Tarea de Optimización

Frank Piz

November 2025

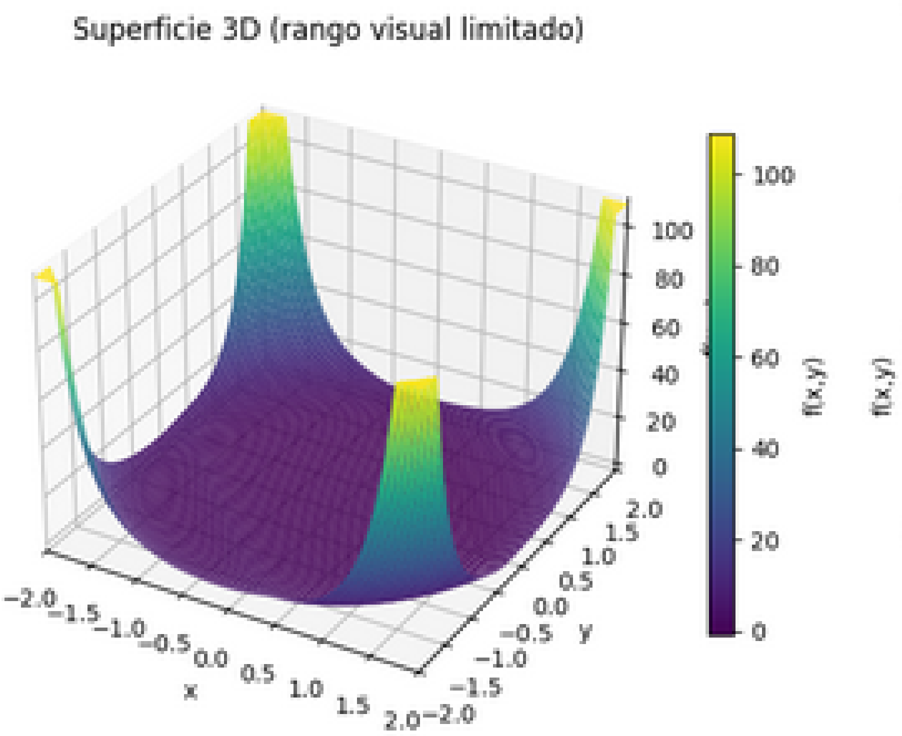

Figure 1: Gráfico de la superficie de la función objetivo $f(x,y)$.

1 Análisis Teórico del Modelo

1.1 Función Objetivo

$$f(x,y) = 0.1\left(e^{(x^2+y^2)} - \tan(1.5\sin(x+y))\right)$$

Definimos para simplificar:

$$r(x,y) := x^2 + y^2, \qquad u(x,y) := 1.5\sin(x+y).$$

1.2 Tipo de Variables y Dominio

Las variables x y y son **continuas reales**, $x, y \in \mathbb{R}$.

El argumento de la tangente $u(x,y)$ está acotado en $[-1.5, 1.5]$. Como $|1.5| < \pi/2 \approx 1.5708$, la tangente nunca se indetermina. Por tanto, la función f está bien definida y es **suave e infinitamente diferenciable** (C^∞) en todo $\mathbb{R}^2$.

1.3 Existencia de Solución y de Óptimo Global

El término $e^{x^2+y^2}$ domina para valores grandes. Dado que f es continua y $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = +\infty$ (coercitividad), se garantiza la existencia de **al menos un mínimo global**. No existen máximos globales.

1.4 Gradiente (∇f) y Puntos Críticos

Gradiente (Condición Necesaria de Primer Orden)

$$\nabla f(x,y) = 0.1 \begin{pmatrix} 2x\, e^r - 1.5\cos(x+y)\, \sec^2(u) \\ 2y\, e^r - 1.5\cos(x+y)\, \sec^2(u) \end{pmatrix}.$$

Deducción de Puntos Críticos Para que (x^*, y^*) sea un punto crítico, $\nabla f(x^*, y^*) = \mathbf{0}$.

Restando las dos ecuaciones se obtiene $x^* = y^*$ (pues $e^r > 0$). Así, la condición unidimensional para los puntos críticos es:

$$2x\, e^{2x^2} = 1.5\cos(2x)\, \sec^2(1.5\sin(2x)).$$

1.5 Matriz Hessiana (H_f) y Test de Segundo Orden

Hessiana La matriz Hessiana H_f es simétrica:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.1\Big((2+4x^2)e^r - [\,4.5\cos^2(x+y)\sec^2(u)\tan(u) - 1.5\sin(x+y)\sec^2(u)\,]\Big),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.1\Big((2+4y^2)e^r - [\,4.5\cos^2(x+y)\sec^2(u)\tan(u) - 1.5\sin(x+y)\sec^2(u)\,]\Big),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.1\Big(4xy\, e^r - [\,4.5\cos^2(x+y)\sec^2(u)\tan(u) - 1.5\sin(x+y)\sec^2(u)\,]\Big).$$

Condiciones Suficientes de Segundo Orden

- Si H_f es **definida positiva**: mínimo local estricto.
- Si H_f es **indefinida**: punto de silla.

1.6 Conclusiones sobre Óptimos y Región de Prueba

Comportamiento General La función es no convexa. Es coercitiva, por lo que existe mínimo global. Los puntos críticos están en la recta $x = y$.

Análisis en la Región $[-100, 100]^2$

- Los mínimos están cerca del origen.
- La función crece rápidamente hacia $+\infty$ fuera de $|x|, |y| < 2$.

2 Descripción de los Algoritmos Utilizados

$$f(x,y) = 0.1\big(e^{x^2+y^2} - \tan(1.5\sin(x+y))\big)$$

2.0.1 Método de Descenso del Gradiente

Descripción general

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k) - \alpha_k\, \nabla f(x_k, y_k).$$

Criterio de parada

- $\|\nabla f(x_k, y_k)\| < \varepsilon$,
- máximo de iteraciones,
- cambio pequeño en f.

Uso en la función dada

$$\nabla f(x, y) = 0.1 \begin{pmatrix} 2xe^{x^2+y^2} - 1.5\cos(x+y)\sec^2(1.5\sin(x+y)) \\ 2ye^{x^2+y^2} - 1.5\cos(x+y)\sec^2(1.5\sin(x+y)) \end{pmatrix}.$$

- Elegir (x_0, y_0) en $[-2, 2]$.
- Usar α_k fijo o mediante line search.

Ventajas y desventajas

- Ventajas: simple, barato computacionalmente.
- Desventajas: lento, sensible al tamaño de paso.

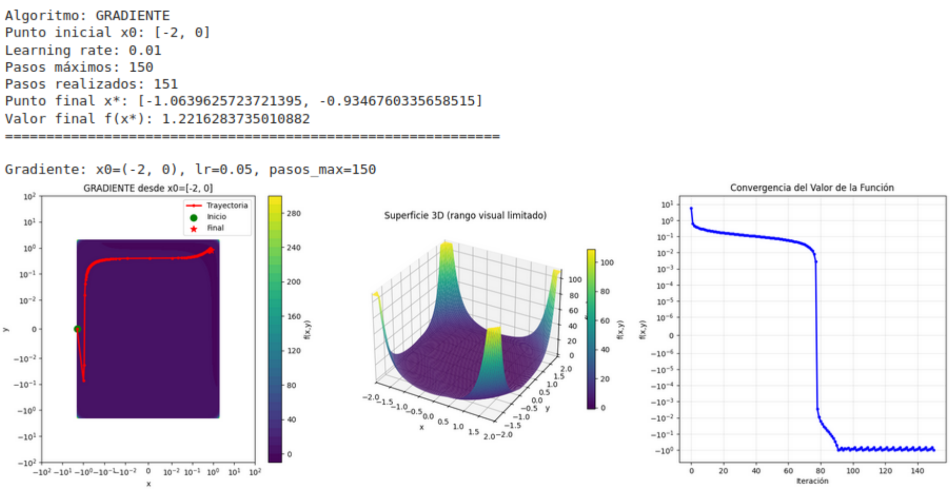

Figure 2: Resultados del método de Descenso del Gradiente.

2.0.2 Método Quasi-Newton (BFGS)

Descripción general

$$p_k = -B_k^{-1}\nabla f(x_k, y_k),$$

$$B_{k+1} = B_k + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k} - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k}.$$

Ventajas y desventajas

- Ventajas: rápida convergencia.
- Desventajas: más costoso por iteración.

2.0.3 Comparación esperada entre ambos métodos

- Descenso del Gradiente: más lento, más simple.
- BFGS: converge más rápido.

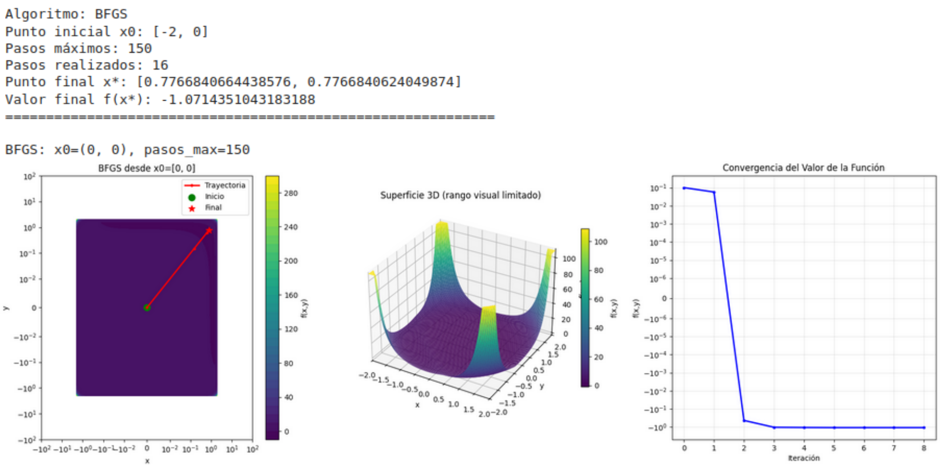

Figure 3: Resultados del método Quasi-Newton (BFGS).

3 Conclusiones y Observaciones

3.1 Análisis Comparativo

3.1.1 Desempeño del Descenso del Gradiente

- Menos propenso a fallar.
- Convergencia lenta.
- Sensible al learning rate.

3.1.2 Desempeño del Método BFGS

- Convergencia rápida.
- Sensible al punto inicial.
- Mayor costo por iteración.

3.1.3 Desafíos Numéricos Observados

1. Overflow del término $e^{x^2+y^2}$.
2. Singularidades de la tangente.
3. Multimodalidad.

3.2 Recomendaciones Prácticas

- Usar varios puntos iniciales.
- Monitorear NaN e infinitos.
- Usar GD para exploración y BFGS para refinamiento.