第四章：不定积分

一、本章的教学目标及基本要求

1、理解原函数与不定积分概念及其相互关系；知道不定积分的主要性质；弄清不定积分与求导数的关系，即求导与不定积分互为逆运算；已知曲线在一点的切线斜率，会求该曲线的方程。

2、熟记基本积分公式；能熟练地利用基本积分公式及积分的性质，第一换元积分法和分部积分法计算不定积分；掌握第二换元积分法。对于复合函数求不定积分一般用第一换元积分法（凑微分法），记住常见的凑微分形式。

3、掌握化有理函数为部分分式的方法，并会计算较简单的有理分式函数的积分、三角有理式的积分、无理式的积分。

二、本章各界教学内容及学时分配

第一节	不定积分的概念与性质	2 学时
第二节	换元积分法	4 学时
第三节	分部积分法	2 学时
第四节	有理函数的积分	2 学时

三、本章教学内容的重点和难点

1、重点：不定积分和定积分的概念及性质，不定积分的基本公式，不定积分、定积分的换元法与分部积分法；

2、难点：不定积分和定积分的概念及性质，凑微分法，有理分式函数的积分、三角有理式的积分、无理式的积分。

四、本章内容的深化和拓广

1、了解不定积分在现代数学发展史上的重要意义；

2、初步了解不定积分的实际意义，为后面定积分的学习及定积分的应用做好一定的铺垫；

3、简介不定积分在建立数学模型中的重要意义。

五、本章教学方式及教学过程中应注意的问题

1、以讲课方式为主，留一个课时的时间讲解习题中的难点和容易犯错误的地方；

2、教学中应注意教材前后内容之间的联系，突出重点和难点；

3、本章主要以计算题为主，要强调本章内容本今后学习的重要性，鼓励学生细致、耐心地完成作业，防止学生只抄教材后的答案。

六、本章的思考题和习题

第一节	习题 4-1，第 1、2、3、4 题
第二节	习题 4-2，第 1、2、（1）-（33）；第 2、（34）-（40）题
第三节	习题 4-3，第 1-22 题
第四节	习题 4-4，第 1-22 题，写本章的总结

第一节 不定积分的概念与性质

讲稿内容

前面已经介绍了微分学，从本章开始我们讲积分学。积分学分为不定积分和定积分两部分。不定积分是作为函数导数的反问题提出的，而定积分是作为微分的反问题引进的。两者概念不完全相同，却有紧密联系。

本章讲不定积分的概念、计算方法。

§1 不定积分的概念与性质

一、原函数与不定积分的概念

定义 1：$\forall\ x\in I$，有 $F'(x)=f(x)$ 或 $dF(x)=f(x)dx$，则称函数 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数。

例：①$\sin^2 x$，$2-\cos^2 x$，$\sin^2 x+C$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是 $\sin 2x$ 的原函数。

②$\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内是 $\dfrac{1}{x}$ 的原函数，因 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，

③$\ln(-x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内是 $\dfrac{1}{x}$ 的原函数，因 $[\ln(-x)]'=\dfrac{1}{x}$

<u>**我们要问**</u>：是否任何函数均有原函数呢？如果不是，那么具备什么条件的函数才有原函数呢？原函数既然不唯一，那么两个原函数之间有什么关系呢？

例　函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1,x>0\\0,x=0\\-1,x<0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上没有原函数。

解：设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有原函数 $F(x)$，则 $F'(x)=f(x)$，$F(x)$ 必取如下形式：

$F(x)=\begin{cases}x+C_1, & x>0\\-x+C_2, & x<0\end{cases}$，又因为 $F(x)$ 在 $x=0$ 连续，所以有

$$\lim_{x\to0+}(x+C_1)=\lim_{x\to0-}(-x+C_2)=F(0)\Rightarrow C_1=C_2=F(0)=C$$

故 $F(x)=\begin{cases}x+C, & x>0\\C, & x=0\\-x+C, & x<0\end{cases}$，但这个函数在 $x=0$ 不可导，故符号函数没有原函数。

原函数的存在定理：若 $f(x)$ 在某区间内连续，则在该区间内 $f(x)$ 的原函数一定存在。

由于初等函数在其定义区间上均连续，所以初等函数在其定义区间上均有原函数。

原函数只要存在就不唯一，任何两个原函数之间**相差一个确定**的常数。

事实上，设 $F(x),\Phi(x)$ 均是 $f(x)$ 的一个原函数，

则 $[F(x)-\Phi(x)]'=F'(x)-\Phi'(x)=f(x)-f(x)=0$，即 $F(x)=\Phi(x)+C$，即有下面定理。

定理：如果在区间 (a,b) 内，函数 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)+C$ 是 $f(x)$ 的全体原函数，其中 C 为任意常数。

注：

（1）区间 I 上的连续函数一定在 I 内存在原函数，但并不意味着原函数一定能用初等函数表示，如 $e^{x^2}\in C(-\infty,+\infty)$，但其原函数已不是初等函数。说明已有的函数不够用了,如无穷级数可以表示函数：勒让德函数、贝塞尔函数，单位脉冲函数。

（2）不连续函数仍可能存在原函数。

如 $f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，其原函数为 $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

我们引进不定积分的概念：

定义 2：函数 $f(x)$ 在 I 的全体原函数 $F(x)+C$ 叫做 $f(x)$ 在 I 的不定积分，记作 $\int f(x)dx$，即 $\int f(x)dx=F(x)+C$，其中 $\int$ 叫做积分号，函数 $f(x)$ 叫做被积函数，$f(x)dx$ 叫做被积表达式，而 x 叫做积分变量。

例 1 求 $\int\sec^2 xdx$

解 因为 $(\tan x)'=\sec^2 x$，即 $\tan x$ 是 $\sec^2 x$ 的一个原函数。故 $\int\sec^2 xdx=\tan x$ +C

例 2 求 $\int\dfrac{1}{1+x^2}dx$，$\int a^x dx$，$\int\dfrac{1}{k+x}dx$，$\int\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

例 3 设曲线过点 $(1,2)$，且其上任一点的切线斜率等于这点横坐标的两倍，求此曲线方程。

解：设所求曲线方程为 $y=f(x)$，则对任意一点 (x,y) 有

$\frac{dy}{dx}=2x$,且$y(1)=2$，由 $y'=2x$ 知 $y=x^2+C$，进一步有 $y=x^2+1$。

注意积分常数的任意性，同时注意它有可确定性。

一般地，$f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 的图形称为 $f(x)$ 的积分曲线；$F(x)+C$ 的图形称为积分曲线簇，其图形布满整个实平面，即不定积分在几何上表示的是积分曲线簇。

例 4　某物体以初速度为 0 的速度 $v=at$（$a>0$ 是常数）做匀加速运动，且已知在时刻 $t=t_0$ 时 $s=s_0$，求该物体运动规律。

解　因为 $v=\frac{ds}{dt}=at$，即找 at 的原函数 $s(t)$，故 $s=\int atdt=\frac{1}{2}at^2+C$　　　　（2）

这个运动规律概括了物体以初速度为 0 的速度 $v=at$ 运动的规律，我们所要找的函数必在其中，我们需要在其中找出满足条件 $t=t_0$ 时 $s=s_0$ 的那个函数，为此将条件 $t=t_0$ 时 $s=s_0$ 代入上式，得 $s_0=\frac{1}{2}at_0^{\ 2}+C \quad \to C=s_0-\frac{1}{2}at_0^{\ 2}$

将此常数 C 代入（2），得 $s=\frac{1}{2}at^2+s_0-\frac{1}{2}at_0^{\ 2}=\frac{1}{2}a(t^2-t_0^{\ 2})+s_0$

例 5．某厂生产某种产品，每日生产的产品的总成本 y 的变化率（即边际成本）是日产量 x 的函数 $y'=7+\frac{25}{\sqrt{x}}$，已知固定成本为 1000 元，求总成本 y 与日产量 x 的关系

解　因为 $y'=7+\frac{25}{\sqrt{x}}$，故 $y=\int(7+\frac{25}{\sqrt{x}})dx=7x+50\sqrt{x}+C$

又已知固定成本为 1000 元，即当 $x=0$ 时 $y=1000$，代入上式的得 C=1000。所以总成本 y 与日产量 x 的关系为 $y=7x+50\sqrt{x}+1000$（$x\geq 0$）。

二、积分与微分的关系：设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$

则 $\left(\int f(x)dx\right)'=\left(F(x)+C\right)'=F'(x)=f(x)$,即$d\int f(x)dx=f(x)dx$

$$\int F'(x)dx=\int f(x)dx=F(x)+C,\text{即}\int dF(x)=F(x)+C$$

即有 $d\int f(x)dx=f(x)dx$，$\int df(x)=f(x)+C$

由此可见，若不计常数 C，则积分号与微分符号不论先后，只要它们连在一起就互相抵消。这说明：积分与微分在不计任意常数时互为逆运算。

三、基本积分表

由积分与微分的关系容易得到下列基本积分公式。(具体解释如何由微分公式得积分公式，如何验证公式的正确性)，见教材。

$d\sin x=\cos xdx$，于是$\int\cos xdx=\int d\sin x=\sin x+C$

$d\ln|x+k|=\dfrac{1}{x+k}dx$，于是$\int\dfrac{1}{x+k}dx=\int d\ln|x+k|=\ln|x+k|+C$

$d\arctan x=\dfrac{1}{1+x^2}dx$，于是$\int\dfrac{1}{1+x^2}dx=\int d\arctan x=\arctan x+C$

四、不定积分的性质

性质 1　函数和的不定积分等于不定积分之和，即

$$\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx \qquad (3)$$

或$\int[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+\cdots+\int f_n(x)dx$

性质 2：　$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$　　　（k 是常数，$k\neq0$）

利用基本积分表以及不定积分的性质，我们可以求出一些简单函数的不定积分。

应注意两点：（1）在分项积分后，每个不定积分的结果都含有任意常数，但由于任意常数之和仍是任意常数，因此只在式子后写出一个任意常数就行了。

（2）检验积分结果是否正确，只要把结果求导，看它的导数是否等于被积函数。

例 $\int(e^x-2\cos x+\sqrt{2}\cdot x^3)dx$

例 $\int(1-\dfrac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}dx=\int(x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}})dx=\dfrac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C$

例 $\int\dfrac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx=\int\dfrac{x^2+x^{-2}}{x^3}dx=\int(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^5})dx=\ln|x|-\dfrac{1}{4x^4}+C$

例 $\int(2^x+3^x)^2dx=\int(4^x+2\cdot6^x+9^x)dx=\dfrac{4^x}{\ln4}+\dfrac{2\cdot6^x}{\ln6}+\dfrac{9^x}{\ln9}+C$

例 $\int\tan^2xdx=\int(\sec^2x-1)dx=\tan x-x+C$

例 8 求$\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx$

解：基本积分表中没有这种类型，把被积函数变形，化为已有的积分公式，逐项积分：

$$\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx = \int \frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)}dx = \int (\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x})dx = \int \frac{1}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x}dx = \arctan x + \ln|x| + C$$

例 9　求$\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$

解 ：被积分函数为假分式，恒可化为多项式加真分式，一般有两种方法：加项减项法或多项式的除法。

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}dx = \int \frac{x^4-1+1}{x^2+1}dx = \int (x^2-1+\frac{1}{x^2+1})dx = \int x^2dx - \int 1dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx$$

例 10 $\int \sin^2\frac{x}{2}dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos x)dx \quad = \frac{1}{2}[\int 1dx - \int \cos xdx] = \frac{1}{2}(x-\sin x)+C$

例 11 $\int \sqrt{1-\sin 2x}dx = \int \sqrt{(\sin x-\cos x)^2}dx = \int (\sin x-\cos x)dx = -\cos x - \sin x + C$

例 12 $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx - \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = -\cot x - \tan x + C$

例 14 $\int \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \tan x - \cot x + C$

例 17 设$f(x)=\begin{cases}\cos x & x<0\\ x+1 & x\ge 0\end{cases}$，求$\int f(x)dx$

解 ：当$x<0$时，$f(x)=\cos x$，$\int f(x)dx = \sin x + C_1$；

当$x\ge 0$时，$f(x)=x+1$，$\int f(x)dx = \frac{x^2}{2}+x+C_2$。

由于原函数必在$x=0$处连续，故$\lim\limits_{x\to 0^-}(\sin x + C_1) = \lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{x^2}{2}+x+C_2)$，得$C_1=C_2$

故

$$\int f(x)dx = \begin{cases}\sin x + C & x<0\\ \frac{1}{2}x^2+x+C & x\ge 0\end{cases}$$

例　设$f(x)=\begin{cases}-\sin x, & x\ge 0\\ x, & x<0\end{cases}$，求$\int f(x)dx.$

解：因$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续，所以$f(x)$的原函数$F(x)$存在。

$$\int f(x)dx = \begin{cases} \cos x + C_1, & x \geq 0 \\ x^2/2 + C_2, & x < 0 \end{cases}$$

同时 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 也必须连续、可导，所以必有 $1 + C_1 = C_2$

故 $\int f(x)dx = \begin{cases} \cos x + C_1, & x \geq 0 \\ x^2/2 + 1 + C_1, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \cos x + C, & x \geq 0 \\ x^2/2 + 1 + C, & x < 0 \end{cases}$

例 已知 $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$，求 $\int f(x)dx.$

一、内容要点

1、原函数与不定积分的概念

2、不定积分的性质

二、教学要求和注意点

教学要求：理解原函数与不定积分概念及其相互关系；知道不定积分的主要性质；弄清不定积分与求导数的关系，即求导与不定积分互为逆运算。

注意点：

1、原函数与不定积分的概念：

由导数及导数的意义引入原函数的概念；

解释不定积分的几何意义；

强调原函数和不定积分的特性，并举例说明；

由基本积分表说明基本积分方法；

2、不定积分的性质：

说明不定积分的性质对不定积分计算的重要性；

列出不定积分的性质并给与证明，证明过程中有意识地加深学生对不定积分概念更深入的理解；

第二节 换元积分法

讲稿内容

一、第一换元法（凑微分法）

注意微分与积分互为逆运算，由微分公式可得到相应的积分公式，由微分法则也可得到相应的积分法则。换元法主要是把复合函数的求导法则反过来用于求不定积分。

$$d(\sin 2x)\xrightarrow{u=2x}d\sin u\longrightarrow \cos udu\longrightarrow \cos 2xd(2x)\longrightarrow 2\cos 2xdx$$

$$\sin 2x+C\longleftarrow \sin u+C\longleftarrow \int d\sin u\longleftarrow \int \cos udu\xleftarrow{u=2x}\int \cos 2xd(2x)\longleftarrow \int 2\cos 2xdx$$

一般地，若$\int f(u)du=F(u)+C$，则

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(\varphi(x))d\varphi(x)\overset{u=\varphi(x)}{=}\int f(u)du=F(u)+C=F(\varphi(x))+C$$

写为定理即：

定理 1　设$f(u)$具有原函数$F(u)$，$u=\varphi(x)$可导，那么$F[\varphi(x)]$是$f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$的原函数，即有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=F[\varphi(x)]+C=[\int f(u)du]\Big|_{u=\varphi(x)}$$

<u>凑微分法的实质是凑成基本积分公式</u>。（通过下面例 1 解释）

例　计算下列不定积分：

（1）$\int \cos 2xdx$；（2）$\int e^x\cdot\sin e^x dx$；（3）$\int x\cdot\sqrt{1-x^2}dx$。

例　（1）$\int \tan xdx=-\ln|\cos x|+C.$（公式）；

$-\int \cos^2 t\, d\cos t$

$-\frac{1}{3}\cos^3 t$

（2）$\int \cot xdx=\ln|\sin x|+C.$（公式）

$=-\frac{1}{3}\cos^3\arcsin x$

$=\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}^3+C$

（3）$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.$（公式）

$$\int\frac{dx}{2+3x^2}=\frac{1}{\sqrt3}\int\frac{d(\sqrt3 x)}{(\sqrt2)^2+(\sqrt3 x)^2}=\frac{1}{\sqrt6}\arctan\frac{\sqrt3 x}{\sqrt2}+C$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}=\int(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+2})dx=\arctan x-\frac{1}{\sqrt2}\arctan\frac{x}{\sqrt2}+C$$

（4）$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$（公式）

$$\int\frac{2^x\cdot3^x}{9^x-4^x}dx=\int\frac{(3/2)^x}{\left[(3/2)^x\right]^2-1}dx=\frac{1}{\ln3-\ln2}\int\frac{d(3/2)^x}{\left[(3/2)^x\right]^2-1}=\frac{1}{2(\ln3-\ln2)}\ln\frac{3^x-2^x}{3^x+2^2}$$

（5）$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx(a>0)=\arcsin\frac{x}{a}+C.$（公式）

$$\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{2+\cos 2x}}=\int \frac{d\sin x}{\sqrt{3-2\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{3}}+C$$

（6）$\int \csc xdx=\ln|\tan\frac{x}{2}|+C=\ln|\csc x-\cot x|+C$（公式）

法 1：$\int \csc xdx=\int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx=\int \frac{d\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+C$

法 2：$\int \csc xdx=\int \frac{1}{\sin x}dx=\int \frac{1}{2\sin(x/2)\cos(x/2)}dx$

$$=\int \frac{1}{\tan x/2\cos^2 x/2}d(\frac{x}{2})=\int \frac{\sec^2 x/2}{\tan x/2}d(\frac{x}{2})$$

$$=\int \frac{1}{\tan(x/2)}d\tan(x/2)=\ln|\tan\frac{x}{2}|+C$$

因为$\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x/2}{\cos x/2}=\frac{2\sin^2(x/2)}{\sin x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\csc x-\cot x$

所以$\int \csc xdx=\ln|\tan\frac{x}{2}|+C=\ln|\csc x-\cot x|+C$。—— 公式

（7）$\int \sec xdx=\int \frac{1}{\cos x}dx=\int \frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}d(x+\frac{\pi}{2})=\ln|\csc(x+\frac{\pi}{2})-\cot(x+\frac{\pi}{2})|+C$

$$=\ln|\sec x+\tan x|+C$$ 。——公式

例 3 求下列积分：

（1）$\int \cos^2 xdx=\int \frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}[\int dx+\int \cos 2xdx]=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$。

同样可得 $\int \sin^2 xdx$，$\int \sin^4 xdx$

（2）$\int \sin^3 xdx=-\int \sin^2 xd\cos x=-\int (1-\cos^2 x)d\cos x$，同理可得$\int \cos^5 xdx$等

（3）$\int \sin^2 x\cos^5 xdx=\int \sin^2 x\cdot(1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x+C$。

（4）$\int \sin^3 x\cos^3 xdx$

（5）$\int \sin^2 x\cos^4 xdx=\int (\cos^4 x-\cos^6 x)dx$，降次（倍半角公式）

（6） $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}d(\cos x) = \int (\cos x - \frac{1}{\cos x})d(\cos x)$

$$= \frac{1}{2}\cos^2 x - \ln|\cos x| + C$$

（7） $\int \tan^5 x \sec^3 x dx = \int \tan^4 x \sec^2 x d\sec x = \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x d\sec x$

（8） $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+(\sin^2 x)^2}d(\sin^2 x) = \frac{1}{2}\arctan\sin^2 x + C$

（9） $\int \cos 3x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 5x)dx = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C$

（注意： $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$ ）

（10） $\int \sec^6 x dx = \int \sec^4 x d\tan x = \int (1+\tan^2 x)d\tan x$

（11） $\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}dx = \int \frac{1}{\cos x + \sin x}d(\cos x + \sin x) = \ln|\cos x + \sin x| + C$ 。

（12） $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{d\tan x}{2+\tan^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C$

例 4 计算下列积分：

（1） $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{1}{1+(e^x)^2}d(e^x) = \arctan e^x + C$ 。

（2） $\int \frac{1}{x(1+\ln x)}dx = \int \frac{1}{1+\ln x}d(1+\ln x) = \ln|1+\ln x| + C$

（3） $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)} = \ln|\ln(\ln x)| + C$

例 5　设 $f'(x^2) = 1 - \frac{1}{x^4}$ ，求 $f(x)$，

解 1 ：令 $x^2 = u$，则 $f'(u) = 1 - \frac{1}{u^2} \Rightarrow f(u) = \int (1-\frac{1}{u^2})du = u + \frac{1}{u} + C$

即 $f(x) = x + \frac{1}{x} + C$

解 2：因 $f'(x^2) = 1 - \frac{1}{x^4}$，故 $f(x^2) = \int f'(x^2)d(x^2) = \int (1-\frac{1}{x^4})d(x^2)$

即 $f(x^2)=x^2+\frac{1}{x^2}+C$，　　即 $f(x)=x+\frac{1}{x}+C$

从前面所讲的例子一看，求积分比求微分要难得多，因此我们必须熟练掌握基本积分公式、多练题，以掌握求积分的基本技巧。

<u>用凑微分法的题型及方法归类如下：</u>

$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(\varphi(x))d\varphi(x)$，实际上是将第一换元公式中的$\varphi(x)$具体化。

（1）$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)=\frac{1}{a}\int f(u)du$

例 $\int\frac{1}{3x+2}dx,\int\cos(ax+b)dx,\int e^{x-1}dx,\int\sqrt[3]{1-2x}dx$，$\int\frac{dx}{x^2+2x+5},\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$等

$$\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{1-3x}}=-\frac{1}{3}\int\frac{1-3x+1}{\sqrt[3]{1-3x}}dx=-\frac{1}{3}\int[(1-3x)^{\frac{2}{3}}+(1-3x)^{-\frac{1}{3}}]dx=\frac{1}{15}(1-3x)^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{6}(1-3x)^{\frac{2}{3}}+C$$

（2）$\int xf(ax^2+b)dx=\frac{1}{2a}\int f(ax^2+b)d(ax^2+b).$

例 $\int xe^{x^2}dx,\int x\cos(x^2+2)dx,\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)},\int\frac{x}{1+x^2}dx.\int\frac{x^5dx}{2+3x^6}$

（3）$\int a^xf(a^x+b)dx=\frac{1}{\ln a}\int f(a^x+b)d(a^x+b)$

特别地，$\int e^xf(e^x+b)dx=\int f(e^x+b)d(e^x+b)$

例 $\int\frac{e^x}{1+e^x}dx,\int\frac{1}{1+e^{-x}}dx,\int\frac{1}{1+e^x}dx$化为第一种，或$\int\frac{1}{1+e^x}dx=\int\frac{e^x+1-e^x}{1+e^x}dx$

$\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx,\int e^x\cos(e^x+2)dx$

（4）$\int\frac{1}{x}f(\ln x+b)dx=\int f(\ln x+b)d(\ln x+b)$

例 $\int\frac{1}{x\ln x}dx,\int\frac{1}{x(2+3\ln x)}dx,\int\frac{1}{x}\cos\ln xdx.$

$$\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\int\frac{1}{2}(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x})\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}d\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}+C$$

（5）$\int f(\sin x)\cos xdx,\int f(\cos x)\sin xdx,\int\sec^2xf(\tan x)dx$等

例 $\int\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3x}}dx,\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx,\int\sin xe^{\cos x}dx.$

（6）$\int f(\arcsin\frac{x}{a})\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int f(\arcsin\frac{x}{a})d\arcsin\frac{x}{a};$

$$\int f(\arctan\frac{x}{a})\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\int f(\arctan\frac{x}{a})d\arctan\frac{x}{a};\text{等。}$$

例 $\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx,\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^2},\int\frac{\ln(\arcsin x)^2}{\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}}dx$

（7）$\int\sin mx\cos nxdx=\frac{1}{2}\int[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x]dx$ 等。利用积化和差公式。

（8）$\int\sin^2 xdx,\int\sin^4 xdx$　　降次——倍半角公式。

（9）拆项法 $\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{x^2+(1+x^2)}{x^2(1+x^2)}dx$

（10）加项减项法 $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx,\int\frac{x^3}{1+x^2}dx,\int\frac{x^4}{1+x^2}dx$，$\int\frac{\ln^2 x}{x(1+\ln^2 x)}dx=\int\frac{\ln^2 x+1-1}{x(1+\ln^2 x)}dx$

（11）同乘或同除因式法 $\int\frac{1}{1+\sin x}dx=\int\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx,\int\frac{1}{1-\cos x}dx$

如：$\int\frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx=\int\frac{xe^x+e^x}{xe^x(1+xe^x)}dx=\int[\frac{1}{xe^x}-\frac{1}{1+xe^x}]d(xe^x)=\ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right|+C$。

常用的凑微分

$(1-\frac{1}{x^2})dx=d(x+\frac{1}{x})$　　$(1+\frac{1}{x^2})dx=d(x-\frac{1}{x})$

$(1+x)e^x dx=d(xe^x)$　　$(1-x)e^{-x}dx=d(xe^{-x})$

$(1+\ln x)dx=d(x\ln x)$　　$(1\pm\frac{1}{x})dx=d(x\pm\ln x)$

$\frac{1-\ln x}{x^2}dx=d\frac{\ln x}{x}$　　$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=d\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

例 $\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx=\int\frac{1-\ln x}{x^2(1-\ln x/x)^2}dx=\int\frac{d(\ln x/x)}{(1-\ln x/x)^2}=$

例 $\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{1}{(x+\frac{1}{x})^2-2}d(x+\frac{1}{x})$

例 $\int\frac{1}{x^4+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1-x^2+1+x^2}{x^4+1}=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$

另：$x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$

二、第二换元法

第二换元法是第一换元法的相反情形：

第一换元法：$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx \underline{\underline{u=\varphi(x)}} [\int f(u)du]\Big|_{u=\varphi(x)}$

第二换元法：$\int f(x)dx \underline{\underline{x=\psi(t)}} \int f[\psi(t)]\psi'(t)dt$，找出原函数，变量代回。

定理 2 设（1）$x=\psi(t)$是单调、可导函数，并且$\psi'(t)\neq 0$

（2）$f[\psi(t)]\psi'(t)$具有原函数$\Phi(t)$，

则$\Phi[\psi^{-1}(x)]$是$f(x)$的一个原函数（其中$\psi^{-1}(x)$是$x=\psi(t)$的反函数），即有换元公式：

$$\int f(x)dx=\Phi[\psi^{-1}(x)]+C=[\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt]\Big|_{t=\psi^{-1}(x)}+C$$

证 令$F(x)=\Phi[\psi^{-1}(x)]$，利用复合函数的求导法则及反函数的导数公式，得到

$$F'(x)==\frac{d\Phi}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=f[\psi(t)]\cdot\psi'(t)\cdot\frac{1}{\psi'(t)}=f[\psi(t)]=f(x)$$

即$F(x)$是$f(x)$的原函数，有$\int f(x)dx=F(x)+C=\Phi[\psi^{-1}(x)]+C=[\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt]\Big|_{t=\psi^{-1}(x)}$

对于形如$\int R(\sqrt{a^2-x^2})dx,\int R(\sqrt{x^2\pm a^2})dx$的无理函数的积分，可用第二换元法求解，主要用$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\ 1+\tan^2 x=\sec^2 x$消去根式。

例 1 计算下列积分

（1）$\int\sqrt{a^2-x^2}dx$；

解　设$x=a\sin t\ (-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$，满足定理条件，于是$t=\arcsin\frac{x}{a}$，

从而有$\int\sqrt{a^2-x^2}dx \quad \underline{\underline{x=a\sin t}} \quad \int a\cdot\cos t\cdot a\cdot\cos tdt=a^2\int\cos^2 tdt$

$$=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{a^2}{2}[t+\frac{1}{2}\sin 2t]+C=\frac{a^2}{2}[t+\sin t\cos t]+C$$

于是$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$——公式

（2）$\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$；

解：可以利用$1+\tan^2 t=\sec^2 t$来化去根式，令$x=a\tan t$，　$(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$ 那么

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=\int\frac{a\sec^2 t}{a\sec t}dt=\int\sec t dt=\ln|\sec t+\tan t|+C$$

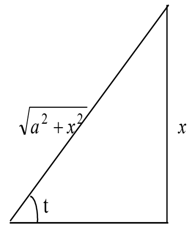

图 4—2 —1

为了要把 $\sec t$ 及 $\tan t$ 换成 x 的函数，我们可以根据 $\tan t=\frac{x}{a}$ 作辅助三角形，于是有 $\sec t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$

因此　$\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=\ln|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\frac{x}{a}|+C=\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+C_1$——公式

（3）$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$　（其中 $a>0$）

解：可考虑三角函数公式 $\sec^2 t-1=\tan^2 t$ 化去根式

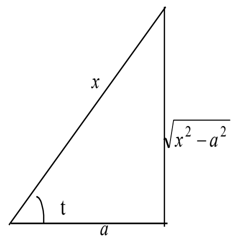

图 4—2—2

设 $x=a\sec t$（$0<t<\frac{\pi}{2}$），那么

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\int\frac{a\sec t\tan t}{a\tan t}dt=\int\sec t dt=\ln|\sec t+\tan t|+C$$

因此 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}|+C=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C_1$　——公式

例 $\int\frac{1}{x(x^6+4)}dx\ \underline{\underline{令x=1/t}}\ \int\frac{-t^5}{4t^6+1}dt=-\frac{1}{24}\int\frac{d(4t^6+1)}{4t^6+1}=-\frac{1}{24}\ln(4t^6+1)+C$

$$=-\frac{1}{24}\ln\frac{4+x^6}{x^6}+C.$$

或　$\int\frac{1}{x(x^6+4)}dx=\frac{1}{4}\int\frac{x^6+4-x^6}{x(x^6+4)}dx=\frac{1}{4}\int(\frac{1}{x}-\frac{x^5}{x^6+4})dx$

或 $\int\frac{1}{x(x^6+4)}dx=\int\frac{dx}{x^7(1+4x^{-6})}=-\frac{1}{24}\int\frac{d(1+4x^{-6})}{1+4x^{-6}}$

通过形式类比，可求积分 $\int\frac{dx}{x(x^n+a)},\int\frac{dx}{x(x^\lambda+a)}$

例 $\int\frac{x^3}{(x-1)^{10}}dx$，作代换 $x-1=t$

例 $\int x^2(x-1)^{10}dx$，作代换 $x-1=t$

例 $\int x^3(1-5x^2)^{10}dx$

解：令$1-5x^2=u$，则$x^2=\frac{1}{5}(1-u)$，$x^3dx=\frac{1}{2}x^2dx^2=-\frac{1}{50}(1-u)du$

$$\int x^3(1-5x^2)^{10}dx=-\frac{1}{50}\int(u^{10}-u^{11})du=-\frac{1}{550}u^{11}+\frac{1}{600}u^{12}+C$$

$$=-\frac{1}{550}(1-5x^2)^{11}+\frac{1}{600}(1-5x^2)^{12}+C$$

例 $\int\frac{x^{14}dx}{(x^5+1)^4}$

解：令$x^5+1=t$，则

$$\int\frac{x^{14}dx}{(x^5+1)^4}=\frac{1}{5}\int\frac{x^{10}d(x^5)}{(x^5+1)^4}=\frac{1}{5}\int\frac{(t-1)^2dt}{t^4}$$

例 $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int x^2\sqrt[3]{1+x^2}d(x^2)=\frac{1}{2}\int u\sqrt[3]{1+u}du$，再令$1+u=t$

例 $\int\frac{\sin^2x}{\cos^6x}dx=\int\tan^2x\sec^2xd\tan x\ \underline{\underline{\tan x=u}}\int u^2(1+u^2)du=\frac{1}{3}\tan^3x+\frac{1}{5}\tan^5x+C$

例 $\int\frac{x+1}{x^2+x\ln x}dx=\int\frac{1+\frac{1}{x}}{x+\ln x}dx=\int\frac{d(x+\ln x)}{x+\ln x}$，或令$\ln x=t$

从上面所讲，我们得一些**新的积分公式**，见书

下面通过例子熟悉公式的运用及积分方法。

例 $\int\frac{1}{x^2+2x+3}dx=\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$

例 $\int\frac{x}{x^2+2x+3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2-2}{x^2+2x+3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3}-\int\frac{1}{x^2+2x+3}dx$

例 $\int\frac{x^2}{x^2+2x+3}dx=\int\frac{x^2+2x+3-2x-3}{x^2+2x+3}dx=\int dx-\int\frac{2x+3}{x^2+2x+3}dx$

例 $\int\frac{x^3}{x^2+2x+3}dx=\int(x-2+\frac{x+6}{x^2+2x+3})dx$

例 $\int\frac{1}{\sqrt{9x^2+25}}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt{(3x)^2+5^2}}d(3x)=\frac{1}{3}\ln|3x+\sqrt{9x^2+25}|+C$

例 $\int\frac{x}{\sqrt{9x^2+25}}dx=\frac{1}{18}\int\frac{18xdx}{\sqrt{(3x)^2+5^2}}=\frac{1}{18}\int\frac{d(9x^2+25)}{\sqrt{9x^2+25}}$

例 $\int \frac{x^2}{\sqrt{9x^2+25}}dx=\frac{1}{9}\int \frac{9x^2+25-25}{\sqrt{9x^2+25}}dx=\frac{1}{9}\int (\sqrt{9x^2+25}+\frac{25}{\sqrt{9x^2+25}})dx$

例 $\int \frac{x^3}{\sqrt{9x^2+25}}dx=\frac{1}{9}\int \frac{9x^3+25x-25x}{\sqrt{9x^2+25}}dx=\frac{1}{9}\int (x\sqrt{9x^2+25}-\frac{25x}{\sqrt{9x^2+25}})dx$

例 $\int \frac{2x+1}{x^2+3x-4}dx=\int \frac{2x+3}{x^2+3x-4}dx-2\int \frac{d(x+\frac{3}{2})}{(x+\frac{3}{2})^2-(\frac{5}{2})^2}dx$

$$=\ln|x^2+3x-4|-\frac{2}{5}\ln\left|\frac{x-1}{x+4}\right|+C。$$

例 $\int \frac{1}{\sqrt{1+x-x^2}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{(\frac{\sqrt{5}}{2})-(x-\frac{1}{2})^2}}dx=\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C$

练习题

1. $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$，代换 $\ln x=t$

2. $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}+e^x}$,代换 $e^{\frac{x}{2}}=t$

一、内容要点

举较多的例以说明利用换元积分法求不定积分的基本方法

1、教材上的例 1-例 3，讲解时充分强调第一换元积分法“凑微分”的基本方法，强调熟悉一些简单函数的微分的重要性；

2、材上的例 4-例 11，讲解时充分强调第一换元积分法应结合被积函数的代数恒等变形等手段

求不定积分；

3、教材上的例 12-例 20，讲解时强调要充分利用三角函数的代数特性及微分特性求不定积分；万能变换的应用及其与三角函数恒等变形方法之间的关系。

二、教学要求和注意点

教学要求：

了解第一换元积分法的意义及证明方法；掌握第一换元积分法求不定积分的基本方法和步骤；熟悉一些常见简单函数的微分。了解第二换元积分法的意义及证明方法；掌握第二换元积分法求不定积分的基本方法和步骤；强调第二换元发与第一换元法之间的区别，了解第二换元积分法适用的函数类型。

教学注意点：

1、由不定积分的意义引入换元积分法的公式；

2、由不定积分的意义证明第一换元公式的正确性；

3、讲解利用第一换元法求不定积分的基本方法和步骤

4、由不定积分的意义引入第二换元积分法的公式；

5、由不定积分的意义证明第二换元公式的正确性；

6、讲解利用第二换元法求不定积分的基本方法和步骤，④强调换元函数的可逆性。

7、例题：举例以说明利用第二换元积分法求不定积分的基本方法

8、教材上的例 21-例 24，说明第二换元法的基本方法和适应的函数；

9、介绍二次多项式的平方根 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的积分方法

第三节 分部积分法

讲稿内容

前面我们利用复合函数的求导法则得到换元积分法，本节利用乘积的求导法则，可得到分部积分法。

设 $u=u(x),\quad v=v(x)$ 具有连续导数，

由乘积的微分公式 $d(uv)=udv+vdu$

移项得 $udv=d(uv)-vdu$，

两边积分，有 $\int udv=uv-\int vdu$

因此分部积分的使用注意两点：一方面，容易写出 dv；另一方面，vdu 比 udv 容易积分

（1）<u>多项式乘正余弦，多项式选作</u>u

例 1 求 $\int x\cdot\cos xdx$，$\int x^2\cos xdx,\int x^3\sin xdx$ 等。

解：$\int x\cdot\cos xdx=\int xd\sin x=x\sin x-\int\sin xdx=x\sin x+\cos x+C$

但 $\int x\cos xdx=\frac{1}{2}\int\cos xd(x^2)$ 则行不通。

因此分部积分主要是如何选取 u 与 dv，这里有一个“你爱它”（LIATE）选择法：

LIATE 的意思是：L——对数函数，I——反三角函数，A——代数函数，

T——三角函数，E——指数函数。

如果在原积分中，有这五种函数中任何两种的乘积，则选择位在 LIATE 字母表中前面的那个字母所代表的函数作 u，余下的表达式为 dv。

变形为：$\int\cos\sqrt[3]{x+1}dx \underline{\underline{\sqrt[3]{x+1}=t}} \int 3t^2\cos tdt$

变形为：$\int x\cos xdx \underline{\underline{\cos x=t}} -\int\frac{t\arccos t}{\sqrt{1-t^2}}dt$

（2）<u>多项式乘指数函数，多项式选作</u>u

例 2 $\int xe^xdx,\int x^2e^xdx,\int x^2 3^x dx,\int(x+1)^2e^{2x+3}dx$ 等。

变形为：$\int e^{\sqrt{x}}dx \underline{\underline{\sqrt{x}=t}} 2\int te^tdt$

变形为：$\int x^2e^xdx \underline{\underline{e^x=t}} \int\ln^2 tdt$

（3）<u>幂函数乘对数，对数选作</u>u

例 3 $\int \ln xdx, \int x\ln xdx, \int x^2\ln xdx, \int x^{-2}\ln xdx$ 等。

$$\int x\ln^2 xdx, \int x\ln^3 xdx, \int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx, \int \frac{\ln^2 x}{x^3}dx, \int \sqrt{x}\ln xdx, \int \sqrt{x}\ln^2 xdx \text{ 等}$$

变形为：$\int \ln(\sqrt{x}+1)dx \ \underline{\underline{\sqrt{x}+1=t}} \ \int 2(t-1)\ln tdt$

变形为：$\int x\ln xdx \ \underline{\underline{\ln x=t}} \ \int te^{2t}dt$

（4）<u>多项式乘反三角，反三角选作u</u>

例 4 $\int \arctan xdx, \int x\arctan xdx, \int x^2\arctan xdx, \int x\arcsin xdx, \int x\arctan^2 xdx$，$\int (\arcsin x)^2dx$，$\int e^{2x}\arctan e^xdx$（在上面第二个积分中令 $x=e^t$）等。

$$\int \arctan xdx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

$$\int x\arctan^2 xdx = \frac{1}{2}\int \arctan^2 xd(1+x^2) = \frac{1}{2}(1+x^2)\arctan^2 x - \int \arctan xdx$$

变形为：$\int \arctan\sqrt{x}dx$，$\int \arctan xdx \ \underline{\underline{\arctan x=t}} \int t\sec^2 tdt$ 等

$$\int x^2\arccos xdx = \frac{1}{3}\int \arccos xdx^3 = \frac{1}{3}x^3\arccos x + \frac{1}{3}\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{3}x^3\arccos x - \frac{1}{3}\int \frac{x-x^3-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{3}x^3\arccos x - \frac{1}{3}\int x\sqrt{1-x^2}dx + \frac{1}{3}\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{3}x^3\arccos x + \frac{1}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}+C$$

（5）<u>循环型积分</u>

例 5 $\int e^x\sin xdx$，$\int e^{ax}\sin bxdx, \int a^x\cos xdx$

$$\int e^x\sin xdx = \int \sin xde^x = e^x\sin x - \int e^x\cos xdx = e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin xdx$$

于是 $\int e^x\sin xdx = \frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

或 $I = \int e^x\sin xdx = \int \sin xde^x = e^x\sin x - \int e^x\cos xdx$

$I = \int e^x\sin xdx = -\int e^xd\cos x = -e^x\cos x + \int e^x\cos xdx$

于是两式相加得 $I = \frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

变形 $\int e^x \sin x dx \xlongequal{e^x=t} \int \sin \ln t dt$

例 求积分 $\int \sin \ln x dx$

方法 1 $\int \sin \ln x dx \xlongequal{\ln x=t} \int e^t \sin t dt$

方法 2 $\int \sin \ln x dx = x\sin \ln x - \int \cos \ln x dx = x\sin \ln x - x\cos \ln x - \int \sin \ln x dx$

于是 $\int \sin \ln x dx = \dfrac{x}{2}(\sin \ln x - \cos \ln x) + C$

变形 $\int e^x \sin x dx \xlongequal{\sin x=t} \int e^{\arcsin t} \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$

例 $\int \dfrac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx \xlongequal{\arctan x=t} \int \dfrac{\tan t \cdot e^t}{\sec^3 t} \sec^2 t dt = \int e^t \sin t dt$

记 $I = \int \dfrac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx = -\int e^{\arctan x} d\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} e^{\arctan x} + \int \dfrac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$

$I = \int \dfrac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \int \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} de^{\arctan x} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{\arctan x} - \int \dfrac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$

故 $I = \dfrac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\arctan x} + C$

例 $\int \sec^3 x dx = \int \sec x d\tan x = \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x dx = \sec x \tan x - \int (\sec^3 x - \sec x) dx$

例 $\int xe^x \sin x dx$ 也为循环积分。

$-\int e^x(\sin x + x\cos x)dx$

循环

$\int x\cos x\, de^x$

$x\cos x e^x - \int e^x(\cos x - x\sin x)dx$

（6）混合型积分，$\int x(\arctan x + \cos x)dx, \int (1 + x + \cos x)e^x dx$ 等

（7）<u>递推型积分</u>

$\int x\sin x\, de^x = x\sin x e^x - \int e^x \sin x dx - x\cos x e^x + \int e^x \cos x dx - \int e^x x\sin x dx$

$\int e^x(\cos x - \sin x)dx$

例 6 求 $I_n = \int \sin^n x dx$ （n 为正整数）.

解 记 $I_n = \int \sin^n x dx = -\int \sin^{n-1} x d(\cos x)$

$$= -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1)\int \cos^2 x \sin^{n-2} x dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1)\int (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int \sin^n x dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

移项整理得 $I_n = -\dfrac{1}{n}\sin^{n-1} x \cdot \cos x + \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ （$n \geq 3$）

递推最后得到$I_1=\int \sin x dx$，$I_2=\int \sin^2 x dx$，其积分易求。

变形为：$I_n=\int \sin^n x dx \ \underline{\underline{\sin x = t}}\ \int \frac{t^n dt}{\sqrt{1-t^2}}$

例 求$I_n=\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$　（$a>0$，n为正整数）

解 设$u=\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$，$dv=dx$　利用分部积分法，得

$$I_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int \frac{x^2+a^2-a^2 dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}-2na^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2 I_{n+1}$$

移项，整理得$I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n$

用n代替$n+1$，从而用$n-1$代替n，上式可改写成

$$I_n=\frac{1}{2(n-1)a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-1} \qquad (**)$$

（**）式称为递推公式，每用一次（**），n就降一次，最后出现的积分是$n=1$的情形

此时 $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$ 从而问题得到解决。

变形：令$x=a\tan t$，$I_n=\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^{2n-1}}\int \cos^{2n-2} t dt$

（8）<u>相消型积分</u>

例 7 $\int e^x(1+\tan\frac{x}{2})^2 dx=\int e^x \sec^2\frac{x}{2}dx+2\int e^x \tan\frac{x}{2}dx$

$$=2\int e^x d\tan\frac{x}{2}dx+2\int e^x\tan\frac{x}{2}dx=2e^x\tan\frac{x}{2}-2\int e^x\tan\frac{x}{2}dx+2\int e^x\tan\frac{x}{2}dx$$

$$=2e^x\tan\frac{x}{2}+C$$

例 $\int(1+x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int x(1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int xde^{x+\frac{1}{x}}$

或 $\int(1+x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int(x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx=xe^{x+\frac{1}{x}}-\int xe^{x+\frac{1}{x}}(1-\frac{1}{x^2})dx+\int(x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx$

（9）其它

例 8　已知 $f(x)$ 有原函数 $e^{x^2}\sin x$，求 $\int xf'(x)dx$

解：由已知得 $f(x)=(e^{x^2}\sin x)'=e^{x^2}(2x\sin x+\cos x)$，且 $\int f(x)dx=e^{x^2}\sin x+C$，

所以　$\int xf'(x)dx=\int xdf(x)=xf(x)-\int f(x)dx=xe^{x^2}(2x\sin x+\cos x)-e^{x^2}\sin x+C$

例　如 $f'(e^x)=1+x$，求 $f(x)$

解：　$\int f'(e^x)d(e^x)=\int(1+x)d(e^x)$

即 $f(e^x)=(1+x)e^x-\int e^x dx=(1+x)e^x-e^x+C=xe^x+C$

所以 $f(x)=x\ln x+C$

例　$\int\frac{x}{\cos^2 x}dx=\int xd\tan x$

例　$\int\sqrt{x^2+a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

例　$\int x\sqrt{x^2+a^2}dx$

例　$\int x^2\sqrt{x^2+a^2}dx=\frac{1}{2}\int x\sqrt{x^2+a^2}d(x^2+a^2)=\frac{1}{3}\int xd(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}$，分部积分

$=\frac{1}{3}x(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\int(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{3}x(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\int x^2\sqrt{x^2+a^2}dx-\frac{1}{3}\int a^2\sqrt{x^2+a^2}dx$

所以 $\frac{4}{3}\int x\sqrt{x^2+a^2}dx=\frac{1}{3}x(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{a^2}{3}\int\sqrt{x^2+a^2}dx$

另解　$\int x^2\sqrt{x^2+a^2}dx=\int a^2\tan^2 t\cdot a\sec t\cdot a\sec^2 tdt=a^4\int(\sec^5 t-\sec^3 t)dt$

例　$\int x^3\sqrt{x^2+a^2}dx=\int a^3\tan^3 t\cdot a\sec t\cdot a\sec^2 tdt=a^5\int\tan^3 t\sec^3 tdt=a^5\int\tan^2 t\sec^2 td\sec t$

注意积分技巧：

$$\int x\arctan xdx=\frac{1}{2}\int \arctan xd(x^2+1)$$

$$\int x\ln(x^2-1)dx=\frac{1}{2}\int \ln(x^2-1)d(x^2-1)$$

$$\int \ln(x-1)dx=\frac{1}{2}\int \ln(x-1)d(x-1)$$

$$\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx=-\frac{1}{2}\int \arctan e^x d(e^{-2x}+1)=-\frac{1}{2}(e^{-2x}+1)\arctan e^x+\frac{1}{2}\int (e^{-2x}+1)\frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$$

$$=-\frac{1}{2}(e^{-2x}+1)\arctan e^x+\frac{1}{2}\int \frac{1+e^{2x}}{e^{2x}}\frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$$

问题

$$\int \cot xdx=\int \frac{1}{\sin x}d\sin x=\frac{1}{\sin x}\cdot\sin x+\int \sin x\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=1+\int \cot xdx\Rightarrow 0=1$$

$$\int \frac{1}{x\ln x}dx=\int \frac{1}{\ln x}d\ln x=\frac{1}{\ln x}\ln x-\int \ln x\cdot\frac{-1}{x(\ln x)^2}dx=1+\int \frac{1}{x\ln x}dx\Rightarrow 0=1$$

练习题

例（2002 年）设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$，求 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)dx.$

解：令 $u=\sin^2 x\Rightarrow \sin x=\sqrt{u}\Rightarrow x=\arcsin\sqrt{u}$， $f(x)=\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)dx=\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx=-2\int \arcsin\sqrt{x}d(\sqrt{1-x})$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\int \sqrt{1-x}\frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$$

例（2011 年）求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\arctan\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx.$

解：$\displaystyle\int \frac{\arctan\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx=2\int\left(\arctan\sqrt{x}+\ln x\right)d\sqrt{x}$

$$=2\sqrt{x}\left(\arctan\sqrt{x}+\ln x\right)-\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}-2\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$=2\sqrt{x}\left(\arctan\sqrt{x}+\ln x\right)+2\sqrt{1-x}-4\sqrt{x}+C$$

例（2018）求不定积分 $\displaystyle\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx.$

【解析】$\displaystyle\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx=\frac{1}{2}\int \arctan\sqrt{e^x-1}de^{2x}$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{e^{2x}}{1+e^x-1}\cdot\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^x-1+1}{\sqrt{e^x-1}}de^x$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\left(\sqrt{e^x-1}+\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\right)d(e^x-1)$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{6}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{e^x-1}+C$$

例 $\int\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}dx$，令 $\ln x=t$，再分部积分

例 $\int\arcsin x\cdot\arccos x dx$（两次分部积分）

例 已知 $f''(x)$ 连续，$f'(x)\neq 0$，求 $\int\left[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{(f'(x))^3}\right]dx$（相消型积分）

一、内容要点

1、分部积分法：

由不定积分的意义引入不定积分的分部积分公式；

教材上的例 1-例 7，说明分部积分法的基本方法及其特性；

教材上的例 8-例 10，说明应注意分部积分法应与其它的方法结合使用。

2、有理式的积分：

有理式分解的最后形式和分解方法；

有理式分解后每一部分的积分法；

例：分解 $\frac{x+3}{x^2-5x+6}$ 及 $\frac{1}{x(x-1)^2}$ 说明分解的步骤。

二、教学要求和注意点

教学要求：了解分部积分法的意义及证明方法；掌握分布积分法的基本步骤和适应函数；了解有理式积分的基本思想及有理式分解的基本方法

第四节 几种特殊类型函数的积分举例

讲稿内容

一、有理函数的积分

两个多项式的商所表示的函数叫做有理函数，即形如：

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

我们总可假设 $P(x),Q(x)$ 之间没有公因式。

当 $n<m,\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 称为真分式，当 $n>m,\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 称为假分式，由多项的除法知，一个假分式必可化为多项式加真分式，因此，我们**只讨论真分式的积分**。

（1）如果 $Q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$ 为实系数多项式，则 $Q(x)$ 总可分解为一些实系数的一次因子与二次因子的乘幂之积。

[因为 $Q(x)$=0 在复数范围内有 m 个根，则

$Q(x)=b_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_m)$

如 α_i 是 k 重根，则 $Q(x)$ 有因子 $(x-\alpha_i)^k$

如 x_0 是 $Q(x)$ =0 的复根，则 $\overline{x}_0$ 也是 $Q(x)$ =0 的根，于是 $Q(x)$ 中一定有因子 $(x-x_0)(x-\overline{x}_0)=x^2-(x_0+\overline{x}_0)x+x_0\overline{x}_0=x^2+px+q$ 为二次质因子（即 $p^2-4q<0$）]

即 $Q(x)=b_0(x-a)^{\alpha}\cdots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\cdots(x^2+rx+s)^{\mu}$　　　（1）

其中 $\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \mu$ 都是自然数， $p^2-4q<0$，$r^2-4s<0$。

（2）如果 $Q(x)$ 的分解式如（1）式，则有理真分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 可以唯一地分解成为简单分式（或部分分式）的和：

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{A_{\alpha}}{x-a}+\cdots+$$

$$+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}}+\cdots+\frac{B_{\beta}}{x-b}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\lambda}}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}}+\cdots+\frac{M_{\lambda}x+N_{\lambda}}{x^2+px+q}+\cdots+$$

$$+\frac{R_1x+S_1}{(x^2+rx+s)^{\mu}}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^{\mu-1}}+\cdots+\frac{R_{\mu}x+S_{\mu}}{x^2+rx+s}\qquad（2）$$

其中 $A_i,\cdots B_i,M_i,N_i,\cdots,R_i,S_i$ 等都是常数，我们将从下面的例子看到，这些常数可由待定系数法求得。

我们从（2）式中应注意到下列两点：

①分母 $Q(x)$ 中如果有因子 $(x-a)^k$，那么分解后有下列 k 个部分分式之和：

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a}$$

其中 A_1,A_2,A_k 都是常数，特别地，如果 $k=1$，那么分解后有 $\dfrac{A}{x-a}$

例 1 求 $\displaystyle\int\frac{x-5}{(x+1)(x-2)^2}dx$

解　设 $\dfrac{x-5}{(x+1)(x-2)^2}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x-2)^2}+\dfrac{C}{x-2}$（$A,B,C$ 为待定系数）

$$=\frac{A(x-2)^2+B(x+1)+C(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)^2}$$

两端去分母以后，有：$A(x-2)^2+B(x+1)+C(x+1)(x-2)=x-5$

因为这是恒等式，等式两端 x 的系数和常数必须分别相等，于是有

$\begin{cases}A+C=0\\-4A+B-C=1\\4A+B-2C=-5\end{cases}$ 解此方程组，得 $A=-\dfrac{2}{3},B=-1,C=\dfrac{2}{3}$

或取特殊的 x 值：如取 $x=-1$ 得 $A=-\dfrac{2}{3}$，取 $x=2$ 得 $B=-1$，取 $x=0$ 得 $c=\dfrac{2}{3}$

所以 $\displaystyle\int\frac{x-5}{(x+1)(x-2)^2}dx=-\frac{2}{3}\int\frac{1}{x+1}dx-\int\frac{1}{(x-2)^2}dx+\frac{2}{3}\int\frac{1}{x-2}dx$

$$=-\frac{2}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{x-2}+\frac{2}{3}\ln|x-2|+C=\frac{1}{x-2}+\frac{2}{3}\ln|\frac{x-2}{x+1}|+C$$

②分母 $Q(x)$ 中如果有因子 $(x^2+px+q)^k$，其中 $p^2-4q<0$，那么分解后有下列 k 个部分分式之和：

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$

其中M_i, N_i等都是常数，特别地，如果$k=1$，那么分解后有$\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$。

例 2　求$\int \dfrac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx$

解：设$\dfrac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\dfrac{A}{1+2x}+\dfrac{Bx+C}{1+x^2}$

两端去分母后，得$1=A(1+x^2)+(Bx+C)(1+2x)$　　　　（3）

比较（3）式两端x的各同次幂的系数及常数项，我们有

$$\begin{cases} A+2B=0 \\ B+2C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \quad \Rightarrow A=\frac{4}{5}, B=-\frac{2}{5}, C=\frac{1}{5}$$

于是　$\dfrac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{1}{1+2x}-\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{2x-1}{1+x^2}$

因（3）式对任意的x均成立，故可取一些特殊的x值来确定 A，B，C。

于是$\int \dfrac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx=\dfrac{4}{5}\int\dfrac{dx}{1+2x}-\dfrac{1}{5}\int\dfrac{2x-1}{1+x^2}dx$

$=\dfrac{2}{5}\int\dfrac{d(1+2x)}{1+2x}-\dfrac{1}{5}\int\dfrac{1}{1+x^2}d(1+x^2)+\dfrac{1}{5}\int\dfrac{1}{1+x^2}dx$

$=\dfrac{2}{5}\ln|1+2x|-\dfrac{1}{5}\ln|1+x^2|+\dfrac{1}{5}\arctan x+C=\dfrac{1}{5}[\ln\dfrac{(1+2x)^2}{1+x^2}+\arctan x]+C$

例　求积分$\int\dfrac{x+1}{x^3-2x^2+2x}dx$

解：这是有理函数的积分，

设$\dfrac{x+1}{x^3-2x^2+2x}=\dfrac{x+1}{x(x^2-2x+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2-2x+2}=\dfrac{A(x^2-2x+2)+x(Bx+C)}{x(x^2-2x+2)}$

去掉分母以后，得$A(x^2-2x+2)+x(Bx+C)=x+1$

比较等式两边x的各同次幂前面的系数及常数项，得

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+C=1 \\ 2A=1 \end{cases} \quad \text{解得 } A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}, C=2$$

于是 $$\frac{x+1}{x^3-2x^2+2x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{-\frac{1}{2}x+2}{x^2-2x+2}$$

所以 $$\int\frac{x+1}{x^3-2x^2+2x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x-4}{x^2-2x+2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{4}\int\frac{2x-2-6}{x^2-2x+2}dx=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{4}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{1+(x-1)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{4}\ln|x^2-2x+2|+\frac{3}{2}\arctan(x-1)+C=\frac{1}{4}\ln|\frac{x^2}{x^2-2x+2}|+\frac{3}{2}\arctan(x-1)+C$$

从前面的几个例子中得知：当有理真分式函数分解为部分分式之和以后会出现$\frac{A}{(x-a)^n}$及$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$（$n>0, p^2-4q<0$）有理分式函数的积分，下面讨论

（Ⅰ）$\int\frac{A}{(x-a)^n}dx$

当$n=1$时，$\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C$；

当$n>1$时，$\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=\frac{A}{1-n}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C$。

（Ⅱ）$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$（$p^2-4q<0$）

$x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}$　令$t=x+\frac{p}{2}$，$q-\frac{p^2}{4}=a^2$

于是$x^2+px+q=t^2+a^2$

当$n=1$时，$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2+a^2}dt$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{2t}{t^2+a^2}dt+(N-\frac{Mp}{2})\int\frac{1}{t^2+a^2}dt=\frac{M}{2}\ln|t^2+a^2|+(N-\frac{Mp}{2})\cdot\frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a}+C$$

$$=\frac{M}{2}\ln|x^2+px+q|+\frac{2N-Mp}{2a}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C$$

当$n>1$时，$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{(t^2+a^2)^n}dt$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{2t}{(t^2+a^2)^n}dt+(N-\frac{Mp}{2})\int\frac{1}{(t^2+a^2)^n}dt=\frac{M}{2}\cdot\frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}+(N-\frac{Mp}{2})\int\frac{1}{(t^2+a^2)^n}dt$$

而积分$\int\frac{1}{(t^2+a^2)^n}dt$在上一节中已经讲过。

例 6　求积分$\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx$

解：$\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx=\int(\frac{1}{x-2}-\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}-\frac{x+2}{x^2+1})dx$

$$=\int\frac{1}{x-2}dx-3\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx-4\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx-\int\frac{x}{x^2+1}dx-2\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$=\ln|x-2|+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}-4(\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\arctan x)-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|-2\arctan x+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1}+\frac{3-4x}{2(x^2+1)}-4\arctan x+C$$

其中积分$\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$可用递推来做，也可用下面方法做：

$$\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx\ \underline{\underline{x=\tan t}}\ \int\cos^2 tdt=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\arctan x+C$$

我们可以证明：有理函数的原函数都是初等函数。

例　$\int\frac{dx}{e^{x/2}+e^x}\ \underline{\underline{e^{x/2}=t}}\int\frac{1}{t+t^2}\cdot\frac{2}{t}dt=2\int\frac{dt}{t^2(1+t)}=2\int(-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{1+t})dt$

例　$\int\frac{1}{x^4+x^2+1}dx=\int\frac{dx}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{(x+1)dx}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{(x-1)dx}{x^2-x+1}$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{(2x+1+1)dx}{x^2+x+1}-\frac{1}{4}\int\frac{(2x-1-1)dx}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{1}{4}\int\frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}-\frac{1}{4}\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{1}{4}\int\frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}(\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+C$$

其中$x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

二、三角函数有理式的积分

所谓**三角函数的有理式**是指由三角函数和常数经过有限次四则运算所构成的函数。由于三角函数，不论是正弦、余弦、正切、余切等均可用正切来表示，因此三角函数有理式的积分，总可作代换$u=\tan\frac{x}{2}$,或$u=\tan x$等化为有理函数的积分。

若令$u=\tan\frac{x}{2}$，则$dx=\frac{2}{1+u^2}du$

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2u}{1-u^2},\cot x=\frac{1-u^2}{2u}$$

例 1　求$\int\frac{1}{3+5\cos x}dx$

解　作代换$\tan\frac{x}{2}=u$，则有

$$\int\frac{1}{3+5\cos x}dx=\int\frac{1}{3+5(\frac{1-u^2}{1+u^2})}\frac{2}{1+u^2}du=\int\frac{1}{4-u^2}du$$

$$=\frac{1}{4}\ln|\frac{2+u}{2-u}|+C=\frac{1}{4}\ln|\frac{2+\tan\frac{x}{2}}{2-\tan\frac{x}{2}}|+C$$

例 2　求$\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$

解　作代换$\tan\frac{x}{2}=u$，则有

$$\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx=\int\frac{1+\frac{2u}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}(1+\frac{1-u^2}{1+u^2})}\cdot\frac{2}{1+u^2}du$$

$$=\frac{1}{2}\int(u+2+\frac{1}{u})du=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}u^2+2u+\ln|u|)+C=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln|\tan\frac{x}{2}|+C$$

例 $\int\frac{dx}{\sin x+\tan x}=\int\frac{1-u^2}{2u}du=\frac{1}{2}\ln u-\frac{1}{4}u^2+C$，令 $\tan\frac{x}{2}=u$

例 $\int\frac{dx}{3+\sin^2 x}$

解：作代换 $\tan\frac{x}{2}=u$，则

$$\int\frac{dx}{3+\sin^2 x}=\int\frac{1}{3+\left[\frac{2u}{1+u^2}\right]^2}\cdot\frac{2}{1+u^2}du=\int\frac{2(1+u^2)}{3(1+u^2)^2+4u^2}du$$，积分繁。

另解：$\int\frac{dx}{3+\sin^2 x}=\int\frac{2}{7-\cos 2x}dx\overset{u=\tan x}{=\!=\!=}\int\frac{2}{7-\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{1}{1+u^2}du$

$$=\int\frac{du}{3+4u^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x}{\sqrt{3}}+C.$$

三角函数有理式的积分，虽可作三角代换化为有理函数的积分，但不一定是最简做法，如该题再解。

再解：$\int\frac{dx}{3+\sin^2 x}=\int\frac{\sec^2 x}{3\sec^2 x+\tan^2 x}dx=\int\frac{d\tan x}{3+4\tan^2 x}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x}{\sqrt{3}}+C.$

又如 $\int\frac{\cos x}{1+\sin x}dx=\int\frac{d\sin x}{1+\sin x}$，显然比用三角代换简单。

例 5　求 $\int\frac{1}{\sin^4 x\cos^2 x}dx$

解 作代换 $u=\tan x$ （或 $u=\cot x$），$du=\sec^2 xdx$

$$\int\frac{1}{\sin^4 x\cos^2 x}dx=\int\frac{\frac{1}{\cos^4 x}}{\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}}\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int\frac{(1+\tan^2 x)^2}{\tan^4 x}d(\tan x)$$

$$=\int\frac{(1+u^2)^2}{u^4}du=\int(\frac{1}{u^4}+\frac{2}{u^2}+1)du=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{u^3}-\frac{2}{u}+u+C=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\tan^3 x}-\frac{2}{\tan x}+\tan x+C$$

一般地，凡形如 $\int R(\sin^2 x,\cos^2 x)dx$ 的积分，都可以运用这个代换，这是因为当设 $\tan x=u$ 时，便有

$$\sin^2 x=\tan^2 x\cos^2 x=\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\frac{u^2}{1+u^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+u^2}, \qquad dx = \frac{du}{1+u^2}$$

三、简单无理函数的积分

无理函数的积分指被积分函数含有根式的积分，这里主要讨论含有下列两种简单根式的积分：$\sqrt[n]{ax+b}$, $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

例 7　求$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$

解　为了去掉根号，可以设$\sqrt{x-1} = u$，于是$x = u^2 + 1$，$dx = 2udu$，

从而$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx = \int \frac{u}{u^2+1} \cdot 2udu = 2\int \frac{u^2}{u^2+1} du$

$$= 2\int (1 - \frac{1}{u^2+1}) du = 2(u - \arctan u) + C = 2(\sqrt{x-1} - \arctan\sqrt{x-1}) + C$$

例 8　求$\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+2}} dx$

解　为了去掉根号，可以设$\sqrt[3]{x+2} = u, \to x = u^3 - 2 \to dx = 3u^2 du$，

从而所求积分$\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+2}} dx = 3\int \frac{u^2}{1+u} du = 3\int \frac{u^2-1+1}{1+u} du$

$$= 3\int (u - 1 + \frac{1}{1+u}) du = 3[\frac{1}{2}u^2 - u + \ln(1+u)] + C$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2} - 3\sqrt[3]{x+2} + 3\ln(1+\sqrt[3]{x+2}) + C$$

例　$\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} \overset{\sqrt[6]{x}=u}{\underset{x=u^6}{=}} \int \frac{6u^5}{(1+u^2)u^3} du = 6\int \frac{u^2}{1+u^2} du$

例　$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx$

解：需变形，再作代换。$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx = \int \frac{1}{x\sqrt{\frac{1+x}{x}}} dx$（为什么？）

令$t = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$，则$x = \frac{1}{t^2-1}$，$dx = \frac{-2tdt}{(t^2-1)^2}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}dx = \int \frac{1}{x\sqrt{\frac{1+x}{x}}}dx = \int \frac{t^2-1}{t}\cdot\frac{-2tdt}{(t^2-1)^2} = -2\int \frac{dt}{t^2-1} = -\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}\right| + C = \ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right| + C$$

另解：$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}} = \ln(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}) + C$

例 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} = \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}} = \int \frac{-3t}{t^3+1}dt = \int (\frac{1}{t+1} - \frac{t+1}{t^2-t+1})dt$

$= \ln|t+1| - \frac{1}{2}\ln|t^2-t+1| - \sqrt{3}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C$，其中 $t = \sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}$ 。

例 $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx \ \underline{\underline{\sqrt[6]{x+1}=t}} \ 6\int \frac{t^5(1-t^3)}{1+t^2}dt = -6\int (t^6-t^4-t^3+t^2+t-1-\frac{t-1}{t^2+1})dt$

例 $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$

解：令 $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = t$，则 $x = \frac{t^2+1}{t^2-1}, dx = \frac{-4tdt}{(t^2-1)^2}$

$$\int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}dx = \int \frac{t-1}{t+1}\cdot\frac{-4tdt}{(t^2-1)^2} = -4\int \frac{tdt}{(t-1)(t+1)^3}$$

$$= \int (-\frac{1}{2(t-1)} + \frac{-2}{(t+1)^3} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{2(t+1)})dt$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|t+1| + \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2}\ln|t+1| + C$$

练习题

1. $\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx = \int \frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}dx = \int \left[\frac{4}{(x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{4}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2}\right]dx$

2. $\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)} = \int \left[\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{A_4}{x^4} + \frac{A_5}{x^5} + \frac{A_6}{x^6} + \frac{Bx+C}{1+x^2}\right]dx$

或 $\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)} = -\int \frac{t^6}{1+t^2}dt$

3（2009 年）计算不定积分 $\int \ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})dx (x>0)$

解:令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = t$,则 $x = \frac{1}{t^2-1}$,

$$\int \ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})dx = \int \ln(1+t)d\frac{1}{t^2-1} = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{1}{(t^2-1)(t+1)}dt$$

而$\int\frac{1}{(t^2-1)(t+1)}dt=\frac{1}{4}\int(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}-\frac{2}{(t+1)^2})dt$

$$=\frac{1}{4}\ln(t-1)-\frac{1}{4}\ln(t+1)+\frac{1}{2(t+1)}+C$$

$$\int\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})dx=x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{x+x^2}+C$$

4. $\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}$

解：$x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2$

$$\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\int\frac{dx}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(x+1)dx}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{(x-1)dx}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$

注： $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ **型积分的求法：**

方法 1：先把 ax^2+bx+c 配方，然后再用三角代换去掉根号。

方法 2：用欧拉（Euler）代换

（1）　当 $a>0$ 时，作代换 $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$

（2）　当 $c>0$ 时，作代换 $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$

（3）　当 $ax^2+bx+c=0$ 有相异实根 α,β 时，

$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)\sqrt{\dfrac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}$，作代换 $t=\sqrt{\dfrac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}$

在本章的最后，我们需要指出，积分运算与微分运算还有一个很不相同的地方。我们知道，任何一个初等函数的导数都可以根据基本导数表和求导法则求出来，并且仍然是初等函数。但是，有许多初等函数却“积不出来”，这就是说这些函数的原函数需存在但不能用初等函数表示，所谓初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算而成的，所以这时我们就说积分 $\int f(x)dx$ 不能表为有限形式，例如以下积分都是不能表为有限形式的

$$\int\frac{\sin x}{x}dx,\quad \int\frac{\cos x}{x}dx,\quad \int\frac{1}{\ln x}dx,\quad \int e^{-x^2}dx,\quad \int\sin x^2dx$$

$\int\cos x^2dx,\quad \int\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}dx,\quad \int\sqrt{1-k^2\sin^2 x}dx,\quad \int\dfrac{1}{(1+k\sin^2 x)\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}dx,$　（其中 $0<k<1$）后面三个积分称为椭圆积分，因为它们是求椭圆的弧长遇到的

一、内容要点

1、有理函数的积分：

例 1-例 4，说明有理函数积分的基本方法和步骤；

三角有理似的积分，说明三角有理式的积分可通过万能变换化为有理式的积分，用教材上的例 5 说明；

无理式的积分，用例 6-例 9 说明一次无理式和二次无理式可通过适当的变换化为有理式的积分，并总结变换式的规律；

2、归纳不定积分的积分方法和应注意的地方

二、教学要求和注意点

掌握有理函数积分的基本方法；归纳不定积分的积分方法和应注意的地方