姓名______ 学号______ 年级______ 专业、班______ 学院______

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密 封 线

重庆大学《高等数学 2》（电子信息类）期中

◉ A卷　○ B卷

2020 — 2021 学年　第 2 学期

开课学院：数学与统计 课程号：MATH1017　考试日期：___

考试方式：○ 开卷 ◉ 闭卷 ○ 其他　　考试时间：120 分钟

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得 分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

2.考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

一、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

$\frac{\sin x^3}{x^2}$

1\. 二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ （ ）B

（A）等于 1　（B）等于 0　（C）等于 -1　（D）不存在

答案：B

$(2,-3,0)$ $(2,0,-6)$ $(0,-3,-8)$

2\. 以 $A(2,0,0), B(0,3,0), C(0,0,6), D(2,3,8)$ 为顶点的四面体体积为（ ）B

（A）12　（B）14　（C）16　（D）18

答案：B

3\. 已知点 $P(1,1,1)$ 关于平面 $x+y+z=1$ 的对称点为 Q，则 Q 的坐标为（ ）D

(A) $(1,\cancel{1},1)$　(B) $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

(C) $(-1,\cancel{-1},-1)$　(D) $(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$

答案：D

4\. 方程 $ydx - xdy = \frac{y^2}{x}dx$ 的通解为（ ）

(A) $x = y\ln x + c$　(B) $y = x\ln x + cx$

(C) $x = y\ln x + cy$　(D) $y = x\ln x + cy$

答案：C

5\. 设常系数方程 $y'' + by' + cy = 0$ 的两个解为 $y_1 = e^x\cos 2x, y_2 = e^x\sin 2x$，则有（ ）

（A） $b=2, c=5$　（B） $b=2, c=-5$

（C） $b=-2, c=5$　（D） $b=-2, c=-5$

答案：

6\. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$，则函数 $z = f(x)e^{f(y)}$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是（ ）C

$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x)e^{f(y)}$　$\frac{\partial z}{\partial y} = f(x)f'(y)e^{f(y)}$

（A） $f(0)<0, f''(0)>0$　（B） $f(0)<0, f''(0)<0$

（C） $f(0)>0, f''(0)>0$　（D） $f(0)>0, f''(0)<0$ >0.

$(f'(x)f'(y)e^{f(y)})^2 - f''(x)e^{f(y)} \cdot f(x)[f''(y)e^{f(y)}] < 0$

$0 - f''(0)^2 \cdot f(0) < 0$.

答案：C

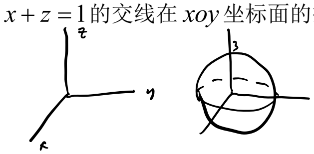
二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1\. 函数 $z = \ln(x^3+y^3)$ 在点 $(1,1)$ 处的全微分 $dz =$ $\frac{3}{2}dx + \frac{3}{2}dy$.

答案：$\frac{3}{2}(dx+dy)$　　$\frac{3x^2}{x^3+y^3}$

2\. 球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xoy 坐标面的投影为 $\begin{cases} x^2+y^2+(1-x)^2=9 \\ z=0 \end{cases}$.

答案：$\begin{cases} 2x^2-2x+y^2=8 \\ z=0 \end{cases}$



3\. 设向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，且 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$|\vec{c}|=5$，则 $|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}|=$.

命题人：

组题人：

审题人：

命题时间：

教务处制

$|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}|=$ ___36___.

答案：36

4. 函数 $z=2x+y$ 在点 $(1,2)$ 沿各个方向的方向导数的最大值为_______.

答案：$\sqrt{5}$

5. 方程 $y'''=y''$ 的通解为____________ .

答案：$y=c_1+c_{\cdot}x+c_3e^x$

6. 以 $y=x^2-e^x$ 和 $y=x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为____________.

答案：$y'-y=2x-x^2$

三、计算题（每小题 7 分，共 28 分）

1. 设 $f(x,y)=\int_0^{xy}e^{-t^2}dt$，求 $\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{-x^2y^2}\cdot y$ $\frac{\partial f}{\partial y}=e^{-x^2y^2}\cdot x$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2x^2ye^{-x^2y^2}y+e^{-x^2y^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2y^2xe^{-x^2y^2}\cdot y$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2x^2y\cdot e^{-x^2y^2}\cdot x$

原式 $=-2y^2x^2e^{-x^2y^2}-2(-2x^2y^2e^{-x^2y^2}+e^{-x^2y^2})-2x^2y^2e^{-x^2y^2}$

$=-2e^{-x^2y^2}$

2. 设直线 $\begin{cases}x+2y-3z=2\\2x-y+z=3\end{cases}$ 在平面 $z=1$ 上的投影为直线 L，求点 $P_0(1,2,1)$ 到直线 L 的距离.

解：取平面束

$$x+2y-3z-2+\lambda(2x-y+z-3)=0$$

$$(1+2\lambda)x+(2-\lambda)y+(\lambda-3)z-2-3\lambda=0$$

其法向量为 $\vec{n}_1=(1+2\lambda,2-\lambda,\lambda-3)$。平面 $z=1$ 的法向量 $\vec{n}_2=(0,0,1)$。由 $\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$ 知 $\lambda=3$，故投影平面方程为 $7x-y-11=0$，因而投影直线 L 的方程为 $\begin{cases}7x-y-11=0\\z=1\end{cases}$，其方向向量为 $\vec{s}=(7,-1,0)\times(0,0,1)=-(1,7,0)$.

又 L 过点 $P_1(1,-4,1)$，于是点 $P_0(1,2,1)$ 到直线 L 的距离为

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0}\times\vec{s}\right|}{|\vec{s}|}=\frac{|(0,6,0)\times(1,7,0)|}{|(1,7,0)|}=\frac{|(0,0,-6)|}{|(1,7,0)|}=\frac{3}{\cancel{25}\,5}\sqrt{\cancel{50}}.$$ [illegible] $5\sqrt{2}$

3.求函数 $z=x^2+3y^2-2x$ 在闭区域 $D=\left\{(x,y)\,|\,\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

解:由 $\begin{cases}z_x=2x-2=0\\z_y=6y=0\end{cases}$ 得 D 内驻点 $(1,0)$，且 $z(1,0)=-1$.

在边界 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上，即 $y^2=4-\frac{4x^2}{9}$，有 $z=-\frac{x^2}{3}-2x+12\quad(-3\le x\le 3)$.

$$z'=-\frac{2}{3}x-2,\ z'=0,x=-3$$

$$z(-3)=15\qquad z(3)=3.$$

比较后可知：函数 z 在点 $(1,0)$ 取最小值 $z(1,0)=-1$，

在点 $(-3,0)$ 取最大值 $z(-3,0)=15$.

4.求微分方程 $y''+2y'+6=0$ 的通解.

四、综合题（每小题8分，共16分）

1.求直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$ 绕 y 轴旋转一周所得旋转曲面的方程，并求该曲面与 $y=0,y=2$ 所包围的立体的体积.

解：在所求曲面上任取一点 $P(x,y,z)$，过 P 作垂直于 y 轴的平面，该平面与题给直线 L 交于点 $M(x_0,y_0,z_0)$，与 y 轴交于点 $Q(0,y,0)$，则 $y_0=y$，且 $|PQ|=|MQ|$，即 $x^2+z^2=x_0^2+z_0^2$，也有 $\dfrac{x_0-1}{2}=\dfrac{y_0}{1}=\dfrac{z_0}{-1}$，即 $x_0=1+2y_0=1+2y,z_0=-y_0=-y$

由此可得旋转曲面方程为 $x^2+z^2=(1+2y)^2+(-y)^2$，即 $x^2+z^2=1+4y+5y^2$.

所求立体的体积为

$$V=\int_0^2\pi(x^2+z^2)dy=\pi\int_0^2(1+4y+5y^2)dy=\frac{70}{3}\pi.$$

2.设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^\alpha y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases},\quad \alpha>0$$

讨论 α 在什么范围时，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微.

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$$

$$\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

$$=\frac{(\Delta x)^\alpha\cdot\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}=\frac{r^{\alpha+1}\cos^\alpha\theta\sin\theta}{r^2}=r^{\alpha-1}\cos^\alpha\theta\sin\theta$$

$$(\Delta x=r\cos\theta,\Delta y=r\sin\theta)$$

$\alpha>1$ 时，上式 $\to0$，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微。

五、证明题（每小题7分，共14分）

1. 设函数 $z=f(x,y)$，在 (x_0,y_0) 的某邻域内 $f_x(x,y)$ 有界，$f_y(x_0,y_0)$ 存在，证明 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

证明：$f_y(x_0,y_0)$ 存在，即 $\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=f_y(x_0,y_0)$

$$\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=f_y(x_0,y_0)+\alpha\text{，其中 }\alpha\to0(\Delta y\to0)$$

$$f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta y$$

因为 $f_x(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内有界，即存在 $M>0$，使得在 (x_0,y_0) 的某邻域内有 $|f_x(x,y)|\le M$

$$|f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|$$

$$\le|f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)|+|f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|$$

$$=|f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)||\Delta x|+|f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|$$

$\leq M|\Delta x|+|f_y(x_0,y_0)||\Delta y|+|\alpha||\Delta y|\to 0 \quad (\Delta x\to 0,\Delta y\to 0)$

所以 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

2.证明：曲面

$$f(ax-bz,ay-cz)=0$$

上的切平面都与某一条直线平行，其中函数 f 具有连续偏导数，且常数 a,b,c 不同时为0

平行.

六、应用题（共 6 分）

设曲线 C 经过点 $(0,1)$，且位于 x 轴上方，就数值而言，C 上任何两点之间的弧长都等于该弧以及它在 x 轴上的投影为边的曲边梯形的面积，求 C 的方程.

解：设曲线方程为 $y=y(x)$，由题意得

$$\int_0^x\sqrt{1+y'^2}dx=\int_0^x y(x)dx$$

两边求导，得 $\sqrt{1+y'^2}=y\Rightarrow y'=\pm\sqrt{y^2-1}\Rightarrow\dfrac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=\pm dx$

于是，$y+\sqrt{y^2-1}=Ce^{\pm x}$

由 $y(0)=1$ 解得 $C=1$。故 $y+\sqrt{y^2-1}=e^{\pm x}\Rightarrow\dfrac{1}{y-\sqrt{y^2-1}}=e^{\pm x}$

即有 $y+\sqrt{y^2-1}=e^{\pm x},y-\sqrt{y^2-1}=e^{\mp x}$，

于是所求曲线方程为 $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

2.设直线$\begin{cases} x+2y-3z=2 \\ 2x-y+z=3 \end{cases}$在平面$z=1$上的投影为直线$L$，求点$P_0(1,2,1)$到直线$L$的距离.

$L: \begin{cases} 7x-y=11 \\ z=1 \end{cases}$ $\quad d=\dfrac{|7-2-11|}{\sqrt{49+1}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$

3.求函数$z=x^2+3y^2-2x$在闭区域$D=\left\{(x,y)\,|\,\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\le 1\right\}$上的最大值和最小值.

$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-2=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=6y=0 \end{cases} \Rightarrow (1,0)$ 代入z得 $z=-1$

$F(x,y,\lambda)=x^2+3y^2-2x+\lambda(4x^2+9y^2-36)$

$\dfrac{\partial F}{\partial x}=\cancel{2}\overset{\frac{6}{3}}{}x-2+\cancel{8\lambda}\overset{-\frac{8}{3}}{}x=0 \quad -\dfrac{2}{3}x=2 \quad x=-3$

$\dfrac{\partial F}{\partial y}=6y+18\lambda y=0 \quad \lambda=-\dfrac{1}{3} \quad y=0$

$4x^2+9y^2-36=0$

36

$(-3,0) \quad 9+6=15$

1.求直线$L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$绕$y$轴旋转一周所得旋转曲面的方程，并求该曲面与$y=0,y=2$所包围的立体的体积.

设$P(x,y,z)$在曲面上.

P到y轴距离$d=x^2+z^2=(2y+1)^2+(-y)^2$

即曲面方程为: $x^2+z^2-5y^2-4y-1=0.$

$V=\int_0^2 \pi(5y^2+4y+1)\,dy$

$=\pi\left(\dfrac{5}{3}y^3+2y^2+y\right)\Big|_0^2$

$=\pi\cdot\dfrac{70}{3}$

$\dfrac{40}{3}+\cancel{8+2}$ 10.

2.设

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^\alpha y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}, \quad \alpha>0$$

讨论α在什么范围时，$f(x,y)$在$(0,0)$点可微.

$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0=f_y(0,0)$

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\dfrac{\Delta x^\alpha \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}-0\cdot\Delta x-0\cdot\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta x^\alpha \Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 极限

$\therefore \alpha+1\geq 2 \Rightarrow \alpha\geq 1$

1. 设函数 $z=f(x,y)$，在 (x_0,y_0) 的某邻域内 $f_x(x,y)$ 有界，$f_y(x_0,y_0)$ 存在，

证明 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

即证 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left(f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\right)=0$.

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left(f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0+\Delta y)+f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\right)=0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left(f_x(x_0, y_0+\Delta y)\cdot\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y\right)=0$.

$\because f_y(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$

$\therefore f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\Delta y f_y(x_0,y_0)+o(\Delta y)$

2.证明：曲面

$$f(ax-bz, ay-cz)=0$$

上的切平面都与某一条直线平行，其中函数 f 具有连续偏导数，且常数 a,b,c 不同时为 0

$\frac{\partial f}{\partial x}=f_1\cdot a$

$\frac{\partial f}{\partial y}=f_2\cdot a$

$\frac{\partial f}{\partial z}=-bf_1-cf_2$

任意一点 (x_0,y_0,z_0) 其切平面法向量为 $(af_1, af_2, -bf_1-cf_2)$

六、应用题（共 6 分）

设曲线 C 经过点 $(0,1)$，且位于 x 轴上方，就数值而言，C 上任何两点之间的弧长都等于该弧以及它在 x 轴上的投影为边的曲边梯形的面积，求 C 的方程.

设 C: $y=f(x)$

$\int_C ds=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+f'(x)}\,dx$

$\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{1+f'(x)}+C$