下午9:06 6月12日周日 67%

完成 %E9%AB%98%E7%AD%89%E6%95%B0%E5%AD%A611-2%E6%9C%9F%E6%9C%AB201406%E8%AF%95%E5%%8...

1、单项选择题（每小题3分，共15分）

1．设直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1}$ 与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{2}$ 的夹角为【】 A.

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\arccos\frac{1}{6}$

$(2,1,1)\cdot(1,-1,2)$ $\frac{\cancel{2-1+2}\ 3}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=\cos\theta$

2．若 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的线性无关的解为 y_1,y_2,y_3，则 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的通解为【】 B

A. $c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3$ B. $c_1(y_1-y_2)+c_2(y_2-y_3)$

C. $c_1y_1+c_2y_2-(1-c_1-c_2)y_3$ D. $c_1y_1+c_2y_2+(1-c_1-c_2)y_3$

3．已知 $\frac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 为某二元函数的全微分，则 a 等于【】 D

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

$\frac{a(x+y)^2-2(x+y)(x+ay)}{(x+y)^4}=\frac{-2(x+y)\cdot y}{(x+y)^4}$

$ax+ay-2x-2ay=-2y$

$a=2$

4．设常数 $\lambda>0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\lambda}{n})$【】 A

A．绝对收敛 B．条件收敛

C．发散 D．收敛性与 λ 有关

$\frac{\lambda^2}{n^2}$ $\cos-1$ $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}$

5．微分方程 $y''-y=e^x+1$ 的一个特解应具有形式（式中 a,b 为常数）【】 B

$r^2=1$ $r=\pm1$

A. ae^x+b B. axe^x+b C. ae^x+bx D. axe^x+bx

axe^x+b

2、填空题（每小题3分，共15分）

1．设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$，则其以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于 $\frac{\pi^2}{2}$

$\frac{1+\pi^2-1}{2}$

2．设平面曲线 L 为下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2}$，则曲线积分 $\int_L(x^2+y^2)ds=$ π

3．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$ 的收敛半径为 $\frac{1}{e}$

4．微分方程 $y''+y=2x$ 的通解为 $C_1\cos x+C_2\sin x+2x$

$r^2+1=0$ $r=0\pm i$

5．改变二重积分次序，有 $\int_1^2dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy=$ $\int_0^1dy\int_{2-y}^{\sqrt{1-y^2}+1}f(x,y)dx$

$y=-x+2$ $x=-y+2$

$y^2+x^2-2x+1=1$ $(x+1)^2$

3、计算题（1至5题每小题8分，6小题9分，共49分）

1．计算曲面积分 $\iint_\Sigma zdS$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2\le 2x$ 内的部分。

$I=\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy$ $\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$

$=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$

$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr$

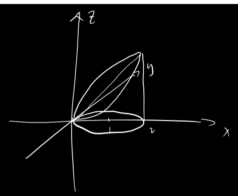
$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}(2\cos\theta)^3d\theta$

$=2\sqrt{2}\cdot\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta$

$=\frac{16\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta$

$=\frac{16\sqrt{2}}{3}\left(\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{16\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{32\sqrt{2}}{9}$



$r^2=2r\cos\theta$

2. 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6, x+y+z=0$ 在点 $(1,-2,1)$ 的切线及法平面。

切向量 $\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,-2,1)} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-6, 0, 6)$ $\vec{a} = (-1, 0, 1)$

切线 l: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{1}$ 法平面: $-(x-1) + y-1 = -x+y = 0$.

$z-1$

3.设 $u = yf(\frac{x}{y}) + xg(\frac{y}{x})$，其中函数 f, g 具有二阶连续的导数.求 $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

$\frac{\partial u}{\partial x} = yf' \cdot \frac{1}{y} + g + xg' \cdot (-\frac{y}{x^2}) = f' + g - \frac{y}{x}g'$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''\frac{1}{y} + g' \cdot (-\frac{y}{x^2}) - [-\frac{y}{x^2}g' + \frac{y}{x}g'' \cdot (-\frac{y}{x^2})]$

$= \frac{1}{y}f'' + \frac{y^2}{x^3}g''$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f''(-\frac{x}{y^2}) + g'\frac{1}{x} - (\frac{1}{x}g' + \frac{y}{x} \cdot g'' \cdot \frac{1}{x})$

$= -\frac{x}{y^2}f'' + \frac{1}{x}g - \frac{1}{x}g' - \frac{y}{x^2}g''$

原式 $= \cancel{\frac{x}{y}f''} + \cancel{\frac{y^2}{x^2}g''} - \cancel{\frac{x}{y}f''} + \frac{y}{x}g - \frac{y}{x}g' - \cancel{\frac{y^2}{x^2}g''} = \frac{y}{x}(g - g')$

4.求微分方程 $yy'' = 2y'(y'-1)$ 满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=2$ 的特解。

令 $u = y'$ $y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy} = u \cdot u'$

$u\frac{du}{dy}y = 2u(u-1)$ $\because y'(0)=2 \therefore u \neq 0$

$\therefore \int \frac{du}{u-1} = \int \frac{2}{y}dy + \ln c$

$\ln(u-1) = 2\ln y + \ln c$

$\Rightarrow y'-1 = cy^2$ $x=0$时 $2-1 = C \Rightarrow C=1$

$\frac{dy}{dx} = cy^2+1$

$\frac{dy}{y^2+1} = dx$ $\arctan y = x + C_2$

$C_2 = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

$\therefore \arctan y = x + \frac{\pi}{4}$

5. 计算曲面积分 $I = \iint_\Sigma x(8y+1)dydz + 2(1-y^2)dzdx - 4yzdxdy$，其中 Σ 由曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases} (1 \le y \le 3)$ 绕 y 轴旋转一周所成的曲面，它的法向量与 y 轴正向的夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$ 。

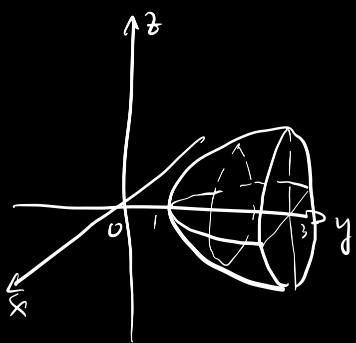
Σ: $\sqrt{x^2+z^2} = \sqrt{y-1} \Rightarrow x^2+z^2 = y-1$ $(y \in [1,3])$ 取左侧

$\iiint_\Omega (8y+1-4y-4y)dv - \iint_{\Sigma'} 2(1-9)\,dzdx$

$= \int_0^2 \pi y\, dy + 16\iint_{\Sigma'} dzdx$

$= \pi \cdot \frac{4}{2} + 16 \times 2\pi$

$= 34\pi$



6.求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$ 的收敛域及和函数，由此证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2.$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1 \quad R=1$

$x=1 \Rightarrow \sum_1 \frac{1}{n}$ 发

$x=-1 \Rightarrow \sum_1 \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收

$[-1,1)$

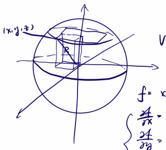
$\sum_1^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}=\frac{1}{x}\sum_1^{\infty}\frac{x^n}{n}=\frac{1}{x}\int\sum_1^{\infty}x^{n-1}dx$

$=\frac{1}{x}\int\frac{1}{1-x}dx$

$=\frac{-1}{x}\ln(1-x)\Big]_{x=-1}=\ln 2$

4、 证明题（每小题7分，共21分）

1\. 求半径为 R 的球面的内接长方体的最大体积。



$V=8V'$

$V'=xyz$

x,y,z 满足 $x^2+y^2+z^2=R^2$

$f=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-R^2)$

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=yz+2x\lambda=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=xz+2y\lambda=0\\ \frac{\partial f}{\partial z}=xy+2z\lambda=0\\ x^2+y^2+z^2=R^2\end{cases} \Rightarrow x=y=z=\frac{R}{\sqrt{3}}$$

2.计算第二型曲线积分 $\int_L(12xy+e^y)dx-(\cos y-xe^y)dy$ ，其中 L 是从 $A(-1,1)$ 沿 $y=x^2$ 到点 $O(0,0)$ ，再沿 x 轴到点 $B(2,0)$ 的一光滑弧段。

3\. 设函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续，$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=0$ ，证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微。

$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}$