重庆大学高等数学2（工学类）课程试卷

☑A卷 ☐B卷

2017—2018 学年 第2学期

开课学院：数统学院 课程号：MATH10023 考试日期：20180711

考试方式：☐开卷 ☑闭卷 ☐其他 考试时间：120分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试;

2.**考试作弊,留校察看,毕业当年不授学位;请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等,属严重作弊,开除学籍.**

1

(A) 0 (B) 4π (C) $4\pi R^2$ (D) $\frac{4}{3}\pi R^3$

2.曲线 $x=t, y=4\sqrt{t}, z=t^2$ 在点 $(4,8,16)$ 处的法平面方程为（B）

(A) $x-y-8z=-132$ (B) $x+y+8z=140$

(C) $x-y+8z=124$ (D) $x+y-8z=116$

3.设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处沿任何方向有方向导数，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处（C）

(A) 偏导数存在 (B) 可微

(C) 偏导数不一定存在 (D) 偏导数连续

4.设 $I_1=\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma, I_2=\iint_D \cos\left(x^2+y^2\right)d\sigma, I_1=\iint_D \cos\left(x^2+y^2\right)^2 d\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 1\right\}$，则有（C）

(A) $I_3<I_2<I_1$ (B) $I_3<I_1<I_2$ (C) $I_1<I_2<I_3$ (D) $I_2<I_1<I_3$

5.设 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2u_n=k(0<k<+\infty)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ （D）

(A) 条件收敛 (B) 发散 (C) 不一定收敛 (D) 绝对收敛

6.微分方程 $x^2y''=(y')^2$ 的通解是（D）

(A) $y=-x-\dfrac{\ln(C_1x-1)}{C_1^2}+C_2$ (B) $y=-\dfrac{x}{C_1}-\dfrac{\ln(C_1x-1)}{C_1}+C_2$

(C) $y=\dfrac{x}{C_1}-\dfrac{\ln(C_1x-1)}{C_1^2}+C_2$ (D) $y=-\dfrac{x}{C_1}-\dfrac{\ln(C_1x-1)}{C_1^2}+C_2$

二、填空题（每小题3分，共18分）

1.已知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 2，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_nx^{2n}}{3^n}$ 的收敛半径为______ $\sqrt{6}$

2.已知 Ω 是由 $x=0, y=0, z=0, x+2y+z=1$ 所围成的区域，按先 z 后 y 再 x 的积分次序将 $I=\iiint_\Omega xdxdydz$ 化为三次积分，则 $I=$ ______ $\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1-x}{2}}dy\int_0^{1-x-2y}xdz$

3.若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 发散，则 p ____ $p\le 0$

4.微分方程 $y''-\dfrac{1}{x^2}y=1$ 的一个特解为______ $y=x^2$

5.设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x\le 0\\ x, & 0<x\le\pi\end{cases}$ 在 $\left[-\pi,\pi\right]$ 上的傅氏级数的和函数为 $s(x)$，则 $s(4\pi)=$ _____ $1/2$

6.设空间区域 Ω 是由曲面 $z=a^2-x^2-y^2$ 与平面 $z=0$ 围成，其中 a 为正数，记 Ω 的表面外侧为 S，则 $\iint_S x^2yzdydz-2xy^2zdxdz+z(1+xyz)dxdy=$ _____ $\pi a^4/2$

三、计算题（每小题6分，共24分）

1.判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}(a>0)$的敛散性。

解（1）当$0<a<1$时，因$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=1$，级数发散

（2）当$a=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$发散

（3）当$a>1$时，因$\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}$，且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$收敛。

2.计算$I=\iint_{\Sigma}(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)dS$，其中$\Sigma$为曲面$x^2+y^2=z^2$夹在平面$z=0$及$z=h(h>0)$之间的部分，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为此曲面的外法线的方向余弦。

解：添加辅助面$\Sigma_1:z=h$，取上侧，Σ与Σ_1围成的区域为Ω，则

$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)dS=3\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$

$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{h}{\cos\varphi}}r^4\sin\varphi dr=\frac{9}{10}\pi h^5$

而$\iint_{\Sigma_1}(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)dS=\iint_{\Sigma_1}z^3dxdy=\iint_{D_{xy}}h^3dxdy=\pi h^5$

故$I=\frac{9}{10}\pi h^5-\pi h^5=-\frac{1}{10}\pi h^5$

3.求平行于平面$5x-14y+2z+36=0$，且与此平面的距离为3的平面方程。

解：由已知可设所求的平面方程为$5x-14y+2z+D=0$，且有

$\frac{|D-36|}{\sqrt{5^2+14^2+2^2}}=3\Rightarrow D=\pm3\times15+36$，即$D=81$或$D=-9$

所求平面方程为$5x-14y+2z+81=0$或$5x-14y+2z-9=0$。

4.计算二重积分$\iint_D x\cos(x+y)d\sigma$，其中$D$是顶点分别为$(0,0),(\pi,0)$和$(\pi,\pi)$的三角形闭区域。

解：$\iint_D x\cos(x+y)d\sigma=\int_0^{\pi}dx\int_0^{x}x\cos(x+y)dy$

$=\int_0^{\pi}x\left[\sin(x+y)\right]_0^{x}dx=\int_0^{\pi}x(\sin2x-\sin x)dx=-\frac{3}{2}\pi$

四、综合题（每小题8分，共16分）

1.在过$O(0,0)$和$A(\pi,0)$的曲线$y=a\sin x(a>0)$中求一条曲线L，使沿它从O到A的积分$I=\int_L(1+y^3)dx+(2x+y)dy$的值最小。

解：设OA弧与直线段AO所围成的区域为D，则

$\int_{L+AO}(1+y^3)dx+(2x+y)dy=-\iint_D(2-3y^2)dxdy$

$=-\int_0^{\pi}dx\int_0^{a\sin x}(2-3y^2)dy=-4a+\frac{4}{3}a^3$

于是$I=-4a+\frac{4}{3}a^3-\int_{AO}(1+y^3)dx+(2x+y)dy=-4a+\frac{4}{3}a^3-\int_{AO}dx$

即$I=-4a+\frac{4}{3}a^3+\pi$

令$\frac{dI}{da}=4a^2-4=0$得$a=1$，且$I''(1)=8>0$，故$a=1$时即L的方程为$y=\sin x$时I最小。

2.设函数$\varphi(x)$具有连续的二阶导数，$\int_L\left[3\varphi'(x)-2\varphi(x)\right]ydx+\varphi'(x)dy$路径无关，求函数$\varphi(x)$.

解：由已知$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$可得$3\varphi'(x)-2\varphi(x)=\varphi''(x)$

即φ满足微分方程$\varphi''(x)-3\varphi'(x)+2\varphi(x)=0$

对应的特征方程为$r^2-3r+2=0$，特征根为$r_1=1,r_2=2$

故$\varphi=c_1e^x+c_2e^{2x}$.

五、证明题（每小题8分，共16分）

1.证明 ：二元方程$e^{x+y}+x+y=\frac{3}{2}$在正方形域$D=\{(x,y)|-1\le x\le1,-1\le y\le1\}$上至少有一组解。

证明：令 $f(x,y)=e^{x+y}+x+y-\dfrac{3}{2}$，显然 $f(x,y)$ 闭区域 D 上连续。

$f(1,0)=e-\dfrac{1}{2}>0, f(-1,0)=\dfrac{1}{e}-1-\dfrac{3}{2}<0$，故由连续函数的介值定理知存在 $(\xi,\eta)\in D$ 使 $f(\xi,\eta)=0.$

2. 已知 $a_1=1, a_{n+1}=2a_n+1$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a_n}$ 收敛。

证法1：因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a_n}{1+a_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a_n}{2(1+a_n)}=\dfrac{1}{2}<1$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a_n}$ 收敛。

证法2：$\begin{cases}a_{n+1}=2a_n+1\\ a_n=2a_{n-1}+1\end{cases}\Rightarrow a_{n+1}-a_n=2(a_n-a_{n-1})\Rightarrow\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=2$

即 $c_n=a_n-a_{n-1}$ 为等比数列，

$(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=(a_2-a_1)+2(a_2-a_1)+\cdots+2^{n-1}(a_2-a_1)$

$=\dfrac{(a_2-a_1)(1-2^{n-1})}{1-2}=(2^{n-1}-1)(a_2-a_1)$

上式即 $a_n-a_1=(2^{n-1}-1)(a_2-a_1)\Rightarrow a_n=2^n-1$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a_n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$，收敛。

六、应用题（本题8分）

设球在动点 $P(x,y,z)$ 处的密度与该点到球心距离成正比，求质量为 m 的非均匀球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 对于其直径的转动惯量。

解：设球体为 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le R^2$，密度函数 $\rho=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则球体的质量为

$m=\iiint_\Omega\rho(x,y,z)dv=k\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^R r^3dr=k\pi R^4$

所以 $\rho=\dfrac{m}{\pi R^4}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

物体对其直径的转动惯量为

$I=\iiint_\Omega(x^2+y^2)\rho(x,y,z)dv=\dfrac{m}{\pi R^4}\iiint_\Omega(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv$

$=\dfrac{m}{\pi R^4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi d\varphi\int_0^R r^5dr=\dfrac{4}{9}mR^2.$