一、单项选择题（每小题3分，共18分）

1.已知 $\lim_{x\to0}\frac{a+\cos bx}{x^2}=-2$，其中 a,b 为常数，则（ ） D

（A） $a=1,b=2$.（B） $a=1,b=-2$.（C） $a=-1,b=2$.（D） $a=-1,b=\pm2$.

2.设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则下列命题错误的是（ ） D

（A）若 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$ （B）若 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$

（C）若 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在 （D）若 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在

3.若极限 $\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$ 存在，则两个极限 $\lim_{x\to x_0}f(x),\lim_{x\to x_0}g(x)$ （ ） B

（A）均存在. （B）至少有一个存在.

（C）可能均不存在. （D）不可能一个存在且另一个不存在.

4.设 $f(0)=0$,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件为( ) B

(A) $\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(1-\cosh)$ 存在. (B) $\lim_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在.

(C) $\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(\sqrt{1-h^2}-1)$ 存在. (D) $\lim_{h\to0}\frac{1}{h}(f(2h)-f(h))$ 存在.

5.当 $x\to0$ 时 $f(x)=(\sqrt{1+x^2}-1)\ln(1-\sin^4x)$ 是 x 的（ ）阶无穷小. ~~B~~ C

（A） 4. （B） 5. （C） 6. （D） 7.

6.若 $f(x)$ 可导，$y=f^2\left[f\left(x^2\right)\right]$，则 $dy=$ （ ） A.

（A） $4xf(f(x^2))f'(f(x^2))f'(x^2)dx$ （B） $4xf(f(x^2))f'(x^2)dx$

（C） $2xf(f(x^2))f'(f(x^2))dx$ （D） $2f(f(x^2))f'(f(x^2))f'(x^2)dx$

二、填空题（每小题3分，共18分）

1.极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^4+1^3}}+\frac{2}{\sqrt{n^4+3^3}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^4+(2n-1)^3}}\right)=$ $\frac{1}{2}$.

2.已知极限 $\lim_{x\to0}\frac{(\sin2x)^\alpha}{x^3}$ 存在，则 α 的取值范围是 $[3,+\infty)$.

3.设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2+y^2+1=e^{y+x}$ 所确定，则 $y'(0)=$ -1.

4.设 $x_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$，则极限 $\lim_{n\to\infty}x_n^n=$ $\frac{1}{e}$.

5.设 $y=(1+x^2)^{\sin x}$，则 $y'=$ $e^{\sin x(1+x^2)}$. $[\cos(1+x^2)+2x\sin x]$

6.设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $\forall x,y$ 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，则函数 $f(x)$ 的奇偶性为 奇.

三、计算题（每小题7分，共28分）

1. 求极限 $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$

由洛必达法则,原式 $=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1-x^2}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{-2x}{4x\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}$

$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}=-\frac{1}{4}$

2. 求极限 $\lim_{x\to0}\left(\frac{\pi+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\arctan\frac{1}{x}\right)$.

$x\to0^+$时, $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\frac{\pi}{e^{\frac{4}{x}}}+(e^{\frac{1}{x}})^{-3}}{\frac{1}{e^{\frac{4}{x}}}+1}+\arctan\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$

$x\to0^-$时 $\lim_{x\to0^-}\left(\frac{\pi+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\arctan\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0^-}(\pi+\arctan\frac{1}{x})=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ 原式 $= \frac{\pi}{2}$

3.设 $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t + t\cos t}{\cos t - t\sin t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{\frac{(\cos t + \cos t - t\sin t)(\cos t - t\sin t) - (-\sin t - \sin t - t\cos t)(\sin t + t\cos t)}{(\cos t - t\sin t)^2}}{\cos t - t\sin t}$$

$$= \frac{(2\cos t - t\sin t)(\cos t - t\sin t) + (2\sin t + t\cos t)(\sin t + t\cos t)}{(\cos t - t\sin t)^3}$$

$$= \frac{t^2+2}{(\cos t - t\sin t)^3}$$

4. 求 $f(x) = \frac{x^3 - x}{\sin \pi x}$ 的间断点，并指出其类型.

$x = k \ (k \in Z)$ 为其间断点.

$k \neq 0$ 且 $k \neq \pm 1$ 时，$\lim\limits_{x \to k} f(x) = \lim\limits_{x \to k} \frac{x^3 - x}{\sin(\pi x)} = \infty$

$k = 0$ 或 $k = \pm 1$ 时 $\lim\limits_{x \to k} f(x) = \lim\limits_{x \to k} \frac{x^3 - x}{\sin \pi x} = \lim\limits_{x \to k} \frac{x^3 - x}{\pi x} = \frac{k^2 - 1}{\pi}$

$\therefore x = 0$、$x = \pm 1$ 为其可去间断点.

$x = k \ (k \in Z$ 且 $k \neq 0, \pm 1)$ 为其无穷间断点.

五、证明题（每小题7分，共14分）

1.若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x_i\in(a,b), t_i>0, i=1,2,\cdots,n$，证明：$\exists\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=\dfrac{t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n)}{t_1+t_2+\cdots+t_n}$.

$f(x)\in C[a,b] \Rightarrow \exists\, m, M, \forall x\in[a,b]\ m\le f(x)\le M$

$t_im\le t_if(x_i)\le t_iM\ (i=1,2,\cdots n)$

$\therefore (t_1+t_2+\cdots+t_n)m\le t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n)\le(t_1+t_2+\cdots+t_n)M$

$m\le \dfrac{t_1f(x_1)+\cdots+t_nf(x_n)}{t_1+\cdots+t_n}\le M$

由介值定理：$\exists\,\xi\in[a,b]$ 有 $f(\xi)=\dfrac{t_1f(x_1)+\cdots+t_nf(x_n)}{t_1+\cdots+t_n}$

2.设 $0<x_1<\sqrt{3}, x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}, (n\ge1).$ 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

$x_2=\dfrac{3(1+x_1)}{3+x_1}=1+\dfrac{2}{\frac{3}{x_1}+1}\in(0,\sqrt{3})$, $x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}=1+\dfrac{2}{\frac{3}{x_n}+1}\in(0,\sqrt{3})$

由数学归纳：$\forall n,\ x_n\in(0,\sqrt{3})$

$x_{n+1}-x_n=\dfrac{3-x_n^2}{3+x_n}>0$. 故 $\{x_n\}$ 单增 $\because x_n<\sqrt{3}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设为 A，由保号性知 $A>0$.

$A=\dfrac{3(1+A)}{3+A}\Rightarrow A=\sqrt{3}$

六、应用题（共6分）

证明：双曲线 $xy=a^2$ 上任意一点的切线与两坐标轴构成的三角形的面积为定值。

$x=x_0$ 时 $y=\dfrac{a^2}{x_0}$

$y+xy'=0$, $y'=\dfrac{-y_0}{x_0}$.

$\therefore$ 在 (x_0,y_0) 处切线为：$y=-\dfrac{y_0}{x_0}(x-x_0)+y_0=-\dfrac{y_0}{x_0}x+2y_0$.

$y=0$ 时 $x=2x_0$，$x=0$ 时 $y=2y_0$.

$\therefore S_\triangle=\frac{1}{2}\cdot2x_0\cdot2y_0=2x_0y_0=2a^2$