学院________ 专业、班________ 年级________ 学号________ 姓名________ 考试教室________

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密　封　线

重庆大学高等数学 1 练习题

◉ A卷　○ B卷

20　— 20　学年　第　学期

开课学院：数学与统计 课程号：________　考试日期：__________

考试方式： ○ 开卷 ◉ 闭卷 ○ 其他　　**考试时间：120 分钟**

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得 分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

2.考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

一、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1.设 $k \in N$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1} x^k e^{-x}dx$ 等于【 】A

$-\int_n^{n+1} x^k de^{-x} = -x^k e^{-x}\Big|_n^{n+1} + k\int_n^{n+1} e^{-x}x^{k-1}dx = \cdots = k(k-1)\cdots 2\int_n^{n+1} e^{-x}dx$

$= e^{-x}\Big|_n^{n+1}$

(A) 0　　(B) 1.　　(C) k　　(D) 不存在

$(n+1)^k e^{-(n+1)}$

答案：A

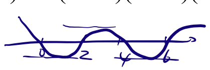
2. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某一邻域上有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 点可导的一个充要条件是【 】D

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ 存在；　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在；

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ 存在；　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-2h)}{h}$ 存在.

答案：D

3. 已知 $f(x)=x(x-2)(x-4)(x-6)$，则 $f'(x)=0$ 有【 】



C.

(A)一个实根　(B)二个实根　(C)三个实根　(D)四个实根

答案：C

4.设曲线 $y=\frac{1}{e^x-1}+1$ 水平渐近线的条数为 a（2），铅直渐近线的条数为 b，则【 】D

$+\infty:1$　$-\infty:0$

(A) $a=0,b=1$　(B) $a=1,b=0$　(C) $a=1,b=1$　(D) $a=2,b=1$

答案：D

5. 若 $\int f(x)dx = F(x)+C$，则 $\int e^{-x}f(e^{-x})dx =$【 】B

$d(-x)$

$= -\int f(e^{-x})de^{-x} = -F(e^{-x})+C.$

(A) $F(e^x)+c$　(B) $-F(e^{-x})+c$　(C) $F(e^{-x})+c$　(D) $F(e^x)+c$

答案：B

6.下列为偶函数的是【 】. D

(A) $\int_0^x \cancel{f(t^2)}dt$　　(B) $\int_0^x f^2(x)dx$

偶.

(C) $\int_0^x t[f(-t)-f(t)]dt$　　(D) $\int_0^x t[f(-t)+f(t)]dt$

偶

答案：D

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1.已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|}dx = 1$，则 $k =$ __-2__.

$\frac12 e^{2x}\Big|_{-\infty}^{0} + \cdots - \frac12 e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}$

$= \frac12 + \frac12$

$-\frac1k\int_{-\infty}^0 e^{-kx}d(-kx) + \frac1k\int_0^{+\infty} e^{kx}d(kx)$

$-\frac1k e^{-kx}\Big|_{-\infty}^0 + \frac1k e^{kx}\Big|_0^{+\infty}$

$-\frac2k = 1$

答案：　-2

2. 电量为+q 的点电荷位于 r 轴的坐标原点 O 处，它所产生的电场力使 r 轴上的一个单位正电荷从 r=a 处移动到 r=b(a<b)处，则电场力对单位正电荷所作的功为 $kqe\cdot(\frac1a-\frac1b)$

答案：$kq(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})$

0　a.　b.

$\int_a^b \frac{kqe}{x^2}dx = kqe\cdot(-\frac1x)\Big|_a^b$

3.设 $f(x)$ 为连续函数，且有 $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x^4+3x^2$，则 $f(2) =$ __7__.

$f(x^2)\cdot 2x = 4x^3+6x.$

$x=\sqrt2 \Rightarrow f(2) = 2\cdot(\sqrt2)^2+3.$

答案：

4.设 $u_n = \left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2(1+2+\cdots+k)}\right]^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ __$\frac1e$__.

答案：$\frac{1}{e}$

$(\frac{n}{n+1})^n.$

$\frac{1}{\frac{2(1+k)\cdot k}{2}} = \frac1k - \frac1{k+1}$

$(1-\frac{1}{n+1})^{\frac{n+1}{-1}\cdot\frac{-n}{n+1}}$

$1-\frac12+\frac12-\frac13+\cdots+\frac1n-\frac1{n+1}$

$e^{-1}.$

命题人：

组题人：

审题人：

命题时间：

教务处制

5.设 $f(x)=x^2\cos x$,则 $f^{(6)}(0)=$ <u>30</u>.

答案：30　$f^{(6)}(x)=(x^2)^{(6)}+(x^2)^{(5)}\cdots C_6^2(x^2)^{(2)}(\cos x)^{(4)}$　$\frac{6\times5}{2}\times2\times1$

6. 心形线 $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$ 所围成图形的面积为 <u>$\frac{3}{2}a^2$</u>.

答案：$\dfrac{3}{4}\pi a^2$

$2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}r^2d\theta$　$\frac{\cos 2\theta+1}{2}$

$=\int_0^{\pi}a^2(1+c^2+2c)d\theta$

$=a^2(\pi+\frac{\pi}{2})$

三、计算题（每小题 7 分，共 28 分）

1.设函数 $f(x)=\arctan x$,且 $f(x)=xf'(\xi)$,求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\xi^2}{x^2}$.

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)\Rightarrow\frac{\arctan x}{x}=\frac{1}{1+\xi^2}$

解：由 $f(x)=xf'(\xi)$ 得：$\arctan x=\dfrac{x}{1+\xi^2}\Rightarrow\xi^2=\dfrac{x-\arctan x}{\arctan x}\Rightarrow\dfrac{\xi^2}{x^2}=\dfrac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}$

$\xi^2=$

于是，

$$\lim_{x\to0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{3(1+x^2)}=\frac{1}{3}$$

2.设函数 $f(x)$ 可导，且 $f'(x)=e^{-f(x)},f(0)=0$. 当 $n\ge1$ 时，求 $f^{(n)}(0)$.

解: $f'(x)=e^{-f(x)}$

$f''(x)=e^{-f(x)}(-f'(x))=-e^{-f(x)}\cdot e^{-f(x)}=-e^{-2f(x)}$

$f'''(x)=-e^{-2f(x)}[-2f'(x)]=(-1)(-2)e^{-3f(x)},\cdots\cdots$

$f^{(n)}(x)=(-1)(-2)\cdots(-n+1)e^{-nf(x)}=(-1)^{n-1}(n-1)!e^{-nf(x)}$,

于是 $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$.

t^2　$1+\frac{1}{c^2}-1=\frac{1-c^2}{c^2}=s^2$

3.计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}dx$.

解　原式 $=\displaystyle\int\ln\cos x d\tan x=\tan x\ln\cos x-\int\tan x\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}dx$

$\tan x-x+C$

$=\tan x\ln\cos x+\displaystyle\int\tan^2 xdx=\tan x\ln\cos x+\int(\sec^2 x-1)dx$

$=\tan x\ln\cos x+\tan x-x+C$;

4. 计算 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

解：由于 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$ ，故所给积分为反常积分。

令 $\arcsin x=t\Rightarrow x=\sin t,t\in[0,\dfrac{\pi}{2})$

$$\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{t\sin^2 t}{\cos t}\cos tdt=\int_0^{\pi/2}t\sin^2 tdt=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}$$

四、解答题（每小题 7 分，共 14 分）

1.当 $x\to0^+$ 时,若 $\ln^\alpha(1+2x),(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小,求 α 的取值范围.

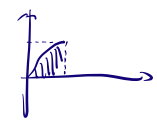
解：要使得 $0=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln^\alpha(1+2x)}{x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{2^\alpha x^\alpha}{x}=\lim\limits_{x\to0+}2^\alpha x^{\alpha-1}$ ，必有 $\alpha-1>0\Leftrightarrow\alpha>1$

要使得 $0=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(1-\cos x)^{1/\alpha}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{2/\alpha}/2^{1/\alpha}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}2^{-\frac{1}{\alpha}}x^{\frac{2}{\alpha}-1}$ ，必有 $\dfrac{2}{\alpha}-1>0\Rightarrow\alpha<2$

综上所述，$1<\alpha<2$.

2. 设 $A>0$ ，D 是由曲线段 $y=A\sin x(0\le x\le\dfrac{\pi}{2})$ 及直线 $y=0,x=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域，V_1,V_2 分别表示 D 绕 x 轴与绕 y 轴旋转所成旋转体的体积。若 $V_1=V_2$ ，求 A 的值。

$\frac{\pi}{2}-1$



解：$V_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi A^2\sin^2 xdx=\frac{\pi^2A^2}{4}$ ，$V_2=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi xA\sin xdx=2\pi A$

$V_1=V_2\Leftrightarrow\dfrac{\pi^2A^2}{4}=2\pi A\Rightarrow A=\dfrac{8}{\pi}$

五、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

1.设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续,且 $x_i \in (a,b),(i=1,2,\cdots,n)$,证明必存在点 $\xi \in (a,b)$,使

$$f(\xi)=\frac{2}{n(n+1)}[f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+nf(x_n)]$$

介值定理

$\exists m \le f(x_i) \le M$

证明: 记 $\bar{a}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},\bar{b}=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 则 $f(x)$ 在 $[\bar{a},\bar{b}]$ 上连续,从

$m+2m+\cdots+nm \le f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+nf(x_n) \le \frac{M(1+n)n}{2}$

而 $f(x)$ 在 $[\bar{a},\bar{b}]$ 有最小值 m ,最大值 M .故

$m \le \cancel{f(x_2)} \le M$ $\frac{m(1+n)n}{2}$

$2m \le 2f(x_2) \le 2M$

……

$nm \le nf(x_n) \le nM$

于是, $(1+2+\cdots+n)m \le f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+nf(x_n) \le (1+2+\cdots+n)M$

$$m \le \frac{2}{n(n+1)}[f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+nf(x_n)] \le M$$

由介值定理知, 必存在点 $\xi \in (\bar{a},\bar{b}) \subset (a,b)$,使

$$f(\xi)=\frac{2}{n(n+1)}[f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+nf(x_n)].$$

2.证明：当 $x>0$ 时，有不等式 $\arctan x+\frac{1}{x}>\frac{\pi}{2}$.

$\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{-1}{\cdots}<0.$ $>0.$

六、应用题（共 8 分）

要做一个长方体的带盖箱子,其体积为 72 立方厘米,其底上两边长成 1:2 的关系,问各边的长为多少时,才能使其表面积为最小?

解:设箱子的高为 z ,底上两边的长分别为 x 与 y ,且 $y=2x$,则有 $xyz=72$.

即 $2x^2z=72, z=\frac{36}{x^2}$.面积 $A=2(xy+yz+zx)=4x^2+\frac{216}{x}$.

$\frac{dA}{dx}=8x-\frac{216}{x^2}=\frac{8x^3-216}{x^2}$,令 $\frac{dA}{dx}=0$得$x=3$，在$x=3$处$\frac{d^2A}{dx^2}=8+\frac{432}{x^3}>0$.

故 $x=3$为A 的最小值,此时 $y=6,z=4$,因此箱子各边长应为 3、6、4 厘米.