# 第十一章　无穷级数

## 一、本章的教学目标及基本要求：

1、理解常数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念；

2、掌握级数的基本性质及收敛的必要条件；

3、掌握几何级数与 $p-$级数的收敛与发散的条件；

4、掌握正项级数的比较审敛法和比值审敛法，会用根值审敛法；

5、掌握交错级数的莱布尼茨定理；

6、了解任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念，以及绝对收敛与条件收敛的关系；

7、了解函数项级数的收敛域及和函数的概念；掌握幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法；了解幂级数在其收敛区间内的一些基本性质，

8、会求一些幂级数在收敛区间内的和函数，并会由此求出某些数项级数的和；了解函数展开为泰勒级数的充分必要条件；

9、掌握 $\mathrm{e}^x$，$\sin x$，$\cos x$，$\ln(1+x)$ 和 $(1+x)^\alpha$ 的麦克劳林展开式，会用它们将一些简单函数间接展开成幂级数；了解幂级数在近似计算上的简单应用；

10、了解傅里叶级数的概念和函数展开为傅里叶级数的狄利克雷定理，会将定义在 $[-l,l]$ 上的函数展开为傅里叶级数，会将定义在 $[0,l]$ 上的函数展开为正弦级数与余弦级数，会写出傅里叶级数的和函数的表达式。

## 二、本章各节教学内容及学时分配：（　学时）

第一节　常数项级数的概念及性质
第二节　常数项级数的审敛法
第三节　幂级数
第四节　函数展开成幂级数
第五节　函数的幂级数展开式的应用
第七节　傅里叶级数
第八节　一般周期函数的傅里叶级数
本章小结

## 三、本章教学内容的重点和难点：

**重点**：无穷级数的收敛与发散，正项级数的审敛法，幂级数的收敛半径与收敛区间的求法.

**难点**：正项级数的审敛法，幂级数展开，傅立叶级数展开.

## 四、本章教学内容的深化和拓宽：

## 五、本章的思考题和习题：

无穷级数是高等数学的重要组成部分，它是数与函数的一种重要表达形式，也是微积分理论研究与实际应用中极其有力的工具.无穷级数在表达函数（如贝塞尔函数、勒让德函数等）、研究函数的性质、计算函数值以及求解微分方程等方面都有着重要的应用.研究无穷级数及其和，可以说是研究数列及其极限的另一种形式，但无论是研究极限的存在性还是在计算这种极限的时候，这种形式都显示出很大的优越性. 同时,无穷级数的内容也后续课程学习的基础. 本章首先介绍无穷级数的一些基本内容，然后再讨论常数项级数和函数项级数，最后讨论如何将函数展开成幂级数与三角级数的问题.

## 第一节　常数项级数的概念及性质

**讲稿内容**

一、常数项级数概念：

在数学中，有限项相加的意义，大家是知道的，但是要把无穷多个项相加，这又是什么意思呢？这就是无穷级数所要讨论的内容。在生产实践中是否有无穷多项相加的例子呢？特别是无穷多个数相加的例子呢？回答是肯定的，下面我们举几个无穷多个数相加的例子，以便说明无穷级数的概念。

**引例 1**　用逼近的方法计算半径为$R$的圆的面积。

具体做法如下：

① 作圆的内接正六边形，并计算出正六边形的面积为$a_1$，$a_1$可作为圆的面积的粗糙近似。

② 作圆的内接正十二边形：以正六边形的每一边为底边分别作一个顶点在圆周上的等腰三角形，算出这六个等腰三角形的面积为$a_2$，则$a_1+a_2$为圆的内接正十二边形的面积，它可以作为圆的面积的一个较好的近似；

③ 在十二边形的每一边上分别作一个顶点在圆周上的等腰三角形，其面积和为$a_3$，则$a_1+a_2+a_3$为圆的内接正二十四边形的面积，它可以作为圆的面积的一个更好近似。如此继续下去，则内接正多边形的面积越来越接近圆的面积，这样作了$n$次（即$3\times 2^n$边形）的面积为

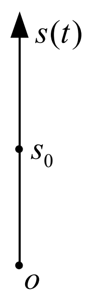
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

④如果边数无限增多，即$n\to\infty$，和式$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$的极限（必定存在）则为圆的面积，这样就出现了无穷多项相加：$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$

**引例 2**　如果一个球从距离地面$s_0$高度下落，每次弹回的高度为前一次高度的一半，空气的阻力忽略不计，球的弹跳过程是否会永无休止？

**分析：** 此问题需要计算球的弹跳过程的总时间 $T$. 如果$T$为有限的正实数，则球的弹跳过程将会终止；如果$T$趋于$+\infty$，则球的弹跳过程将永无休止. 选取坐标如图所示，则球从$s_0$高度下落的过程中，位移和时间的关系为

$$s(t)=s_0-\frac{1}{2}gt^2.$$




设球从$s_0$高度到第一次撞击地面所需的时间为$t_0$，

由$s(t_0)=s_0-\frac{1}{2}g{t_0}^2=0$得：$t_0=\sqrt{\frac{2s_0}{g}}$.

球弹回到一个高度$s_1(s_1=\frac{s_0}{2})$到第二次撞击地面所需的时间为$t_1$：

$$t_1=2\sqrt{\frac{2s_1}{g}}=2\sqrt{\frac{s_0}{g}}.$$

球弹跳一个高度$s_2=\frac{s_0}{2^2}$)到第三次撞击地面所需时间：

$$t_2=2\sqrt{\frac{2s_2}{g}}=2\sqrt{\frac{s_0}{2g}}.$$

一般地，球弹跳一个高度$s_n=\frac{s_0}{2^n}$到第$n$次撞击地面所需时间：

$$t_n=2\sqrt{\frac{2s_n}{g}}=2\sqrt{\frac{s_0}{2^{n-1}g}}.$$

球弹跳无穷多次的总的时间 $T$应为：

$$T=t_0+t_1+t_2+\cdots+t_n+\cdots=\sqrt{\frac{2s_0}{g}}+2\sqrt{\frac{s_0}{g}}+2\sqrt{\frac{s_0}{2g}}+\cdots 2\sqrt{\frac{s_0}{2^{n-1}g}}+\cdots$$

这里也产生了无穷多个数相加的问题。

事实上，在定积分等概念的定义中，也出现了无穷多项相加。

**定义**　给定数列$u_1,u_2,\cdots u_n,\cdots$，则$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$叫做**常数项无穷级数**，或简称**级数**，记为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

其中第$n$项$u_n$叫做级数的一般项。

常数项无穷级数实际上就是无穷多个数相加，那么，这个和式是否具有“和数”呢？从上面求圆的面积的例子来看，是有“和数”的，这个“和数”就是圆的面积，我们看下面无穷级数如何求“和数”：

$1+(-1)+1+(-1)+\cdots$

设$x=1+(-1)+1+(-1)+\cdots=(1-1)+(1-1)+\cdots=0$

或$x=1-(1-1)-(1-1)-\cdots=1$

或$x=1-(1-1)-(1-1)-\cdots=1-x\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

从而$0=1=\frac{1}{2}=\cdots\Rightarrow 16=16+0=16+1=17=17+0=17+\frac{1}{2}=17\frac{1}{2}=\cdots$

这就是数学第二大危机的产生。

因此，无穷级数只是一种形式上的相加，是否具有“和数”还不一定，那么

这个“和数”的确切意义又是什么呢？为了回答这个问题，我们引入**部分和数列**的概念。

令 $S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, \cdots, S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \cdots$

则 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 构成一数列，称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的**部分和数列，** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 $n$ 项和称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的**部分和。**

我们用部分和的极限存在与否来定义级数的“和”是否有意义，即级数收敛与发散的定义。

**定义**　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分数列 $\{S_n\}$ 有极限 $s$，即 $\lim_{n\to\infty} S_n = s$，则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**，其极限值 $s$ 叫做这个**级数的和**，即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$ 。

如果 $\{S_n\}$ 没有极限，称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **发散**。

注：

1．部分和数列 $\{S_n\}$ 与无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 有相同的敛散性，收敛时

$$s = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \lim_{n\to\infty}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n ,$$

这与处理反常积分的定义类似，也体现了有限与无限的对立统一。

2．$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时，$r_n = s - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ 称为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的**余项**，易知：

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

**例**　讨论下列级数的敛散性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

同类题：$\frac{1}{1\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 11} + \cdots + \left(\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}\right) + \cdots$（提问：通项），

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty} n$

（3）$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$

（4）$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ -------**等比级数，或称为几何级数**

解：$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} aq^k = \frac{a(1-q^n)}{1-q}, q \neq 1$

1）当$|q|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a}{1-q}$，收敛。

2）当$|q|>1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$，发散。

3）当$|q|=1$时，

$q=1,S_n=na\to\infty$，发散。

$q=-1,S_n=a-a+a-a+\cdots+(-1)^n a$，极限不存在，发散。

<u>综上所述</u>：等比级数，当$|q|<1$时收敛，其和为$\dfrac{\text{第一项}}{1-\text{公比}}$

当$|q|\ge 1$时发散。

（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^2 2}{2^n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{9^n}{8^n}$

又如引例 2 中球弹跳过程所需的时间.

$$T=\sqrt{\frac{2s_0}{g}}+2\sqrt{\frac{s_0}{g}}+2\sqrt{\frac{s_0}{2g}}+\cdots+2\sqrt{\frac{s_0}{2^{n-1}g}}+\cdots=\sqrt{\frac{2s_0}{g}}+2\frac{\sqrt{\frac{s_0}{g}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{2s_0}{g}}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

所以球不会永远弹跳下去。

**例**　试用无穷级数说明循环小数$0.\dot{3}=\dfrac{1}{3}$。

解：$0.\dot{3}=0.3+0.03+0.003+\cdots=\dfrac{3}{10}+\dfrac{3}{10^2}+\dfrac{3}{10^3}+\cdots=\dfrac{3/10}{1-1/10}=\dfrac{1}{3}$

## 二、收敛级数的基本性质

**性质 1**：若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=s$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n=ks=k\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

证明：设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$的部分和分别为$S_n,\sigma_n$，则

$\sigma_n=ku_1+ku_2+\cdots+ku_n=kS_n\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\lim\limits_{n\to\infty}kS_n=ks$，得证。

<u>说明</u>：① $k\ne 0$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$有相同的敛散性；

② 可以提取级数各项的公因子。

**性质 2**：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=s$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sigma$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\pm v_n\right)=s\pm\sigma=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}v_n\ 。$$

<u>说明</u>：收敛级数的和差仍收敛，且和差的级数等于级数的和差。或者说收敛级数可以逐项相加与逐项相减。

**性质 3**：在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的收敛性．不过收时其和一般要改变。(证明)

证明：设级数 $A:\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 去掉前面 $k$ 项得到级数 $B:\sum_{n=k+1}^{\infty}u_n$，其部分和分别为 $s_n,\sigma_n$，则 $\sigma_n=u_{k+1}+\cdots+u_{k+n}=s_{n+k}-s_k$，由极限理论知

$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}s_{n+k}-s_k$，即 $s_{n+k}$ 与 $\sigma_n$ 有相同的敛散性，即不改变敛散性。

**性质 4**：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则对这级数的项任意加括号后所成的级数仍收敛，且其和不变．(证明)；

证明：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_5+\cdots+u_{10}+u_{11}+\cdots+u_{30}+\cdots$

加括号后新级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=v_1+v_2+v_3+\cdots$

$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 的部分和 $\sigma_k$ 一定对应于 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的某一个部分和 $s_n$，且 $k\le n$，故 $\lim_{k\to\infty}\sigma_k=\lim_{n\to\infty}s_n$，从而结论成立。

证明　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=s$，其部分和为 $s_n$,且有 $\lim_{n\to\infty}s_n=s$.将该级数任意加括号，所得的新级数记为

$$\sum_{k=1}^{\infty}v_k=(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})+\cdots$$

设 $\sum_{k=1}^{\infty}v_k$ 的前 $k$ 项部分和为 $\sigma_k$，则

$$\sigma_k=(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})$$

显然有 $k\le n_k$，于是

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_k=\lim_{n_k\to\infty}s_{n_k}=s$$

所以，级数 $\sum_{k=1}^{\infty}v_k$ 收敛于 $s$，即 $\sum_{k=1}^{\infty}v_k$ 收敛且其和为 $s$.

**注意**：

1．加了括号后级数收敛，原级数（去掉括号后）不一定收敛。

如：$(a-a)+(a-a)+(a-a)+\cdots$

2．加了括号后级数发散，原级数（去抻括号后）一定发散。

**性质 5(级数收敛的必要条件)**：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则它的一般项 $u_n$ 趋于零，即 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$．反之不成立。

注：该性质可用于证明数列极限为 0

证明：设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和为$S_n$，$\lim_{n\to\infty}S_n=s$，则

$$S_n=u_1+\cdots+u_{n-1}+u_n=S_{n-1}+u_n\Rightarrow u_n=S_n-S_{n-1}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}u_n=0$$

下面说明调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的，这也说明了性质 5 的逆命题不成立。

依次将调和级数的两项、两项、四项、八项、⋯、$2^m$项括在一起，

$$(1+\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8})+\cdots+(\frac{1}{2^m+1}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}})+\cdots$$

这个级数的前$(m+1)$项

$$S_{m+1}=(1+\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8})+\cdots+(\frac{1}{2^m+1}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}})$$

$$>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}(m+1)\to\infty$$

即调和级数加括号后是发散的，故原级（调和级数）发散。

**另证**：利用$\ln(1+x)<x,x>0$知$\frac{1}{n}>\ln(1+\frac{1}{n})=\ln\frac{n+1}{n}$

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)\to\infty$$

**例**　讨论下列级数的敛散性

（1）$2+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{2}{n}+\cdots$

（2）$(\frac{1}{6}+\frac{8}{9})+(\frac{1}{6^2}+\frac{8^2}{9^2})+\cdots+(\frac{1}{6^n}+\frac{8^n}{9^n})+\cdots$

（3）$10+20+30+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots$

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$（一般项不趋于 0），其中$\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}t^t=1$。

（5）$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots$

解：$S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

两式相减得$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1/2\,(1-(1/2)^{n-1})}{1-1/2}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$

$S_n=1+2(1-\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{2n-1}{2^n}\to3$，所以级数收敛，其和为 3。

**教学要求和注意点**

# 第二节　正项级数

**讲稿内容**

1．<u>**正项级数的概念**</u>：给定级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，若$u_n \ge 0$，则称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数。

设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数$\Rightarrow$部分和数列$\{S_n\}$为单调增加数列$\xrightarrow{\text{附加条件:}S_n\text{有界}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n = s \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。反之

若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}S_n = s \Rightarrow \{S_n\}$有界。从而得到正项级数收敛的基本定理。

2．<u>**基本定理**</u>：正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛$\Leftrightarrow$它的部分和数列$\{s_n\}$有界.

利用此充要条件，马上得到正项级数的比较审敛法。

3．<u>**比较审敛法**</u>：设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数，且$u_n \le v_n\ (n=1, 2, \cdots)$．若级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；反之，若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

证明：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$的部分和分别为$S_n, \sigma_n$，则

$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛$\Rightarrow \sigma_n$有界$\xrightarrow{u_n \le v_n} S_n$有界$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

<u>**推论**</u>：设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数，

若存在自然数$N$，使当$n \ge N$时有$u_n \le kv_n\ (k>0)$成立，则

如果$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

如果$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散。

**证：** $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}kv_n$收敛$\Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty}kv_n$收敛$\Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty}kv_n$的部分和有界$\Rightarrow$

$\sum_{n=N}^{\infty}u_n$的部分和有界$\Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty}u_n$收敛$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

$\boxed{\text{注}}$：用比较审敛法做题，主要将要讨论的级数的一般项适当地放大或缩小，并且放大或缩小后的级数的敛散性是已知的。

<u>**什么是适当**</u>：放大或缩小后，级数的敛散性不变；

<u>**究竟是放大呢？还是缩小**</u>？：首先要猜测级数的敛散性，若猜所讨论的级数收敛，则放大，放大后仍收敛，由比较审敛敛法知原级数收敛；若猜所讨论的级数发散，则缩小，缩小后仍发散，由比较审敛敛法知原级数发散。

<u>**三个级数的敛散性是已知的**</u>，目前已知道两个：等比级数，调和级数。（后

面还有一个 P-级数)。

**例 1** 用比较审敛法判别下列级数的敛散性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

解：分析：当$n$很大时，分母中的 1 忽略不计，该级数即是调和级数，发散。

$u_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\geq\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}\geq\frac{1}{n+1}$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$发散，所以原级数发散。

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}(a>0)$

分析：级数的敛散性明显与$a$的取值有关。

解：①当$a=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$发散。

②当$0<a<1$时，$u_n=\frac{1}{1+a^n}\to 1$，由收敛的必要条件知，原级数发散。

（或当$0<a\leq 1$时，$u_n=\frac{1}{1+a^n}\geq\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$,而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$发散，所以原级数发散。）

③当$a>1$时，$u_n=\frac{1}{1+a^n}\leq\frac{1}{a^n}$,而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$收敛，所以原级数收敛。

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$---------P-级数

解 当$p\leq 1$时，有$\frac{1}{n^p}\geq\frac{1}{n}$，且调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的，由比较审敛法知，此时的$p$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$是发散的.

当$p>1$时，由$n-1\leq x<n$，知$\frac{1}{n^p}<\frac{1}{x^p}$，所以

$$\frac{1}{n^p}=\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^p}dx<\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^p}dx(n=2,3,\cdots)$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$的部分和

$$s_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}<1+\int_{1}^{2}\frac{1}{x^p}dx+\int_{2}^{3}\frac{1}{x^p}dx+\cdots+\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^p}dx$$

$$=1+\int_{1}^{n}\frac{1}{x^p}dx=1+\frac{1}{p-1}(1-\frac{1}{n^{p-1}})<1+\frac{1}{p-1}$$

即部分和数列$\{s_n\}$有界，故此时$p$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$是收敛的.

综上所述：P-级数，当$p>1$时，收敛；当$p\leq 1$时发散。

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$

解：$\dfrac{1}{(n+1)(n+4)} \le \dfrac{1}{n \cdot n}$

（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$

解：$\dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n \cdot n \cdots n \cdot n \cdot n} \le \dfrac{2 \cdot 1}{n \cdot n} = \dfrac{2}{n^2}$

（6）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \cos\dfrac{1}{n})$

解：因为 $0 \le (1 - \cos\dfrac{1}{n}) = 2\sin^2 \dfrac{1}{2n} \le \dfrac{1}{2n^2}$　且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n^2}$ 收敛

根据正项级数比较判别法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \cos\dfrac{1}{n})$ 收敛。

$\boxed{\text{例}}$　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，且 $a_n \le c_n \le b_n$，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛

**证明：**　因为 $a_n \le c_n \le b_n$，所以 $0 \le c_n - a_n \le b_n - a_n$

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$ 收敛

又因为 $c_n = a_n + (c_n - a_n)$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$ 均收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛。

4. **<u>比较审敛法的极限形式</u>**：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，如果 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$

（1）若 $0 < l < +\infty$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 有相同的敛散性；

（2）若 $l = 0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

（3）若 $l = +\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

证明：（1）因 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$，所以对 $\varepsilon = \dfrac{l}{2}, \exists N,$ 当 $n > N$ 时，有

$\left| \dfrac{u_n}{v_n} - l \right| < \dfrac{l}{2} \Rightarrow \dfrac{l}{2} v_n < u_n < \dfrac{3l}{2} v_n$，由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 有相同的敛散性。

（2）当 $l = 0$ 时，对充分大的 $n$，必有 $u_n < v_n$，可知结论成立。

（3）类似。

**说明 1**：利用同阶、低阶、高阶无穷小找$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$。

**说明 2**：对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，若有$u_n$与$v_n$是等价（同阶）无穷小，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$有相同的敛散性。

**例**　用比较审敛法的极限形式判别下列级数的敛散性。（用法与比较审法类似，需找一个敛散性知道的级数的通项与所考察级数的通项作比求极限）

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1000n+1}$；$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n^2+1}$。取$v_n=\frac{1}{n}$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$，取$v_n=\frac{1}{2^n}$

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$，取$v_n=\frac{1}{n^3}$

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}(n+2)}$，取$v_n=\frac{1}{n^{7/6}}$

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$，取$v_n=\frac{1}{n^{3/2}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0.$　收敛。

**例**　用等价无穷小法找$\sum v_n$

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}(0<\alpha<+\infty)$，取$v_n=\frac{1}{n^{\alpha}}$。$\alpha>1$时收敛；$0<\alpha\le 1$时发散。

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n^p}}-1)$，则$p>1$收敛，$0\le p\le 1$发散。

（3）判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n}}-1),\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n})$敛散性

若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(a_n>0)$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}(e^{a_n}-1),\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\sqrt{a_n}}-1-\sqrt{a_n})$均收敛

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n})$，$\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{3!n^3}(n\to\infty)$，收敛，

以$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n})$为例**对题目进行改写**：视$\frac{1}{n}$为$a_n(a_n\to 0)$

记$b_n=a_n-\sin a_n\sim\frac{1}{3!}a_n^3,a_n>0$，也有$\frac{b_n}{a_n^2}=\frac{a_n-\sin a_n}{a_n^2}\sim\frac{1}{3!}a_n$

若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，必有$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3$收敛，于是$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，进一步有$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n^2}$收敛。

写为正式的题目：

设数列$\{a_n\},\{b_n\}$满足$b_n+\sin a_n=a_n(n\ge 1)$，已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(a_n>0)$收敛，证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n^2}$收敛。

证明：因$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，故$\lim_{n\to\infty}a_n=0$，于是当$n\to\infty$时$b_n=a_n-\sin a_n\sim\frac{1}{3!}a_n^3$，

$\frac{b_n}{a_n^2}\sim\frac{1}{3!}a_n$，由比较判别法的极限形式知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n^2}$收敛。

换一种写法为：

对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n^2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n/a_n^2}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-\sin a_n}{a_n^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{3!}$$

由比较判别法的极限形式知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n^2}$收敛。

5．**积分判别法：** 若单调不增函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上非负，则$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$与广义积分$\int_1^{+\infty}f(x)dx$具有相同的敛散性。

$\boxed{\text{联想}}$：$\int_1^{+\infty}f(x)dx \underline{\underline{\text{等分}}} \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{\infty}f(\xi_i)\Delta x_i \; \underline{\underline{\text{取}\xi_i=n,\Delta x_i=1}}\sum_{i=1}^{n}f(n)$

**证明**　首先，$\forall x\in[1,+\infty)$，存在整数$n$，使$n\le x<n+1$

又因$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调不增，所以有　$f(n+1)\le f(x)\le f(n)$，

从而有

$$\begin{aligned}\int_1^m f(x)dx&=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\cdots+\int_{n-1}^n f(x)dx+\cdots+\int_{m-1}^m f(x)dx\\&\ge\int_1^2 f(2)+\int_2^3 f(3)dx+\cdots+\int_{n-1}^n f(n)dx+\cdots+\int_{m-1}^m f(m)dx\\&=f(2)+f(3)+\cdots+f(n)+\cdots+f(m)=\sum_{n=2}^{m}f(n)\end{aligned}$$

$$\int_1^m f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \cdots + \int_{n-1}^n f(x)dx + \cdots + \int_{m-1}^m f(x)dx$$

$$\le \int_1^2 f(1) + \int_2^3 f(2)dx + \cdots + \int_{n-1}^n f(n-1)dx + \cdots + \int_{m-1}^m f(m-1)dx$$

$$= f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + \cdots + f(m-1) = \sum_{n=1}^{m-1} f(n)$$

所以有不等式 $\sum_{n=2}^{m} f(n) \le \int_1^m f(x)dx \le \sum_{n=1}^{m-1} f(n)$。

也可从几何上得到该不等式。事实上，

$\sum_{n=1}^{m-1} f(n)$，$\sum_{n=2}^{m} f(n)$ 在几何上分别表示图 11-2 和图 11-3 中的阴影部分的面积，

$\int_1^m f(x)dx$ 表示由 $y=f(x), x=1, x=m$ 及 $x$ 轴所围成的曲边梯形的面积，从而有

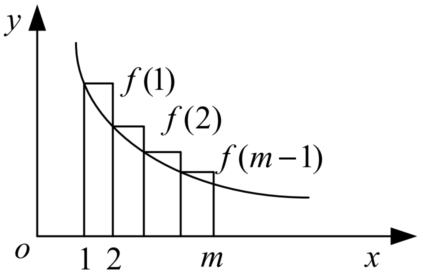



图11−2

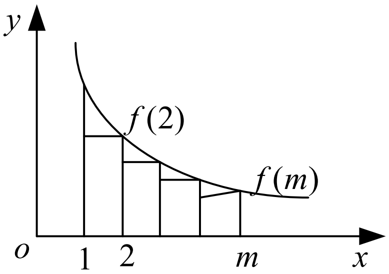



图11−3

注意 $F(m)=\int_1^m f(x)dx$ 是单调增加的，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 的部分和 $S_m$ 也是单增的，故

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛 $\Rightarrow$ 部分和 $S_{m-1}=\sum_{1}^{m-1} f(n)$ 有界 $\Rightarrow$ $F(m)=\int_1^m f(x)dx$ 单调有界 $\Rightarrow \lim\limits_{m\to+\infty} F(m)=\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 存在 $\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛。反之，

$\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow S_m$ 有界 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛。

故 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 具有相同的敛散性。

**例**　利用积分判别法的判别下列级数的收散性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$（前面已讲过的 P-级数）

解　因为当 $P>0$ 时 $f(x)=\frac{1}{x^p}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减非负，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 与

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 有相同的敛散性.

当 $p\neq1$ 时， $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^{+\infty}=\begin{cases}\frac{1}{p-1} & p>1\\ +\infty & p<1\end{cases}$

当 $p=1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}=\ln x\Big|_1^{+\infty}=+\infty$

当 $p\le0$ 时，原级数显然发散。

综上所述：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 在 $p>1$ 时收敛；在 $p\le1$ 时发散。

（2）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^s}$

解　因为 $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^s}$ 在 $[2,+\infty)$ 单调递减非负

所以 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^s}$ 与 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^s}dx$ 的敛散性相同

又因 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^s}dx=\int_2^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^s}d\ln x\overset{u=\ln x}{=}\int_{\ln2}^{+\infty}\frac{1}{u^s}du$

由（1）知该广义积分在 $s>1$ 时收敛，$s\le1$ 时发散。

故 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^s}$ 当 $s>1$ 时收敛，当 $s\le1$ 时发散。

6．**<u>比值审敛法(达朗贝尔判别法)</u>**：设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho,$$

则当 $\rho<1$ 时级数收敛；$\rho>1$(或 $\rho=+\infty$)时级数发散；$\rho=1$ 时级数可能收敛也可能发散.

证明：当 $\rho<1$ 时，可选适当小的 $\varepsilon>0$ 使 $\rho+\varepsilon=r<1$

又因 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，对上 $\varepsilon,\exists m,$ 当 $n\ge m$ 时，有 $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-\rho\right|<\varepsilon$

即 $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon=r<1\Rightarrow u_{n+1}<ru_n$

亦即当$n \ge m$时,$u_{m+1} < ru_m, u_{m+2} < ru_{m+1} < r^2 u_m, \cdots, u_n < r^{n-m} u_m$这样，对于级数

$$\sum_{n=m}^{\infty} u_n \text{ 与 } \sum_{n=m}^{\infty} u_m r^{n-m}$$

由于当$n \ge m$时，$u_n \le u_m r^{n-m}$，且等比级数$\sum_{n=m}^{\infty} u_m r^{n-m}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

当$\rho > 1$时，总存在适当小的$\varepsilon > 0$使$\rho - \varepsilon = r > 1$

又因$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$，对上$\varepsilon, \exists m$,当$n \ge m$时，有$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \rho\right| < \varepsilon$

即$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \rho - \varepsilon = r > 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n (n > m) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n \ne 0 \Rightarrow$发散。

当$\rho = 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$可能收敛，可能发散。如P-级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$

$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{(n+1)^p} = 1$，但当$p > 1$时，收敛；当$p \le 1$时发散

**例**　用比值审敛法判别下列级数的敛散性。

（1）$\frac{3}{2} + \frac{4}{2^2} + \frac{6}{2^3} + \cdots$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n \cdot n!}{n^n}$，发散

（4）$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{\pi}{2^n}$

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n^s} (s > 0, \alpha > 0)$

解：$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^s}\cdot\frac{n^s}{\alpha^n} = \lim_{n\to\infty}\alpha\left(\frac{n}{n+1}\right)^s = \alpha\begin{cases} <1, \text{收敛} \\ >1, \text{发散} \end{cases}$

当$\alpha = 1$时，原级数$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \Rightarrow \begin{cases} s \le 1, \text{发散} \\ s > 1, \text{收敛} \end{cases}$

（6）$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$，收敛

7．<u>**根值审敛法(柯西判别法)**</u>：设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数，如果

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho,$$

则当$\rho < 1$时级数收敛；$\rho > 1$(或$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = +\infty$)时级数发散；$\rho = 1$时级数可能收敛也可能发散．(证明)；

**例**　用根值审敛法判别下列级数的敛散性。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$；$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2+\frac{1}{n})^n}$；$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^{2n}}{n^n}$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$，因$\frac{1}{2^n}\le\frac{2+(-1)^n}{2^n}\le\frac{3}{2^n}$，故$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{2}<1$，收敛

$\boxed{注}$：用比值判别法有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{2+(-1)^n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}=\begin{cases}3/2, & n为奇\\ 1/6, & n为偶\end{cases}$$

这说明比值判别法是充分条件，不能由$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛推出$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho<1$，或$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho\le 1$，还可能是$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$不存在。

**（3）**$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{(a+\frac{1}{n})^n}(a>0)$

**解：**因$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\ln(n+2)}{(a+\frac{1}{n})^n}}=\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln(n+2)}=\frac{1}{a}$

注：当$n>2$时，$n+2<e^n\Rightarrow\ln(n+2)<n$，于是$1<\sqrt[n]{\ln(n+2)}<\sqrt[n]{n}$，或用罗必达法则求极限。

当$0<a<1$时，$\frac{1}{a}>1$，原级数发散。

当$a>1$时，$0<\frac{1}{a}<1$，原级数收敛。

当$a=1$时，原数级为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{(1+\frac{1}{n})^n}$，且$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2)}{(1+\frac{1}{n})^n}=+\infty$，原级数发散。

8．**拉贝判别法（Raabe Test）　设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，且极限$\lim_{n\to\infty}n(1-\frac{u_{n+1}}{u_n})=r$存在，则**

**（1）　$r>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛**

**（2）　$r<1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散**

**（3）$r=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性无法判断**

**例** 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1\cdot 2\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)})^{s}$当$s=1,2,3$时的敛散性。

解 无论$s$取 1、2、3 中哪一个值，都有$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$，所以用比值判别法失效。现应用 Raabe 判别法：

$1^0$　s=1 时，$\lim_{n\to\infty}n(1-\frac{u_{n+1}}{u_n})=\lim_{n\to\infty}n(1-\frac{2n+1}{2n+2})=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2}=\frac{1}{2}<1$

$2^0$　s=2 时，$\lim_{n\to\infty}n(1-\frac{u_{n+1}}{u_n})=\lim_{n\to\infty}n[1-(\frac{2n+1}{2n+2})^2]=\lim_{n\to\infty}\frac{n(4n+3)}{(2n+2)^2}=1$

$3^0$　s=3 时，$\lim_{n\to\infty}n(1-\frac{u_{n+1}}{u_n})=\lim_{n\to\infty}n[1-(\frac{2n+1}{2n+2})^3]=\lim_{n\to\infty}\frac{n(12n^2+18n+7)}{(2n+2)^3}=\frac{3}{2}>1$

$s=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；$s=2$时，Raabe 判别法失效；　$s=3$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

8．**极限审敛法**：设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，

(1) 如果$\lim_{n\to\infty}nu_n=l>0$(或$\lim_{n\to\infty}nu_n=+\infty$)，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散；

(2) 如果$p>1$，而$\lim_{n\to\infty}n^p u_n=l$ $(0\le l<+\infty)$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛．(证明)

**例**　判别下列级数的敛散性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$　　　解：$\lim_{n\to\infty}n^2u_n=1$，收敛

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$　解：$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}u_n=\lim_{n\to\infty}n^2\sqrt{\frac{n+1}{n}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2=\frac{1}{2}\pi^2$

**例**　判别下列级数的敛散性。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\sin x}{n^2},x\in(-\infty,+\infty)$，　　取$v_n=\frac{1}{n}$，比较审敛法极限形式，发。

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\cos^2\frac{n\pi}{3}$

解：首先，比较审敛法：$u_n=\frac{n}{2^n}\cos^2\frac{n\pi}{3}\le\frac{n}{2^n}=v_n$

其次，比值审敛法：$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛。所以原级数收敛。

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2}$，　　　　　解：当$n\ge 4$时,$u_n>1$，发散。

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\tan\frac{\pi}{2^n}$　　法 1：比值；法 2：取 $v_n=\frac{1}{2^n}$，比较审敛法极限形式。

**练习题**

**例** 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$ 的敛散性

解: $0<\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx\le\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}\frac{1}{n^{3/2}}$,且 $\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛,故原级数收敛.

**例** 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{e^{-x}}{x}dx$ 的敛散性

因 $0<\int_n^{n+1}\frac{e^{-x}}{x}dx\le\int_n^{n+1}e^{-x}dx=(1-\frac{1}{e})\frac{1}{e^n}$,且 $\sum\frac{1}{e^n}$ 收敛.原级数收敛.

**例**　设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试问 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{1+a_n})^n$ 是否收敛，并说明理由。

解：因 $\{a_n\}$ 为正项数列且单调减少，故有界，其极限存在，设为 $\lim_{n\to\infty}a_n=a\ge 0$

若 $a=0$，则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛，与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散矛盾，故 $a>0$，于是 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{1}{1+a_n})^n}=\frac{1}{1+a}<1$，由根值判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{1+a_n})^n$ 收敛。

**例** 设 $u_1=2,u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+\frac{1}{u_n}),n=1,2,\cdots$,证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1)$ 收敛.

证明: $u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+\frac{1}{u_n})\ge\sqrt{u_n\cdot\frac{1}{u_n}}=1$,且

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}(u_n+\frac{1}{u_n})-u_n=\frac{1-u_n^2}{2u_n}\le 0\Rightarrow u_{n+1}\le u_n$$

即 $u_n$ 单调减少有下界,故 $\lim_{n\to\infty}u_n$ 存在.

$$0\le\frac{u_n}{u_{n+1}}-1=\frac{u_n-u_{n+1}}{u_{n+1}}\le u_n-u_{n+1}$$

对于 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n-u_{n+1}\right)$,其中部分和 $S_n=u_1-u_n$ 的极限存在,即 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n-u_{n+1}\right)$ 收敛,由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1)$ 收敛.

**例** 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots),S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，试判别级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 的敛散性。

解：由于 $a_n>0\Rightarrow S_n$ 单增，即 $S_{n-1}<S_n$，于是

$b_n=\frac{a_n}{S_n^2}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^2}<\frac{S_n-S_{n-1}}{S_{n-1}S_n}=\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}$

记 $c_n=\dfrac{1}{S_{n-1}}-\dfrac{1}{S_n}$，则 $c_1+c_2+\cdots+c_n=\dfrac{1}{S_1}-\dfrac{1}{S_n}<\dfrac{1}{a_1}$

即正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n$ 的部分和有界，故 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n$ 收敛，由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^2}$ 收敛。

**例** 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $e^{a_n}=a_n+e^{b_n}(n\ge1)$ 的数列。已知 $a_n>0(n\ge1)$，且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$ 收敛。

分析：利用 $e^x=1+x+\dfrac{1}{2}x^2+\cdots$ 所产生的结论：

（1）$x>0$ 时 $e^x>1+x$，（2）$x\to0$ 时 $e^x-1\sim x, e^x-1-x\sim\dfrac{1}{2}x^2$

因 $a_n>0(n\ge1)$，故 $e^{b_n}=e^{a_n}-a_n>1$，从而 $b_n>0$

又由于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛，故有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，也有 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$

$e^{a_n}=a_n+e^{b_n}\Rightarrow e^{a_n}-a_n-1=e^{b_n}-1$，由于 $e^{a_n}-a_n-1\sim\dfrac{1}{2}a_n^2$，$e^{b_n}-1\sim b_n$

于是 $\dfrac{1}{2}a_n^2\sim b_n\Rightarrow\dfrac{1}{2}a_n\sim\dfrac{b_n}{a_n}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$ 收敛。

另证：由已知，易知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$ 为正项级数，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n/a_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(e^{a_n}-a_n)}{a_n^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(e^x-x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

由比较判别法的极限形式知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$ 收敛。

# 第三节 一般项级数

## 一、交错级数及其审敛法:

1．交错级数的概念：形如$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 或$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0)$，即级数的各项正负交替，这样的级数称为**交错级数**。

2．**莱布尼茨定理**：如果交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足条件：

(1)　$u_n \geq u_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$;

(2)　$\lim_{n\to\infty}u_n = 0$

则级数收敛，且其和 $s \leq u_1$，其余项 $r_n$ 的绝对值$|r_n| \leq u_{n+1}$.

**证明**：在上册有这样一个习题：对于数列$x_n$，若$x_{2k}\to a, x_{2k+1}\to a(k\to\infty)$，则$x_n\to a(n\to\infty)$，我们利用这个结论来证明莱布尼兹定理。

部分和数列$S_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})$单调增加;

且$S_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n}<u_1$有界。

所以$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=s\leq u_1$， 又$S_{2n+1}=S_{2n}+u_{2n+1}$

所以$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(S_{2n}+u_{2n+1})=s\leq u_1$， 故$\lim_{n\to\infty}S_n=s\leq u_1$， 交错级数收敛。

其余项$r_n=\pm(u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-\cdots)$，因而有余项估计式为$|r_n|\leq u_{n+1}$，此结果表明：对满足定理条件的交错级数，如果用$s_n$作为$s$的近似值，则产生的误差不会超过余项中第一项的绝对值$u_{n+1}$.

**例**　判别交错级数的敛散性。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$；收敛。

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{1/2}}$；收敛。

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{n+1}$；发散

（4）$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n-(-1)^n}$

解：因$u_n=\frac{1}{n-(-1)^n}=\frac{n+(-1)^n}{n^2-1}=\frac{n}{n^2-1}+\frac{(-1)^n}{n^2-1}$， 故

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n-(-1)^n}=\sum_{n=2}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{n}{n^2-1}+\frac{1}{n^2-1}\right]$$

由于交错级数$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}$及$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1}$均收敛，故原级数收敛。

$\boxed{\text{注}}$：交错级数判别法是充分条件，不满足条件（1）不一定发散，如该例。

## 二、绝对收敛与条件收敛：

1. 绝对收敛与条件收敛的概念：

对于任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$（$u_n$ 为实数），若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为**绝对收敛**。

若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为**条件收敛**。

例如 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3}$ 为绝对收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 为条件收敛。

2. **定理**：如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定收敛．反之不成立。

证明：已知 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，要证 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，我们将它的正项保留、负项换为 0，组成一个新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，则三个一般项 $|u_n|, u_n, v_n$ 有关系：$v_n = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|) = \begin{cases} u_n, u_n > 0 \\ 0, u_n \le 0 \end{cases}$，且 $0 \le v_n \le |u_n|$

因 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，由比较审敛法知，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛。

注意 $u_n = 2v_n - |u_n|$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

<u>**应注意的几点：**</u>

1．比较、比值、根值审敛法，只适用于正项级数，对于一般项级数的收敛性，主要用该定理来判定。

2．$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，不能断定 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；但若是用比值法、根值法判定 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散。（因为比值法、根值法判别级数发散，是根据一般项不趋于 0 而得的）

**例**　判别下列级数的收敛性，若收敛，说明是绝对收敛或是条件收敛。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^4}$　　　绝对收敛

（2）$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}$　　绝对收敛

（3）$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$

解：$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

所以当 $p > 1$ 时，原级数绝对收敛；

当 $0 < p \le 1$ 时，原级数为收敛的交错级数，故原级数为条件收敛；

当 $p \le 0$ 时，原级数发散。

（4）$\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$

解：$\sum_{n=3}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}, \frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$，原级数不是绝对收敛的。

又原级数为交错级数，$f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 当 $x \ge 3$ 时单调减少趋于 0，即 $f(n)=\frac{\ln n}{n}(n \ge 3)$ 单调减少趋于 0，所以原级别数为条件收敛。

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{x}{n}$　　$(x>0)$（**注意**：前面部分项不是正负交错的）

解：因为 $x>0$　所以 $\exists N$，当 $n \ge N$ 时，使 $\frac{x}{n} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，从而 $\sum_{n=N}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{x}{n}$ 为交错级数。

由于 $\sum_{n=N}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=N}^{\infty}\sin\frac{x}{n}$ 发散，即原级数不是绝对收敛。

但 $\sum_{n=N}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{x}{n}$ 是交错级数，且 $\frac{x}{n} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，$n \to \infty$ 时，$\sin\frac{x}{n}$ 单减趋于 0，

所以 $\sum_{n=N}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{x}{n}$ 收敛，从而原级数为条件收敛。

（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}})^2\pi$

解　因为 $\sum_{n=3}^{\infty}\sin(\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}})^2\pi = \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{\pi}{n}$，故由（5）知，原级数为条件收敛。

（7）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

解　因为 $|u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n} \ge \frac{1}{\sqrt{n}+1}$，且 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ 发散，所以根据比较判别法知：$\sum_{n=2}^{\infty}|u_n|$ 发散

又因为 $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n[\sqrt{n}-(-1)^n]}{n-1} = \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}$

又因$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$收敛，　而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n-1}$发散，故原级数发散

**（8）**$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$

**解：**因$\dfrac{1}{n-\ln n}>\dfrac{1}{n}$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n-\ln n}$非绝对收敛。

又$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n-\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/n}{1-\ln n/n}=0$

$f'(x)=(x-\ln x)'=1-\dfrac{1}{x}>0(x>0)$，即 $f(x)$ 单增，于是 $\dfrac{1}{x-\ln x}$ 单减，即 $\dfrac{1}{n-\ln n}$单减，所以原交错级数条件收敛。

**例**　已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$收敛，问$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2,\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$敛散性。

解：因$0\le|a_nb_n|\le\dfrac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)$，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$绝对收敛。

因$(a_n+b_n)^2=a_n^2+2a_nb_n+b_n^2$，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$收敛

因$0\le\dfrac{|a_n|}{n}\le\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n^2}+a_n^2)$，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$绝对收敛。

**例** 设常数$\lambda>0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan(\pi\sqrt{n^2+\lambda})$是【C】

（A）发散　（B）绝对收敛　（C）条件收敛　（D）敛散性与$\lambda$有关

解：$u_n=\tan(\pi\sqrt{n^2+\lambda})=\tan(\pi n+\pi\sqrt{n^2+\lambda}-n\pi)=\tan(\pi\sqrt{n^2+\lambda}-n\pi)$

$=\tan\dfrac{\lambda\pi}{\sqrt{n^2+\lambda}+n}>0(n\to\infty)$，$\sum\limits_{N}^{\infty}\tan\dfrac{\lambda\pi}{\sqrt{n^2+\lambda}+n}$与$\sum\limits_{N}^{\infty}\dfrac{1}{n}$敛散性相同。

又$u_n$单调减少趋于 0，条件收敛

**教学要求和注意点**

# 第四节　幂级数

**讲稿内容**

**一、函数项级数的概念**

给定一个在区间 $I$ 上有定义的函数列 $\{u_n(x)\}$，则和式

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

叫做函数项无穷级数，记为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \qquad (1)$$

类似地，用 $S_n(x)$ 表示级数的前 $n$ 项和（称为函数项级数的部分和）。

$x_0\in I$，则（1）式变为常数项无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$　　　　（2）

当然，常数项级数（2）可能收敛，也可能发散。

若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛，则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $x_0$ **收敛**，$x_0$ 称为**收敛点**，收敛的全体称为**收敛域**。若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 发散，则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在点 $x_0$ **发散**，$x_0$ 称**发散点**，发散点的全体称为**发散域**。

对于收敛域内的每一点 $x$，函数项级数都成为一收敛的常数项级数，因而都有一确定的和 $s(x)$，该和显然是 $x$ 的函数，称**函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和函数**，即

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\text{，也有}\lim_{n\to\infty}S_n(x)=s(x)$$

**例** 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{x+2}\right)^n$ 的收敛域.

**解** 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{x+2}\right)^n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n|x+2|^n}$$

由比值审敛法, 知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n|x+2|^n}{(n+1)|x+2|^{n+1}}=\frac{1}{|x+2|}$$

(1) 当 $\frac{1}{|x+2|}<1$, 即 $x>-1$ 或 $x<-3$ 时, 题设级数是绝对收敛的.

(2) 当 $\frac{1}{|x+2|}>1$, 即 $-3<x<-1$ 时, 题设级数是发散的.

(3) 当 $\frac{1}{|x+2|}=1$, 即 $x=-3$ 或 $x=-1$ 时, 容易得到

当 $x=-3$ 时, 题设级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 该级数是发散的；当 $x=-1$ 时, 题设级数变为

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$,该级数是收敛的.

综上所述, 题设级数的收敛域为$(-\infty,-3)\cup[-1,+\infty)$.

二、**幂级数及其收敛性**：

**1.幂级数的概念**：

形如$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，称为**幂级数**，$a_n$称为**幂级数的系数**。（为什么叫幂级数？各项均由幂函数组成）

如：$\sum_{n=1}^{\infty}x^n,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$等均为幂级数。

形如$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{x^n},\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi^n(x)$等的级数，称为**广义幂级数**，它们可以通过代换化为标准幂级数，因此我们只需把重点放在标准幂级数上。

当然我们主要的任务是讨论幂级数的收敛性。也就是说，给了一个幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，$x$取哪些点时，该幂级数收敛，$x$取哪些值时，该幂级数发散，它的收敛域、发散域怎样？

如前面讨论过的级数$\sum_{n=1}^{\infty}x^n$，当$|x|<1$时，该级数收敛；$|x|\geq 1$时，该级数发散。即收敛域为$(-1,1)$，发散域为$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$。从该看到幂级数的收敛或发散域是一个区间，这个结论对其它幂级数也成立。

**2.幂级数的收敛性**：

**定理** 1(阿贝尔(Abel)定理)　对于级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$有：

（1）　若级数在$x=x_1(x_1\neq 0)$收敛，则在$|x|<|x_1|$内该幂级数绝对收敛.

（2）　若级数在$x=x_2$发散，则在$|x|>|x_2|$内该幂级数发散.

证明：已知$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_1^n$收敛，要证当$|x|<|x_1|$时$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$收敛。

由$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_1^n$的收敛性知，$\lim_{n\to\infty}(a_nx_1^n)=0$，再由收敛数列必有界知：

$\exists M>0$使$|a_nx_1^n|\leq M,\forall n$，所以

$$|a_nx^n|=\left|a_nx_1^n\cdot\frac{x^n}{x_1^n}\right|=|a_nx_1^n|\cdot\left|\frac{x}{x_1}\right|^n\leq M\left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$

而等比级数$\sum_{n=0}^{\infty}M\left|\frac{x}{x_1}\right|^n$当$|x|<|x_1|$时收敛,所以当$|x|<|x_1|$时级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$绝对收敛。第 2 部分用反证法。

<u>**该定理说明**</u>：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_0 \neq 0$ 收敛，则在区间 $(-|x_0|, |x_0|)$ 内均收敛；若在 $x_0$ 发散，则在 $(-\infty, -|x_0|) \cup (|x_0|, +\infty)$ 均发散。若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在数轴上既有收敛点，又有发散点，则从原点出发，不论向左还是向右，最初碰到的点总是收敛点，一旦碰到发散点，则后面的点均为发散点，不会出现收敛点、发散点交替的情况，且收敛点与发散点的分界点与原点等距，都为 $R$（称为<u>**收敛半径**</u>）由此得推论：

<u>**推论**</u>：如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不是仅在 $x = 0$ 一点收敛，也不是在整个数轴上都收敛，则必有一个确定的正数 $R$ 存在，使得

当 $|x| < R$ 时，幂级数绝对收敛;

当 $|x| > R$ 时，幂级数发散;

当 $x = R$ 或 $x = -R$ 时，幂级数可能收敛也可能发散.

这里 R 称为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ **收敛半径**，$(-R, R)$ 称为幂级数的**收敛区间**. 若幂级数的收敛域为 $D$，则 $(-R, R) \subseteq D \subseteq [-R, R]$。

**定理 1 推广**(阿贝尔(Abel)定理)　如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 当 $x = x_1 \neq x_0$ 时收敛，则适合不等式 $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ 的一切 $x$ 使这幂级数绝对收敛．反之，如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 当 $x = x_1 \neq x_0$ 时发散，则适合不等式 $|x - x_0| > |x - x_1|$ 的一切 $x$ 使这幂级数发散.

**定理 2**：对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，如果 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，或 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$

则这幂级数的收敛半径

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty. \end{cases}$$

证明：考虑级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$，利用比值判别法

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x| = \rho |x|$$

（1）若 $\rho \neq 0, \infty$，当 $\rho|x| < 1$ 即 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛，亦即 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

收敛；当$|x|>\frac{1}{\rho}$时，级数$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$发散，亦即$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$发散。所以$R=\frac{1}{\rho}$。

（2）当$\rho=0$时，$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0<1$，原级数全平面收敛，$R=+\infty$。

（3）当$\rho=\infty$，$x\neq 0$时$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty>1$，原级数仅在$x=0$收敛，$R=0$。

**<u>利用该定理可求函数的收敛域</u>**。

1. 求出$\rho$，得到收敛半径$R=\frac{1}{\rho}$，从而得收敛区间$(-R,R)$
2. 讨论区间端点$x=\pm R$的敛散性，得收敛域。

**例**　求下级数的收敛域

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

解：$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，$R=\frac{1}{\rho}=1$

$x=-1$时，原级数发散；$x=1$时原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$，是收敛的交错级数。

所以级数的收敛域为$(-1,1]$.

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$

**解**：令$x-a=t$，原级数变为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$

易知$\rho=1$，$R=1$；收敛域为$t\in[-1,1)$，所以$x\in[a-1,a+1)$.

**另解**：用比值判别法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(x-a)^n}\right|=|x-a|$$

当$|x-a|<1$即$a-1<x<a+1$时幂级数收敛。

当$x=a+1$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发散；

当$x=a-1$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$，收敛。

故收敛域为$[a-1,a+1)$。

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$

解：$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)x^{2n}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{(2n-1)x^{2n-2}}\right|=\frac{1}{2}|x|^2$

当$\frac{1}{2}|x|^2<1$时，即$|x|<\sqrt{2}$时，原级数收敛。

当 $x=\sqrt{2}$ 时，原级数 $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}2^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2}$ 发散。

当 $x=-\sqrt{2}$ 时，原级数 $=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2}$ 发散。

故收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

**例** 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 收敛，则级数在 $x=2$ 处____________。

（A）条件收敛；（B）绝对收敛；（C）发散；（D）不能确定

解：由定理知，级数在 $|x-1|<|-1-1|=2$ 内绝对收敛，即在 $-1<x<3$ 内绝对收敛，故选（B）

**3．<u>幂级数的运算</u>：**

设有两个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, x\in(-R,R)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n, x\in(-R',R')$$

则这两个幂级数可以进行四则运算：

（1）$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n, x\in(-l,l), l=\min\{R,R'\}$

（2）$(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n, x\in(-l,l)$

（3）$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\Big/\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$，其中 $c_n$ 由

$(\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n)(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 比较同次幂的系数确定。

**例** 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{3^n}\right]x^n$ 的收敛域.

**解** 易知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$ 收敛域为 $(-1,1]$ .等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}x^n$ 的收敛域为 $(-3,3)$ .根据幂级数的运算性质，所求幂级数的收敛域为 $(-1,1]$.

**4．<u>幂级数的和函数的性质</u>：**

**性质** 1：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛区间 $(-R,R)$ 上

(1)连续．即

$$\forall x_0\in I, \lim_{x\to x_0}s(x)=s(x_0)\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to x_0}a_nx^n$$

**(2)**可积，并有逐项积分公式

$$\int_0^x s(x)\mathrm{d}x=\int_0^x[\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n]\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\ ,x\in(-R,R).$$

**(3)**可导，并有逐项求导公式

$$s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\quad(|x|<R),$$

$\boxed{\text{注意}}$：收敛的幂级数经过逐项求导、逐项积分后有相同的收敛半径，即三级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ ，$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 有相同的收敛半径，但端点的敛散性可能发生变化。如 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$，但 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ 的收敛域为 $[-1,1)$ 。

**例** 求下列级数在收敛区间内的和函数

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2},|x|<\sqrt{2}$ ,并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}.$

**解：** 设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2},|x|<\sqrt{2}$

则 $\int_0^x s(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^2}{2})^n\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{2-x^2}$

所以 $s(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2-x^2}\right)=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},|x|<\sqrt{2}$

即有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},|x|<\sqrt{2}$

特别地，令 $x=1$ 得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=3.$

**若求** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{3n-2}}=\sum_{n=}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}=s(\frac{1}{2})$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{3n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}s(\frac{1}{2})$$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n,|x|<1$

解：$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)x^n-x^n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n-\sum_{n=1}^{\infty}x^n$

令 $s_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n\Rightarrow\int_0^x s_1(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x^2}{1-x}\Rightarrow s_1(x)=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=s_1(x)-\frac{x}{1-x}=\frac{x}{(1-x)^2},|x|<1$

**或利用** $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 求和函数

**（3）** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1},|x|<1$，并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$

**（4）** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1},|x|<1$

**例(2012年)** 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$的收敛域及和函数。

解 记$a_n=\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}(n=0,1,2,\cdots)$。由比值判别法，

由$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}x^2=x^2<1$知原级数的收敛区间为$-1<x<1$，又因为当$x=\pm1$时，级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}$发散，所以幂级数的收敛域是$(-1,1)$。

记$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}(-1<x<1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{x}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}dt=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x},0<|x|<1$$

又$S(0)=3$，所以和函数$S(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}, & 0<|x|<1\\ 3, & x=0\end{cases}$

**例** 利用幂级数，求下列常数项级数的和

（1）$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$，

解：构造幂函数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$，其收敛区间为$(-1,1]$。

令$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\Rightarrow s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n-1}=\frac{1}{1+x}\Rightarrow s(x)=\ln(x+1)$

故$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=s(1)=\ln 2$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n(n+1)}{2^n}$，

**解**：取幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)x^n = x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)x^{n-1} = xs(x)$，　$x\in(-1,1)$

因$\int_0^x\left(\int_0^x s(x)dx\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{n+1} = \frac{-x^2}{1+x}$，所以$s(x)=\frac{-2}{(1+x)^3}$

故$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n(n+1)}{2^n} = \frac{1}{2}s(\frac{1}{2}) = -\frac{8}{27}$

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}$，取幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

（4）$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\cdots$

**例 7**　设$E(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$　，证明$E(x)=e^x$.

证明　因为$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right| = 0$，从而$R=+\infty$.

所以$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$　在（$-\infty$，$+\infty$）是收敛的.

$$E'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x^n}{n!})'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=E(x)$$

由于$E'(x)=E(x)$　,$E(0)=1$，所以$E(x)=e^x$.

**教学要求和注意点**

# 第五节　函数展开成幂级数

**讲稿内容**

这一节实际上是前一节的反问题，前一节是给了幂级数求其和函数，这一节是给出函数如何将其表成幂级数。

**一、泰勒级数(Taylor)**

幂级数不仅形式简单，而且有很多的特殊性质，这就使我们想到能否把一个函数表示成幂数级进行研究。

首先，假设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点的某邻域内能表为幂级数，即有

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots \quad (a_i\text{待定})$$

那么，在此邻域内必有 $f(x)$ 的任意阶导数存在,并且

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+\frac{(n+1)!}{1}a_{n+1}(x-x_0)+\frac{(n+2)!}{2!}a_{n+2}(x-x_0)^2+\cdots$$

从而 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(n=0,1,2,3,\cdots)$

即 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$

这样 $f(x)$ 就表成了幂级数的形式，该级数称为 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的**泰勒级数**（Taylor）。

注意这是在假定 $f(x)$ 能表示成幂级数，从而有任意阶导数的前提下得到的。反过来，若 $f(x)$ 只有任意阶导数，$f(x)$ 是否一定能展为上面的幂级数形式呢？回答是否定的。

例如 $f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

可以验证它在原点的任何一个邻域内有任意阶导数，且 $f^{(n)}(0)=0$，从而幂级数的系数 $a_n=0(n=1,2,3,\cdots)$，即 $f(x)\equiv 0,\forall x\in U(x_0)$，事实上,当 $x\neq 0$ 时 $f(x)\neq 0$. 那么，我们要问，在怎样的条件下，一个任意阶可导函数能够表示为一个幂级数呢？下面的定理回答了这个问题。事实上，回忆并比较泰勒展式：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

及泰勒级数可知当项数无限增大时余项必趋于 0。

**定理** 设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某一邻域 $U(x_0)$ 内具有任意阶导数，则 $f(x)$ 在该邻域内的泰勒级数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

中的余项 $R_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限为零,即 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$

证明：必要性。设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内泰勒级数收敛于 $f(x)$，即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

亦即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{n+1}(x)=f(x)$

又 $f(x)=S_{n+1}(x)+R_n(x)\Rightarrow R_n(x)=f(x)-S_{n+1}(x)$,注意 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{n+1}(x)=f(x)$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$

充分性。若 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，由 $S_{n+1}(x)=f(x)-R_n(x)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}S_{n+1}(x)=f(x)$

注：①函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的幂级数展开式是唯一的。

②当 $x_0=0$ 时的幂级数称为麦克劳林级数。

## 二、函数展开成幂级数

函数展开为幂级数的方法**主要有两种**：

**直接展开**；利用定理展开的方法，有下面的四步

（1） 求 $f^{(n)}(x)$，算出 $f^{(n)}(x_0)$

（2） 写出 $f(x)$ 的幂级数展开式，并求出该级数的收敛半径

（3） 证明在收敛域内，$f(x)$ 的泰勒公式中的余项 $R_n(x)$ 满中 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$

（4） 写出 $f(x)$ 的泰勒级数及收敛域。

**间接展开**：利用级数的四则运算、分析运算及已知的展开式等将函数展开为幂级数。

**例** 将 $f(x)=e^x$ 展成麦克劳林级数。

解：第一步，求 $f(x)$ 的各阶导数：$f^{(n)}(x)=e^x$；算出导数值：$f^{(n)}(0)=1$；

第二步，写出幂级数，并求出收敛半径：

$f(x)\sim 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$，收敛半径 $R=+\infty$

第三步，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$

因为 $|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le e^{|x|}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$，注意 $|\xi|$ 在0与 $|x|$ 之间。

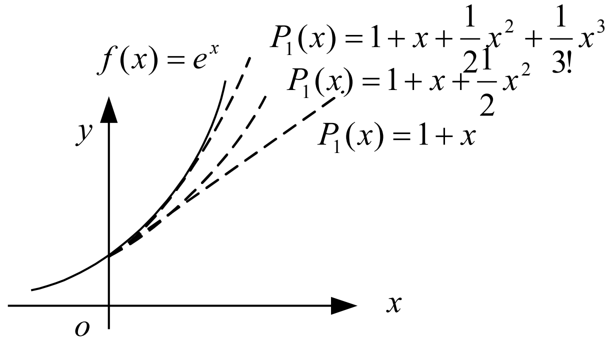
且无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$（**注意利用此方法求极限**）

故 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，

第四步，从而

$$f(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},x\in(-\infty,+\infty)$$

可从几何上看一下多项式逼近 $f(x)$ 的过程：




**例** 将 $f(x)=\sin x$ 展成麦克劳林级数。

**解 1**：直接展开法

① $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$

② $f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}=1,0,-1,\cdots,(n=1,2,3,\cdots)$

③ $f(x)\sim x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots,R=+\infty$

④ $|R_n(x)|=\left|\frac{1}{(n+1)!}\sin(\xi+\frac{(n+1)\pi}{2})\cdot x^{n+1}\right|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0,n\to\infty$

同样是因为正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛，其一般项趋于 0。所以

$$f(x)=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},x\in R$$

**解 2**：利用间接展开法：利用已知的展式来求要展的函数。

$$\sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})=\frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-ix)^n}{n!}\right]=\frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(1-(-1)^n)i^n\frac{x^n}{n!}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},x\in R$$

**例** 利用导数可得：$\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},x\in(-\infty,+\infty)$

**常见的幂级数展式：**

① $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n,x\in(-1,1)$

② $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},x\in(-\infty,+\infty)$

③ $\sin x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},x\in(-\infty,+\infty)$

④ $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},x\in(-\infty,+\infty)$

⑤ $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1},x\in(-1,1]$

⑥ $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$

$x\in(-1,1)$

下面用两种方法推导⑥

**直接展开法：** $f(x)=e^{\alpha\ln(1+x)},f(0)=1$

$$f'(x)=e^{\alpha\ln(1+x)}\cdot\frac{\alpha}{1+x}=\alpha e^{(\alpha-1)\ln(1+x)},f'(0)=\alpha$$

…

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)e^{(\alpha-n)\ln(1+x)},f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)$$

所以 $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots\quad |x|<1$

**待定系数法：**

$$f'(x)=e^{\alpha\ln(1+x)}\cdot\frac{\alpha}{1+x}=\frac{\alpha}{1+x}f(x)$$

即　$(1+x)f'(x)=\alpha f(x)$

用级数法解该微分方程，即设

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

代入上式比较同次幂的系数即得。

**例** 将下列函数在指定点展开成幂级数。

（1） $f(x)=\frac{1}{a-x},x=b\neq a$

（2） $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3},x=1$；

解：$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3})$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n,\ (-1<x<3)$$

注：$f(x)=\frac{x}{x^2+4x+3}=\frac{-1/2}{x+1}-\frac{3/2}{x+3},x=1$；

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+4x+3}=1-\frac{4x+3}{x^2+4x+3}=1-\frac{1}{2}(\frac{-1}{x+1}+\frac{9}{x+3}),x=1$$

（3） $f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2},x=0$

解：$f(x)=-1+\frac{2}{1-x^2}=-1+2\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n},x\in(-1,1)$

（4） $f(x)=a^x,x=0,x=1$　　　　$f(x)=e^{x\ln a}$

（5） $f(x)=\ln x, x=5$ ； $f(x)=x\ln x, x=5$

解： $f(x)=\ln x=\ln(5+(x-5))=\ln 5+\ln\left[1+\frac{1}{5}(x-5)\right]$

（6） $f(x)=\arctan\frac{2-2x}{1+4x}, x=0$

**解**： $f'(x)=-\frac{2}{1+4x^2}=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4x^2)^n$ ， $|x|<\frac{1}{2}$ ，两边积分

$$\int_0^x f'(x)dx=-2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n4^nx^{2n}dx=-2\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\cdot 4^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$f(x)=\arctan 2-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

（7） $f(x)=\int_0^x\frac{t-\sin t}{t^3}dt, x=0$

（8） $f(x)=\arctan x, x=0$ ，并求 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ 的和。

解： $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}, x\in(-1,1)$

$f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ，即 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, x\in(-1,1)$

当 $x=-1$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ ，该级数收敛

当 $x=1$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ ，该级数收敛

于是 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, x\in[-1,1]$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=f(1)=\frac{\pi}{4}.$$

（9） $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-2x}}, x_0=0$

解： $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-2x}}=x(1-2x)^{-\frac{1}{2}}=x\left[1+(-\frac{1}{2})(-2x)+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2!}(-2x)^2+\cdots\right]$

$$=x+x^2+\frac{1\cdot 3}{2!}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!}x^4+\cdots=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}, -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$$

**例** 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]$

解： $\lim_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]=\left[x-x^2(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+\cdots)\right]=\frac{1}{2}$

**例** 设 $f(x)=\sin x^2$ ，求 $f^{(6)}(0)$

解：$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$，故

$$f(x) = \sin x^2 = x^2 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{5!}x^{10} + \cdots$$

$$f^{(6)}(0) = -\frac{1}{3!}\cdot 6! = -120$$

**例** 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+2)!+(2k+1)!}$

解：注意$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+2)!+(2k+1)!} = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+3)(2k+1)!}$

考虑级数$f(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+3}}{(2k+3)(2k+1)!}, x \in (-\infty, +\infty)$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+2}}{(2k+1)!} = x\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} - x\right] = x(\sin x - x)$$

$$f(x) - f(0) = \int_0^x x\sin x dx - \frac{1}{3}x^3 = \sin x - x\cos x - \frac{1}{3}x^3$$

$$f(x) = \sin x - x\cos x - \frac{1}{3}x^3$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+2)!+(2k+1)!} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+3)(2k+1)!} = f(1) = \sin 1 - \cos 1 - \frac{1}{3}$$

**例** 设$D$是圆域$x^2+y^2\le 1$，证明不等式$\frac{3\pi}{5} \le \iint_D e^{-\sqrt{(x^2+y^2)^3}}dxdy \le \frac{29\pi}{40}$.

解：利用极坐标，有

$$\iint_D e^{-\sqrt{(x^2+y^2)^3}}dxdy = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 \rho e^{-\rho^3}d\rho = 2\pi\int_0^1 \rho e^{-\rho^3}d\rho$$

由于$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$,故当$x>0$时，有

$$1 - x \le e^{-x} \le 1 - x + \frac{1}{2!}x^2$$

$$\int_0^1 \rho e^{-\rho^3}d\rho \ge \int_0^1 \rho(1-\rho^3)d\rho = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

$$\int_0^1 \rho e^{-\rho^3}d\rho \le \int_0^1 \rho(1-\rho^3+\frac{1}{2}\rho^6)d\rho = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{16} = \frac{29}{80}$$

于是$\frac{3\pi}{5} \le \iint_D e^{-\sqrt{(x^2+y^2)^3}}dxdy \le \frac{29}{40}\pi$.

## 练习题

**例** 求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}$的和函数,并求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}$的和.　$xe^{x^2},3e.$

**例**（2019）幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$在$(0,+\infty)$内的和函数$S(x)=$________

【答案】$\cos\sqrt{x}$

【解析】因$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$，故$\cos\sqrt{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\sqrt{x}\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$

**例** 求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!2^n}$的和.

解:令$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!2^n}x^{2n},x\in(-\infty,+\infty)$

$$=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!2^n}=\frac{d}{dx}\left(x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{x^2}{2})^n\right)=\frac{d}{dx}(xe^{\frac{x^2}{2}})=(1+x^2)e^{\frac{x^2}{2}}$$

于是$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!2^n}=f(1)=2\sqrt{e}$

或：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2n}{n!2^n}+\frac{1}{n!2^n}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!2^{n-1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!2^n}$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!2^k}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!2^n}=2\sqrt{e}$$

**例** 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^{2n-1}(2n+1)!}$的和.

解: 因$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^{2n-1}(2n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$,考虑幂级数$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n nx^{2n-1}}{(2n+1)!}$

其收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

$$\int_0^x s(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2nx^{2n-1}}{(2n+1)!}dx=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2n+1)!}=\frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{\sin x-x}{2x}$$

于是$s(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2}$,故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^{2n-1}(2n+1)!}=s(\frac{1}{2})=\cos\frac{1}{2}-2\sin\frac{1}{2}$

**例**（2020 年考研）设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,(n+1)a_{n+1}=(n+\frac{1}{2})a_n$。证明：当$|x|<1$时

幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$收敛，并求其和函数

解$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}=1$，$R=\frac{1}{\rho}=1$，所以当$|x|<1$时幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$收敛。

令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+\frac{1}{2})a_nx^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=1+xS'(x)+\frac{1}{2}S(x)$$

即有

$$(1-x)S'(x)=\frac{1}{2}(2+S(x))\Rightarrow\frac{dS(x)}{2+S(x)}=\frac{dx}{2(1-x)}\Rightarrow\ln|2+S(x)|=-\frac{1}{2}\ln|1-x|+\ln C_1$$

从而$2+S(x)=\frac{C}{\sqrt{1-x}}$，因$S(0)=0$，所以和函数$S(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x}}-2,(-1<x<1)$。

教学内容

1．泰勒级数和麦克劳林级数的概念；

2．定理：设函数$f(x)$在点$x_0$的某一邻域$U(x_0)$内具有各阶导数，则$f(x)$在该邻域内能展开成泰勒级数的充分必要条件是$f(x)$的泰勒公式中的余项$R_n(x)$当$n\to\infty$时的极限为零，即

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0\quad(x\in U(x_0)).$$

(证明).

**函数展开成幂级数的方法：**

1．直接展开法:

例 1 ($e^x$的展开)；例 2 ($\sin x$ 的展开)

2．间接展开法：

例 3 ($\ln(1+x)$的展开)，例 4 ($\cos x$ 的展开) , 例 5～例 9.

**二、教学要求和注意点**

# 第六节　函数的幂级数展开式的应用

## 一、内容要点

**近似计算：**

例 1 ～ 例 3；

**欧拉(Euler)公式：**

(1) 复数项级数的概念：

复数项级数、复数项级数收敛与绝对收敛；

(2) 欧拉(Euler)公式：$e^{ix} = \cos x + I \sin x$ .

## 二、教学要求和注意点

# 第七节　傅立叶级数

## 讲稿内容

### 一、周期函数与三角级数

在工程技术领域中, 常碰到周期运动. 例如, 各种各样的振动、交流电的变化、发动机中的活塞运动等都是周期运动. 为了描述这种周期运动, 就需要用到周期函数, 正弦函数和余弦函数均是常见而简单的周期函数. 如描述简谐振动的函数

$$y = A\sin(\omega t+\varphi)$$

就是一个以 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 为周期的正弦函数，其中 $A$ 为振幅，$\varphi$ 为初相角，$\omega$ 为角频率.

现实世界中的许多复杂的周期运动, 虽然并不都可用简单的正弦函数来描述, 但在一定条件下, 可以看成是许多不同频率、不同振幅的简谐振动的叠加，即

$$f(x)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(\sin\varphi_n\cos n\omega t+\cos\varphi_n\sin n\omega t)$$

其中 $A_0, A_n, \varphi_n (n=1,2,\cdots)$ 都是常数. 为了讨论方便, 上式变形为:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1.1}$$

其中 $a_0=2A, a_n=A_n\sin\varphi_n, b_n=A_n\cos\varphi_n, x=\omega t$ 均为常数.

一般地, 形如 $(1.1)$ 式的级数称为**三角级数**, 如果 $(1.1)$ 式中只含正弦项, 称为**正弦级数**, 只含余弦项, 称为**余弦级数**.

<u>下面的问题是</u>: 如何把一个周期函数展开成三角级数呢？即如何确定三角级数的中系数 $a_n, b_n$. 以及三角级数的收敛性问题。为此，首先介绍三角函数系的正交性。

**定义**: 两不同函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，若 $\int_a^b f(x)g(x)dx=0$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上正交。

通过直接计算可验证三角函数系：$1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\cdots,\sin nx,\cos nx,\cdots$ 的正交性:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=0,(n=1,2,3,\cdots)$；

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=0,(n=1,2,3,\cdots)$；

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nxdx=0,(m\neq n,m,n=1,2,3,\cdots)$；

(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nxdx=0,(m,n=1,2,3,\cdots)$；

(5) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx=0,(m\neq n,m,n=1,2,3,\cdots)$；

(6) $\int_{-\pi}^{\pi}1dx=2\pi$, $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx=\pi$, $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx=\pi,(n=1,2,3,\cdots)$.

**注**:上面 $(1)\sim(6)$ 式,对任意长度为 $2\pi$ 的积分区间都成立.

所谓**<u>三角函数的正交性</u>**，就是三角函数系

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots \cos nx, \sin nx, \cdots$

中，任何两个不同函数的乘积在区间$[-\pi, \pi]$上（或长度为$2\pi$的区间上）的积分等于零，而每个函数自身的乘积的积分非零。

为什么称为三角函数系有正交性？可用空间直角坐标中的基本向量$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$作类比。$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$具有正交性，即$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$，$\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$，$\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$（不同单位向量的乘积等于 0），而$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$(自身乘积非 0)。容易看出它们是十分相似的。

## 二、以 $2\pi$ 为周期的周期函数的傅里叶（Fourier）级数展开

与函数展开成幂级数类似,要将函数 $f(x)$ 展开成三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

首先要确定三角级数的系数 $a_0,a_n,b_n(n=1,2,3,\cdots)$，然后要讨论用这样的系数构造出的三角级数的收敛性. 如果级数收敛, 还要考虑它的和函数与函数 $f(x)$ 是否相同, 如果在某个范围内两者相同, 则在这个范围内, 函数 $f(x)$ 可以展开成这个三角级数.

设 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数，我们假设 $f(x)$ 能展开成三角级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1.2}$$

其中 $a_0,a_n,b_n$ 为待定系数.

首先求 $a_0$. 在 $(1.2)$ 式两端从 $-\pi$ 到 $\pi$ 积分，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx]$$

利用三角函数的正交性,上式右端除第一项外均为零.于是

$$\boxed{a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx}$$

其次求 $a_n$. $(1.2)$ 式两端同时乘以 $\cos kx$，并从 $-\pi$ 到 $\pi$ 积分,利用三角函数正交性,得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos kxdx+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kxdx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kxdx]$$

$$=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx=\pi a_n$$

于是

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,(n=1,2,3,\cdots)$$

类似可得

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,(n=1,2,3,\cdots)$$

因此我们求出的三角级数的系数为

$$\boxed{\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,(n=0,1,2,3,\cdots)\\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,(n=1,2,3,\cdots)\end{cases},} \tag{1.3}$$

由 $(1.3)$ 式所确定的系数 $a_0,a_n,b_n$ 称为 $f(x)$ 的**傅里叶(Fourier)系数**，将这些系数代入 $(1.2)$ 式的右端所得到的级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

称为函数 $f(x)$ 的**傅里叶级数**. 特别地,

当 $f(x)$ 为奇函数时,其傅里叶系数为

$$a_n = 0(n = 0,1,2,\cdots),\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx,(n = 1,2,3,\cdots)$$

即奇函数的傅里叶级数是只含正弦项的**正弦级数**

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_n \sin nx .$$

当 $f(x)$ 为偶函数时,其傅里叶系为

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx,(n = 0,1,2,\cdots),b_n = 0,(n = 1,2,3,\cdots)$$

即偶函数的傅里叶级数是只含余弦项的**余弦级数**

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

下面的问题是:函数 $f(x)$ 的傅里叶级数是否收敛?收敛于谁?这里我们不加证明地叙述狄立克雷关于傅里叶级数收敛问题的一个充分条件.

**定理** 2.1 **(收敛定理)** 设 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数.如果在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，并至多只有有限个极值点，则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且

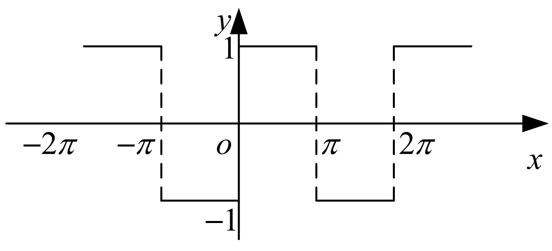
(1) 当 $x$ 是 $f(x)$ 的连续点时，级数收敛于 $f(x)$；

(2) 当 $x$ 是 $f(x)$ 的间断点时，级数收敛于 $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

狄立克雷收敛定理告诉我们:只要函数 $f(x)$ 在一个周期内至多有有限多个第一类间断点,并且不作无限次振动,则函数 $f(x)$ 的傅里叶级数在函数的连续点处收敛于该点的函数值,在函数的间断点处收敛于该点的函数左右极限的算术平均值. 由此可见,函数展开成傅里叶级数的条件要比函数展开成幂级数的条件弱得多.

**例**　$f(x)$ 是以 $2\pi$ 为周期的周期函数，在一个周期内的表达式为 $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x < \pi \end{cases}$，求 $f(x)$ 的 Fourier 级数。

解：$f(x)$ 的图形为：




$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上只有一个第一类间断点，满足收敛性定理。

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -1dx + \int_{0}^{\pi} 1dx\right] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\cos nx dx + \int_{0}^{\pi}\cos nx dx\right] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

**所以** $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]\sin nx$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots + \frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x + \cdots\right]$$

当 $x = k\pi$ 时，级数收敛于 $\frac{f(k\pi-0)+f(k\pi+0)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$

**即** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]\sin nx = \begin{cases} f(x) & x \neq k\pi \\ 0 & x = k\pi \end{cases}$

注意:

$x = \pi$ 时，级数收敛于

$$\frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{f(\pi+0-2\pi)+f(\pi-0)}{2} = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

$x = -\pi$ 时，级数收敛于

$$\frac{f(-\pi+0)+f(-\pi-0)}{2} = \frac{f(-\pi+0)+f(-\pi-0+2\pi)}{2} = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

因此，$x = \pm\pi$，级数都收敛于 $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$

**即傅里叶级数在区间端点收于左端点的右极限、右端点的左极限的平均值。**

**例**　设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，它在一个周期内的表达式为:

$f(x) = |\sin x|$　　　（$-\pi \le x < \pi$），将 $f(x)$ 展为付里叶级数

解　显然 $f(x)$ 是按段光滑函数，可以展开为付里叶级数，由于 $f(x)$ 为偶函数，所以该级数为余弦级数。

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx = \frac{4}{\pi}, a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x dx = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin x|\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{2}{n^2-1}[\cos(n-1)\pi - 1] \qquad n \neq 1$$

$$= \begin{cases} 0 & n = 3,5\cdots \\ -\frac{4}{\pi}\frac{1}{n^2-1} & n = 2,4\cdots \end{cases}$$

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(4m^2-1)}\cos 2mx = \frac{2}{\pi}(1 - 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2mx}{4m^2-1}) \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

$x=0$时,有$0=\dfrac{2}{\pi}(1-2\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{4m^2-1})$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4m^2-1}=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots+\frac{1}{(2m-1)(2m+1)}+\cdots=\frac{1}{2}$$

对于非周期函数$f(x)$,如果它只在区间$[-\pi,\pi)$上有定义(对于区间$(-\pi,\pi]$,$[-\pi,\pi]$可类似处理),并且在该区间上满足狄立克雷收敛定理的条件,函数$f(x)$也可以展开成它的傅里叶级数.

事实上,可以在$[-\pi,\pi)$外补充$f(x)$的定义,使它拓广为一个周期为$2\pi$的周期函数$F(x)$,即

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in[-\pi,\pi)\\ f(x-2k\pi), & x\in[(2k-1)\pi,(2k+1)\pi),(k=\pm1,\pm2,\cdots)\end{cases}$$

这种拓广函数定义域的方法称为**周期延拓**. 将作了周期延拓后的函数$F(x)$展开成傅里叶级数,然后限制$x$在区间$[-\pi,\pi)$内,此时显然有$F(x)=f(x)$,这样就得到了$f(x)$的傅里叶级数展开式,这个级数在区间端点$x=\pm\pi$处,收敛于$\dfrac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2}$.

**例** 将函数$f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$展开成傅里叶级数,并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$的和.

**解** 函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上满足收敛定理,将$f(x)$进行周期延拓,其图形如下:

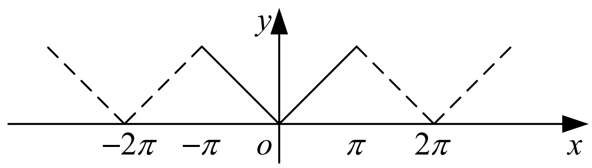



图2.2

计算$f(x)$的傅里叶系数,并注意$f(x)$为偶函数.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n-1\right],n=1,2,3,\cdots.$$

$$b_n=0$$

所以函数$f(x)$的傅里叶级数,也是余弦级数为

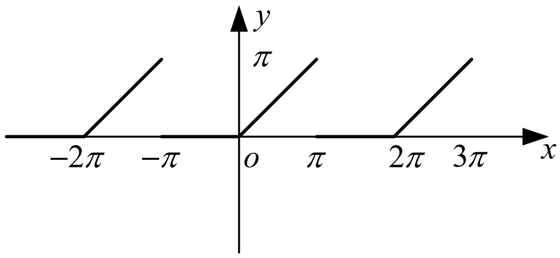
$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)(-\pi\le x\le\pi).$$

在上式中令 $x=0$ 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

**例** 设 $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le \pi \\ 0 & -\pi<x<0 \end{cases}$，求 $f(x)$ 的傅里叶数展开式。

解，显然 $f(x)$ 满足收敛性定理，因此它可以展开成傅里叶级数。$f(x)$ 及其周期延拓后的图象为：




由于　$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{\pi}{2}$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{1}{n\pi}x\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}-\frac{2}{n^2\pi} & n\text{为奇数}\\ 0 & n\text{为偶数}\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=-\frac{1}{n\pi}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{1}{n^2\pi}\sin nx\Big|_0^{\pi}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$\therefore$　$f(x)$在$(-\pi,\pi)$ 上

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

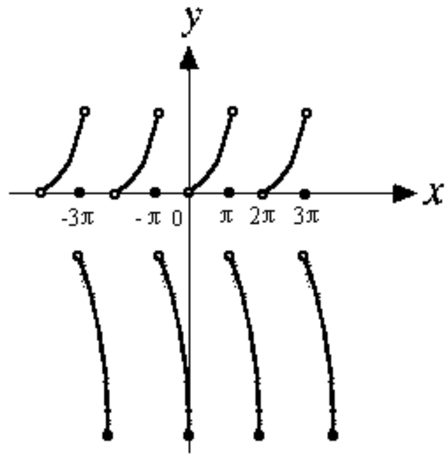
$$=\frac{\pi}{4}+(-\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x)+(-\frac{1}{2}\sin 2x)+(-\frac{2}{9\pi}\cos 3x+\frac{1}{3}\sin 3x)+\dots$$

$x=(2k\pm1)\pi$ 上式右端收敛于 $\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=\frac{\pi+0}{2}=\frac{\pi}{2}$

**例 2** 把函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数, 其中

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & 0<x<\pi\\ 0 & x=\pi\\ -x^2 & \pi<x\le 2\pi\end{cases},$$

并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和。




解 $f(x)$ 及其周期延拓的图形如图 6.3，显然 $f(x)$ 是按段光滑的，因此它可以展开成傅里叶级数。

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-x^2)dx=\frac{\pi^2}{3}-\frac{7\pi^2}{3}=-2\pi^2$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-x^2\cos nx)dx=\frac{4}{n^2}[(-1)^n-1]$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-x^2)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\{\frac{\pi^2}{n}+(\frac{\pi^2}{n}-\frac{2}{n^3})[1-(-1)^n]\}$$

所以 $f(x)在x\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$ 时,

$$f(x)=-\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{4}{n^2}[(-1)^n-1]\cos nx+\frac{2}{\pi}[\frac{\pi^2}{n}+(\frac{\pi^2}{n}-\frac{2}{n^3})(1-(-1)^n)]\sin nx$$

$$=-\pi^2-8(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}cox5x+\cdots)$$

$$+\frac{2}{\pi}\{(3\pi^2-4)\sin x+\frac{\pi^2}{2}\sin 2x+(\frac{3\pi^2}{3}-\frac{4}{3^3})\sin 3x+\frac{\pi^2}{4}\sin 4x+\cdots\}$$

当 $x=\pi$ 时, 由于 $\frac{f(-\pi-0)+f(\pi+0)}{2}=0$, 所以 $0=-\pi^2+8(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots)$

即 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$

当 $x=0$ 或 $2\pi$ 时，由于 $\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\frac{1}{2}(-4\pi^2+0)=-2\pi^2$

所以 $-2\pi^2=-\pi^2-8(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots)$

即 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$

在实际应用中,有时还需要把定义在区间$[0,\pi]$的函数$f(x)$展开成正弦级数或余弦级数.设$f(x)$在$[0,\pi]$上满足狄立克雷收敛定理.

若要将$f(x)$展开成正弦级数,首先将$f(x)$进行**奇延拓:**令

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & 0\le x\le\pi \\ -f(-x), & -\pi\le x<0 \end{cases}$$

则$F(x)$是在$[-\pi,\pi]$上有定义的奇函数,其次将$F(x)$进行周期延拓,从而可将$F(x)$展开成傅里叶级数,所得级数必是正弦级数.最后限制$x$在$[0,\pi]$上,就得到$f(x)$的正弦级数展开式.

若要将$f(x)$展开成余弦级数,首先将$f(x)$进行**偶延拓:**令

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & 0\le x\le\pi \\ f(-x), & -\pi\le x<0 \end{cases}$$

则$F(x)$是在$[-\pi,\pi]$上有定义的偶函数,其次将$F(x)$进行周期延拓,从而可将$F(x)$展开成傅里叶级数,所得级数必是余弦级数.最后限制$x$在$[0,\pi]$上,就得到$f(x)$的余弦级数展开式.

**例** 将函数$f(x)=x^2(0<x<\pi)$展成余弦级数, 并计算$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$。

解 首先将函数$f(x)$进行偶式延拓，再进行周期延拓，所以 $b_n=0$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=(-1)^n\frac{4}{n^2}\qquad(n=1,2,3\cdots)$$

$f(x)$的傅里叶级数为 $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$

因为$f(x)$在$(-\pi,\pi)$内连续，所以此级数在$(-\pi,\pi)$内收敛于$f(x)$。当$x=\pm\pi$，级数收敛于

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\pi^2=f(-\pi)=f(\pi)$$

所以 $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\qquad(|x|\le\pi)$

令$x=0$时，得 $0=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$　　即 $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$

当 $x=\pi$ 时，得 $\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$　　即：　$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$

$\boxed{\text{记住}}$：$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，从而

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{24}$$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{8}$$

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

**例 4** 把定义 $[0,\pi]$ 上的函数 $f(x)$ 展开成正弦级数。

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<h\\ \frac{1}{2} & x=h\\ 0 & h<x\le\pi\end{cases}\qquad(0<h<\pi)$$

解：将 $f(x)$ 奇延拓后再周期延拓。

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{h}\sin nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_0^h=\frac{2}{n\pi}(1-\cos nh)$$

所以 $f(x)\sim\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos nh)}{n}\sin nx=\begin{cases}f(x) & 0<x<h,\ h<x<\pi\\ \frac{1}{2} & x=h\\ 0 & x=0,\pi\end{cases}$

本题中若 $h=\pi$ 时，傅里叶级数为：

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx=\frac{4}{\pi}(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots)=\begin{cases}f(x) & 0<x<\pi\\ 0 & x=0,\pi\end{cases}$$

## 三、　以 $2l$ 为周期的周期函数的傅里叶级数展开

前面我们所讨论的函数的傅里叶级数必须是以 $2\pi$ 为周期的函数，而在实际应用中，遇到的函数的周期不一定是 $2\pi$，可能是 $2l(l>0)$，还需研究以 $2l$ 为周

期的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数，要解决此问题，我们可通过线性变换 $x=\dfrac{l}{\pi}t$ 把 $f(x)$ 变换成以 $2\pi$ 为周期的 $t$ 的函数 $F(t)=f(\dfrac{l}{\pi}t)$。

$\boxed{\text{板书}}$： $f(x),T=2l\xrightarrow{x=\frac{l}{\pi}t}f(x)=f(\dfrac{l}{\pi}t)=F(t),T'=2\pi$

事实上， $F(2\pi+t)=f(\dfrac{l}{\pi}(2\pi+t))=f(2l+\dfrac{l}{\pi}t)=f(\dfrac{l}{\pi}t)=F(t)$

$F(t)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(\cos nt+b_n\sin nt)$，

其中 $nt=\dfrac{n\pi x}{l},a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\cos ntdt\xrightarrow{x=\frac{l}{\pi}t}\dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx$

**定理**：设周期为 $2l$ 的为周期函数 $f(x)$满足收敛定理的条件，则它的傅立叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}),\qquad (x\in C)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\qquad (n=0,1,2,3,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

$$C=\left\{x\left|f(x)=\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]\right.\right\}$$

**特别地**，当 $f(x)$为奇函数时，

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},\qquad (x\in C)$$

其中 $$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

当 $f(x)$为偶函数时，

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},\qquad (x\in C)$$

其中 $$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

**例 7**　把函数 $f(x)=\begin{cases}0 & -5<x<0\\ 3 & 0\le x<5\end{cases}$ 展成傅里叶级数。

解　由于 $f(x)$ 在（-5，5）上逐段光滑，将 $f(x)$ 周期延拓，因此可以展开成傅里叶级数，根据

$$a_0=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}f(x)dx=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}3dx=3$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0}0\cdot\cos\frac{n\pi x}{5}dx+\int_{0}^{5}3\cdot\cos\frac{n\pi x}{5}dx\right]$$

$$=\frac{3}{5}\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}\Big|_0^5=0 \qquad n=1,2\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}f(x)\sin\frac{n\pi x}{5}dx=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}3\sin\frac{n\pi x}{5}dx$$

$$=\frac{3}{5}[-\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}]\Big|_0^5=\frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}=\frac{6}{(2k-1)\pi} \qquad k=1,2\cdots$$

所以 $f(x)$ 的付里叶级数为

$$\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{(2k-1)\pi}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{5}=\frac{3}{2}+\frac{6}{\pi}(\sin\frac{\pi x}{5}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{5}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{5}+\cdots)$$

$$=\begin{cases}f(x), & x\in(-5,0)\cup(0,5)\\ 3/2, & x=0\end{cases}$$

**例 8** $f(x)=x$ 在 $(0,2)$ 内展开成：

①正弦级数
②余弦级数

解　①要把 $f(x)$ 展为正弦级数，对 $f(x)$ 作奇延拓，再作周期延拓，

这时　$a_n=0,\quad n=0,1,2\cdots$

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1} \qquad n=1,2,\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi x}{2}=\frac{4}{\pi}(\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\cdots)=x,x\in(0,2)$$

②要把 $f(x)$ 展成余弦级数，对 $f(x)$ 作偶延拓，再作周期延拓，

这时　$b_n=0,\qquad n=1,2\cdots \qquad a_0=\int_0^2 xdx=2$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1] \qquad n=1,2...$$

$$x=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8}{(2k-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}$$

$$=1-\frac{8}{\pi^2}(\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2}+\cdots)$$

**本章小结.**

**二、教学要求和注意点**

**概念:**

1．三角函数系及其正交性;

性质：三角函数系在$[-\pi, \pi]$上正交(证明).

2．三角级数;

3．傅立叶级数：$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad (n=0,1,2,3,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

**函数展开成傅立叶级数的条件:**

狄利克雷定理：设$f(x)$是周期为$2\pi$的周期函数，如果它满足：

(1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，

(2) 在一个周期内至多只有有限个极值点，

则$f(x)$的傅立叶级数收敛，并且

当$x$是$f(x)$的连续点时，级数收敛于$f(x)$;

当$x$是$f(x)$的间断点时，级数收敛于$\frac{1}{2}\left[f(x^-)+f(x^+)\right]$

**将函数展开成傅立叶级数:**

1．$f(x)$以$2\pi$为周期，且满足收敛条件，则$f(x)$可展成$(-\infty, +\infty)$上的傅立叶级数.

例

2．$f(x)$在$[-\pi, \pi]$上有定义，且满足收敛条件，则$f(x)$可展成$[-\pi, \pi]$上的傅立叶级数.

例.

3．$f(x)$在$[0, \pi]$上有定义，且满足收敛条件，则$f(x)$既可展成$[0, \pi]$上的正弦级数，也可展成$[0, \pi]$上的余弦级数.

例