1．下列命题中为假的是 B 【】

A. {a}∈{{a}}

B. {a}⊆{{a}}

C. {a}∈{a,{a}}

D. {a}⊆{a,{a}}

2．在一个有 3 个元素的集合上，可以有多少种不同的关系？ D 【】

A． 8

B． 9

C． 64

D． 512 2^9

3．下面的二元关系中哪个是传递的？ C 【】

A．父子关系

B．朋友关系

C．集合的包含关系

D．实数的不相等关系

4．设 A={a, b, c}，R1、R2 是 A 上的二元关系，且 R1 = {<a, b>, <a, c>, <b, c>}，R2 ={<a, b>, <a, a>}，则 $R_1 \circ R_2 =$ D 【】

A． {<a, b>, <a, c>}

B． {<a, b>, <a, c>, <b, c>}

C． {<a, b>, <a, a>}

D． Φ

5．下列选项中不是偏序集合的是 B 【】

A．<P(N)，⊆>

B．<P(N)，⊂>

C．<P({a})，⊆>

D．<P(Ø)，⊆>

6. 集合 $A=\{a,b,c,d\}$， $R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$，求 R 的自反闭包 *r(R)*和对称闭包 *s(R)*，并利用 Warshall 算法求 *ts(R)*，要求写出所有中间过程。

7. 若集合 A 上的二元关系 R 和 S 具有对称性，证明 $R\circ S$ 对称当且仅当 $R\circ S = S\circ R$。

8. 设 S 为集合 X 上的关系，证明若 S 是自反的和传递的，则 S ∘ S = S，其逆为真吗？若为真，请证明，否则请举出反例。

9. 设 R 是集合 A 上对称和传递关系。证明如果对于 A 中每个元素 a，在 A 中必定也存在一个 b，使<a, b>∈R，则 R 是一个等价关系。

10. EKG 序列是一个由正整数构成的序列。此序列的前两个数是 1 和 2。此后每一个数都选自与前一个数有公因子且没有在序列中出现过的数中的最小数。这个序列有两个有趣的特性：1、所有的正整数都会在序列中出现；2、所有的素数在此序列中以升序排列。请按照 EKG 序列的构造方式，写出 x3~x7 的几个正整数（x1=1，x2=2）。现在，我们在集合 A={x1, x2, …, x7}上定义整除关系 R，请画出 R 的哈斯图。并指出子集 B={x3, x4, x6, x7}的极大（小）元，最大（小）元，上（下）界，以及上（下）确界。

6. 集合 $A=\{a,b,c,d\}$，$R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$，求 R 的自反闭包 $r(R)$和对称闭包 $s(R)$，并利用 Warshall 算法求 $ts(R)$，要求写出所有中间过程。

$$M_R=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$r(R)=R\cap I=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>,<b,c>,<c,c>,<c,d>,<d,d>\}$

$s(R)=R\cap R^{-1}=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,b>,<c,d>,<d,c>\}$

令 $A=M_R$

对A用Warshall算法：

$$A'=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore ts(R)=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,\cdots\}$

7. 若集合 A 上的二元关系 R 和 S 具有对称性，证明 $R\circ S$ 对称当且仅当 $R\circ S=S\circ R$。

1° $R\circ S$ 对称

$\forall <z,x>\in R\circ S$ 有 $<x,z>\in R\circ S$

$\exists y,\ <x,y>\in R \wedge <y,z>\in S$

$\because R,S$ 对称

$\therefore <z,y>\in S \wedge <y,x>\in R$

$\therefore <z,x>\in S\circ R$

$\therefore R\circ S\subseteq S\circ R$

同理 $S\circ R\in R\circ S$ $\therefore R\circ S=S\circ R$

2° $R\circ S=S\circ R$

$\forall <x,z>\in R\circ S$

$\exists y,\ <x,y>\in R \wedge <y,z>\in S$

$\because R,S$ 对称

$\therefore <z,y>\in S \wedge <y,x>\in R$

$\therefore <z,x>\in S\circ R$

$\because S\circ R=R\circ S$

$\therefore <z,x>\in R\circ S$

$\therefore R\circ S$ 对称

M_R　复合关系

7. 若集合A上的二元关系R和S具有对称性，证明$R*S$对称当且仅当$R*S=S*R$。

R^{-1}

证明：若$R*S$对称，则$R*S=(R*S)^{-1}=S^{-1}*R^{-1}=S*R$。(8分)

反之，若$R*S=S*R$，则$(R*S)^{-1}=(S*R)^{-1}=R^{-1}*S^{-1}=R*S$，从而$R*S$对称。(8分)

$\vee\ (R*S)^{-1}=S^{-1}*R^{-1}$

M_{R*S}　M_{S*R}

8. 设 S 为集合 X 上的关系，证明若 S 是自反的和传递的，则 S∘S＝S，其逆为真吗？若为真，请证明，否则请举出反例。

$\forall <x,y> \in S \circ S$

$\exists t \in X,\ <x,t> \in S \wedge <t,y> \in S$

$\because$ S传递 $\therefore <x,y> \in S$ $\therefore S \circ S \subseteq S$

$\forall <x,y> \in S$

$\exists t \in X,\ <x,t> \in S \wedge <t,y> \in S$

$\therefore <x,y> \in S \circ S$

$\therefore S \subseteq S \circ S$

$\therefore S = S \circ S$

$S = \{<1,2>,<2,2>\}$ $S \circ S = \{<1,2>,<2,2>\}$

S无自反性

9. 设 R 是集合 A 上对称和传递关系。证明如果对于 A 中每个元素 a，在 A 中必定也存在一个 b，使<a, b>∈R，则 R 是一个等价关系。

$\forall a \in A,\ \exists b \in A,\ <a,b> \in R$

$\because$ R对称 $\therefore <b,a> \in R$

$\because$ R传递 $\therefore <a,a> \in R$

$\therefore$ R自反

10. EKG 序列是一个由正整数构成的序列。此序列的前两个数是 1 和 2。此后每一个数都选自与前一个数有公因子且没有在序列中出现过的数中的最小数。这个序列有两个有趣的特性：1、所有的正整数都会在序列中出现；2、所有的素数在此序列中以升序排列。请按照 EKG 序列的构造方式，写出 x3~x7 的几个正整数（x1=1，x2=2）。现在，我们在集合 A={x1, x2, …, x7} 上定义整除关系 R，请画出 R 的哈斯图。并指出子集 B={x3, x4, x6, x7}的极大（小）元，最大（小）元，上（下）界，以及上（下）确界。

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	2	4	6	3	9	12