§3.3 随机变量的独立性

—— 将事件的独立性推广到随机变量

两个随机变量的相互独立性

定义 设(X,Y)为二维随机变量，若对于任何

实数 x, y 都有

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$$

则称随机变量X 和Y 相互独立

由定义可知

(X, Y) 相互独立 $\Longleftrightarrow$ $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$

离散型 (X, Y) 相互独立

$$\Longleftrightarrow \quad P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

即 $$p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

连续型 (X, Y) 相互独立

$$\Longleftrightarrow \quad f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad (a.e.)$$

二维随机变量 (X, Y) 相互独立,
则边缘分布完全确定联合分布

命题 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$ 相互独立 $\Longleftrightarrow$ $\rho=0$

证 对任何 x,y 有

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

取 $x=\mu_1,y=\mu_2$, $\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}$,故 $\rho=0$

将 $\rho=0$ 代入 $f(x,y)$ 即得

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

例1 已知 (X, Y) 的联合概率密度为

(1)

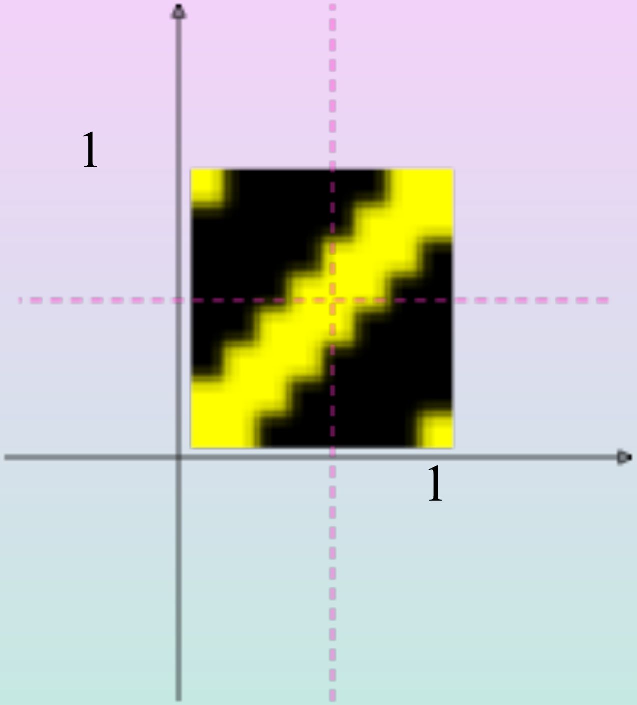
$$f_1(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2)

$$f_2(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y,0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

讨论X,Y是否独立?

解



(1) 由图可知边缘密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

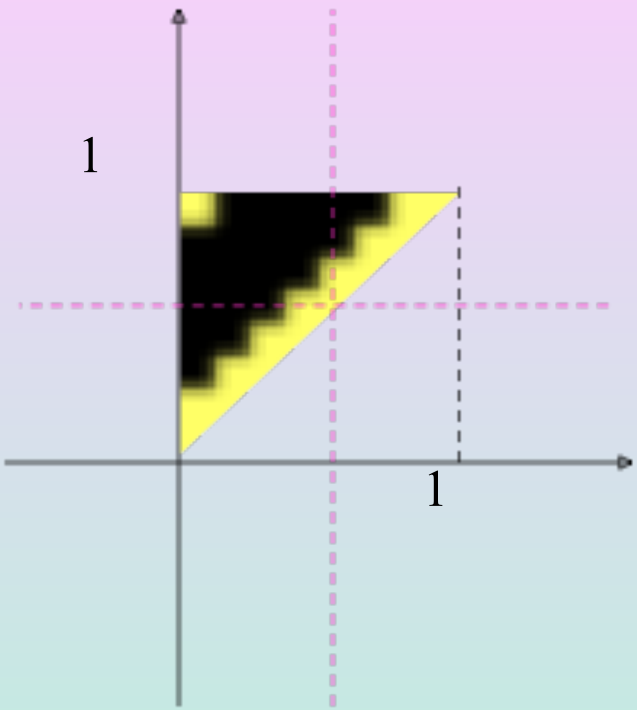
$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

显然,

$$f_1(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

故X, Y相互独立

(2) 由图可知边缘密度函数为



$$f_X(x)=\begin{cases}4x(1-x^2), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}4y^3, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

显然,

$$f_2(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$$

故X,Y不独立

由上两例你看出了什么?

Ex1 (X,Y)密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6e^{-2x-3y} & x>0,y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

Ex2 (X,Y)密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-3y} & -1<x<2,y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

推广 若 X,Y 为相互独立的随机变量

则$aX+b,\ cY+d$ 也相互独立；

$X^2,\ Y^2$ 也相互独立；

注意 若两个随机变量相互独立，且又有相同的分布，不能说这两个随机变量相等. 如

X	-1	1
P	0.5	0.5

Y	-1	1
P	0.5	0.5

X,Y 相互独立，则

$Y \backslash X$ (p_{ij})	-1	1
-1	0.25	0.25
1	0.25	0.25

$P(X=Y)=0.5,$ 故不能说 $X=Y$.

作业 习题三

A组：6（书上），7 （书上），

8，9，10，11，13

B组：4，6，7 ，9，10

§3.4　二维随机变量函数的分布

引

问题：已知二维随机变量(X,Y)的概率特性

$g(x,y)$为已知的二元函数，$Z=g(X,Y)$

求：　Z的概率特性（分布）

方法：转化为(X,Y)的事件

离散型二维随机变量的函数

例1 设二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布为

$Y \backslash X$ (p_{ij})	-1	1	2
-1	$1/4$	$1/6$	$1/8$
0	$1/4$	$1/8$	$1/12$

求 $X+Y, X-Y, XY, Y/X$ 的概率分布

解 根据(X,Y)的联合概率分布可得如下表格:

P	$1/4$	$1/4$	$1/6$	$1/8$	$1/8$	$1/12$
(X,Y)	(-1,-1)	(-1,0)	(1,-1)	(1,0)	(2,-1)	(2,0)
$X+Y$	-2	-1	0	1	1	2
$X-Y$	0	-1	2	1	3	2
XY	1	0	-1	0	-2	0
Y/X	1	0	-1	0	-1/2	0

关于离散型随机变量的两个重要结论:

- 设 $X \sim B(n1,p)$, $Y \sim B(n2,p)$, 且 X, Y 相互独立,
  则 $X + Y \sim B(n1+n2, p)$

- 设 $X \sim P(\lambda 1)$, $Y \sim P(\lambda 2)$, 且 X, Y 相互独立,
  则 $X + Y \sim P(\lambda 1 + \lambda 2)$

证明　　$Z = X + Y$ 的可能取值为 $0,1,2,\cdots,$

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k} P(X=i, Y=k-i),$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!}\cdot\frac{\lambda_2^{k-i}e^{-\lambda_2}}{(k-i)!}=\frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{k!}\qquad k=0,1,2,\cdots$$

二维连续型随机变量函数的分布

问题：已知二维随机变量(X,Y)的密度函数，

$g(x,y)$为已知的二元函数，$Z=g(X,Y)$

求：Z的密度函数

方法：

从求Z的分布函数出发，将Z的分布函数

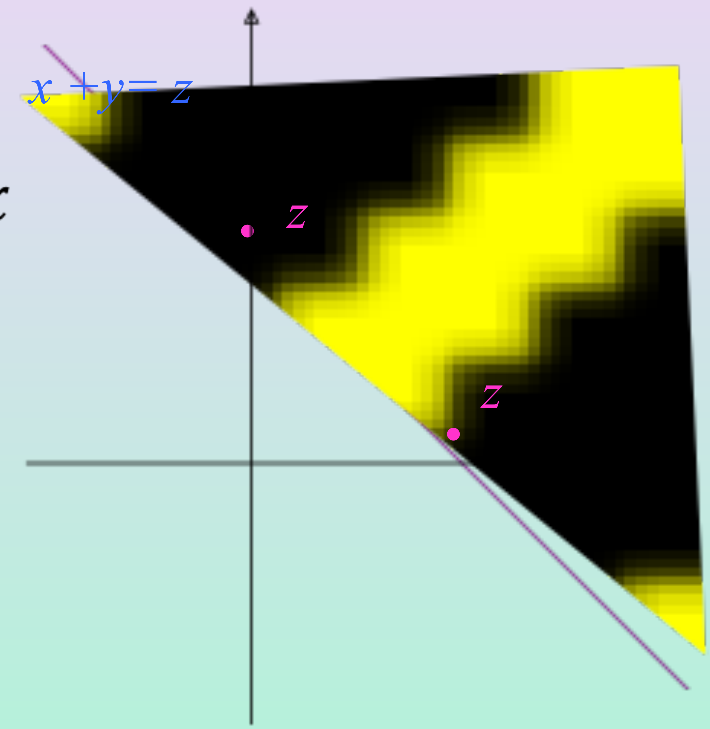
转化为(X,Y)的事件

(1) 和的分布：$Z = X + Y$

设(X, Y)为连续型随机变量，联合密度函数为$f(x,y)$

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X + Y \le z)$$

$$= \iint_{x+y\le z} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,dy\right]dx$$



换元
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(x,t-x)\,dt\right]dx$$

换序
$$= \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t-x)\,dx\right]dt \qquad -\infty < z < +\infty$$

求导
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,dx$$

特别地，若X,Y相互独立，则

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx \overset{\text{记作}}{=} f_X(z)*f_Y(z)$$

称之为函数$fX(z)$与$fY(z)$的卷积

例2 已知(X,Y)的联合密度为

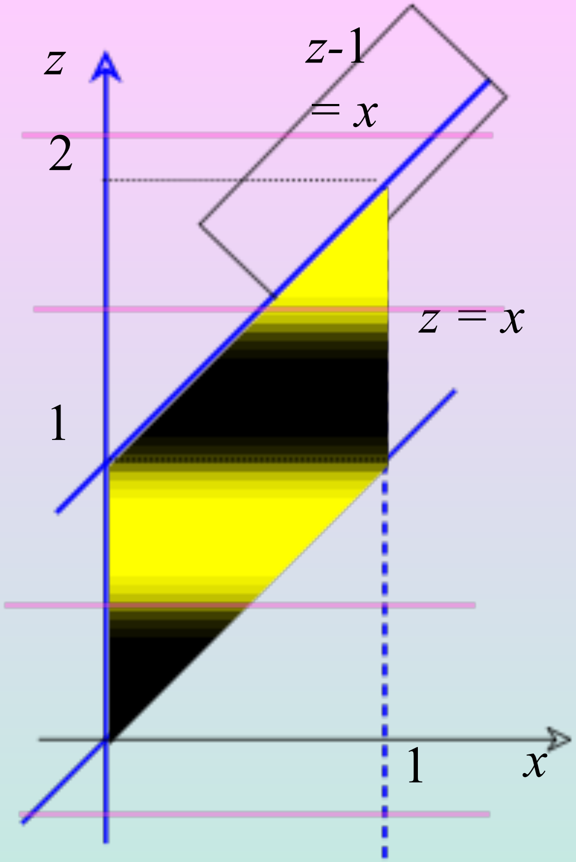
$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$Z=X+Y$，求 $f_Z(z)$

解法一（图形定限法，公式法）

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\boxed{f(x,z-x)}\,dx$$

关键：看x,z满足什么条件时f(x,z-x)>0

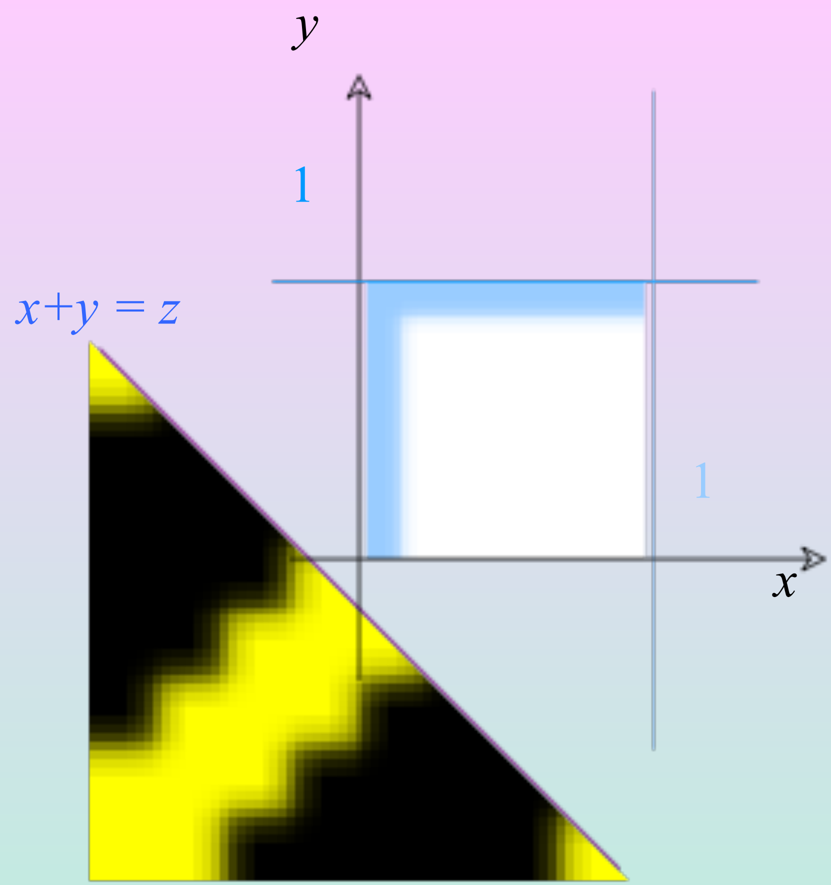


$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx\quad\begin{cases}0, & z<0\text{或}z>2,\\ \int_0^z 1dx, & 0<z<1,\\ \int_{z-1}^1 1dx, & 1<z<2,\end{cases}$$

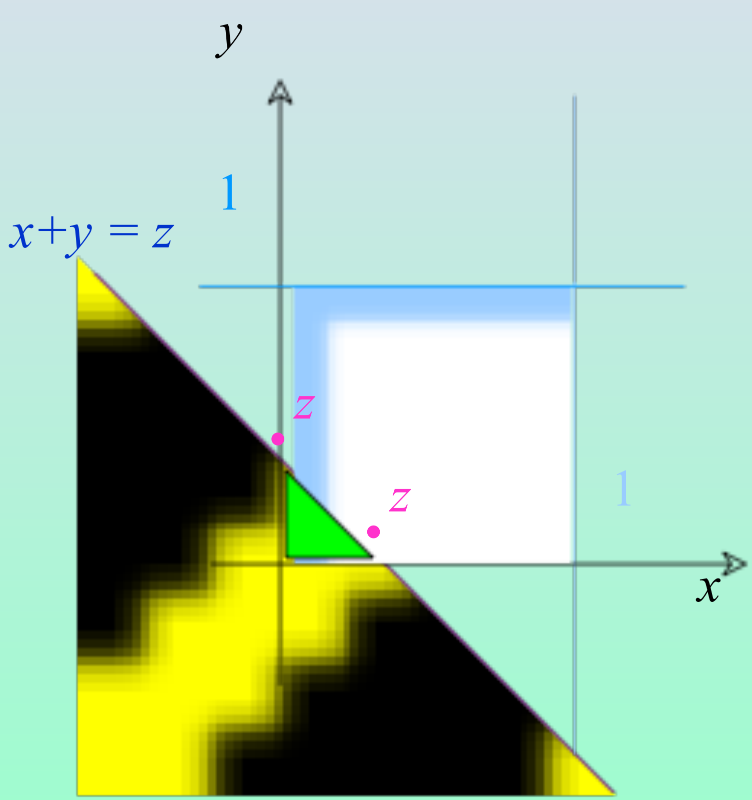
解法二 从分布函数出发

$$F_Z(z) = P(X + Y \le z)$$

$$= \iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,dxdy$$



当$z < 0$时， $F_Z(z) = 0$



当$0 \le z < 1$时，

$$F_Z(z) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} 1\,dy$$

$$= \int_0^z (z-x)\,dx = \frac{z^2}{2}$$

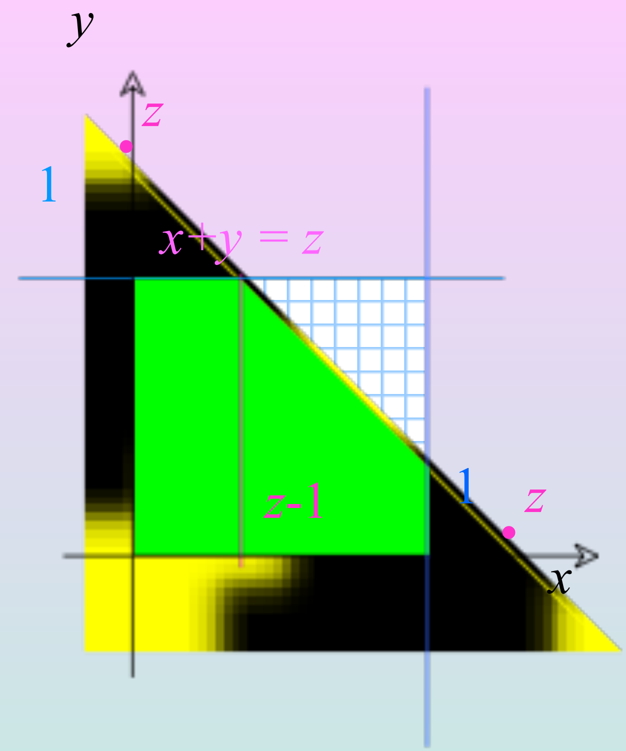
$\Longrightarrow$ $f_Z(z) = z$

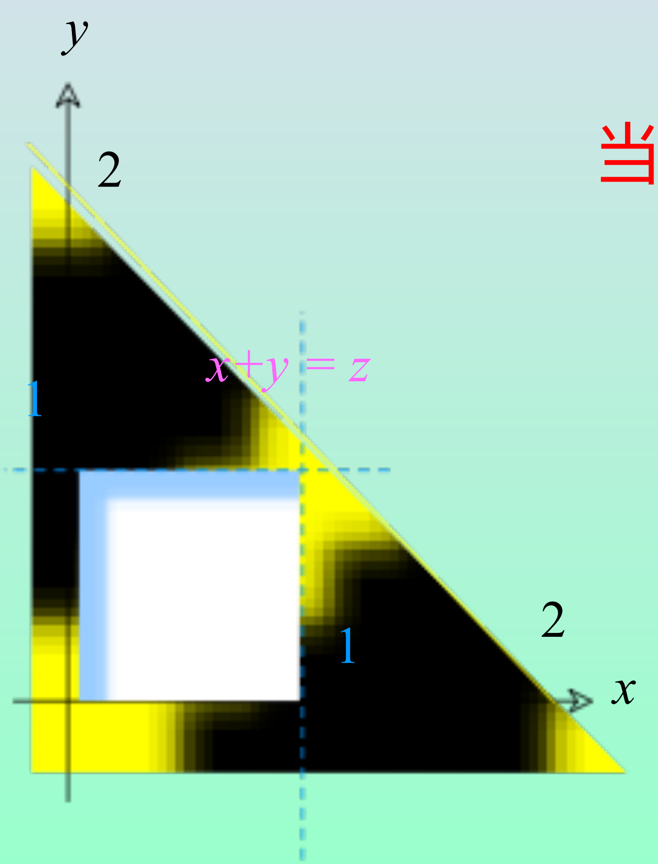
当$1 \le z < 2$时，

$$F_Z(z) = (z-1) + \int_{z-1}^{1} dx \int_0^{z-x} 1 dy$$

$$= z - 1 + \int_{z-1}^{1} (z-x) dx$$

$$= 2z - \frac{z^2}{2} - 1 \quad \Longrightarrow \quad f_Z(z) = 2 - z$$





当$2 \le z$时，$F_Z(z) = 1 \qquad f_Z(z) = 0$

综上，有

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \text{或} z > 2 \\ z, & 0 < z < 1 \\ 2 - z, & 1 < z < 2 \end{cases}$$

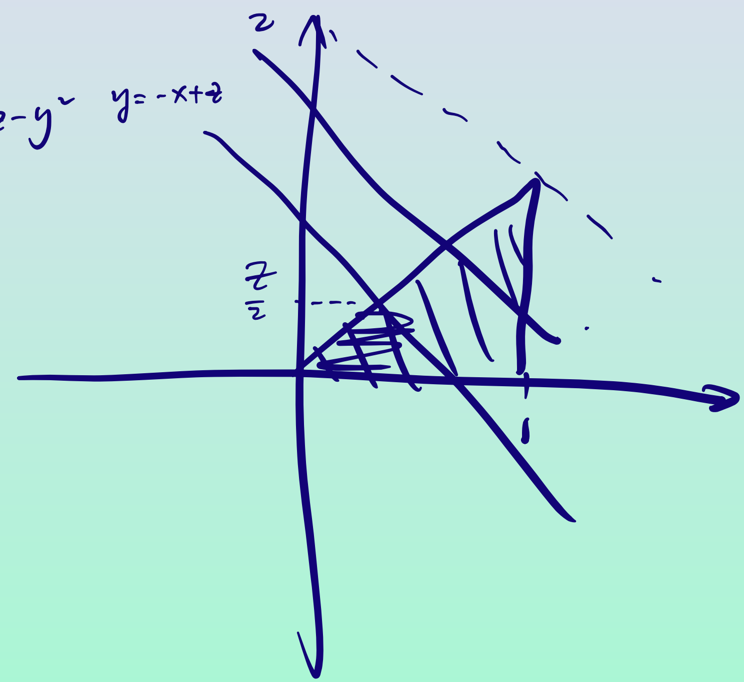
课堂练习 已知 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1, 0<y<x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$-y+z=y.$

$Z=X+Y$,求 $fZ(z)$

$y^2+z^2-2yz-y^2$



$\frac{3}{2}x^2\Big|_y^{-y+z}$

$$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}$$

$z\in(0,2)$

$$=\int_0^{\frac{z}{2}}dy\int_y^{-y+z}3x\,dx$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{z}{2}}(z^2-2yz)\,dy$$

$$=\frac{3}{2}\left(z^2\cdot\frac{z}{2}-z\cdot\frac{z^2}{4}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{z^3}{4}=\frac{3}{8}z^3$$

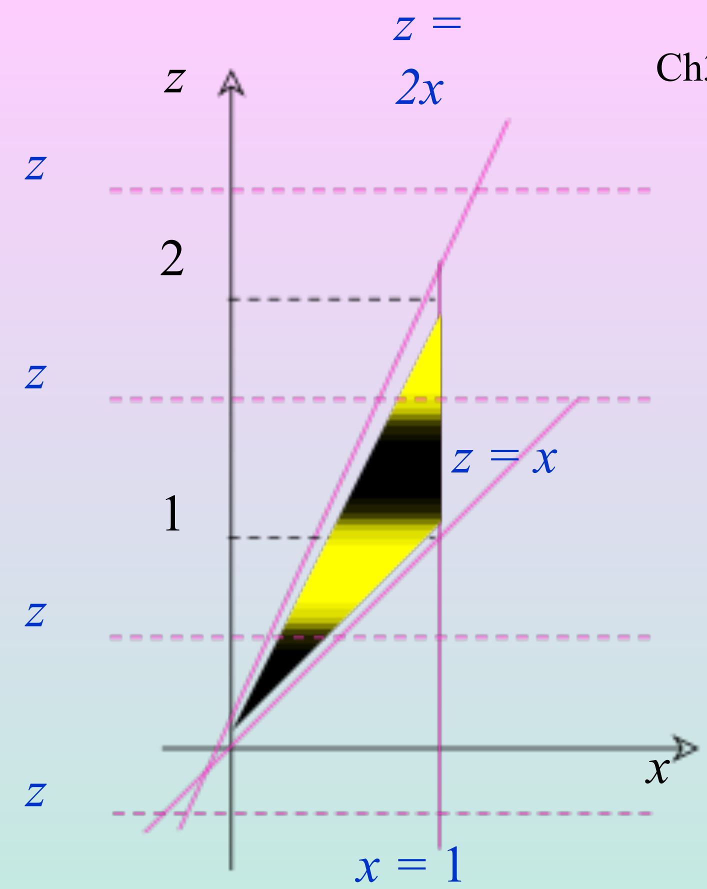
$$f(z)=\begin{cases}\frac{9}{8}z^2 & z\in(0,2)\\ 0 & \text{others}\end{cases}$$

当 $z<0$ 或 $z>2$， $f Z(z)=0$

当 $0<z<1$， $f_Z(z)=\int_{z/2}^{z} 3x\,dx=\frac{9}{8}z^2$

当 $1<z<2$，

$$f_Z(z)=\int_{z/2}^{1} 3x\,dx=\frac{3}{2}\left(1-\frac{z^2}{4}\right)$$



$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{9}{8}z^2, & 0<z<1\\ \frac{3}{2}\left(1-\frac{z^2}{4}\right), & 1<z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

正态随机变量的情形

$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$

$f(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$

- 若 X,Y 相互独立, $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

则 $$X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

若 $X_1,X_2,\boxed{?},X_n$ 相互独立,

$$X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2), i=1,2,\boxed{?},n$$

则 $$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i,\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)$$

正态分布的独立可加性

- 若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$ —般二维.

则 $$X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)$$

$aX+bY+c\sim N$ P106. 3.5.2.(4)

推广：已知 (X,Y) 的联合密度 $f(x,y)$

求 $Z = aX + bY + c$ 的密度函数，

其中 a,b,c 为常数，$a\,,\,b$ □ 0

$$f_Z(z) = \frac{1}{|b|}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x, \frac{z-ax-c}{b}\right)dx \qquad -\infty < z < \infty \quad (a.e.)$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{z-by-c}{a}, y\right)dy \qquad -\infty < z < \infty \quad (a.e.)$$

(2) 商的分布： $Z = X / Y$

略

(3) 平方和的分布： $Z = X\,2+Y\,2$

（有兴趣的同学自学）

设(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)$

则

$$F_Z(z) = P(X^2+Y^2 \le z)$$

$$= \begin{cases} 0, & z<0, \\ \iint_{x^2+y^2\le z} f(x,y)\,dxdy & z \ge 0, \end{cases}$$

圆域

$$= \begin{cases} 0, & z<0, \\ \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{z}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr, & z \ge 0, \end{cases}$$

换元 $x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$.

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\sqrt{z}\cos\theta,\sqrt{z}\sin\theta)\,d\theta, & z\ge 0,\end{cases}$$

例如，$X\sim N(0,1)$, $Y\sim N(0,1)$, X,Y 相互独立，$(X,Y)\sim N(0,1,0,1,0)$

$Z = X2+Y2$, 则

$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z\cos^2\theta}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z\sin^2\theta}{2}}\,d\theta, & z\ge 0,\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}, & z\ge 0,\end{cases}$$

称为自由度为2的χ^2分布

若 $X_1, X_2, \boxed{?}, X_n$ 相互独立，且

$$X_i \sim N(0,1), \quad i = 1,2,\boxed{?}, n$$

则 $Z = X_1^2 + X_2^2 + \boxed{?} + X_n^2$ 所服从的分布称为

自由度为n 的 □2分布

它的概率密度函数为

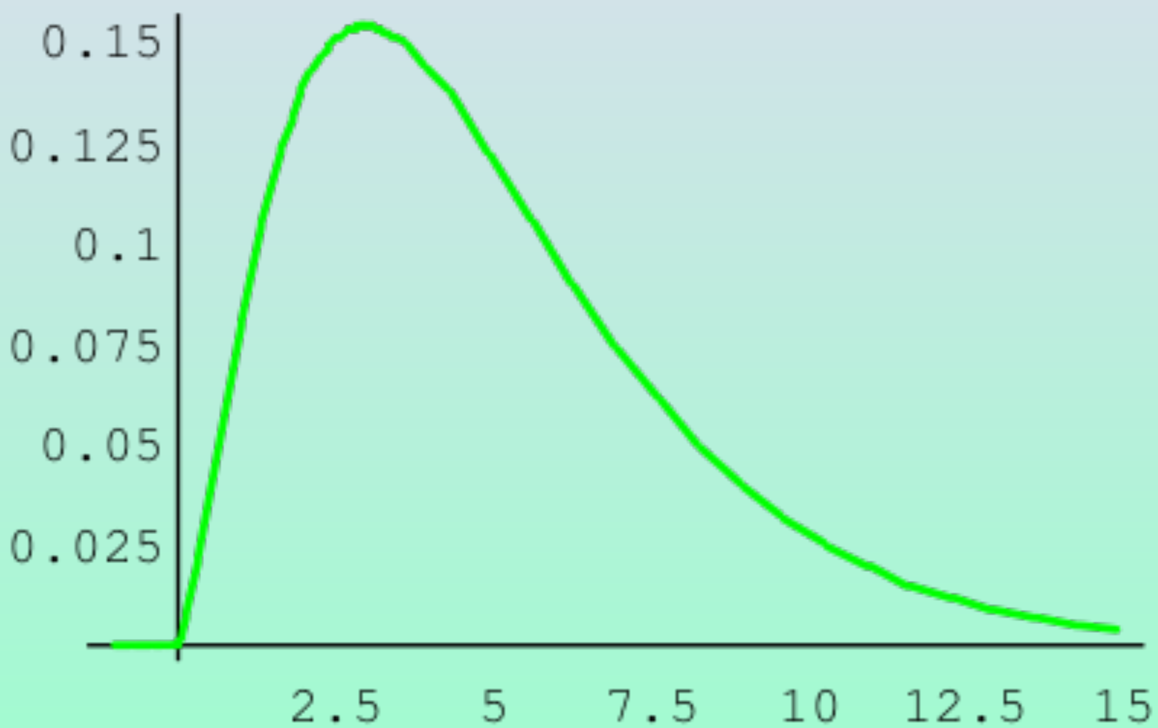
$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} z^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}}, & z \geq 0, \end{cases}$$

其中 $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \qquad x > 0$ — 称为□函数

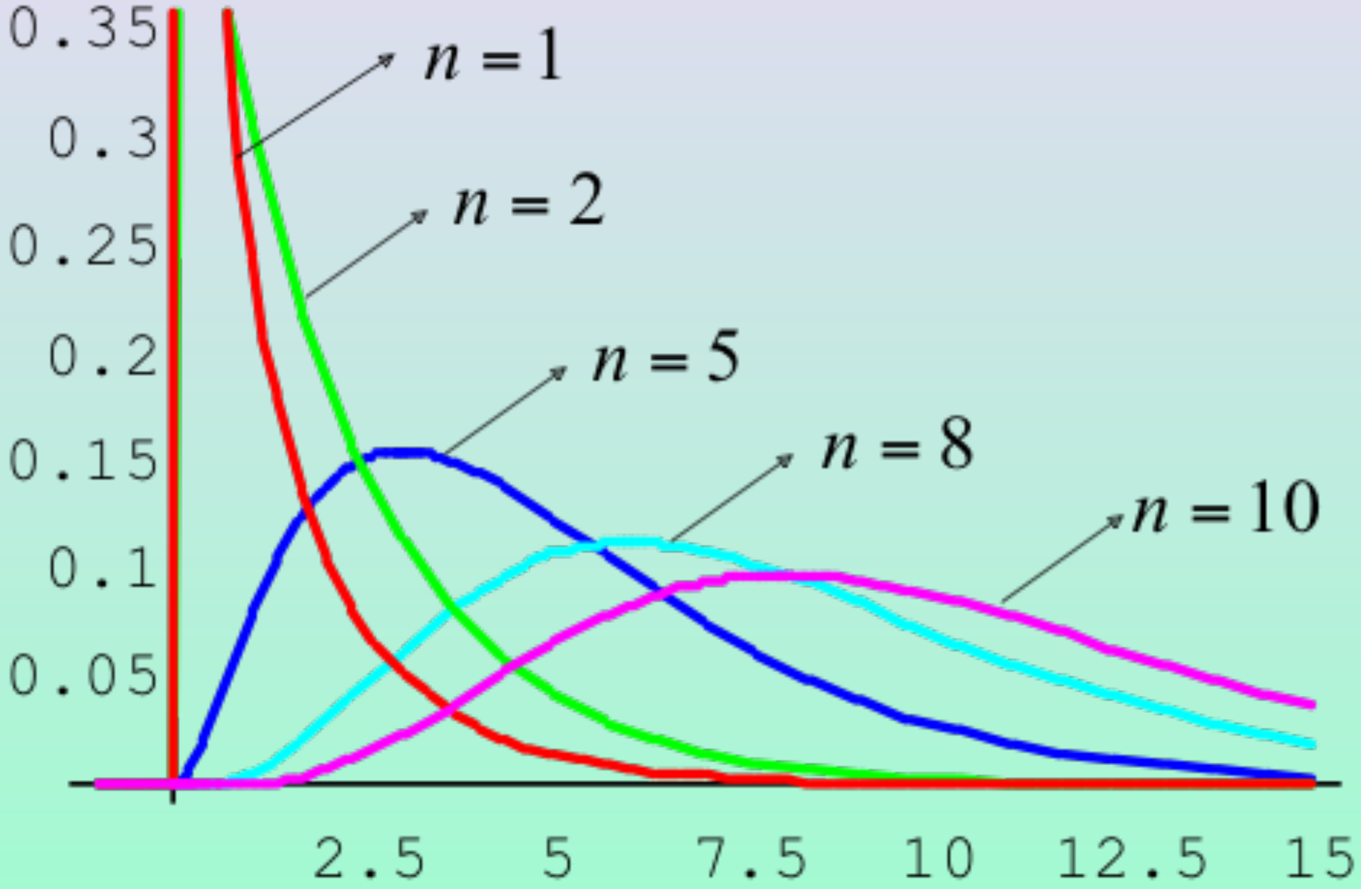
$$\Gamma(1) = 1,\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),\ \Gamma(n+1) = n!$$

自由度为5的□2分布的密度函数图形



自由度分别为1,2,5,8,10的
2分布的密度函数图形



另外，若 X,Y 相互独立

$X\sim N(0,1),\ Y\sim \chi^2(n)$ 则 $$\frac{X}{\sqrt{\dfrac{Y}{n}}}$$ 所服从的分布称为

自由度为n的 t 分布，记为 $t\,(n)$

$X\sim \chi^2(n),\ Y\sim \chi^2(m)$,则 $$\frac{X/n}{Y/m}$$ 所服从的分布称为

第一自由度为n，第二自由度为m的 F 分布，

记为 $F\,(n,m)$

(4) 极值分布：即极大值，极小值的分布

设$X \sim FX(x)$, $Y \sim FY(y)$,且相互独立,

$M=\max\{X,Y\}$,$N=\min\{X,Y\}$,求 M,N 的分布函数.

$$F_M(u)=P(\max\{X,Y\}\le u)$$
$$=P(X\le u, Y\le u)=P(X\le u)P(Y\le u)$$
$$=F_X(u)F_Y(u)$$

$$F_N(v)=P(\min\{X,Y\}\le v)=1-P(\min\{X,Y\}>v)$$
$$=1-P(X>v,Y>v)=1-P(X>v)P(Y>v)$$
$$=1-(1-F_X(v))(1-F_Y(v))$$

推广至相互独立的 n 个随机变量的情形：

设 $X_1, X_2, \boxed{?}, X_n$ 相互独立，且

$$X_i \sim F_i(x_i), \quad i = 1, 2, \boxed{?}, n$$

$$M = \max\{X_1, X_2, \boxed{?}, X_n\} \qquad N = \min\{X_1, X_2, \boxed{?}, X_n\}$$

则

$$F_M(u) = \prod_{i=1}^{n} F_i(u) \qquad F_N(v) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_i(v))$$

特例 若 $X_1, X_2, \boxed{?}, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} F(x)$,

i.i.d.表示
独立同分布

则

$$F_M(u) = [F(u)]^n \qquad F_N(v) = 1 - [1 - F(u)]^n$$

例7 设系统 L 由相互独立的 n 个元件组成，连接方式为

(1) 串联；

(2) 并联；

(3) 冷贮备(起初由一个元件工作，其它 $n-1$个元件做冷贮备，当工作元件失效时，贮备的元件逐个地自动替换)；

(4) L 为 n 个取 k 个的表决系统 (即 n 个元件中有 k 个或 k 个以上的元件正常工作时，系统 L 才正常工作)

如果 n 个元件的寿命分别为 $X_1, X_2, \boxed{?}, X_n$ 且

$$X_i \sim E(\lambda),\quad i = 1,2,\boxed{?},n$$

求在以上 4 种组成方式下，系统 L 的寿命 X的密度函数.

解

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & 其它 \end{cases} \qquad F_{X_i}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

(1) $X = \min\{X_1, X_2, \boxed{?}, X_n\}$

$$F_X(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_{X_i}(x))$$

$$1 - F_{X_i}(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 1, & x \le 0 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} n\lambda e^{-n\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

(2) $X = \max\{X_1, X_2, \boxed{?}, X_n\}$

$$F_X(x) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x)$$

$$= \begin{cases} (1 - e^{-\lambda x})^n, & x > 0, \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

(3)

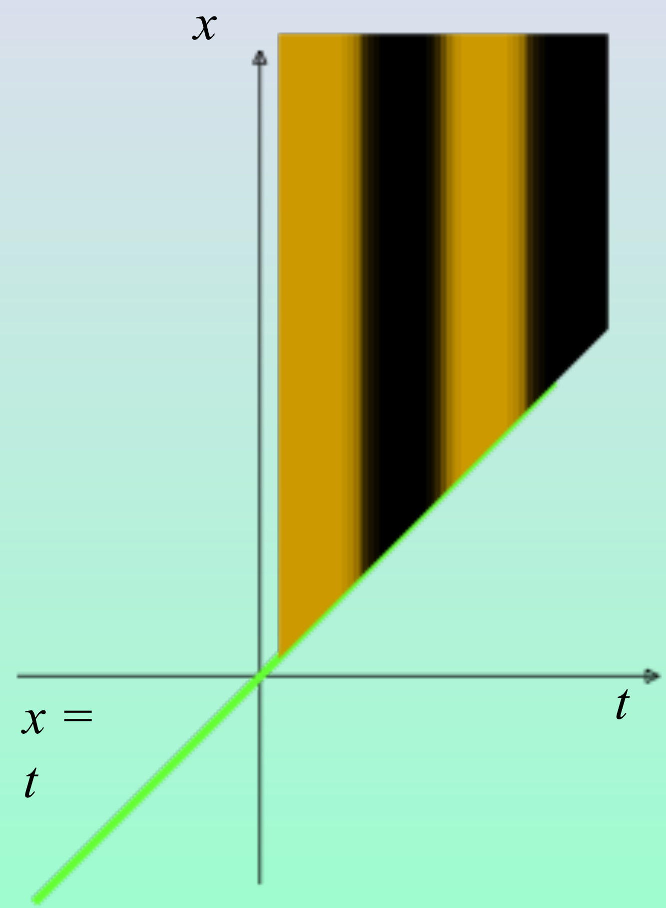
$$X = X_1 + X_2 + \boxed{?} + X_n$$

$n = 2$ 时,

$$f_{X_1+X_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{X_2}(x-t)\,dt$$

$$= \begin{cases} \int_0^x e^{-\lambda t} e^{-\lambda (x-t)}\,dt, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$



可以证明，$X1+X2$ 与 $X3$ 也相互独立，故

$$f_{X_1+X_2+X_3}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X_1+X_2}(t)f_{X_3}(x-t)dt$$

$$=\begin{cases}\int_0^x te^{-\lambda t}e^{-\lambda(x-t)}dt, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{x^2}{2!}e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

归纳地可以证明，

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad (n\ge 2)$$

(4)

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

$$= \begin{cases} 1 - P(X > x), & x \ge 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$P(X > x) = P\left(X_1, X_2, \boxed{?}, X_n \text{中至少有}k\text{个大于}x\right)$$

$$= \sum_{j=k}^{n} C_n^j \left[P(X_1 > x)\right]^j \left[P(X_1 \le x)\right]^{n-j}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \sum_{j=k}^{n} C_n^j \left[e^{-\lambda x}\right]^j \left[1 - e^{-\lambda x}\right]^{n-j}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\left[-\sum_{j=k}^{n} C_n^j \left[e^{-\lambda x})\right]^j \left[1-e^{-\lambda x}\right]^{n-j}\right]$$

$$=\sum_{j=k}^{n-1} C_n^j \lambda j e^{-\lambda j x}\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{n-j} + n\lambda e^{-n\lambda x}$$

$$-\sum_{j=k}^{n-1} C_n^j \lambda (n-j) e^{-\lambda (j+1) x}\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{n-j-1}$$

$$=\sum_{j=k}^{n} C_n^j \lambda j e^{-\lambda j x}\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{n-j}$$

$$-\sum_{j=k}^{n-1} C_n^{j+1} (j+1) \lambda e^{-\lambda (j+1) x}\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{n-j-1}$$

$$= \sum_{j=k}^{n} C_n^j \lambda j e^{-\lambda jx} \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{n-j}$$

$$- \sum_{j=k+1}^{n} C_n^j j\lambda e^{-\lambda jx} \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{n-j}$$

$$= C_n^k k\lambda e^{-k\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-k}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} C_n^k k\lambda e^{-k\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-k}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$