数列の极限.

$\forall \varepsilon, \exists N, n > N$ 时 $|a_n - A| < \varepsilon$.

定理：1. $\{a_n\}$ 极限唯一

2. 收敛数列必有界.

3. $x_n \to A$　$y_n \to B$　若 $A > B$　则 $\exists N, n > N$ 时　$x_n > y_n$

3.1. $x_n \to A$, $A > 0$ 则 $\exists N, n > N$ 时 $x_n > 0$

3.2 $x_n \to A$, $y_n \to B$ 若 $\exists N, n > N$ 时　$x_n \geq y_n$　则 $A \geq B$

4. 若 $\begin{cases} \exists N, n > N \text{ 时 } y_n \leq x_n \leq z_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A \end{cases}$　则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

5. $x_n \to A$,　x_n 的子数列 $\to A$

5.1. x_n 有一个子数列发散，则 x_n 发散

5.2. x_n 的 2 个子数列 $\to$ 不同极限，则 x_n 发散.

6. x_n 的奇数项构成的子数列 与 x_n 的偶数项构成的子数列 $\longrightarrow A$

则 $x_n \to A$

7. 数列极限的四则运算.

8. 单调有界数列必有极限.

9. "Cauchy" 收敛原理：

「数列收敛 $\Leftrightarrow$ 该数列下标充分大的任意两项之差小于 ε.

函数の极限

$\forall \varepsilon, \exists \delta, |x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$. 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

定理 1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 存在.

2. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ 存在 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$、$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ 存在.

3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 若存在则唯一.

4. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域有界

5. 夹逼

6. 局部保号性质

7. Heine 定理：

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow$ 任何以 x_0 为极限的 $x_n \to A$.

连续

定理 1. $x \sim \sin x$、$\tan x$、$\arcsin x$、$\arctan x$.

$(1+x)^a-1 \sim ax$

2. $f(x)\in C[a,b]$ 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可取到 max, min

$\min \le f(x) \le \max$

3. 介值定理.

连续函数可取到介于两端点函数值之间的任意值.

连续函数可取到介于最大、最小值之间的任意值.

和差化积：

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdots\cdots(1)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdots\cdots(2)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdots\cdots(3)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdots\cdots(4)$$

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\cdots\cdots(5)$$

$$\tan\alpha-\tan\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\cdots\cdots(6)$$

$$\cot\alpha+\cot\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\cdots\cdots(7)$$

$$\cot\alpha-\cot\beta=-\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\cdots\cdots(8)$$

$$\tan\alpha+\cot\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}\cdots\cdots(9)$$

$$\tan\alpha-\cot\beta=-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}\cdots\cdots(10)$$

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$