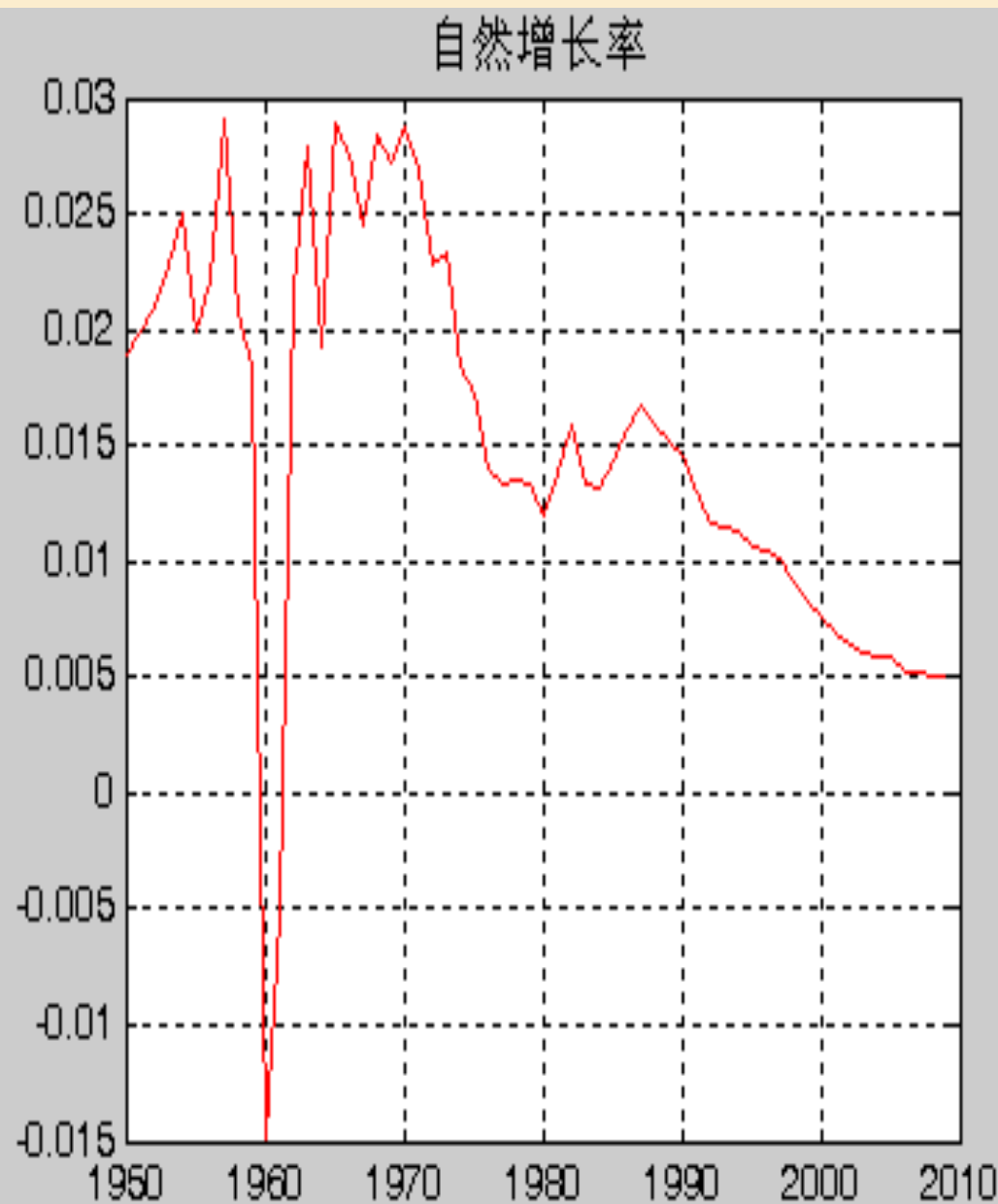
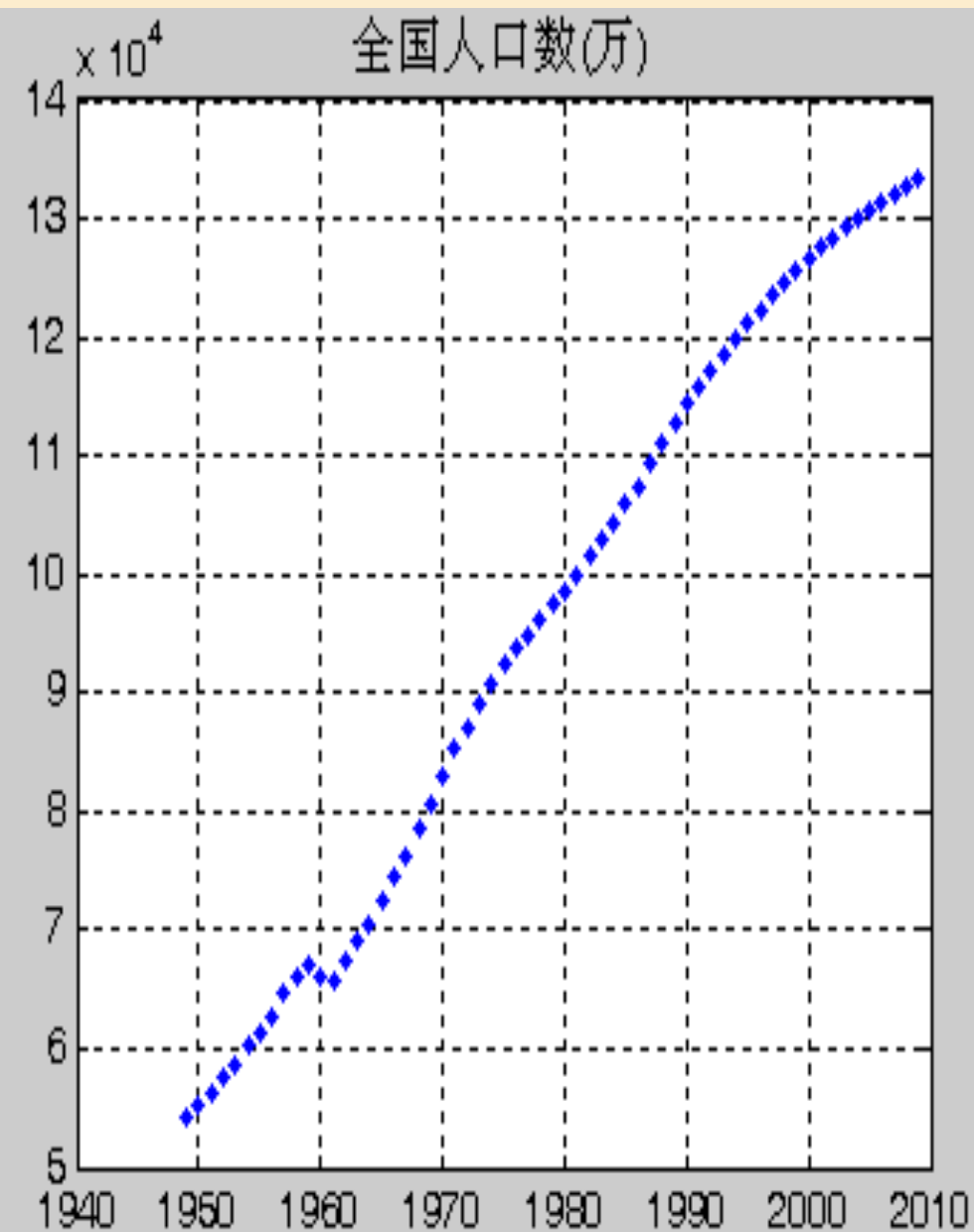
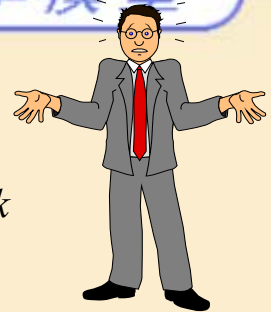


# 中国人口增长情况





## 离散时间模型

今年人口  $x_0$ , 年增长率

$k$ 年后人  $x_k = (1+r)x_{k-1}, \quad x_k = x_0(1+r)^k$

## 连续时间—马尔萨斯指数增长模型

基本假设：人口(相对)增长率  $r$  是常数( $r$ 很小)

$x(t)$  ~时刻 $t$ 的人 
$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{x(t)} = r\Delta t$$

$$\frac{dx}{dt} = rx, \quad x(0) = x_0 \quad x(t) = x_0 e^{rt}$$

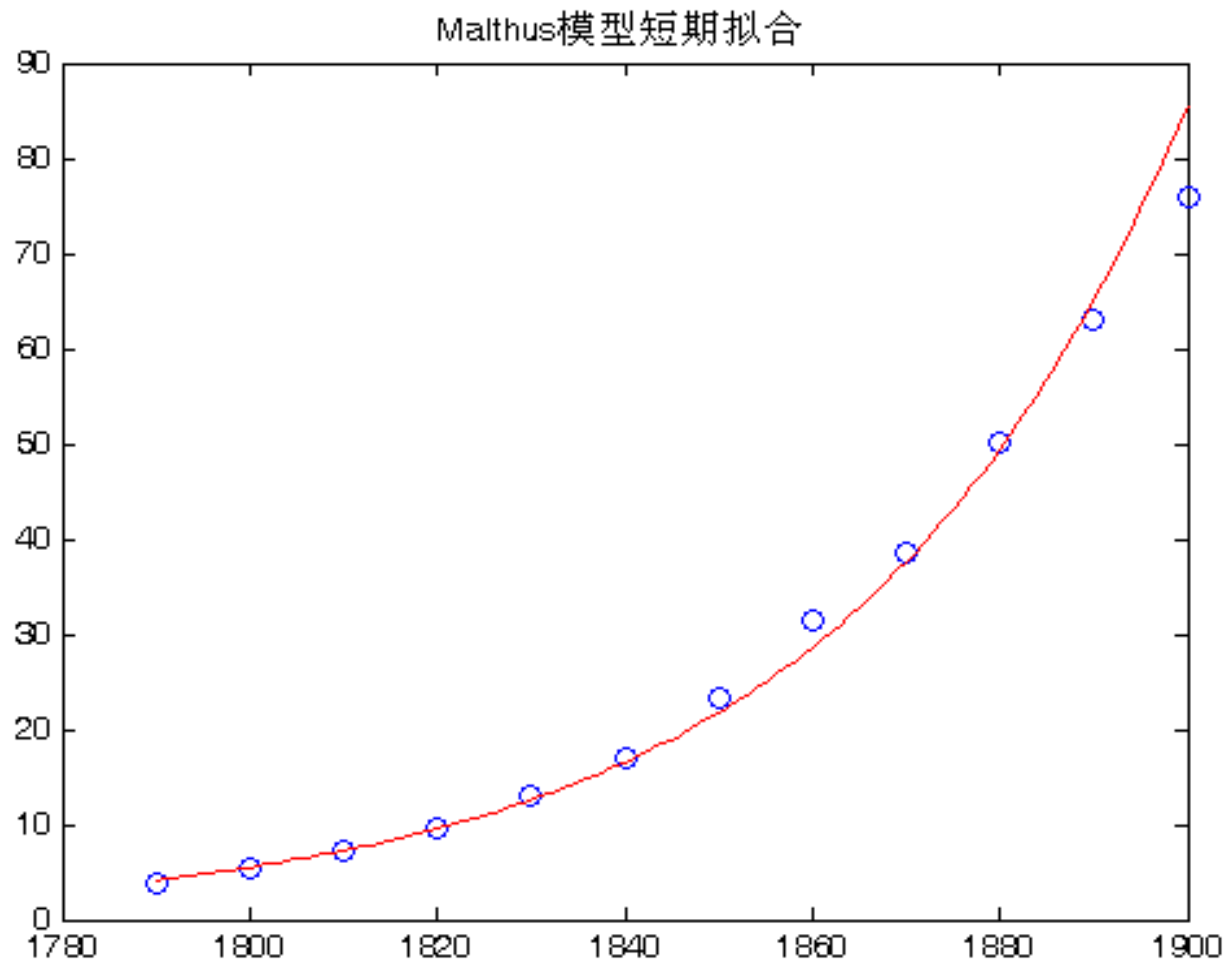
$$x(t) = x_0 (e^r)^t \approx x_0 (1+r)^t$$

随着时间增加，人口按指数规律无限增长

# 美国人口参数 $x_0$ , $r$ 的估计

- 数据(美国人口1790-2000)
- 线性化拟合
  - 变换 $\ln x = \ln x_0 + rt$ , 解线性方程组得 $\ln x_0$ 和 $r$ 。
- 短期拟合 (1790-1900)
  - $r = 0.2743/10$ 年,  $x_{1790} = 4.2$ 亿,  $x_{1900} = 85.6$ 亿
- 长期拟合 (1790-2000)
  - $r = 0.2022 / 10$ 年,  $x_{1790} = 6.0$ 亿,  $x_{2000} = 442.1$ 亿

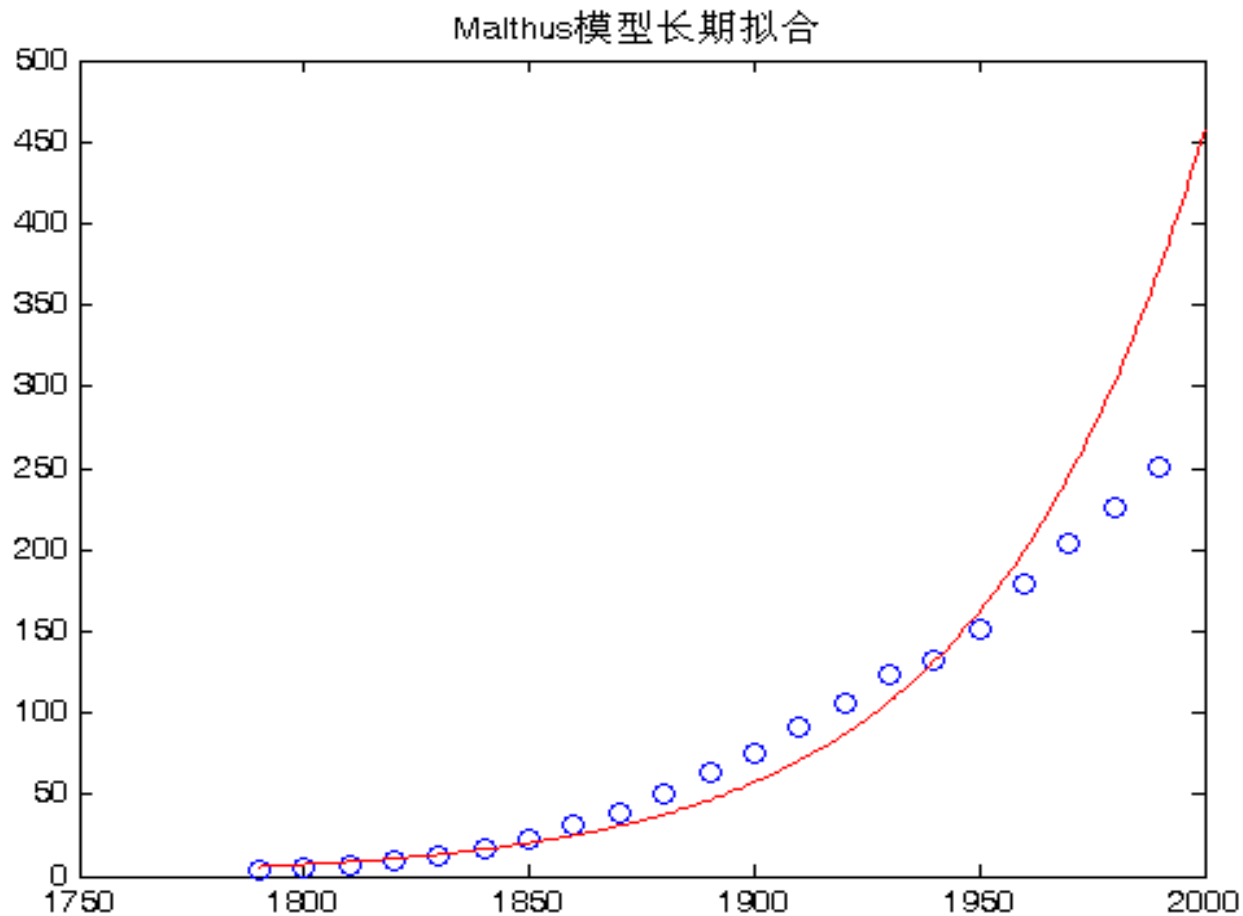
# 短期数据拟合(1790-1900)



误差不大

$$r = 0.2743, \quad x_{1790} = 4.1884, \quad x_{1900} = 85.6179$$

# 长期数据拟合(1790-2000)



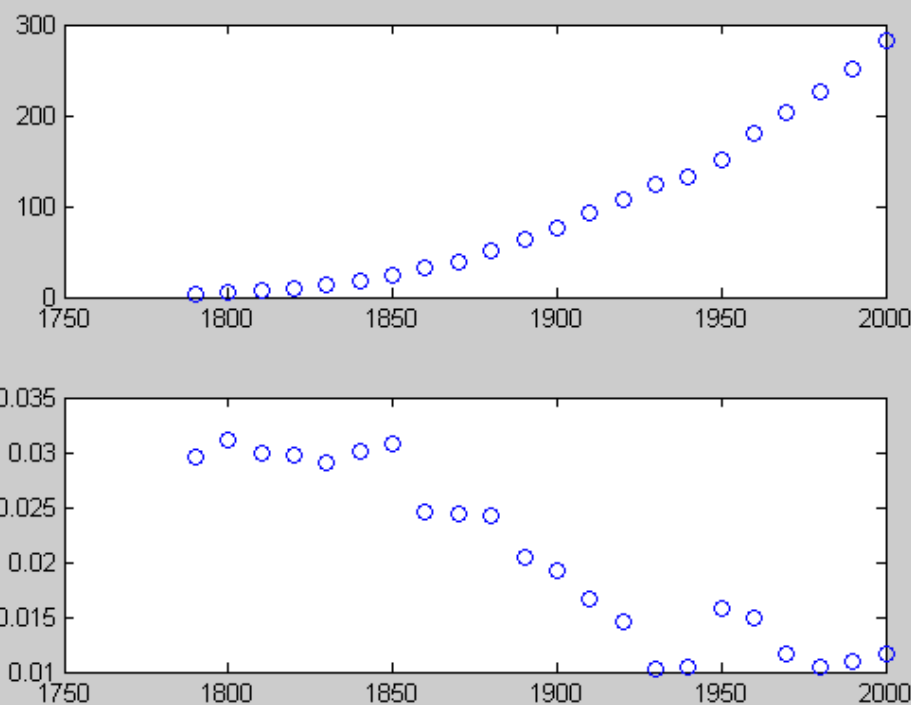
误差很大

$$r = 0.2022, \quad x_{1790} = 6.045, \quad x_{2000} = 442.1$$



# 指数增长模型的局限性

- 可用于短期人口增长预测
- 不能预测较长期的人口增长过程
- 怎样改进?
- 仔细分析发现：人口增长率  $r$  不是常数(逐渐下降)





## 阻滞增长模型 (Logistic模型)

人口增长到一定数量后，增长率下降的原因：

资源、环境等因素对人口增长的阻滞作用

且阻滞作用随人口数量增加而变大  $\Rightarrow r$  是  $x$  的减函数

**假设**  $r(x) = r - sx$  ( $r, s > 0$ )  $r \sim$  固有增长率 ( $x$  很小时)

$x_m \sim$  人口容量 (资源、环境能容纳的最大数量)

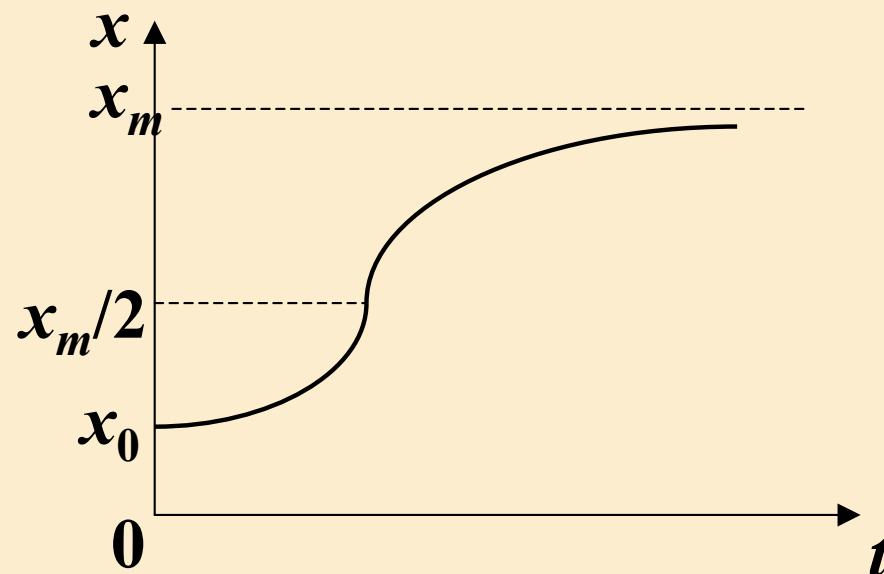
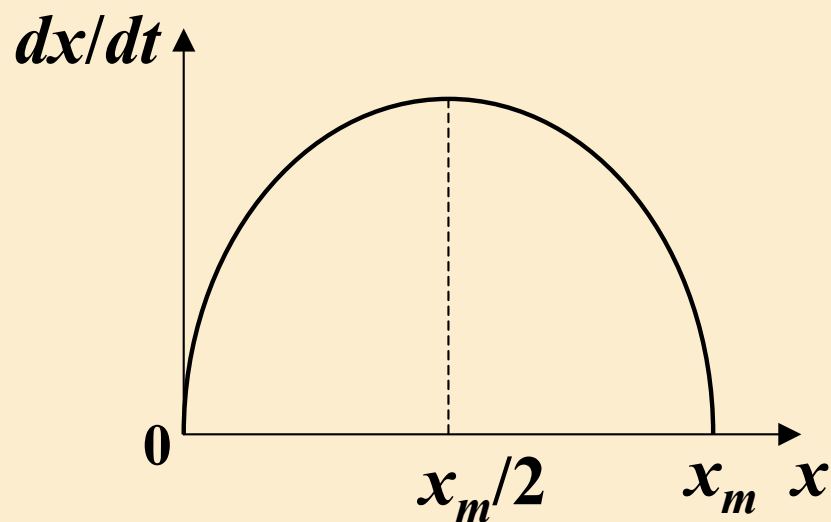
$$\Rightarrow r(x_m) = 0 \Rightarrow s = \frac{r}{x_m}$$

$$r(x) = r \left(1 - \frac{x}{x_m}\right)$$



# 阻滞增长模型 (Logistic模型)

$$\frac{dx}{dt} = rx \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = r(x)x = rx\left(1 - \frac{x}{x_m}\right)$$



$$x(t) \stackrel{?}{=} \frac{x_m}{1 + \left(\frac{x_m}{x_0} - 1\right)e^{-rt}}$$

$x(t)$ ~S形曲线,  
 $x$ 增加先快后慢



## 阻滞增长模型 (Logistic模型)

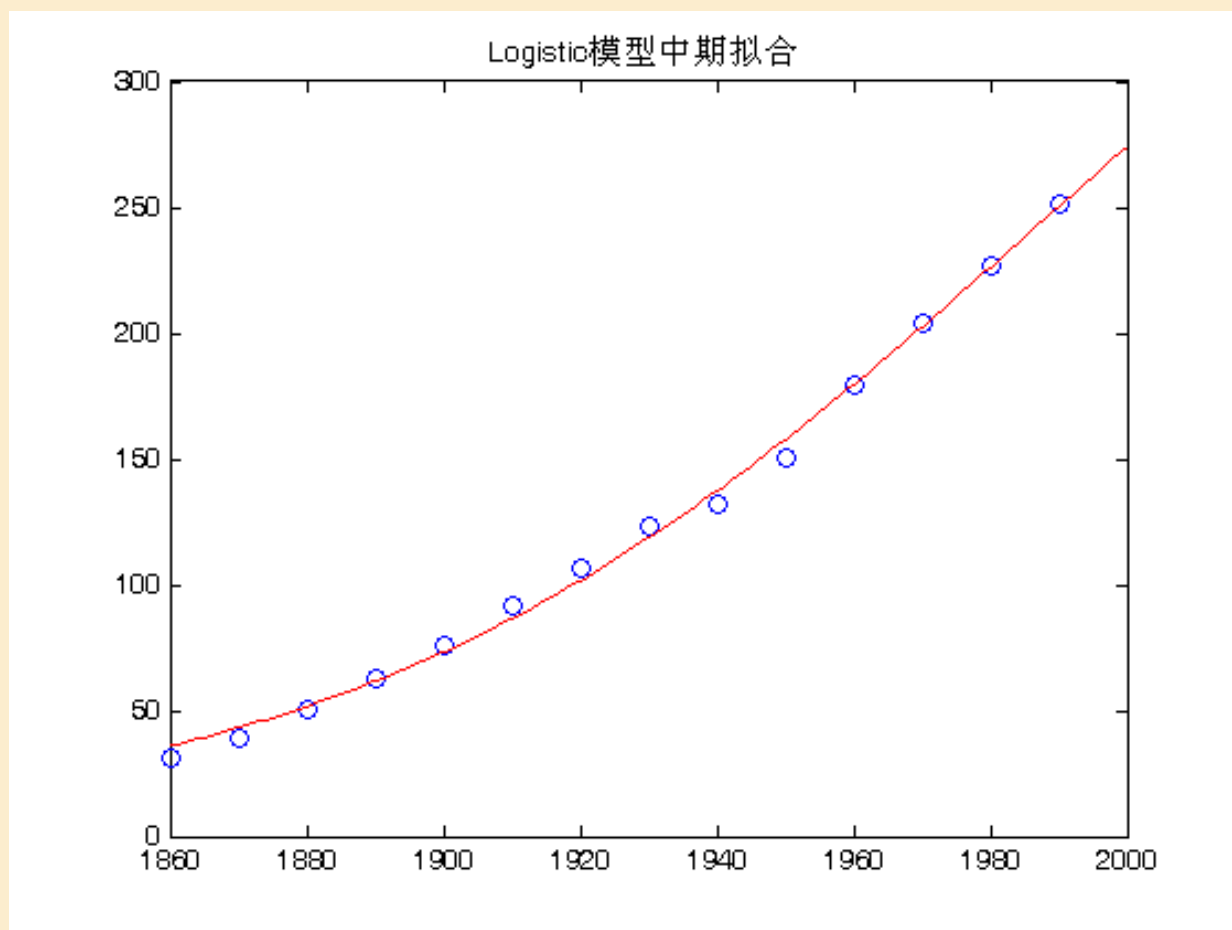
- 利用统计数据用最小二乘法作拟合 (中期)

例：美国人口数据 (单位~百万)

1860	1870	1880	.....	1960	1970	1980	1990
31.4	38.6	50.2	.....	179.3	204.0	226.5	251.4

方法：直接做非线性拟合

# 阻滞增长模型非线性拟合



$$x_{1860} = 35.99, \quad r = 0.1996, \quad x_m = 481.98$$

# 模型检验

1. 全局预测方法：直接用拟合函数  $x_{2000} = 274.18$

2. 局部方法（一步预测）：在90年数据上修正

$$x(2000) = x(1990) + \Delta x = x(1990) + rx(1990)[1 - x(1990)/x_m]$$

$$\Rightarrow x(2000) = 275.4$$

实际为281.4 (百万)

## 模型应用——预报美国2010年的人口



加入2000年人口数据后重新估计模型参数

$$\Rightarrow x_0=37, r=0.192, x_m=537 \quad \Rightarrow \quad x(2010)=304.5$$

参考阅读：美国2010年人口普查结果是308.7(百万)

# 模型比较

- 比较不同方法预测精度，选定最佳组合
  - 模型：Malthus或Logistic
  - 拟合：长期、中期、短期等
  - 预测：全局或局部方法

# 人口模型概述

- 宏观模型: 总人口, 不考虑年龄, Malthus模型, Logistic模型
- 微观模型: 考虑年龄结构
  - 1940's, Leslie差分方程模型
  - 1960's, Verhulst偏微分方程模型
  - 1970's, Pollard随机方程模型



## 二 双种群模型

1. 种群的相互竞争
2. 种群的相互依存
3. 种群的弱肉强食

## 1. 种群的相互竞争



- 一个自然环境中有两个种群生存，它们之间的关系：相互竞争；相互依存；弱肉强食。
- 当两个种群为争夺同一食物来源和生存空间相互竞争时，常见的结局是，竞争力弱的灭绝，竞争力强的达到环境容许的最大容量。
- 建立数学模型描述两个种群相互竞争的过程，分析产生这种结局的条件。



## 模型假设

- 有甲乙两个种群，它们独自生存时数量变化均服从**Logistic**规律；

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1}\right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

- 两种群在一起生存时，乙对甲增长的阻滞作用与乙的数量成正比；甲对乙有同样的作用。

## 模型

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

对于消耗甲的资源而言，乙(相对于 $N_2$ )是甲(相对于 $N_1$ )的  $\sigma_1$  倍。

$$\sigma_1 > 1$$



对甲增长的阻滞作用，乙大于甲



乙的竞争力强

## 2. 种群的相互依存



甲乙两种群的相互依存有三种形式

- 1) 甲可以独自生存，乙不能独自生存；甲乙一起生存时相互提供食物、促进增长。
- 2) 甲乙均可以独自生存；甲乙一起生存时相互提供食物、促进增长。
- 3) 甲乙均不能独自生存；甲乙一起生存时相互提供食物、促进增长。

## 模型假设

- 甲可以独自生存，数量变化服从**Logistic**规律；甲乙一起生存时乙为甲提供食物、促进增长。
- 乙不能独自生存；甲乙一起生存时甲为乙提供食物、促进增长；乙的增长又受到本身的阻滞作用 (服从**Logistic**规律)。

## 模型

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left( 1 - \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right)$$

乙为甲提供食物  
是甲消耗的 $\sigma_1$  倍

$$\dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left( -1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$

甲为乙提供食物  
是乙消耗的 $\sigma_2$  倍

### 3. 种群的弱肉强食 (食饵-捕食者模型)



- 种群甲靠丰富的天然资源生存，种群乙靠捕食甲为生，形成食饵-捕食者系统，如食用鱼和鲨鱼，美洲兔和山猫，害虫和益虫。
- **模型的历史背景**——一次世界大战期间地中海渔业的捕捞量下降(食用鱼和鲨鱼同时捕捞)，但是其中鲨鱼的比例却增加，为什么？

# 食饵-捕食者模型(Volterra)

食饵（甲）数量  $x(t)$ , 捕食者（乙）数量  $y(t)$

甲独立生存的增长率  $r$

$$\dot{x} = rx$$

乙使甲的增长率减小,  
减小量与  $y$  成正比

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x = rx - axy \quad (1)$$

乙独立生存的死亡率  $d$

$$\dot{y} = -dy$$

甲使乙的死亡率减小,  
减小量与  $x$  成正比

$$\dot{y}(t) = -(d - bx)y = -dy + bxy \quad (2)$$

$a$  ~ 捕食者掠取食饵能力       $b$  ~ 食饵供养捕食者能力

方程(1),(2) 无解析解

## 地中海鲨鱼问题

意大利生物学家Ancona曾致力于鱼类种群相互制约关系的研究，他从第一次世界大战期间,地中海各港口捕获的几种鱼类捕获量百分比的资料中，发现鲨鱼等的比例有明显增加（见下表），而供其捕食的食用鱼的百分比却明显下降.显然战争使捕鱼量下降，食用鱼增加，鲨鱼等也随之增加，但为何鲨鱼的比例大幅增加呢？

年代	1914	1915	1916	1917	1918
百分比	11.9	21.4	22.1	21.2	36.4
年代	1919	1920	1921	1922	1923
百分比	27.3	16.0	15.9	14.8	19.7

他无法解释这个现象，于是求助于著名的意大利数学家V.Volterra，希望建立一个食饵—捕食系统的数学模型，定量地回答这个问题.

## 1. 符号说明:

$x_1(t)$ ——食饵在  $t$  时刻的数量;  $x_2(t)$ ——捕食者在  $t$  时刻的数量;  
 $r_1$ ——食饵独立生存时的增长率;  $r_2$ ——捕食者独自存在时的死亡率;  
 $\lambda_1$ ——捕食者掠取食饵的能力;  $\lambda_2$ ——食饵对捕食者的供养能力.  
 $e$ ——捕获能力系数

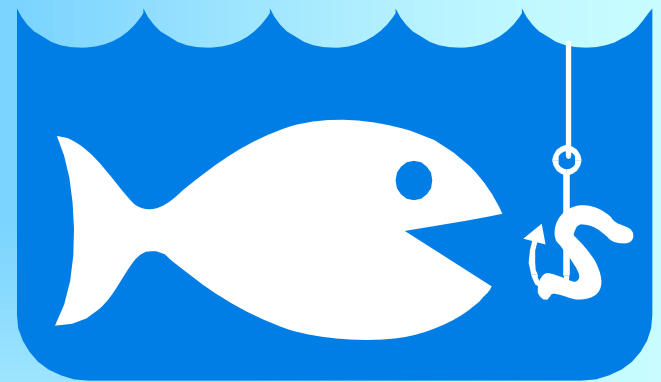
## 2. 基本假设:

- (1) 食饵由于捕食者的存在使增长率降低, 假设降低的程度与捕食者数量成正比;
- (2) 捕食者由于食饵为它提供食物的作用使其死亡率降低或使之增长, 假定增长的程度与食饵数量成正比。

## 3. 模型建立与求解

模型 (一) 不考虑人工捕获

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(r_1 - \lambda_1 x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(-r_2 + \lambda_2 x_1) \end{cases}$$



该模型反映了在没有人工捕获的自然环境中食饵与捕食者之间的制约关系, 没有考虑食饵和捕食者自身的阻滞作用, 是Volterra提出的最简单的模型.

针对一组具体的数据用 Matlab 软件进行计算.

设食饵和捕食者的初始数量分别为  $x_1(0) = x_{10}$ ,  $x_2(0) = x_{20}$

对于数据  $r_1 = 1, \lambda_1 = 0.1, r_2 = 0.5, \lambda_2 = 0.02, x_{10} = 25, x_{20} = 2$ ,

$t$  的终值经试验后确定为 15, 即模型为:

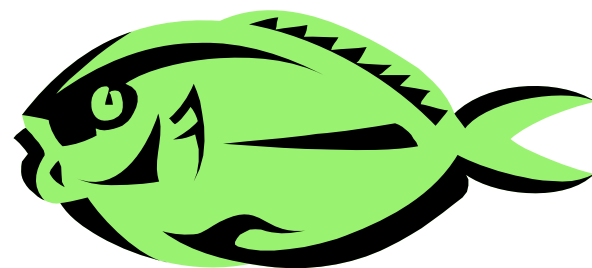
$$\begin{cases} x_1' = x_1(1 - 0.1x_2) \\ x_2' = x_2(-0.5 + 0.02x_1) \\ x_1(0) = 25, x_2(0) = 2 \end{cases}$$

首先, 建立m-文件shier.m如下:

```
function dx=shier(t,x)
dx=zeros(2,1);
dx(1)=x(1)*(1-0.1*x(2));
dx(2)=x(2)*(-0.5+0.02*x(1));
```

其次, 建立主程序shark.m如下:

```
[t,x]=ode45('shier',[0 15],[25 2]);
plot(t,x(:,1),'-',t,x(:,2),'*')
plot(x(:,1),x(:,2))
```



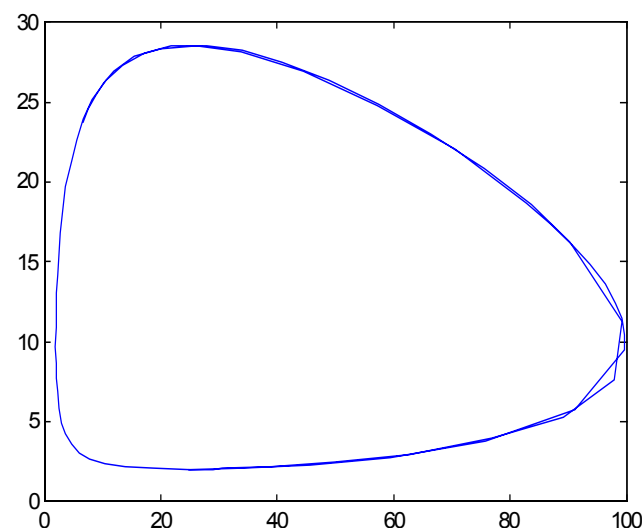
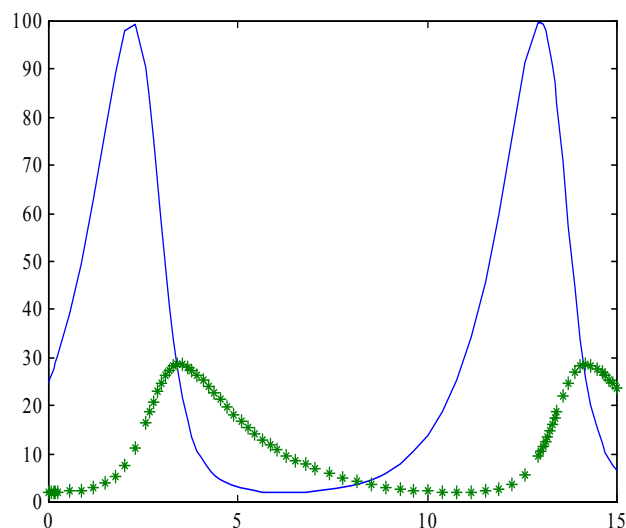
To Matlab(shark)



求解结果：

数值解如下图：  $x_1(t)$  为实线，  $x_2(t)$  为 “\*” 线.

相图  $(x_1, x_2)$  为：



左图反映了  $x_1(t)$  与  $x_2(t)$  的关系。

可以猜测：  $x_1(t)$  与  $x_2(t)$  都是周期函数。

## 模型（二） 考虑人工捕获

设表示捕获能力的系数为 $e$ ，相当于食饵的自然增长率由 $r_1$ 降为 $r_1 - e$ ，捕食者的死亡率由 $r_2$ 增为 $r_2 + e$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1[(r_1 - e) - \lambda_1 x_2] \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2[-(r_2 + e) + \lambda_2 x_1] \end{cases}$$

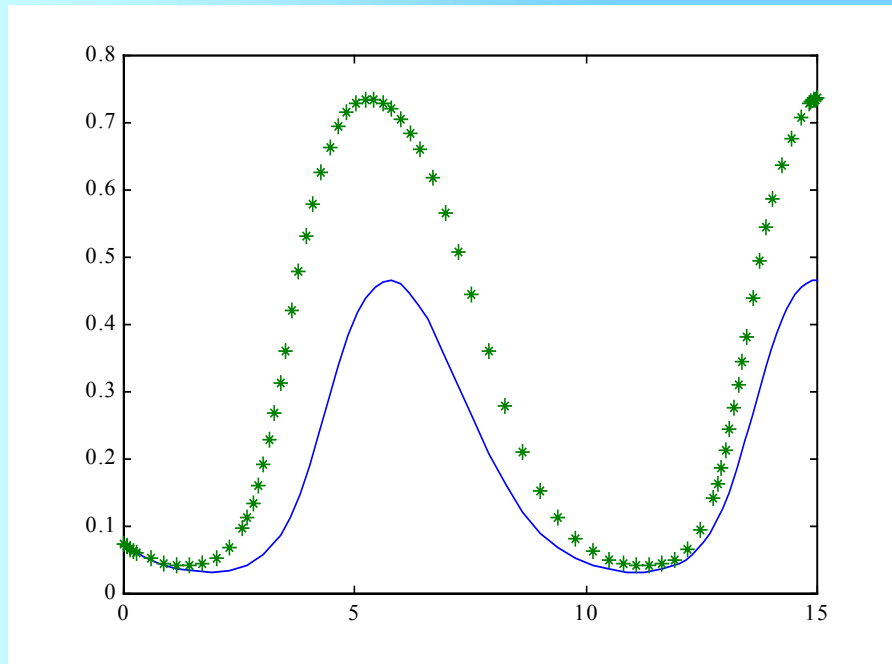
仍取 $r_1 = 1, \lambda_1 = 0.1, r_2 = 0.5, \lambda_2 = 0.02, x_1(0) = 25, x_2(0) = 2$

设战前捕获能力系数 $e=0.3$ ，战争中降为 $e=0.1$ ，则战前与战争中的模型分别为：

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(0.7 - 0.1x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(-0.8 + 0.02x_1) \\ x_1(0) = 25, x_2(0) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(0.9 - 0.1x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(-0.6 + 0.02x_1) \\ x_1(0) = 25, x_2(0) = 2 \end{cases}$$

模型求解:

- 1、分别用m-文件shier1.m和shier2.m定义上述两个方程
- 2、建立主程序shark1.m, 求解两个方程, 并画出两种情况下鲨鱼数在鱼类总数中所占比例  $x_2(t)/[x_1(t)+x_2(t)]$



To Matlab(shark1)

实线为战前的鲨鱼比例, “\*” 线为战争中的鲨鱼比例

结论: 战争中鲨鱼的比例比战前高!



## 两种群模型的几种形式

### 相互竞争

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left( 1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left( 1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$

### 相互依存

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left( \pm 1 - \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left( \pm 1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$

### 弱肉强食

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left( 1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left( -1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$