < \varepsilon \text{，且} |y_n| \leq M$$

从而 $|x_n y_n - AB| = |x_n y_n - Ay_n + Ay_n - AB| \leq |x_n - A||y_n| + |A||y_n - B| < (M + |A|)\varepsilon$

证（3）因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$，当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - A| < \varepsilon, |y_n - B| < \varepsilon \text{，且} |y_n| \geq \frac{|B|}{2}$$

故 $\left|\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{A}{B}\right| = \left|\dfrac{Bx_n - Ay_n}{By_n}\right| = \dfrac{|Bx_n - AB + AB - Ay_n|}{|B||y_n|} \leq \dfrac{|B||x_n - A| + |A||y_n - B|}{|B|\cdot|B|/2} < \dfrac{2(|A| + |B|)}{|B|^2}\varepsilon$

例 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \cdots + b_l} = \begin{cases} a_0/b_0, & k = l \\ 0, & k < l \\ \infty, & k > l \end{cases}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \cdots + b_l} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{k-l} \cdot \dfrac{a_0 + a_1 n^{-1} + \cdots + a_k n^{-k}}{b_0 + b_1 n^{-1} + \cdots + b_l n^{-l}} = \begin{cases} a_0/b_0, & k = l \\ 0, & k < l \\ \infty, & k > l \end{cases}$

例 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 1$

例 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(\sin n!)\left(\dfrac{n-1}{n^2+1}\right)^{10} - \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)n}\right)\dfrac{2n^2+1}{n^2-1}\right]$

解　因$-\left(\frac{n-1}{n^2+1}\right)^{10} \le \sin n! \cdot \left(\frac{n-1}{n^2+1}\right)^{10} \le \left(\frac{n-1}{n^2+1}\right)^{10}$，由夹逼准则知$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n!\left(\frac{n-1}{n^2+1}\right)^{10} = 0$

又因$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n}) = 1$$

故原极限$=-2$

四．收敛准则。

定理 **单调有界数列必有极限**$\Leftrightarrow$单增有上界必有极限，或单减有下界必有极限。

从数轴上看：单调数列对应的点向一个方向移动，只有两种可能①无限远移，②无限接近于某一个固定点。因准则假设有界，故只第②成立。

定义 给定一个实数集E，如果存在一个实数β，满足

（1）$\forall x\in E$，有$x\le\beta$；　　（2）$\forall\varepsilon>0,\exists y\in E$，使得$y>\beta-\varepsilon$。

则称β为数集E的**上确界**，记为$\beta=\sup E$。

定义 给定一个实数集E，如果存在一个实数α，满足

（1）$\forall x\in E$，有$x\ge\alpha$；　　（2）$\forall\varepsilon>0,\exists y\in E$，使得$y<\alpha+\varepsilon$。

则称α为数集E的**下确界**，记为$\alpha=\inf E$。

公理 若实数集E有上界，则必有上确界；若有下界，则必有下确界。

下证：单调增加有上界的数列必有极限

证：设$\{x_n\}$的所有项构成数集E，由题设$\{x_n\}$有上界，故E有上界，从而E必有上确界A，于是

$$x_n\le A,\quad \forall\varepsilon>0,\exists x_N\in\{x_n\}，使\ x_N>A-\varepsilon$$

由于$\{x_n\}$单增，故$n>N$时

$$A+\varepsilon>A\ge x_n\ge x_N>A-\varepsilon\Leftrightarrow|x_n-A|<\varepsilon$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$（**即单调增加有界数列，以其上确界为极限**）。

同理可证：**单调减少有界数数列，以其下确界为极限**。

例 证明$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots,\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n},\cdots$的极限存在。

证明：单调性：显然；

有界性：$x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}\le\sqrt{2+2}=2$

$$x_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\le\sqrt{2+\sqrt{2+2}}\le\sqrt{2+2}=2$$

类推有$x_n\le 2$，所以，已知数列的极限存在。

如何求该数列的极限呢？

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

由已知得：$x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}\Rightarrow x_n^2=2+x_{n-1}$，两边取极限有

$a^2=2+a\Rightarrow a=2,a=-1$（舍去）

例 求数列$\sqrt{a},\sqrt{a+\sqrt{a}},\cdots,\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{n},\cdots(a>0)$的极限。

证：显然单增（也可用数学归纳法证明）即$x_n<x_{n+1}$；

有界性：所给数列一般项为$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}\Rightarrow x_{n+1}^2=a+x_n\Rightarrow x_{n+1}=\dfrac{a}{x_{n+1}}+\dfrac{x_n}{x_{n+1}}$

（为什么会想到变形这一式子？）

因 $\sqrt{a}=x_1<x_{n+1}\Rightarrow \dfrac{a}{x_{n+1}}<\sqrt{a}$,且$\dfrac{x_n}{x_{n+1}}<1$，故 $x_{n+1}<1+\sqrt{a}$，有界性得证。

其极限求与上例类似，其极限为 $\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}+a}.$

例 设

$$A>0,x_0>0,x_1=\frac{1}{2}(x_0+\frac{A}{x_0}),x_2=\frac{1}{2}(x_1+\frac{A}{x_1}),\cdots,x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{A}{x_n}),\cdots,$$

讨论数列$\{x_n\}$的收敛性，若收敛求出其极限.

解：(a) 由 $x_n=\dfrac{1}{2}(x_{n-1}+\dfrac{A}{x_{n-1}})\geq\sqrt{x_{n-1}\cdot\dfrac{A}{x_{n-1}}}=\sqrt{A}$ 知数列$\{x_n\}$有下界。

(b) 又 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{2}(x_n+\dfrac{A}{x_n})-x_n=\dfrac{A-x_n^2}{2x_n}\leq 0$

故数列$\{x_n\}$单调下降.

由$(a),(b)$ 知数列$\{x_n\}$单调下降且有下界，所以数列$\{x_n\}$收敛.设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

对等式$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+\dfrac{A}{x_n})$两边取极限 $n\to\infty$ 得$a=\dfrac{1}{2}(a+\dfrac{A}{a})$

即 $a^2=A$ 但因$\{x_n\}$有下界$\sqrt{A}>0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a=\sqrt{A}$

例：设数列$\{x_n\}$为由下列各式：$x_0=1,x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}(n=0,1,2,\cdots)$ 确定，

(1) 证明数列$\{x_n\}$收敛；(2) 求其极限.

证：(1) 因为$x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}<2$ 故$\{x_n\}$有上界；

下证数列$\{x_n\}$单调增加，即 $x_{n+1}>x_n$　　　　（A）

显然 $x_1>x_0$，即当$n=0$时（A）成立；

假设当$n=k$时（A）成立，即$x_{k+1}>x_k$； 当$n=k+1$时 ，因

$$x_{k+2}-x_{k+1}=(1+\frac{x_{k+1}}{1+x_{k+1}})-(1+\frac{x_k}{1+x_k})=\frac{x_{k+1}}{1+x_{k+1}}-\frac{x_k}{1+x_k}=\frac{x_{k+1}-x_k}{(1+x_{k+1})(1+x_k)}>0$$

即当 $n=k+1$ 时（A）式成立，故数列$\{x_n\}$单调增加有上界，所以它收敛.

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，在等式 $x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{1+x_n}$

两边取极限 $n\to\infty$，得 $A = 1 + \dfrac{A}{1+A}$，$A^2 - A - 1 = 0$

解得 $A_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ，$A_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$（舍去，因 $A>0$）。 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

另证：$|x_n - A| = \left|1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}} - (1+\dfrac{A}{1+A})\right| = \dfrac{|x_{n-1}-A|}{(1+x_{n-1})(1+A)} \le \dfrac{|x_{n-1}-A|}{2} \le \cdots \le \dfrac{|x_1-A|}{2^n} \to 0$

其中用到：$x_{n-1} \ge 1 \Rightarrow 1 + x_{n-1} \ge 2, 1 + A \ge 1$

问题思考：设 $x_n = n$，则 $x_{n+1} = x_n + 1$，设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，则 $A = A+1 \Rightarrow 0 = 1$

例 证明：若 $\{x_n\}$ 单增，$\{y_n\}$ 单减，而 $\{x_n - y_n\}$ 为无穷小量，则 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 必有同一极限。

证明：由已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n - y_n\right) = 0$，故存在 A,B，对任意 n 都有 $A \le x_n - y_n \le B$ 。于是

$$x_1 \le x_n \le y_n + B \le y_1 + B$$

$$y_1 \ge y_n \ge x_n - B \ge x_1 - B$$

即 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 均单调有界，故均收敛，从而

$$0 = \lim_{n\to\infty}\left(x_n - y_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n \text{。}$$

下面利用单调有界准则来讨论一个非常著名的极限，它也是微积分中非常重要的一个极限. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n = e = 2.71828\cdots$

证：令 $x_n = (1+\dfrac{1}{n})^n$，要证 x_n 的极限存在，只须证 x_n 单调、有界。

$$x_n = (1+\frac{1}{n})^n = 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$x_{n+1} = (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1})$$

从第二项开始，x_n 的每一项都小于 x_{n+1} 的对应项，且 x_{n+1} 还多最后一正值项。

所以 $x_n < x_{n+1}$.即单增。

下证 x_n 的有界性：

利用 $n! \geq 2^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

$$x_n = 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}) \leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$\leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} = 3-(\frac{1}{2})^{n-1} \leq 3.$$

所以 x_n 的极限存在。记 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = 2.71828\cdots$

或利用 $\frac{1}{n!} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

$$x_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n} = 1+1+1-\frac{1}{n} \leq 3$$

注：①由前面的证明，有 $x_n = (1+\frac{1}{n})^n < e \Leftrightarrow \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$,一般地，有 $\ln(1+x) < x, x>0$。

也有，数列 $(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ 单减趋于 e，即有 $(1+\frac{1}{n})^{n+1} > e \Leftrightarrow \ln(1+\frac{1}{n}) > \frac{1}{1+n}$

从而 $\frac{1}{1+n} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$，一般地，有 $\frac{1}{1+x} < \ln(1+x) < x, x>0$

② $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$，这一式子在数学上也经常使用。

③ $(n-1)(n+2) \geq n^2, (n>1)$

④ $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，…

无穷小量与无穷大量

定义 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，则称 $\{x_n\}$ 是当 $n\to\infty$ 时的**无穷小量**。

注意：无穷小量不是数，任何数（除零以外）均不是无穷小。

定理 有限个无穷小量的和、差、积均为无穷小。

定理 无穷小与有界变量的积仍为无穷小。

定义 已知数列 $\{x_n\}$，若 $\forall M>0, \exists N$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n|>M$，则称 $\{x_n\}$ 是一个无穷大量，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$。（类似可给出正无穷大量或负无穷大量的定义）

注：

1.几何解释
2.无穷大量不是一个数，任何一个很大的数均不是无穷大量。
3.无穷大量和无界的区别与联系：无穷大量必无界，反之不成立。

如$\left[n+(-1)^n n\right]$无界，但不是无穷大量。

定理 无穷大量的倒数是无穷小量；非零无穷小量的倒数是无穷大量。
定理 有限个正无穷大量的和仍为正无穷大量，有限个负无穷大量的和仍为负无穷大量。
定理 有限个无穷大量的积仍为无穷大量。
定理 有界数列与无穷大量的和、差均为无穷大量。

定理 $\{x_n\}$为无穷大量，$|y_n|\ge\delta>0$，则$\{x_n y_n\}$为无穷大量。

例 证明$x_n=\dfrac{n^2+1}{2n+1},\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$

证：$\forall M>0$，要使得$\left|\dfrac{n^2+1}{2n+1}\right|\ge\dfrac{n^2}{2n+n}=\dfrac{n}{3}>M$，只须$n>3M$

取$N=[3M]$，则当$n>N$时，必有$|x_n|>M$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$。

例 证明$x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$是无穷大量。

证：从第 3 项开始，按 2 项、4 项、8 项，……，加括号，2^m项为

$$x_{2^m}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right)$$

$$\ge1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}=1+m\cdot\frac{1}{2}\to\infty$$

练习

1．用定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3^n}=0$

证明：$\forall\varepsilon>0$，要使$\left|x_n-0\right|=\dfrac{n}{3^n}<(\dfrac{2}{3})^n<\varepsilon$，只需$n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln 2-\ln 3}$，

取$N=\max\left\{\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln 2-\ln 3},1\right\}$

2．设$a_n=\dfrac{a^n}{n!}$，证明：数列$\{a_n\}$收敛，并且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$，其中$a\in R$为任意常数。

证明：（1）当$a=0$时，显然$\{a_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$

（2）$a>0$时，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}\Big/\dfrac{a^n}{n!}=\dfrac{a}{n+1}<1$，当$n>a-1$时。且注意$a_n=\dfrac{a^n}{n!}>0$

即$\{a_n\}$单调减小有下界，故$\{a_n\}$收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=k$，因$a_{n+1}=\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{a}{n+1}a_n$

故$k=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{n+1}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{n+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\cdot k=0$

（3）$a<0$时，则由不等式$-\dfrac{|a|^n}{n!}\le\dfrac{a^n}{n!}\le\dfrac{|a|^n}{n!}$与夹逼准则知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$。

3．设$a_1,a_2,\cdots,a_k$是k个正数，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max(a_1,a_2,\cdots,a_k)$

证：设$\max(a_1,a_2,\cdots,a_k)=A$，于是$A\le\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}\le A\sqrt[n]{k}$

而$\lim\limits_{n\to\infty}A\sqrt[n]{k}=A\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}=A$，所以结论成立。

讨论题

1．设$x_1=2,x_2=2+\dfrac{1}{x_1},\cdots,x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.（注意该数列没有单调性）

解：先求出极限$A=1+\sqrt{2}$，后用极限定义验证。

$$\left|x_n-A\right|=\left|2+\frac{1}{x_{n-1}}-(2+\frac{1}{A})\right|=\frac{\left|x_{n-1}-A\right|}{x_{n-1}A}<\frac{\left|x_{n-1}-A\right|}{4}<\cdots<\frac{\left|x_1-A\right|}{4^n}\to 0$$

2．如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$就有$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=a$，那么有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{a}{a}=1$，对吗？

答：$a\ne 0$时，结论正确。

当$a=0$时，结论不一定正确。

如 $x_n=(\frac{1}{2})^n$， $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}$。

又如 $x_n=\frac{1}{n}[2+(-1)^n]$ ，但 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}\right]$ 不存在。

第四节　函数的极限

一、内容要点

1．函数极限的定义：趋于有限值与无穷、单侧极限；

2．函数极限的性质：唯一性、局部保号性、函数极限与数列极限的关系；

二、教学要求和注意点

极限概念比较抽象而且严谨，既是学习中的重点也是学习中的难点。因此要逐字逐句地推敲务求领会它的精神实质。同时还要注意与数列极限的定义与性质加以区别。

讲稿内容

我们知道数列的通项就是自变量取自然数的函数，因此数列极限可以这样描述：

当自变量n取自然数$\to\infty$，对应的函数值$f(n)\to a$

（如果撇开n取自然数这一特性，将n改为x取实数）

当自变量x取实数$\to\infty$，对应的函数值$f(x)\to a$

当自变量x取实数$\to x_0$，对应的函数值$f(x)\to a$

如$f(x)=x(x\to x_0), f(x)=\dfrac{1}{x}(x\to\infty), f(x)=x^2(x\to 2)$等

因此<u>**函数极限的概念可以这样叙述**</u>：在自变量的某一变化过程中，如果对应的函数值无限地接近于某个确定的常数A，则这个常数A叫做函数在这一变化过程中的极限。

一、自变量x趋于有限值x_0时函数$f(x)$的极限

设$f(x)$在x_0的某去心邻域内有定义，由前面数列极限的讨论知道，

$f(x)\to A$这一过程，可用$|f(x)-A|<\varepsilon$来描述，

$x\to x_0$这一过程，可用$|x-x_0|<\delta$来描述。

这样我们得到$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$的定义。

定义　设$f(x)$在x_0的某去心邻域内有定义，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$。

即$x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$时$,A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$

<u>**注：**</u>

① 定义中$|x-x_0|>0,$即$x\neq x_0$，说明$f(x)$在x_0处的极限存在与否与$f(x)$在x_0处是否有定义无关。如$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

② δ是描述x与x_0接近程度的量，δ与ε,x_0有关，但与x无关。一般ε越小，δ也越小。

③ 并不要求最大的δ，因此$|f(x)-A|$可以适当放大。

④ ε具有任意性，也有相对固定性。

⑤ 不能用来求极限，只能验证函数$f(x)$的极限为某一值。

⑥ 该定义与面的叙述等价：

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时有$|f(x)-A|<M\varepsilon,M>0$。

悟：函数的极限只须考虑x在$\mathring{U}(x_0,\delta)$内取值即可，因此在解题时，可限制x的取值范围在x_0附近。悟人生：由于离x_0较远的地方（左边—过去，右边—将来）可以不考虑，类比为：活在当下（对极限概念理解不深，没考虑极限值，可当作不收敛极限的理解，对人生无望的理解）；积极的理解：此时不努力，更待何时？

极限思想蕴含着丰富的辩证思想,是变与不变、过程与结果、有限与无限、近似与精确以及量变与质变的对立统一。

例 证$\lim\limits_{x\to x_0}C=C$，　　例$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$

例 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$，$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{2(x+1)}=-1$，$\lim\limits_{x\to -3}(\dfrac{1}{3}x+2)=1$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$

从上面的例子我们知道：验证函数极限的题，关键在于找δ，如何找δ呢？假设$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，把其中的$|x-x_0|$当作未知数求解出来。由于不要求最大的δ且δ也不唯一，故$|f(x)-A|$可以适当放大。

例 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

证明：$\forall\varepsilon>0$，要使$|f(x)-0|=\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\le|x|<\varepsilon$，只须$|x|<\varepsilon$，取$\delta=\varepsilon$

则当$|x|<\delta$时，有$|f(x)-0|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

例 当$x_0>0$时，$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$

证：$\forall\varepsilon>0$，要使$\left|f(x)-\sqrt{x_0}\right|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|=\dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\le\dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}<\varepsilon$，

只须$|x-x_0|<\varepsilon\sqrt{x_0}$，同时要保证$x\ge 0$，限制$|x-x_0|<x_0$，取$\delta=\min\left\{\varepsilon\sqrt{x_0},x_0\right\}$。

例 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x}=0$

证：$\forall\varepsilon>0$，令$|x-3|<1,\text{即}2<x<4$

要使$|f(x)-0|=\dfrac{|x-3|}{|x|}<\dfrac{|x-3|}{2}<\varepsilon$，只须$|x-3|<2\varepsilon$，取$\delta=\min\{2\varepsilon,1\}$

例 证明$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}$

证明：$\forall\varepsilon>0$，限制$|x-3|<1\Leftrightarrow 2<x<4$

要使$\left|\dfrac{x-3}{x^2-9}-\dfrac{1}{6}\right|=\left|\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{6}\right|=\dfrac{|x-3|}{6|x+3|}<\dfrac{1}{30}|x-3|<\varepsilon$，只须$|x-3|<30\varepsilon$

取$\delta=\min\{30\varepsilon,1\}$，则$0<|x-3|<\delta$时，$\left|\dfrac{x-3}{x^2-9}-\dfrac{1}{6}\right|<\varepsilon$，于是$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}$。

例 证明$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=3$

证明：$\forall\varepsilon>0$，限制$|x-1|<1\Leftrightarrow 0<x<2$

要使$\left|\frac{x^3-1}{x-1}-3\right|=|x^2+2x-3|=|x-1||x+2|<4|x-1|$，只须$|x-1|<\frac{\varepsilon}{4}$

取$\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{4},1\right\}$

例 证明：若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|A|$

证明：因$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，故$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$0<|x-a|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，于是，也有$\big||f(x)|-|A|\big|\le|f(x)-A|<\varepsilon$，从而$\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|A|$。

注：该结论反之不成立。但$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=0$成立。

单侧极限（左右极限）：x沿x_0的左侧或右侧趋于x_0时，$f(x)$仍趋于一个确定常数A，则称A为$f(x)$的左极限或右极限。

用"$\varepsilon-\delta$"可定义为：

<u>极限定义</u>$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时有$|f(x)-A|<\varepsilon$。

<u>左极限定义</u>$\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=A$：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$x_0-\delta<x<x_0$时有$|f(x)-A|<\varepsilon$。

<u>右极限定义</u>$\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=A$：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$x_0<x<x_0+\delta$时有$|f(x)-A|<\varepsilon$。

由定义易知：$f(x)$在x_0处的极限存在$\Leftrightarrow$ $f(x)$在x_0处的左右极限存在并且相等。

或$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=A$ [或记为$f(x_0-)=f(x_0+)=A$]

分段函数在分段点处的极限需用到单侧极限，数的无穷次方也要用到单侧极限。

例 $f(x)=\begin{cases}x-1,x<0\\0,x=0\\x+1,x>0\end{cases}$，求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

解：$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}(x-1)=-1,\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}(x+1)=1$，故$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在。

例 求$\lim\limits_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]$

解:由于$x-1<[x]\le x$,故$\frac{1}{x}-1\le\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}$

当$x>0$时，$1-x\le x\left[\frac{1}{x}\right]\le 1$,由夹逼准则知$\lim\limits_{x\to 0+}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$

当$x<0$时，$1\le x\left[\frac{1}{x}\right]<1-x$,由夹逼准则知$\lim\limits_{x\to 0-}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$

综上，$\lim\limits_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$。

2 自变量趋于无穷大时函数的极限

定义 $\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当$|x|>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$

几何解释：$\forall\varepsilon>0$，作直线 $y=A\pm\varepsilon$，则 $\exists X>0$，当 $x<-X,或x>X$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图形介于平行线 $y=A\pm\varepsilon$ 间。

同样可以定义 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$， $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$

也有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$

例 证 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

证：$\forall\varepsilon>0$，要使 $|f(x)-A|=\frac{1}{|x|}<\varepsilon$，只须 $|x|>\frac{1}{\varepsilon}$，取 $X=\frac{1}{\varepsilon}$，

则当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

一般地，若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=C$，则称 $y=C$ 为函数 $y=f(x)$ 的水平渐近线。

如上例 $y=0是y=\frac{1}{x}$ 的水平渐近线。

如：因 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$(注意 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在)，

故 $y=\pm\frac{\pi}{2}$ 都是 $y=\arctan x$ 的水平渐近线。

二、函数极限的性质

函数极限的性质与数列极限的性质类似。

定理 1（极限的唯一性）若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，那么这极限唯一。

定理 2（极限的局部有界性）若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则存在常数 $M>0和\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\le M$

证：因 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，所以对 $\varepsilon=1,\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-A|<1$

故 $|f(x)|=|f(x)-A+A|\le|f(x)-A|+|A|\le1+|A|$

定理 3 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，且 $A>B$，则存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>g(x).$

推论 1（极限的局部保号性）若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0(或A<0)$，则存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0(或f(x)<0)$

证：设 $A>0,取\varepsilon<\frac{A}{2}$ 即证。

推论 2 设在 x_0 的某个去心邻域内，$f(x)\ge g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则 $A\ge B$.（反证法）

定理 4（复合函数极限运算法则）

设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0, \lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$, 但在 $\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 内, $g(x)\neq u_0$，

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=A=\lim\limits_{u\to u_0} f(u).$

证：要证 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(g(x))-A|<\varepsilon$，

因 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，所以 $\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0$，当 $0<|u-u_0|<\eta$ 时，有 $|f(u)-A|<\varepsilon$ 成立；

又因 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，对上面 $\eta>0,\exists\delta_1>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，有 $|g(x)-u_0|<\eta$，

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_0\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|g(x)-u_0|<\eta$ 及 $|g(x)-u_0|\neq 0$，

即 $0<|g(x)-u_0|<\eta$，从而 $|f(g(x))-A|=|f(u)-A|<\varepsilon$ 成立。

注：① 定理中的 x_0,u_0 均可为 ∞

② 该定理说明求极限时，可以作代换。$\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))\overset{令g(x)=u}{=\!=\!=\!=} \lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A.$

③ 更一般地，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0, \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq 1$

定理 5(*Heine* 海涅定理) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow$ 对任何以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$ $(x_n\neq x_0)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

证 必要性：由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 得，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ $(x_n\neq x_0)$，

则对于上述的 $\delta>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $0<|x_n-x_0|<\delta$。于是对数列 $\{f(x_n)\}$，当 $n>N$ 时，成立 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$

充分性：用反证法. 设 $f(x)$ 在 x_0 的极限不为 A，用“$\varepsilon-\delta$”语言描述为：$\exists\varepsilon_0>0$, 对于任意的 $\delta>0$，都存在满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x，使得 $|f(x)-A|\geq\varepsilon_0$

取一系列的 $\delta_n=\dfrac{1}{n}$，则存在满足 $0<|x_n-x_0|<\dfrac{1}{n}$ 的 x_n 使得

$$|f(x_n)-A|\geq\varepsilon_0 \tag{8}$$

由 $0<|x_n-x_0|<\dfrac{1}{n}$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，数列 $\{x_n\}$ $(x_n\neq x_0)$ 以 x_0 为极限，但从（8）知 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq A$，这样就得到矛盾.（**充分性的证明可用定理 4。**）

注：因以 x_0 为极限的数列有无限多个，所以用此定理来证明函数在 x_0 的极限存在没有什么意义. 但该定理用于证明函数在 x_0 的极限不存在却很有效. 事实上，以下两种情形都

能说明函数 $f(x)$ 在 x_0 的极限不存在：

（1） 若存在以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在，则 $f(x)$ 在 x_0 的极限不存在；

（2） 若存在以 x_0 为极限的两个数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$ 都存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$，则 $f(x)$ 在 x_0 的极限不存在。

例 证明极限 $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在.

证 令 $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$ 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}, n=1,2,3,\cdots$， $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}, n=1,2,3,\cdots$， 则

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\cos 2n\pi=1$$

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n)=\lim_{n\to\infty}\cos(2n\pi+\frac{\pi}{2})=0$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在.

例 证明：若函数 $f(x)$ 在 R 上是周期函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，则 $\forall x\in R, f(x)\equiv 0$。

证明：设 T 是 $f(x)$ 的周期。

用反证法，设 $\exists x_0\in R$，使 $f(x_0)=a\neq 0$，由周期函数的性质

$f(nT+x_0)=f(x_0)=a\neq 0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(nT+x_0)=a\neq 0$，由海涅定理知

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$（反证，若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(nT+x_0)=0$ ）这与已知矛盾。

定理 6 若（1）在 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$（或 $|x|>M$ 内）有 $g(x)\le f(x)\le h(x)$

（2）$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x)=A$

则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A.$

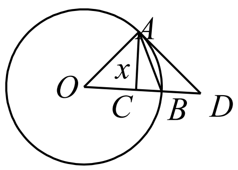
例 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$

证：只须证 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=0$

当 $0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$ 时,$0\le 1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}<2\cdot(\dfrac{x}{2})^2=\dfrac{x^2}{2}$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=0$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$

利用该准则，我们可以证明一个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$



先构造准则Ⅰ中的不等式：作一单位圆，设圆心角 $\angle AOB=x, x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，连接 AB，过 A 作 AB 垂线交 OB 于 C，过 A 作圆的切线交 OB 的延长线于 D，则

$S_{\Delta AOB}<S_{扇AOB}<S_{\Delta AOD}$，

即有 $\dfrac{1}{2}\sin x<\dfrac{1}{2}x<\dfrac{1}{2}\tan x\Rightarrow \sin x<x<\tan x\Rightarrow 1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}\Rightarrow \cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$

上面不等式对 $(-x)$ 也成立，即当 $x\in(-\dfrac{\pi}{2},0)$ 时，上式也成立。

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

因为在求极限的过程中可以作代换，所以 $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1, u$ 为一表达式。

例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1.$

例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1.$

例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}=\dfrac{m}{n}, m\cdot n\ne 0$

例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2=\dfrac{1}{2}.$

例 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(x/2^n)}{x/2^n}\cdot x=x.$

$\overset{\text{或令}x/2^n=t}{=\!=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{x\sin t}{t}=x.$

例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=1.$

例 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}+t)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-\sin t}{t}=-1$

例 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos x\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\right)\right]=1$

$$\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}\div\sin\frac{x}{2^n}$$

$$=\frac{\cos x\cos\frac{x}{2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{\sin\frac{x}{2^n}\cdot 2}$$

$$=\frac{\cos x\cos\frac{x}{2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-2}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-2}}}{\sin\frac{x}{2^n}\cdot 2^2}$$

$$=\frac{\cos x\cdot\cos\frac{x}{2^1}\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2^n}\cdot 2^{n-1}}=\frac{\sin 2x}{\sin\frac{x}{2^n}\cdot 2^{n+1}}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{\sin\frac{x}{2^n}\cdot 2^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}=\dfrac{\sin 2x}{2x}$

证明 $\sin 2x=2\sin x\cos x=2^2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}\cos x=\cdots$

$$=2^{n+1}\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdots\cos\frac{x}{2}\cos x$$

$$\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{x/2^n}{\sin\frac{x}{2^n}}$$，故

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{n\to\infty}\left(\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=1$$

例 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$，求 $a,b.$　　$(a,b)=(1,-\frac{1}{2})$

利用夹逼定理，我们可以证明另一个**重要极限** $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x$ 的极限存在，

记 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

证明分三步：

①当 $x=n$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$，已证。

②当 $x\to+\infty$ 时，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

③当 $x\to-\infty$ 时，有 $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

②证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$，用准则Ⅰ可以证明

$\forall x\in R^+$，必有 $n\le x<n+1\Rightarrow\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{x}\le\dfrac{1}{n}\Rightarrow 1+\dfrac{1}{n+1}<1+\dfrac{1}{x}\le 1+\dfrac{1}{n}$

$$(1+\frac{1}{n+1})^n<(1+\frac{1}{n+1})^x<(1+\frac{1}{x})^x\le(1+\frac{1}{n})^x\le(1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

且 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{1}{n+1})^n=\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{1}{n+1})^{n+1}(1+\dfrac{1}{n+1})^{-1}=e,\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n(1+\dfrac{1}{n})=e$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

③证明 $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$，令 $x=-(1+y)$，则

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim_{y\to+\infty}(1-\frac{1}{1+y})^{-(1+y)}=\lim_{y\to+\infty}(\frac{y}{1+y})^{-(1+y)}=\lim_{y\to+\infty}(\frac{1+y}{y})^{(1+y)}=\lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y})^{(1+y)}=e$$

综上所述 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$，作代换 $x=\frac{1}{y}$ 可得 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$。

例 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x=\frac{1}{e}$

设$[x]=n$，$n\le x\le n+1$，$(1+\frac{1}{n+1})^n\le(1+\frac{1}{x})^x\le(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ $\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left((1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\right)^{\frac{n}{n+1}}=e.\\ \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\cdot(1+\frac{1}{n})=e.\end{cases}$ $\Rightarrow$ 原式$\to e$.

例 $\lim\limits_{x\to1}(1+3\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to1}\left((1+3\ln x)^{\frac{1}{3\ln x}}\right)^3=e^3$

例 $\lim\limits_{x\to0}(1+\tan^2 x)^{3\cot^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\left((1+\tan^2 x)^{\frac{1}{\tan^2 x}}\right)^3=e^3$

例 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2-1+1}{x^2-1})^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left((1+\frac{1}{x^2-1})^{x^2+1}\right)^{\frac{x}{x^2+1}}=e^0=1$

例 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x^2})^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left((1+\frac{-1}{x^2})^{-x^2}\right)^{-\frac{1}{x}}=e^0=1$

$=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x(1+\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left((1+\frac{-1}{x})^{-x}\right)^{-1}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e^{-1}\cdot e=1$

例 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x+5}{2x+3})^x=\cancel{e}=\lim\limits_{x\to\infty}\left((1+\frac{2}{2x+3})^{\frac{2x+3}{2}}\right)^{\frac{2x}{2x+3}}=e^1=e$

例 $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{\cos x}=\lim\limits_{x\to0}[1+\cos x-1]^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x}}=e^0=1$

$\parallel$

$\lim\limits_{x\to0}(1-2\sin^2\frac{x}{2})^{-x}=\lim\limits_{x\to0}\left\{[1+(-2\sin^2\frac{x}{2})]^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}\right\}^{2\sin^2\frac{x}{2}\cdot x}=\lim\limits_{x\to0}e^{2\sin^2\frac{x}{2}\cdot x}=e^0=1$

$\boxed{\text{练习题}}$

证明：$\lim\limits_{x\to1}\ln x=0$

证：$\forall\varepsilon>0$，要使$|\ln x-0|=|\ln x|<\varepsilon$，只须$e^{-\varepsilon}<x<e^{\varepsilon}\Rightarrow e^{-\varepsilon}-1<x-1<e^{\varepsilon}-1$

取$\delta=\min\left\{|e^{-\varepsilon}-1|,|e^{\varepsilon}-1|\right\}$，则当$0<|x-1|<\delta$时，$|\ln x-0|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{x\to1}\ln x=0$

另证：$|\ln x-0|=|\ln x|\le|x-1|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0.\ \exists\delta$，$|x-1|<\delta$时，$|\ln x|<\varepsilon$

当$x\ge1$时 $x<e^{\varepsilon}$ $x-1<e^{\varepsilon}-1$ $|x-1|<e^{\varepsilon}-1$

当$x\in(0,1)$时 $e^{-\ln x}<e^{\varepsilon}$ $\frac{1}{x}<e^{\varepsilon}$ $x-1>\frac{1}{e^{\varepsilon}}-1$ $|x-1|<1-\frac{1}{e^{\varepsilon}}$

$|x-1|<\min\{e^{\varepsilon}-1,1-\frac{1}{e^{\varepsilon}}\}=\delta$

三 无穷小与无穷大

一、内容要点

1．无穷小、无穷小与函数极限的关系

2．无穷大、无穷小与无穷大之间的关系

二、教学要求和注意点

教学要求：

理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量与无穷大量的关系

教学注意点：

无穷小与无穷大是相对于过程而言的.

（1） 无穷小（ 大）是变量,不能与很小（大）的数混淆，零是唯一的无穷小的数；

（2）无穷多个无穷小的代数和（乘积）未必是无穷小；

（3） 无界变量未必是无穷大.

讲稿内容

一、无穷小

定义 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0)$，则称 $f(x)$ 是当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时的无穷小。

或定义为： $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0(X>0)$，当 $0<|x-x_0|<\delta(|x|>X)$ 时有 $|f(x)|<\varepsilon$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0)$。

注意无穷小与很小数的区别：无穷小是这样一个函数，是当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 的过程中，这个函数的绝对值能小于任意的正数 ε。无穷小不是数，任何数（除 0 以外）都不是无穷小。

例 证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1+x}=0$

证：$\forall\varepsilon>0$，要使 $|f(x)|=\left|\dfrac{x}{1+x}\right|\le\dfrac{|x|}{1-|x|}<\varepsilon \quad (|x|<1)$，只须 $|x|<\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$，

取 $\delta=\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon},1\right\}=\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$

则当 $|x|<\delta$ 时，有 $|f(x)-0|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1+x}=0$

定理（极限与无穷小的关系） $\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 α 是无穷小。

证：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

令 $\alpha=f(x)-A$，则 α 是 $x\to x_0$ 时的无穷小，且 $f(x)=A+\alpha.$

反之，由 $f(x)=A+\alpha.$ 知 $\alpha=f(x)-A$，且 α 是 $x\to x_0$ 时的无穷小，

所以 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|\alpha|=|f(x)-A|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$。

二、无穷大

定义 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty)$，则称 $f(x)$ 是当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时的无穷大。

或定义为：$\forall M>0,\exists\delta>0(或X>0),当0<|x-x_0|<\delta(或|x|>X)时,有|f(x)|>M$，则 $f(x)$ 是当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时的无穷大。

当 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty)$ 时，$f(x)$ 的极限是不存在，只是为了叙述方便，我们仍说“函数的极限为无穷大”。

例　证 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-x}=\infty$

证：$\forall M>0$，要使 $|f(x)|=\frac{1}{|x-1|}>M$，只须 $|x-1|>\frac{1}{M}$,取 $\delta=\frac{1}{M}$，

则 $0<|x-1|<\delta$，有 $|f(x)|>M$，　所以 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-x}=\infty$。

一般地，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则 $x=x_0是y=f(x)$ 的铅直渐近线。

如 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\tan x=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+}\tan x=-\infty$

定理 在自变量的同一变化过程中，无穷大的倒数是无穷小，非零无穷小的倒数是无穷大。

四　极限运算法则

一、内容要点

1. 无穷小的运算法则
2. 极限的四则运算法则
3. 复合函数的极限运算法则

二、教学要求和注意点

教学要求：

熟练掌握无穷小的运算法则, 极限的四则运算法则及其推论, 复合函数的极限运算法则,极限求法:

a.多项式与分式函数代入法求极限;

b.消去零因子法求极限;

c.无穷小因子分出法求极限;

d.利用无穷小运算性质求极限;

e.利用左右极限求分段函数极限.

教学注意点：

要注意定理的条件与结论,要注意定理的条件的充分与必要性等.

讲稿内容

本节讨论极限的求法，主要建立极限的四则运算法则。

定理 1 有限个无穷小的和仍为无穷小。

注意无穷多个无穷小的和不一定是无穷小。

如 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{2}n(n-1)=\frac{1}{2}.$

定理 2 有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小。

推论 1 常数与无穷小的乘积仍为无穷小。

推论 2 有限个无穷小的乘积仍为无穷小。

定理 3 若 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$，则

（1）$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B=\lim f(x)\pm\lim g(x)$（可推广到有限多函数的和）

（2）$\lim f(x)g(x)=AB=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$（可推广到有限多函数的积）

进一步有① $\lim Cf(x)=C\lim f(x)$

② $\lim f^2(x)=[\lim f(x)]^2$

③ $\lim f^n(x)=[\lim f(x)]^n$

（3）$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)},B\neq 0$

证（2）：由已知 $f(x)=A+\alpha,g(x)=B+\beta,\alpha,\beta$ 均为同一自变量过程中的无穷小，

则 $f(x)g(x)=AB+A\beta+B\alpha+\alpha\beta\Rightarrow\lim f(x)g(x)=AB$

（3）由极限与无穷小的关系知：$f(x)=A+\alpha,g(x)=B+\beta,\alpha,\beta$ 均为同一自变量过程中的无穷小，要证 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$，只须证 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}+\gamma$，即证 $\gamma=\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}$ 为无穷小。

$\gamma=\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{A}{B}=\dfrac{A+\alpha}{B+\beta}-\dfrac{A}{B}=\dfrac{1}{B(B+\beta)}(B\alpha-A\beta)$，其中$(B\alpha-A\beta)$是无穷小，只须证明$\dfrac{1}{B(B+\beta)}$有界。

$$\because \lim g(x)=B\neq 0,\therefore \exists \mathring{U}(x_0),\text{当}x\in \mathring{U}(x_0)\text{时,有}|g(x)|>\frac{|B|}{2}\Rightarrow\left|\frac{1}{g(x)}\right|<\frac{2}{|B|}$$

故$\left|\dfrac{1}{B(B+\beta)}\right|=\dfrac{1}{|B|}\left|\dfrac{1}{g(x)}\right|<\dfrac{1}{|B|}\cdot\dfrac{2}{|B|}=\dfrac{2}{B^2}$，得证。

另证$\dfrac{1}{B(B+\beta)}$有界：β为无穷小，且$B\neq 0$，所以$\exists\mathring{U}(x_0)$,有$|\beta|<\dfrac{|B|}{2}$，

从而$|B+\beta|>|B|-|\beta|>\dfrac{1}{2}|B|\Rightarrow|B(B+\beta)|>\dfrac{|B|^2}{2}\Rightarrow\left|\dfrac{1}{B(B+\beta)}\right|<\dfrac{2}{|B|^2}$，得证。

也可用海涅定理来证明：

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，任意以$x_0$为极限的数列$x_n$，由数列的运算法则知

$$\lim_{n\to\infty}\left[f(x_n)+g(x_n)\right]=\lim_{n\to\infty}f(x_n)+\lim_{n\to\infty}g(x_n)=A+B$$

再用海涅定理，有$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=A+B=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

例　设$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$,求$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

例$F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$,其中P,Q为多项式，则

$$\lim_{x\to x_0}F(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)} & \text{当}Q(x_0)\neq 0\\ \infty & \text{当}Q(x_0)=0,P(x_0)\neq 0\\ \text{去掉零因子法} & \text{当}Q(x_0)=0,P(x_0)=0\end{cases}$$

例　$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}$.

例　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}=\dfrac{1}{2}$.

例　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}=n$.

例　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=0$.

例　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}(P>0,q>0)=\dfrac{q}{p}$.

例　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{2}{3}$.（利用代换求极限）

例 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n},a_0\neq 0,b_0\neq 0.$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & 当m=n\\ 0, & 当m<n\\ \infty, & 当m>n\end{cases}$

例 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\sin x\arctan\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to 1}\ln x\sin\dfrac{1}{x-1}$.

第五节　函数的连续

一、内容要点

1. 无穷小的比
2. 等价无穷小替换

二、教学要求和注意点

无穷小的比较，反映了同一过程中，两无穷小趋于零的速度快慢，但并不是所有的无穷小都可进行比较. 高(低)阶无穷小；等价无穷小；无穷小的阶.

等价无穷小的代换：求极限的又一种方法，注意适用条件.

讲稿内容

一、无穷小的比较

由前面知，无穷小的和、差、积均为无穷小，而无穷小的商会出现不同的的情况。

例如当 $x \to 0$ 时，$x, x^2, \sin x, \sin 2x, x\sin\frac{1}{x} \to 0$

而它们的商的极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2} = \infty$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = 0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 2$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}$ 不存在。

为什么会出现这样的情况呢？主要是因为：虽然都是无穷小，但趋于 0 的速度不一样，使得它们的商会出现各种不同的情况。

x	0.1	0.01	0.001	$\cdots$	$\to 0$
x	0.1	0.01	0.001	$\cdots$	
x^2	0.01	0.0001	10^{-6}	$\cdots$	

趋于 0 的“快慢”程度，在数学上用“阶”来描述，具体定义如下：

定义 设 α, β 都是自变同一变化过程中的无穷小，且 $\alpha \neq 0$，$\lim\frac{\beta}{\alpha}$ 也是这一变化过程的极限。

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha} = 0$，则说 β 是比 α 高阶的无穷小，记为 $\beta = o(\alpha)$.

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha} = \infty$，则说 β 是比 α 低阶的无穷小；

$\lim\frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$，则说 β 与 α 是同阶无穷小；

$\lim\frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$，则说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小；

$\lim\frac{\beta}{\alpha} = 1$，则说 β 与 α 是等价无穷小，记为 $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$

见前面的例子。

定理（等价无穷小的性质）

（1）反身性$\alpha \sim \alpha$；

（2）对称性$\alpha \sim \beta$，则$\beta \sim \alpha$

（3）传递性$\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma$，则$\alpha \sim \gamma$。

（4）$\alpha \sim \beta, \lambda > 0$，则$\alpha^{\lambda} \sim \beta^{\lambda}$.

（5）$\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$，且$\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = c$，若$c \neq -1$，则$\alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$；

若$c \neq 1$，则$\alpha - \beta \sim \alpha_1 - \beta_1$

证：$\lim \dfrac{\alpha + \beta}{\alpha_1 + \beta_1} = \lim \dfrac{\alpha/\beta + 1}{\alpha_1/\beta + \beta_1/\beta} = \lim \dfrac{\alpha/\beta + 1}{\alpha_1/\alpha \cdot \alpha/\beta + 1} = \dfrac{1+c}{1+c} = 1$

（6）$\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$，则$\alpha\beta \sim \alpha_1\beta_1$

（7）$\alpha \sim \beta$，则$\alpha f(x) \sim \beta f(x)$，$f(x)$局部有界

（8）$\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$，且$\lim(1+\alpha_1)^{\frac{1}{\beta_1}}$存在，则$\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}} = \lim(1+\alpha_1)^{\frac{1}{\beta_1}}$

结论：$\dfrac{0}{0}, (1+0)^{\frac{1}{0}}, 0^0, \infty^0$型中无穷小均可用与之等价的无穷小来替换，只要替换后的极限存在。

在这些无穷小中，等价无穷小在求极限的时候起作重要的作用，这是因为：

定理 设$\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta', \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在，则$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

证明：$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta}{\beta'} \cdot \dfrac{\beta'}{\alpha'} \cdot \dfrac{\alpha'}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

也就是说，在求两个无穷小之商的极限时，分子分母均可用等价无穷小代替。

推论 设$\alpha \sim \alpha', \lim \alpha' f(x)$存在，则$\lim \alpha f(x) = \lim \alpha' f(x)$。

推论 设$\alpha \sim \alpha', \lim \dfrac{f(x)}{\alpha'}$存在，则$\lim \dfrac{f(x)}{\alpha} = \lim \dfrac{f(x)}{\alpha'}$

有下面一些常用的等价无穷小（$u \to 0$）：

① $f(u) \sim f(u)$

② $\sin u \sim u$，$\arcsin u \sim u$，$\tan u \sim u$，$\arctan u \sim u$

③ $\ln(1+u) \sim u$

④ $e^u - 1 \sim u$

⑤ $1 - \cos u \sim \dfrac{1}{2}u^2$　　　　<u>这些等价无穷小也是工程上常用近似公式</u>

⑥ $(1+u)^{\lambda}-1\sim\lambda u$

证③：因 $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=\lim\limits_{u\to 0}\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}=\ln e=1$

证④：$\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u-1}{u}\xlongequal{令 e^u-1=t}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\ln(1+u)}=1$

证⑥：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{\alpha x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha\ln(1+x)}{\alpha x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

例 1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{\sin^3 x}=\dfrac{1}{2}$

错误做法：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{\sin^3 x}=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{6}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}=\dfrac{1}{3}$

但若用更精细的等价无穷小来代替，则又是正确的。

如 $\tan x\sim x+\dfrac{1}{3}x^3,\sin x\sim x-\dfrac{1}{6}x^3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\frac{1}{3}x^3-(x-\frac{1}{6}x^3)}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

这实际上是用了函数的泰勒展式。

例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$

例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 mx}{x^3}=m^3$

例 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2(1-\cos\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\dfrac{1}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$

例 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{2x+3}\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{2x+3}\cdot\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{2x^2+3x}=\dfrac{3}{2}.$

例： 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1}$

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tan x}{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})(e^x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})x}=1$

例： 当 $x\to 1^+$ 时，$\sqrt{3x^2-2x-1}\cdot\ln x$ 是 $(x-1)$ 的几阶无穷小？

解： 因 $\sqrt{3x^2-2x-1}\cdot\ln x=\sqrt{3x+1}\cdot\sqrt{x-1}\cdot\ln[1+(x-1)]$，而当 $x\to 1^+$ 时

$\ln[1+(x-1)]\sim(x-1)$，所以

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{3x^2-2x-1}\cdot\ln x}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{3x+1}\cdot\sqrt{x-1}\cdot\ln[1+(x-1)]}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}=2$$

故$\sqrt{3x^2-2x-1}\cdot\ln x$是$(x-1)$的$\frac{3}{2}$阶无穷小.

例 $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(1+x)-\ln x]=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln(1+\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}x.\frac{1}{x}=1$

例 求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$

解 1：$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\beta x}(e^{(\alpha-\beta)x}-1)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\beta x}(\alpha-\beta)x}{x}=\alpha-\beta.\,(\alpha\neq\beta)$

解 2：$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(e^{\alpha x}-1)-(e^{\beta x}-1)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\alpha x}-1}{x}-\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\beta x}-1}{x}=\alpha-\beta.$

例 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{\sin(x^2-1)}=3$，求$a,b$.

解：由已知等式知$\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+ax+b\right)=0\Rightarrow1+a+b=0$

$$3=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{\sin(x^2-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-(1+a)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1+a)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2+a}{2}$$

于是$a=4,b=-5$。

例 求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+2x^2}}{\ln(1+3x)}$

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+2x^2}}{\ln(1+3x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{3x}-\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+2x^2}-1}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x}{3x}-\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}(2x^2)}{3x}=\frac{1}{6}$

例 选择A及n，使得当$x\to0$时$f(x)=\ln(x^2+\sqrt{1+x^2})$与$g(x)=Ax^n$是等价无穷小。

解： $f(x)=\ln(x^2+\sqrt{1+x^2})=\ln\sqrt{1+x^2}+\ln(1+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}})=\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\ln(1+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}})$

于是，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}})}{x^2}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

所以$A=\frac{3}{2},n=2$时，当$x\to0$时$f(x)$与$g(x)$是等价无穷小。

另解： 当$x\to0$时$f(x)=\ln(x^2+\sqrt{1+x^2})\sim x^2+\sqrt{1+x^2}-1$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=1+\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

例 求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+xe^x)}{\ln(\sin x+\sqrt{1+x^2})}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln(\sin x+\sqrt{1+x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x}{\sin x+\sqrt{1+x^2}-1}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x(\sin x-1-\sqrt{1+x^2})}{\left(\sin x-1\right)^2-\left(1+x^2\right)}=-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin^2 x-2\sin x-x^2}$

$=-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin^2 x}{x}-2\dfrac{\sin x}{x}-x}=-2\times\dfrac{1}{-2}=1$

例 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left(e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\cdot x\ln\dfrac{2+\cos x}{3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\cos x-1}{3}=-\frac{1}{6}\text{。}$$

二、　函数的连续与间断

一、内容要点

1. 函数的连续性
2. 函数的间断点

二、教学要求和注意点

1.函数在一点连续必须满足的三个条件;
2.区间上的连续函数;
3.间断点的分类与判别;

讲稿内容

一、函数的连续性

自然界的许多变化都是连续的，如气温的变化、河水的流动、植物的生长等等，都是连续变化的，这种变化在函数关系上表现为当自变量有一个微小变化时，其函数值也只发生微小变化。为了描述自变量和函数值的变化，我们先引入自变量增量和函数增量的概念。

1 自变量增量、函数增量的概念

给定 $y=f(x)$，

自变量从初值 $x_1\to$终值x_2，则终值与初值之差 x_2-x_1称为自变量的增量，记为 $\Delta x=x_2-x_1$

相应地函数值从 $f(x_1)\to f(x_2)$，则 $f(x_2)-f(x_1)$ 称函数的增量度，记 $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$

也可这样描述增量（改变量）:

$x:x_0\to x_0+\Delta x$，自变量增量为Δx

$f(x):f(x_0)\to f(x_0+\Delta x),\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

或者这样描述增量:

$x:x_0\to x,\Delta x=x-x_0$

$f(x):f(x_0)\to f(x),\Delta y=f(x)-f(x_0)$

后两种是我们常用的增量形式。

如 $y=x^2,\forall x_0\in D$，给 x_0一个增量Δx，则函数的增量为:

$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+\Delta x^2$

从上式可以看到，当Δx发生微小变化时，Δy也只发生微小变化，

即 $\Delta x\to 0$时，$\Delta y\to 0$

2 连续的定义

定义 1　设 $y=f(x)$在 x_0的某个邻域内有定义，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

则称 $y=f(x)$在 x_0处连续。

定义 2 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，若

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

则称 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续。

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} (1)\, f(x)\text{在}x_0\text{处有定义;} \\ (2)\, \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\text{存在;} \\ (3)\, \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\text{存在且与}f(x_0)\text{相等.} \end{cases}$$

定义 3 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0,$ 当$|x-x_0|<\delta$时, 有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则称 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续。

3 单侧连续的概念

连续是用极限来定义的，极限有左右极限之分，相应地，连续也有左右之分。

左连续：$f(x)$ 在 x_0 的左邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 左连续。

右连续：$f(x)$ 在 x_0 的右邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 右连续。

进一步地，由极限存在的充要条件得连续的充要条件。

$f(x)$ 在 x_0 连续的充要条件是 $f(x)$ 在 x_0 左右连续。

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=f(x_0)$

定义了点的连续后，我们可以定义区间连续。

$f(x)$在(a,b)连续： $f(x)$在(a,b)内每点均连续。

$f(x)$在$[a,b]$连续： $f(x)$在(a,b)连续，且 $f(x)$在a右连续，在 b 左连续。

由前面知：多项式 $P(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，有理分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$在$Q(x)\neq 0$的点连续，$y=\sqrt{x}$在$(0,+\infty)$连续，等等。

例 证 $y=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内连续。

证：$x\in(-\infty,+\infty)$，要证 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[\sin(x+\Delta x)-\sin(x)]=0$

由夹逼准则 $0\le|\sin(x+\Delta x)-\sin x|=2\left|\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos(x+\dfrac{\Delta x}{2})\right|\le 2\left|\sin\dfrac{\Delta x}{2}\right|\le|\Delta x|$

知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[\sin(x+\Delta x)-\sin(x)]=0$，所以 $y=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内连续。

同理可证：$\cos x$ **在** $(-\infty,+\infty)$ 内连续

$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

二、连续函数的运算与初等函数的连续性

$\Big(\sin(\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2})-\sin(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2})$

$=s\frac{\alpha-\beta}{2}c\frac{\alpha+\beta}{2}+c\frac{\alpha-\beta}{2}\cancel{s\frac{\alpha+\beta}{2}}-\cancel{s\frac{\alpha+\beta}{2}c\frac{\alpha-\beta}{2}}+c\frac{\alpha+\beta}{2}s\frac{\alpha-\beta}{2}=2s\frac{\alpha-\beta}{2}c\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

一、内容要点

1. 四则运算的连续性
2. 反函数与复合函数的连续性
3. 初等函数的连续性

二、教学要求和注意点

1. 复合函数的连续性的两个意义：

（1）极限符号可以与函数符号互换;

（2） 变量代换($u=\varphi(x)$)的理论依据

2. 初等函数仅在其定义区间内连续,　 在其定义域内不一定连续;（定义区间与定义域的区别）

3. 初等函数求极限的方法代入法

讲稿内容

一、连续函数的和、差、积、商的连续性

定理 连续函数的和、差、积、商（分母不为 0 的点）均连续。

由 $\sin x, \cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 的连续性知， $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 在其定义域内均连续

二、反函数与复合函数的连续性

定理 如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间上严格单调连续，那么它的反函数 $x=\varphi(y)$ 在对应的区间上也是严格单调连续的。

如 $y=\sin x$ 在 $[-\pi/2,\pi/2]$ 上单增连续，

则它的反函数 $y=\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上单增且连续。

又如 $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 单减连续，则 $y=\arccos x$ 在 $[-1,1]$ 单减且连续。

即反三角函数在其定义域内均连续。

定理 设 $u=\varphi(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，而 $y=f(u)$ 在点 $u=a$ 连续，则

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=\lim_{u\to a} f(u)=f(a)=f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x))$$

定理 连续函数的复合是连续。

即 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 连续，而 $y=f(u)$ 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 处连续，则 $y=f(\varphi(x))$ 在 $x=x_0$ 连续。即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x))=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x))$.

如 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 连续。

前面例子已用过此定理，如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1$$

例 已知 $f(x)$ 连续，证明 $|f(x)|$ 也连续，但反之不成立。

证明 1：由 $f(x)$ 连续，可得 $f^2(x)$ 连续，于是 $|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}$ 也连续（幂函数 $u^{\frac{1}{2}}$ 在 $(0,+\infty)$ 连续）。

证明 2: 设 $f(x)$ 在 x_0 连续，由定义 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 于是 $\big||f(x)|-|f(x_0)|\big|\le|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，所以 $|f(x)|$ 也在 x_0 连续。

例子 $f(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 说明反之不成立。

进一步有：若 $f(x),g(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 连续，则

$$\max\left\{f(x),g(x)\right\}=\frac{1}{2}\left(f(x)+g(x)+\left|f(x)-g(x)\right|\right)$$

$$\min\left\{f(x),g(x)\right\}=\frac{1}{2}\left(f(x)+g(x)-\left|f(x)-g(x)\right|\right)$$

在区间 $\left[a,b\right]$ 上也连续。

例 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=A^B$

证：因 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}e^{g(x)\ln f(x)}$，且指数函数 e^u 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ln f(x)=B\ln A$，于是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}e^{g(x)\ln f(x)}=e^{B\ln A}=A^B$

三、初等函数的连续性

结论：基本初等函数在其定义域内均连续。

前面我们得到了三角、反三角函数的连续性。

例 证明指数函数 $f(x)=a^x,0<a\neq 1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续。

证明：（1）先证 $a>1$ 时，$f(x)=a^x$ 在 $x_0=0$ 处连续

①设 $0<x<\dfrac{1}{n}$（n 为正整数），有

$0<a^x-1<a^{\frac{1}{n}}-1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{\frac{1}{n}}-1)=0$，于是 $\lim\limits_{x\to 0+}(a^x-1)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0+}a^x=1=a^0$

②当 $x<0$ 时，令 $x=-y$，则

$$\lim_{x\to 0-}a^x=\lim_{y\to 0+}a^{-y}=\lim_{y\to 0+}\frac{1}{a^y}=1=a^0$$

综上，$\lim\limits_{x\to 0}a^x=1=a^0$，即 $f(x)=a^x$ 在 $x_0=0$ 处连续。

（2）其次，证明 $a>1$ 时，$f(x)=a^x$ 在任意一点 x_0 处连续

因 $\lim\limits_{x\to x_0}(a^x-a^{x_0})=\lim\limits_{x\to x_0}a^{x_0}(a^{x-x_0}-1)=a^{x_0}\lim\limits_{x\to x_0}(a^{x-x_0}-1)=0$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$

故 $f(x)=a^x$ 在任意一点 x_0 处连续。

（3）再，证明 $0<a<1$ 时，$f(x)=a^x$ 在任意一点 x_0 处连续

令 $a=\dfrac{1}{b}$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}a^x=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{b^x}=\dfrac{1}{b^{x_0}}=a^{x_0}$

综合（1）（2）（3）知，指数函数 $f(x)=a^x,0<a\neq 1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续。

由反函数的连续性知 $f(x)=\log_a x$ 在 $(0+\infty)$ 连续。

进一步，$x\in(0+\infty)$ 时 $f(x)=x^\mu=e^{\mu\ln x}$ 连续。

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，只有 μ 为整数或 $\dfrac{m}{2n+1}$ 时 x^μ 才有意义，利用奇偶函数的对称性可知

$f(x)=x^{\mu}$ 在 $(-\infty,0)$ 上也连续。

结论：初等函数在其定义区间内连续。

例 考察 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$ 在其定义域内的连续性。

解：$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ x^2, & |x|>1\end{cases}$

只须讨论分段函数的分界点处的连续性。

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=1=\lim\limits_{x\to 1+}f(x),\ \lim\limits_{x\to -1-}f(x)=1=\lim\limits_{x\to -1+}f(x)$

于是 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上均连续。

例 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax\sin x+b\cos 2x+1}{\sin^2 x}, & x\in[-\dfrac{\pi}{2},0)\cup(0,\dfrac{\pi}{2}]\\ 3, & x=0\end{cases}$，试确定 a,b 使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续。

解：要使 $3=f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax\sin x+b\cos 2x+1}{\sin^2 x}$，必有

$\lim\limits_{x\to 0}\left(ax\sin x+b\cos 2x+1\right)=0\Rightarrow b+1=0\Rightarrow b=-1$

于是，$3=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax\sin x-\cos 2x+1}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax\sin x+1-\cos 2x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax\sin x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=a+2\Rightarrow a=1$$

三、函数的间断

定义　$f(x)$在x_0不连续，则称$f(x)$在x_0处间断。即$f(x)$有下列情形之一

（1）$f(x)$在x_0无定义

（2）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在

（3）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$

则称$f(x)$在x_0不连续，而x_0称为$f(x)$的不连续点或间断点。

间断点的分类：

$$\begin{cases}\text{第一类}: f(x_0-)\text{及}f(x_0+)\text{均存在的间断点}\begin{cases}f(x_0-)=f(x_0+), x_0\text{为可去间断点}\\ f(x_0-)\neq f(x_0+), x_0\text{为跳跃间断点}\end{cases}\\ \text{第二类}: f(x_0-)\text{及}f(x_0+)\text{至少有一个不存在}\begin{cases}\text{为无穷的不存在}, x_0\text{为无穷型间断点}\\ \text{不为无穷的不存在}, x_0\text{为振荡型间断点}\end{cases}\end{cases}$$

例　判断$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$间断点的类型。

解：$f(x)$在$x=1$无定义，$x=1$为间断点。

由于$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=2$，所以$x=1$为可去间断点。

“可去”的含义是可心补充$f(1)=2$，即定义$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$，

则$f(x)$在$x=1$连续

例　$f(x)=\begin{cases}x, & x\neq 1\\ 1/2, & x=1\end{cases}$

解：$x=1$为可去间断点，这里“可去”意思是可重新定义$f(1)=1$，使$f(x)$连续。

例 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x+1, & x>0\end{cases}$

例　$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，$x=0$为振荡型间断间点。

例　$f(x)=\tan x$，$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$为无穷型间断点。

例　$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

例　指出$f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x-1|\sin x}$的间断点，并判断其类型.

解： $x=0,1,k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$为$f(x)$的间断点，

因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{|x-1|\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)}{|x-1|}\cdot\dfrac{x}{\sin x}=-1$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类（可去）间断点；

因 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-x}{|x-1|\sin x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)x}{(1-x)\sin x}=-\dfrac{1}{\sin 1}$，$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-x}{|x-1|\sin x}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)x}{(x-1)\sin x}=\dfrac{1}{\sin 1}$，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类（跳跃）间断点；

因 $\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{x^2-x}{|x-1|\sin x}=\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{(x-1)x}{|x-1|\sin x}=\infty$，所以 $k\pi(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为 $f(x)$ 的第二类（无穷）间断点.

例：讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^n+x^n)}{n}$（$x>0$）在定义域内是否连续.

解：$0<x\le e$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^n+x^n)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln e^n[1+(\frac{x}{e})^n]}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\ln[1+(\frac{x}{e})^n]}{n}=1$

当 $x>e$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^n+x^n)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln x^n[1+(\frac{e}{x})^n]}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\ln x+\ln[1+(\frac{e}{x})^n]}{n}=\ln x$

所以有 $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le e\\ \ln x, & x>e\end{cases}$

由于 $f(e-0)=\lim\limits_{x\to e^-}f(x)=1$，$f(e+0)=\lim\limits_{x\to e^+}f(x)=\lim\limits_{x\to e^+}\ln x=1$，而 $f(e)=1$，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，从而 $f(x)$ 在定义域内连续.

例 求 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ 的间断点并指出类型。

解：$f(0)$ 无意义。当 $x\ne 0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}=\begin{cases}-1, & 0<|x|<1\\ x^2, & |x|>1\\ 0, & |x|=1\end{cases}$

于是，$x=0$ 为可去间断点，$x=\pm 1$ 为跳跃间断点。

练习

1． 求 $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$ 的间断点，并指出它们类型。

解：$t_k=k\pi, s_k=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 均为 $f(x)$ 的间断点。

$x=t_0=0$ 为可去间断点，$x=t_k(k\neq 0)$ 为无穷型间断点。$x=s_k$ 为可去间断点。

2．求 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x<0\\ \dfrac{x^2-1}{\cos\frac{\pi}{2}x}, & x\geq 0\end{cases}$ 的间断点，并指出它们的类型。

五、　闭区间上连续函数的性质

一、内容要点

本节主要讲四个定理：

最大值和最小值定理、有界性定理、介值定理（几何解释）以及零点定理。

二、教学要求和注意点

注意:1.若区间是开区间，　定理不一定成立;

2.若区间内有间断点，　定理不一定成立

讲稿内容

一、有界性与最值定理

定理 1　闭区间$[a,b]$上的连续函数$f(x)$必有最大值和最小值，从而必有界。

即$\exists \xi_1 \in [a,b], 使 f(\xi_1) \ge f(x), \forall x \in [a,b]$，则称$f(\xi_1)$为$f(x)$在$[a,b]$上的一个最大值。

$\exists \xi_2 \in [a,b], 使 f(\xi_2) \le f(x), \forall x \in [a,b]$

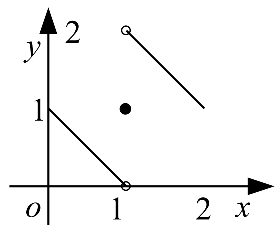
$\exists M > 0, \forall x \in [a,b], 使 |f(x)| \le M = \max\{|f(\xi_1)|, |f(\xi_2)|\}$

定理条件不满足，结论将不一定成立。

如$y = \sin x 在 (0, \pi/2)$无最大值，也无最小值。

$y = \tan x 在 (-\pi/2, \pi/2)$无最值。

又如$y = f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -x+3, & 1 < x \le 2 \end{cases}$



在$[0,2]$有间断点$x=1$，该函数在$[0,2]$上无最值。

二、零点定理与介值定理

定理 2（零点存在定理） $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)f(b) < 0$，则至少存在一点$\xi \in (a,b) 使 f(\xi) = 0$。

定理 3（介值定理） $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$A = f(a) \ne B = f(b)$，则对 A 与 B 之间的任意数 C，至少存在在一点$\xi \in (a,b) 使 f(\xi) = C.$。

推论　闭区间上的连续函数可取得介于最大值与最小值之间的任何值。

例　证明方程$x^3 - 4x^2 + 1 = 0 在 (0,1)$内至少存在一个根。

证：令$f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$，显然$f(x)$在$[0,1]$内连续，且

$f(0) = 1 > 0, f(1) = -2 < 0$，由介值定理知$f(x)$在$(0,1)$至少存在一个根。

例 28： 证明方程 $2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 = 0$在区间$(1,2)$至少存在一个实根.

证： 令$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$，$f(x)$的定义域为$(-\infty, +\infty)$，所以在$(-\infty, +\infty)$内连续，

当然在闭区间$[1,2]$上连续；而$f(1)=-2<0$，$f(2)=5>0$.所以由根的存在定理知$f(x)=2x^3-3x^2+2x-3=0$在区间$(1,2)$至少存在一个实根.

但在实际问题中，方程根的存在范围往往是不知道的，而需要根据方程本身的结构来确定方程根的存在范围.

例 29：估计方程 $x^3-6x+2=0$ 的根的位置.

解：令$f(x)=x^3-6x+2$，显然$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，所以在$(-\infty,+\infty)$内连续.

由于$f(-3)=-7<0, f(-2)=6>0, f(-1)=7>0$，$f(0)=2>0, f(1)=-3<0$，$f(3)=11>0$

所以由根的存在定理知方程$f(x)=x^3-6x+2=0$分别在$(-3,-2),(0,1),(1,3)$内至少各有一个实根.另一方面，$f(x)$为三次多项式，至多有三个实根，所以方程$f(x)=x^3-6x+2=0$恰有三个实根，分别在$(-3,-2),(0,1),(1,3)$内.

例 30：证明任何奇次多项式

$$P(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}\ (a_0\neq 0)$$

至少存在一个实零点.

证：将$P(x)$变形得

$$P(x)=x^{2n+1}(a_0+a_1\cdot\frac{1}{x}+\cdots+a_{2n}\cdot\frac{1}{x^{2n}}+a_{2n+1}\cdot\frac{1}{x^{2n+1}})$$

为简单起见，不妨设$a_0>0$.

于是$\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=-\infty$

由$\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=+\infty$知，存在$X_1>0$，当$x>X_1$时，成立$f(x)>0$

取$x_1>X_1$，则$f(x_1)>0$

由$\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=-\infty$知，存在$X_2>0$，当$x<-X_2$时，成立$f(x)<0$

取$x_2<-X_2$，则 $f(x_2)<0$

由于多项式$P(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，所以在闭区间$[x_2,x_1]$上连续.故由根的存在定理知$P(x)=0$在(x_2,x_1)内至少存在一个实根.这样就证明了多项式$P(x)$至少存在一个实零点.

例 31：设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，并且 $a\le f(x)\le b$，证明在$[a,b]$上至少存在

一点$\xi \in [a,b]$，使得$f(\xi)=\xi$.

注：若点x_0满足$f(x_0)=x_0$，则称x_0为函数$f(x)$的不动点.不动点是数学中的一个非常有用的概念，有许多论述不动点的专著.在几何上看，一元函数的不动点实际上就是曲线$y=f(x)$与直线$y=x$的交点的横坐标（图 1-37）.

证：令 $F(x)=f(x)-x$

显然$F(x)$在$[a,b]$上连续，且$F(a)=f(a)-a\ge 0$，$F(b)=f(b)-b\le 0$.

若$F(a)=0$或者$F(b)=0$，即$f(a)=a$或者$f(b)=b$，则$\xi=a$或者$\xi=b$即满足$f(\xi)=\xi$.

若$F(a)>0$且$F(b)<0$，则由根的存在定理知，存在$\xi\in(a,b)$，使得$F(\xi)=0$即$f(\xi)=\xi$.

例 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，$f(0)=f(1)$。证明：对任何正整数n，存在$\xi\in[0.1]$，使得$f(\xi+\frac{1}{n})=f(\xi).$

证明 令$g(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x)$，显然$g(x)$在$[0,1]$上连续。

$$g(0)=f(\frac{1}{n})-f(0)$$
$$g(\frac{1}{n})=f(\frac{2}{n})-f(\frac{1}{n})$$
$$g(\frac{2}{n})=f(\frac{3}{n})-f(\frac{2}{n})$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$g(\frac{n-1}{n})=f(1)-f(\frac{n-1}{n})$$

于是，$g(0)+g(\frac{1}{n})+g(\frac{2}{n})+\cdots+g(\frac{n-1}{n})=f(1)-f(0)=0$

n个值相加为零，必有$g(\frac{i}{n})g(\frac{j}{n})<0$（$i<j$），除非$g(x)\equiv 0$，于是存在

$\xi\in[\frac{i}{n},\frac{j}{n}]\subset[0.1]$，使$g(\xi)=0$，即$f(\xi+\frac{1}{n})=f(\xi).$

例 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，则在$[x_1,x_n]$上必有ξ，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

证明：因$f(x)$在$[x_1,x_n]$上连续，由最值定理知，存在M,m使

$$m \le f(x_i) \le M, i = 1,2,\cdots n$$

从而 $nm \le f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \le nM$

进一步有 $m \le \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \le M$，由介值定理（推论）知：

在 $[x_1, x_n]$ 上必有 ξ，使 $f(\xi) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$.

$\exists M$ 使 $x \in [a,b]$, $f(x) \le M$

m — — — — — — — $\geq m$

$nm \le f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \le nM$

$m \le \dfrac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} \le M$

$\rightarrow$ 介值