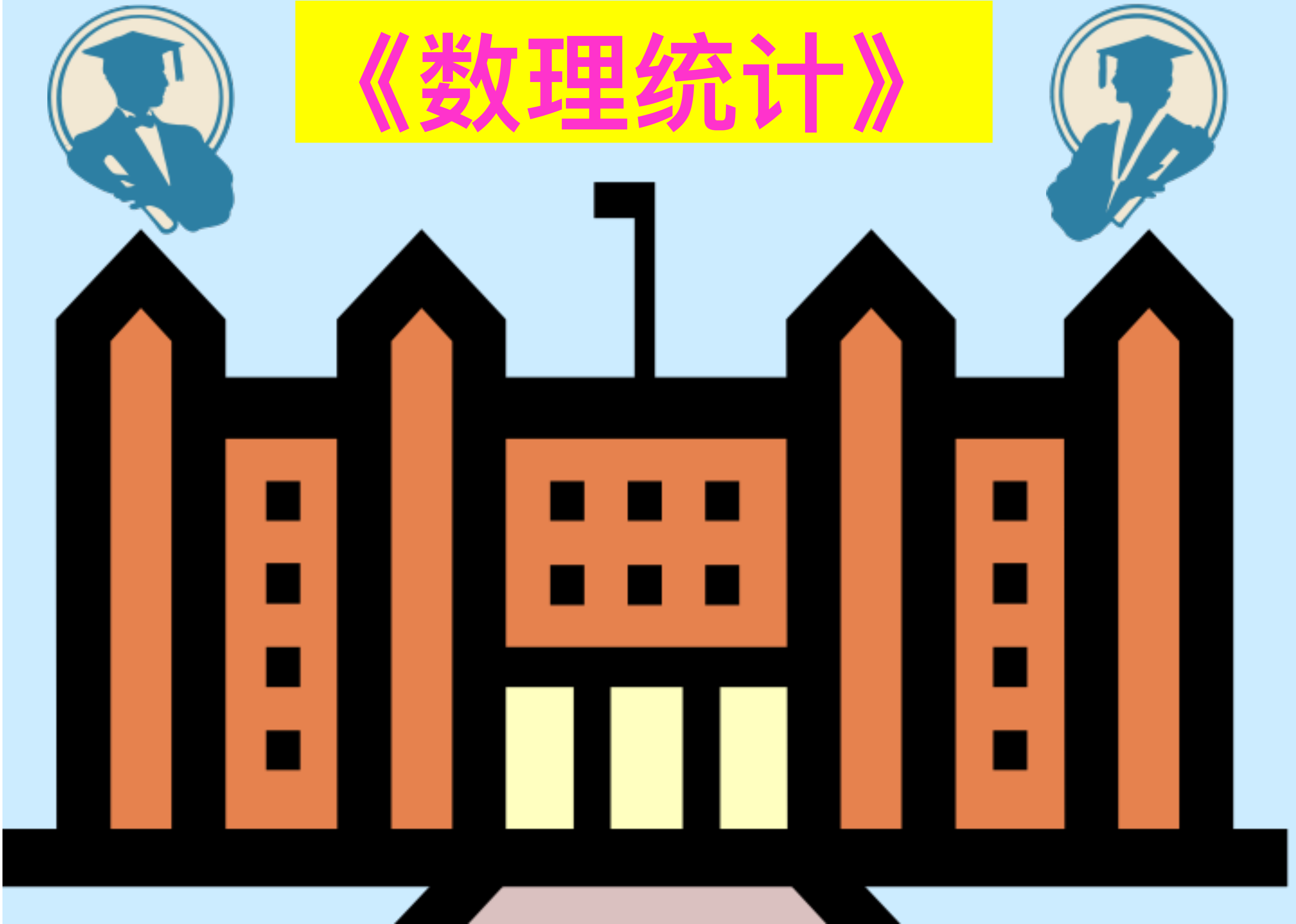
《数理统计》



§ 6.1 基本概念

引例 灯泡厂某批灯泡的寿命

简单随机样本

若总体 X 的样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 满足:

(1) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 与 X 有相同的分布

(2) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立

则称 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为简单（随机）样本.

若 X 的分布函数为 $F(x)$,
则 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的
联合分布函数为

$$F_{总}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i)$$

若 X 的密度为 $f(x)$, 则
$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$
的联合密度函数为

$$f_{总}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

例1 设总体X服从参数为p的0-1分布, 求其样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的联合密度。

例2 （补一道连续）

统计量

定义 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体 X 的一个样本,

$g(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ 为一实值连续函数,且不含有未知参数,

则称随机变量 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为**统计量**.

例3 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 未知, $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是一样本,

则

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

是统计量

但

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \mu\right)^2$$

不是统计量.若 ▯,▯ 已知,则为统计量

常用的统计量

设 $(X_1, X_2, \boxed{?}, X_n)$ 是总体 X 的容量为 n 的样本,称统计量

(1) $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 为**样本均值**

(2) $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ 为**样本方差**

$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$ 为**样本标准差**

(3) $M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 为样本的k 阶**原点矩**

(4) $M_k^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^k$ 为样本的k 阶**中心矩**

(5) 顺序统计量与极差

设 $(x_1, x_2, \boxed{?}, x_n)$ 为样本 $(X_1, X_2, \boxed{?}, X_n)$ 的观测值。

升序排序 $x_1^* \le x_2^* \le \boxed{?} \le x_n^*$

当 $(X_1, X_2, \boxed{?}, X_n)$ 取值为 $(x_1, x_2, \boxed{?}, x_n)$ 时,

定义随机变量 $X_{(k)} = x_k^*, k = 1,2,\boxed{?},n$

则称统计量 $X_{(1)}, X_{(2)}, \boxed{?}, X_{(n)}$ 为**顺序统计量**.

其中 $X_{(1)} = \min\limits_{1\le k\le n}\{X_k\}, X_{(n)} = \max\limits_{1\le k\le n}\{X_k\}$

称 $D_n = X_{(n)} - X_{(1)}$ 为**极差**

注 样本方差 S^2 与样本二阶中心矩 M_2^* 的不同

1) 关系式 $S^2 = \dfrac{n}{n-1}M_2^*$

推导 $$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+\sum_{i=1}^{n}\overline{X}^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2n\overline{X}^2+n\overline{X}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2=n(M_2-\overline{X}^2)$$

故 $M_2^*=M_2-\overline{X}^2$ $\quad S^2=\dfrac{n}{n-1}(M_2-\overline{X}^2)=\dfrac{n}{n-1}M_2^*$

2) $E(S^2)=\sigma^2$

推导 设 $E(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2$ 则

$$E(\overline{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\mu \qquad D(\overline{X})=\frac{1}{n}\sigma^2$$

$$E(M_2^*)=EM_2-E\left(\overline{X}^2\right)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)-\left[D(\overline{X})+E^2(\overline{X})\right]$$

$$=\sigma^2+\mu^2-\left(\frac{1}{n}\sigma^2+\mu^2\right)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$$E(S^2)=\sigma^2$$

例3 从一批机器零件毛坯中随机地抽取10件,测得重量为(公斤):

210, 243, 185, 240, 215,

228, 196, 235, 200, 199

求这组样本值的均值、方差、二阶原点矩与二阶中心矩.

解 $(x_1, x_2, \boxed{?}, x_{10}) = (210, 243, 185, 240, 215,$

$228, 196, 235, 200, 199)$

则

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(230 + 243 + 185 + 240 + 215$$

$$+ 228 + 196 + 235 + 200 + 199)$$

$$= 217.19$$

$$s^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = 433.43$$

$$M_2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^{\ 2} = 47522.5$$

$$M_2^* = \frac{9}{10}s^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = 390.0$$

例4 在总体 $N(52, 6.3^2)$ 中,随机地抽取一个容量为36的样本,求样本均值 $\overline{X}$ 落在50.8到53.8之间的概率.

解 $\overline{X} \sim N(52, \dfrac{6.3^2}{36})$

故 $P(50.8 < \overline{X} < 53.8) = F_{\overline{X}}(53.8) - F_{\overline{X}}(50.8)$

$$= \Phi\left(\frac{53.8-52}{\frac{6.3}{6}}\right) - \Phi\left(\frac{50.8-52}{\frac{6.3}{6}}\right)$$

$$= \Phi(1.7143) - \Phi(-1.1429)$$

$$= 0.8239$$

例4 设总体X的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}|x| & |x|<1\\ 0 & |x|\ge 1\end{cases}$

$(X_1, X_2, \cdots, X_{50})$ 为总体的样本,求

(1) $\overline{X}$ 的数学期望与方差 **(2)** $E(S^2)$

(3) $P(|\overline{X}|>0.02)$

解 (1) $E(\overline{X})=E(X)=\int_{-1}^{1}x|x|\mathrm{d}x=0$

$$D(\overline{X})=\frac{1}{50}D(X)=\frac{1}{50}E(X^2)=\frac{1}{50}2\int_0^1 x^2|x|\mathrm{d}x=\frac{1}{100}$$

(2) $E(S^2)=D(X)=E(X^2)=\dfrac{1}{2}$

(3) $\overline{X} \sim N(0, \frac{1}{100})$ (近似)， 由中心极限定理

$$P(\left|\overline{X}\right| > 0.02) = 1 - P(\left|\overline{X}\right| \le 0.02)$$

$$= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{0.02 - 0}{0.1}\right)\right)$$

$$= 2\left(1 - \Phi(0.2)\right)$$

$$= 0.8414$$

作业　习题6

A组：　4，5