Análise Matemática 1

Apontamentos

UNIDADES TEMÁTICA:

4. **Cálculo diferencial**

Nobosse Jemusse

Conteúdo --Pag.

CÁLCULO DIFERENCIAL

OBJECTIVOS. No fim desta unidade temática, espera-se que o estudante seja capaz de:

- Interpretar o conceito de derivada como limite do coeficiente angular das secantes à curva do gráfico duma função;
- Interpretar física e geometricamente o conceito de derivada;
- Determinar, aplicando a definição, a derivada de uma função num ponto dado**;**
- Derivar as funções explícitas e implícitas;
- Calcular limites usando regra de l" hospital;
- Saber interpretar os teoremas relativos à derivada de uma soma, de um produto/quociente, e à potência de uma função;
- Construir gráficos de funções.

==

4.1 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

Breve historial

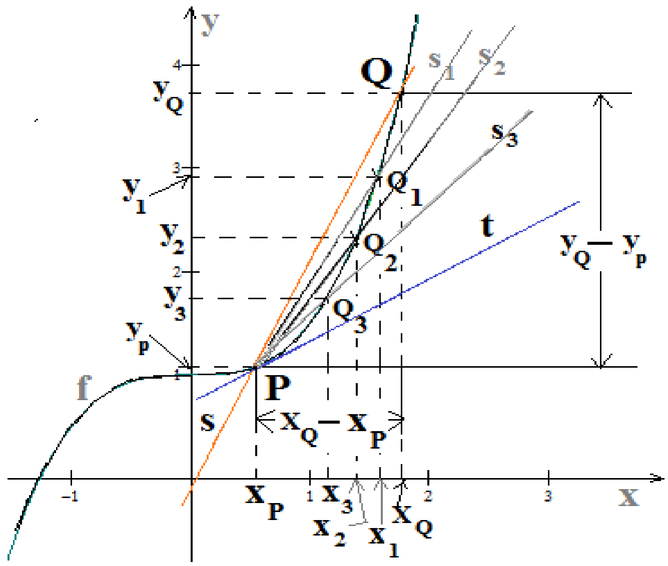
Pierre de Fermat (17/08/1601 – 12/01/1665**), Magistrado de profissão,** e **Sir Isaac Newton (**04/01/1643 – 31/03/1727**), físico e matemático,** com objectivos de resolverem dois problemas diferentes, chegaram a um dos mais importantes conceitos de Matemática – **O CONCEITO DE DERIVADA.**

Fermat, chegou ao conceito de derivada quando tentava resolver um problema relacionado com tangentes às curvas.

Newton, chegou ao conceito de derivada quando tentava resolver um problema relacionado com a determinação da velocidade instantânea de um automóvel.

Fermat, pretendia determinar o declive de uma recta tangente à uma curva $\boldsymbol{y = f(x)}$, num ponto qualquer $\boldsymbol{P}$ pertencente a curva. Assim sendo, Fermat considerou um ponto $\boldsymbol{P}$ e uma recta secante $\overline{\mathbf{PQ}}$**,** da curva $\boldsymbol{y = f(x)}$.

Fermat, observou que mantendo o ponto **P** fixo**, e** movendo o ponto **Q** sobre a curva, em direcção ao ponto **P**, as inclinações, ou os declives das rectas secantes $\overline{\mathbf{PQ_1}}$, $\overline{\mathbf{PQ_2}}$, $\overline{\mathbf{PQ_3}}, \ldots,$ $\overline{\mathbf{PQ_n}}$**,** nas proximidades do ponto $\boldsymbol{P}$, tendem a igualar-se à inclinação da recta tangente no ponto $\boldsymbol{P}$. Desta forma, Fermat concluiu que, o declive da recta tangente à curva no ponto $\boldsymbol{P}$**,** podia ser calculado como limite do declive da recta secante $\overline{\mathbf{PQ}}$**,** quando o ponto **Q,** percorrendo a curva, se aproxima do ponto **P.**



(1) O declive da recta Secante $\overline{\mathbf{PQ}}$: $a = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$

(2) O declive da recta tangente à curva no ponto **P:** $a = \lim\limits_{x_Q \to x_P} \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \lim\limits_{x_Q \to x_P} \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$

(se esse limite existir)

Fazendo $x_P = x_0$, $y_P = y_0$, e $x_Q = x, y_Q = y$, teremos: $a = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0}$

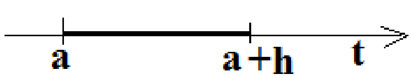
Uma vez que o declive da **recta tangente** à uma curva $\boldsymbol{y = f(x)}$, no ponto $P(x_0; y_0)$, é dada por: $\boldsymbol{a} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0}$, se o limite existir, e sendo $\boldsymbol{y_0 = f(x_0)}$, então tem-se $\boldsymbol{a = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$.

Observações:

- Chama-se **secante** à recta **"s"** que intersecta a curva em apenas dois pontos.
- Chama-se **tangente** à recta **"t"** que intersecta a curva em apenas um ponto.
- Chama-se **coeficiente angular**, ou **declive** de uma **dada recta**, à razão entre a variação da função Δ_y (leia-se **"delta y"**) e a variação da variável independente Δ_x (leia-se **"delta x"**). Ou ainda, à tangente do ângulo que a recta forma com o eixo das abcissas.

Newton pretendia determinar a velocidade instantânea, ou seja a velocidade dada pelo velocímetro de um automóvel em movimento, conhecendo-se apenas a relação entre o tempo e o espaço.

Considerou o instante $\boldsymbol{t = a}$ (Tempo inicial) $\boldsymbol{t = a + h}$ (Tempo final)



Calculou-se a velocidade média nesse intervalo de tempo $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{a + h}]$:

$$\boldsymbol{V_m} = \frac{\Delta_s}{\Delta_t} = \frac{\boldsymbol{S(a+h) - S(a)}}{\boldsymbol{a + h - a}} = \frac{\mathbf{S(a+h) - S(a)}}{\mathbf{h}}$$

Newton concluiu que, podia determinar a velocidade instantânea no instante $\boldsymbol{t = a}$**,** através do limite, se existir**,** da velocidade média no intervalo $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{a + h}]$**,** quando $\boldsymbol{h \to 0}$**:** $\boldsymbol{V_{inst}} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\mathbf{S(a+h) - S(a)}}{h} \Leftrightarrow \boldsymbol{V_{inst}} = \lim\limits_{\Delta_t \to 0} \frac{\Delta_s}{\Delta_t}$

Nas duas situações apresentadas, aparece o cálculo de um limite:

(1) Segundo Fermat, o declive da recta tangente a uma curva, é um limite.

(2) Segundo Newton, a velocidade instantânea de um automóvel, é um limite.

Portanto, **a derivada é um limite.**

4.2 CONCEITO DE DERIVADA

Seja $\boldsymbol{y = f(x)}$ uma função definida em $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$ e seja $\boldsymbol{x_o} \in]\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}[$**.** Chama-se derivada da função $\boldsymbol{f}$ no ponto de abcissa $\boldsymbol{x_o}$ ao limite quando existe**,** da razão $\frac{\mathbf{f}(x_o+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(x_o)}{\mathbf{h}}$ quando $\boldsymbol{h}$ tende para zero ($\boldsymbol{h} \to \mathbf{0}$).

Notação da derivada no ponto $\boldsymbol{x = x_0}$

$\boldsymbol{f}`(\boldsymbol{x_0})$**;** $\frac{df}{dx}|_{x=x_0}$**,** $\boldsymbol{y}`(\boldsymbol{x_0})$**;**

$\boldsymbol{f}`(\boldsymbol{x_0}) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\mathbf{f}(x_o+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(x_o)}{\mathbf{h}}$,

Onde: h é acréscimo do argumento, ou da variável independente no intervalo $[\boldsymbol{x_o}; \boldsymbol{x_o} + \mathbf{h}]$**;**

$\mathbf{f}(\boldsymbol{x_o} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\boldsymbol{x_o})$ é acréscimo da função, neste mesmo intervalo$[\boldsymbol{x_o}; \boldsymbol{x_o} + \mathbf{h}]$**;**

$\frac{\mathbf{f}(x_o+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(x_o)}{\mathbf{h}}$ Razão incremental, ou taxa de variação média no intervalo$[\boldsymbol{x_o}; \boldsymbol{x_o} + \mathbf{h}]$**.**

Escrevendo $\boldsymbol{x = x_o} + \mathbf{h} \Leftrightarrow \mathbf{h} = \mathbf{x} - \boldsymbol{x_o}$**, se** $\boldsymbol{h} \to \mathbf{0}$**, então** $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0}$**,** logo tem-se**:**

$$\boldsymbol{f}`(\boldsymbol{x_0}) = \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{f}(\boldsymbol{x_o} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\boldsymbol{x_o})}{\mathbf{h}} \Leftrightarrow \boldsymbol{f}`(\boldsymbol{x_0}) = \lim_{x\to x_0}\frac{\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{f}(\boldsymbol{x_o})}{\mathbf{x} - \boldsymbol{x_0}}$$

Interpretação geométrica do conceito de derivada

Geometricamente a derivada de uma função no ponto, $\mathbf{x} = \boldsymbol{x_o}$ é o declive da recta tangente à curva do gráfico da função nesse ponto.

4.3 DIFERENCIABILIDADE DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO

Uma dada função $\boldsymbol{y = f(x)}$**,** diz-se diferenciável em um ponto $\mathbf{x} = \boldsymbol{x_o}$**,** se a derivada da função $\boldsymbol{f}`(\boldsymbol{x_0})$ existe e é finita, nesse ponto.

Equação da recta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto x $= x_o$

$y - f(x_0) = f`(x_0)(x - x_0)$

OBSERVAÇÕES:

a) Se existir $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_0}$, diz-se que se que a função $y = f(x)$ tem derivada no ponto de abcissa $x = x_0$.

b) A derivada de uma função num ponto é um número abstracto.

c) A derivada de uma função num ponto pode ser finita ou infinita.

- Se for finita, a função diz-se **diferenciável** nesse ponto.
- Se existir derivada num ponto, mesmo que seja infinita, a função diz-se **derivável.**

4.4 CONTINUIDADE E DERIVABILIDADE DE UMA FUNÇÃO

Toda a função que admite derivada finita num ponto, é contínua nesse ponto. O **recíproco não é válido**, isto é, **nem toda a função contínua num ponto, é derivável nesse ponto**.

4.4.1 DERIVABILIDADE DE UMA FUNÇÃO

Sabe-se que se existir o limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_0}$, é derivada da função $y = f(x)$ no ponto $x = x_0$.

Porém pode acontecer que a razão incremental $\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_0}$, não tenha o limite quando $x \to x_0$, neste caso, diz-se que a função $y = f(x)$ não tem derivada no ponto $x = x_0$, **ou** não é derivável nesse ponto.

Pode acontecer que não exista $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_0}$, mas existam limites laterais à esquerda e à direita de "x_0", nestas condições diz-se que a função tem derivadas laterais à esquerda e à direita, e que se representam por $f`(x_0^-)$ e $f`(x_0^+)$.

Existido e sendo iguais as derivadas laterais no ponto $x = x_0$, então diz-se, que a função tem derivada nesse ponto, e o valor da derivada é igual ao valor comum das derivadas laterais, isto é,

$f`(x_0^-) = f`(x_0^+) = f`(x_0)$.

4.4.2 DERIVADAS LATERAIS

Nas figuras abaixo, observa-se que no ponto **P** cada gráfico da função tem duas semi-tangentes: **a semi-recta t_1** à esquerda e **a semi-recta t_2 à direita.**

Ao declive da semi-tangente t_1 chama-se derivada da função f **à esquerda de** "x_0" e representa-se por $f`(x_0^-)$.

$f`(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_0}$

Ao declive da semi-tangente t_2 chama-se derivada da função f **à direita de** "x_o" e representa-se por $f`(x_0^+)$.

$f`(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_0}$

Se $f`(x_0^-) = f`(x_0^+)$, então $f`(x_0)$ existe, e assim sendo, f é derivável nesse ponto.

Se $f`(x_0^-) \neq f`(x_0^+)$, então $f`(x_0)$ não existe, e assim sendo, f não é derivável nesse ponto.

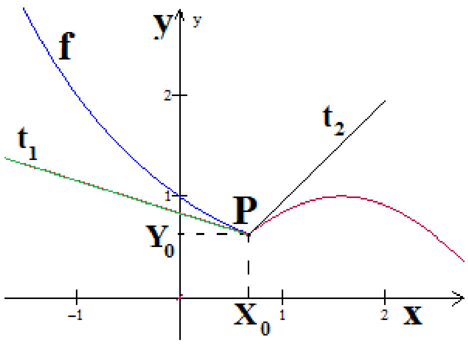


Figura 1

Na figura 1, verifica-se que no ponto **P**, $f`(x_0^-) \neq f`(x_0^+)$, pois a semitangente t_1 forma com o eixo das abcissas um ângulo obtuso ($\alpha \epsilon]90^\circ; 180^\circ[$), tal que $tg(\alpha) < 0$, enquanto que a semitangente t_2 forma com o eixo das abcissas um ângulo agudo ($\alpha \epsilon]0^\circ; 90^\circ[$), tal que $tg(\alpha) > 0$.

Portanto, no ponto $P(x_0; y_0)$, a função $y = f(x)$ **não é derivável.**

Geometricamente significa que uma semitangente (t_1) não está no prolongamento da outra semitangente (t_2).

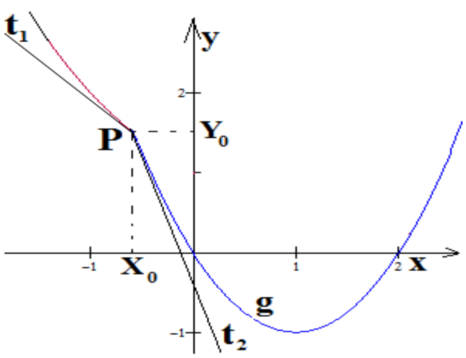


Figura 2

Na figura 2, verifica-se que no ponto **P**, as duas semitangentes t_1 e t_2 não se encontram no prolongamento uma da outra, o que significa que os seus declives também são diferentes, isto é,

$f`(x_0^-) \neq f`(x_0^+)$.

Portanto, no ponto $P(x_0; y_0)$, a função $y = g(x)$ **não é derivável.**

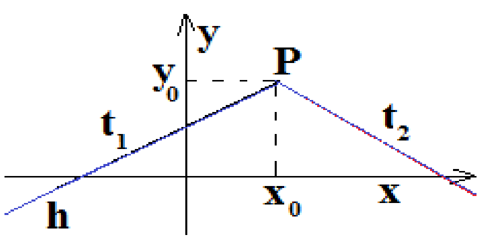


Figura 3

Na figura 3, verifica-se que no ponto **P**,

$f`(x_0^-) \neq f`(x_0^+)$, pois a semitangente t_2 não se encontra no prolongamento da semitangente t_1.

Portanto, no ponto $P(x_0; y_0)$, a função $y = h(x)$ **não é derivável.**

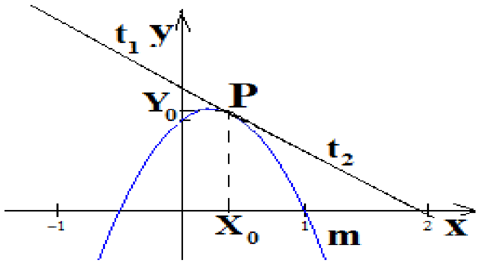


Figura 4

Na figura 4, verifica-se que no ponto **P,** $f`(x_0^-) = f`(x_0^+)$**,** pois a semitangente t_2 se encontra no prolongamento da semitangente t_1.

Portanto, no ponto $P(x_0; y_0)$, a função $\mathbf{y = m(x)}$ **é derivável.**

TEOREMA

Toda a função que tem derivada finita num ponto $x = x_0$, é contínua nesse ponto.

4.5 DERIVADA NUM INTERVALO

Uma função $y = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ é diferenciável em $]a; b[$**,** se é diferenciável em todos os pontos $x_o \in]a; b[$**.**

Uma função $y = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ é diferenciável em $[a; b]$**,** se é diferenciável em todos os pontos $x_o \in]a; b[$**,** à direita de **"a"** e à esquerda de **"b".**

Exemplos de exercícios resolvidos

(1) Considere a seguinte função $f(x) = 3x + 2$**.** Aplicando a definição, ache a função derivada**;**

Resolução:

$f(x) = 3x + 2$

$$f`(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(x_o)}{\mathrm{x} - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{3\mathrm{x} + 2 - (3x_o + 2)}{\mathrm{x} - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{3\mathrm{x} + 2 - 3x_o - 2}{\mathrm{x} - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{3\mathrm{x} - 3x_o}{\mathrm{x} - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{3(\mathrm{x} - x_o)}{\mathrm{x} - x_0} = \lim_{x \to x_0} 3 = 3.$$

Portanto, sendo $f(x) = 3x + 2$**,** então a sua função derivada é**:** $f`(x) = 3$**.**

(2) **Considere a seguinte função $g(x) = 3x^2 + 2x$,**

a) Aplicando a definição, ache o valor da derivada da função no ponto $\mathbf{x = 4}$;

b) Determine a equação da recta tangente à curva da função g, no ponto $\mathbf{x = 4}$**.**

Resolução:

$g(x) = 3x^2 + 2x$

a) $f`(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(x_o)}{\mathrm{x} - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{3x^2 + 2x - (3{x_0}^2 + 2x_0)}{\mathrm{x} - x_0}$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\mathbf{3x^2} - \mathbf{3}x_0{}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2x} - \mathbf{2}x_0}{\mathrm{x} - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\mathbf{3}(\boldsymbol{x} - x_0)(\boldsymbol{x} + x_0) + \mathbf{2}(x - x_0)}{\mathrm{x} - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(\boldsymbol{x} - x_0)[3(\boldsymbol{x} + x_0) + \mathbf{2}]}{\mathrm{x} - x_0} = \lim_{x \to x_0} [3(\boldsymbol{x} + x_0) + \mathbf{2}] = \mathbf{3}(\boldsymbol{x_0} + x_0) + \mathbf{2} = \mathbf{3}(\mathbf{2}x_0) + 2$$

$$= 6x_0 + 2$$

Portanto, sendo $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\boldsymbol{x},$ tem-se $\boldsymbol{g}`(\boldsymbol{x}) = \mathbf{6}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}$

O valor da derivada no ponto de abcissa $\mathbf{x = 4}$ é dado por: $\boldsymbol{g}`(\mathbf{4}) = \mathbf{6} \times \mathbf{4} + \mathbf{2} = \mathbf{26}$

b) Equação da recta tangente à curva $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\boldsymbol{x},$ no ponto abcissa $\mathbf{x = 4}$

$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{g}`(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0})$

1º Passo: $y_0 = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{g}(\mathbf{4}) = \mathbf{3} \times \mathbf{4}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2} \times \mathbf{4} = \mathbf{48} + \mathbf{8} = \mathbf{56},$

$\boldsymbol{g}`(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{g}`(\mathbf{4}) = \mathbf{26};$

2º Passo: $y - g(x_0) = g`(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - 56 = 26(x - 4)$

$\Leftrightarrow y = 26x - 104 + 56 \Leftrightarrow y = 26x - 48$

$\boldsymbol{y} = \mathbf{26}\boldsymbol{x} - \mathbf{48}$ é a equação da recta tangente à curva.

(3) **Considere a seguinte função** $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \sqrt[3]{\boldsymbol{x}},$

a) Aplicando a definição, ache o valor da derivada da função no ponto $\mathbf{x = 1}$;

b) Determine a equação da recta tangente à curva da função $\boldsymbol{f}$, no ponto $\mathbf{x = 1.}$

Resolução:

a) $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \sqrt[3]{\boldsymbol{x}}$

$$\boldsymbol{h}`(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\boldsymbol{h}(x) - \boldsymbol{h}(x_o)}{\mathrm{x} - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt[3]{\boldsymbol{x}} - \sqrt[3]{x_0}}{\mathrm{x} - x_0} = [\frac{0}{0}]$$

Usando o método da substituição, tem-se: $\begin{cases} \sqrt[3]{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a} \Leftrightarrow x = a^3 \\ \sqrt[3]{x_0} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow x_0 = b^3 \end{cases}$

$$\boldsymbol{h}`(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\boldsymbol{h}(x) - \boldsymbol{h}(x_o)}{\mathrm{x} - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt[3]{\boldsymbol{x}} - \sqrt[3]{x_0}}{\mathrm{x} - x_0} = \lim_{a \to b} \frac{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}}{\mathrm{a}^3 - b^3}$$

$$= \lim_{a \to b} \frac{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}}{(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(\mathrm{a}^2 + \mathrm{ab} + b^2)} = \lim_{a \to b} \frac{\mathbf{1}}{(\mathrm{a}^2 + \mathrm{ab} + b^2)} = \frac{\mathbf{1}}{(\mathrm{b}^2 + \mathrm{b} \times \mathrm{b} + b^2)} = \frac{1}{3\mathrm{b}^2}$$

Mas pela substituição tem-se: $\boldsymbol{b} = \sqrt[3]{x_0} \Leftrightarrow \boldsymbol{b}^{\mathbf{2}} = (\sqrt[3]{x_0})^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{b}^{\mathbf{2}} = \sqrt[3]{x_0{}^2},$

logo, $\boldsymbol{h}`(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x_o{}^2}}$

Portanto, sendo $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \sqrt[3]{\boldsymbol{x}},$ a sua derivada é: $\boldsymbol{h}`(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

b) A equação da recta tangente à curva $\boldsymbol{g(x) = 3x^2 + 2x}$**,** no ponto abcissa $\mathrm{x} = 1$

$\boldsymbol{y - h(x_0) = h`(x_0)(x - x_0)}$

1º Passo: $y_0 = \boldsymbol{h(x_0) = h(1) = \sqrt[3]{1} = 1,}$

$\boldsymbol{h`(x_0) = h`(1) = \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} = \frac{1}{3};}$

2º Passo: $y - \boldsymbol{h}(x_0) = \boldsymbol{h}`(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1)$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

$\boldsymbol{y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}$ é a equação da recta tangente à curva.

(4) Calcule as derivadas laterais das funções dadas, e verifique se cada função é derivável, no ponto indicado.

a) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 2x^2, se\ x \leq 1 \\ 4x - 1, se\ x > 1 \end{cases}}$**, no ponto** $\boldsymbol{x = 1;}$

b) $\boldsymbol{h(x) = \frac{|x-2|}{x-2}}$**, no ponto** $\boldsymbol{x = 2}$

Resolução:

a) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 2x^2, se\ x \leq 1 \\ 4x - 1, se\ x > 1 \end{cases}}$**, no ponto** $\boldsymbol{x = 1.\ \mathrm{f}(x_o) = \mathrm{f}(1) = 2 \times 1^2 = 2}$

$$\boldsymbol{f`(x_0^+) = f`(1^+)} = \lim_{x\to1^+} \frac{\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(1)}{\mathrm{x} - 1} = \lim_{x\to1^+} \frac{4x - 1 - 2}{\mathrm{x} - 1} =$$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{4x - 3}{\mathrm{x} - 1} = \frac{4 \times 1 - 3}{1 - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\boldsymbol{f`(x_0^-) = f`(1^-)} = \lim_{x\to1^-} \frac{\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(1)}{\mathrm{x} - 1} = \lim_{x\to1^-} \frac{2x^2 - 2}{\mathrm{x} - 1} = [\frac{0}{0}]$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1^-} \frac{2x^2 - 2}{\mathrm{x} - 1} = \lim_{x\to1^-} \frac{2(x^2 - 1)}{\mathrm{x} - 1} = \lim_{x\to1^-} \frac{2(x - 1)(\mathrm{x} + 1)}{\mathrm{x} - 1} \lim_{x\to1^-} 2(\mathrm{x} + 1) = 2 \times 2 = \boldsymbol{4}$$

Sendo $\boldsymbol{f`(1^-) \neq f`(1^+)}$, a função $\boldsymbol{f}$**,** não é derivável no ponto $x = 1$.

b) $\boldsymbol{h(x) = \frac{|x-2|}{x-2} = \begin{cases} \frac{x-2}{x-2}, se\ x - 2 \geq 0 \\ \frac{-(x-2)}{x-2}, se\ x - 2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, se\ x \geq 2 \\ -1, se\ x < 2 \end{cases}.\ \mathrm{h}(x_o) = \mathrm{h}(2) = 1}$

$$\boldsymbol{h`(x_0^+) = h`(2^+) = \lim_{x\to2^+} \frac{\mathrm{h}(x) - \mathrm{h}(2)}{\mathrm{x} - 1} = \lim_{x\to2^+} \frac{1 - 1}{\mathrm{x} - 1} = \frac{0}{2 - 1} = \frac{0}{1} = 0}$$

$$\boldsymbol{h`(x_0^-) = h`(2^-) = \lim_{x\to2^-} \frac{\mathrm{h}(x) - \mathrm{h}(2)}{\mathrm{x} - 1} = \lim_{x\to2^-} \frac{-1 - 1}{\mathrm{x} - 1} = \frac{-2}{2 - 1} = \frac{-2}{1} = -2}$$

Sendo $\boldsymbol{h`(1^-) \neq h`(1^+)}$, a função $\boldsymbol{h}$**,** não é derivável no ponto $x = 2$.

(5) **Considere a função assim definida:** $g(x) = \begin{cases} 2x + 1, se\ x < 1 \\ 3x, se\ x \geq 1 \end{cases}$

a) Calcule as derivadas laterais de g, no ponto de abcissa $x = 1$.

b) Determine as equações das semitangentes ao gráfico de g à esquerda e à direita do ponto $x = 1$.

Resolução

a) $g(x) = \begin{cases} 2x + 1, se\ x < 1 \\ 3x, se\ x \geq 1 \end{cases}$, **no ponto** $x = 1$. $g(x_o) = g(1) = 3 \times 1 = 3$

$$g`(x_0^+) = g`(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{3x - 3}{x - 1} = [\frac{0}{0}]$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} \frac{3x - 3}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{3(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} 3 = 3$$

$$g`(x_0^-) = g`(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x + 1 - 3}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x - 2}{x - 1} = [\frac{0}{0}]$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} \frac{2x - 2}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \lim_{x\to 1^-} 2(x + 1) = 2 \times 2 = 4$$

$g`(1^-) \neq g`(1^+)$, a função f, não é derivável no ponto $x = 1$.

b) $g(x) = \begin{cases} 2x + 1, se\ x < 1 \\ 3x, se\ x \geq 1 \end{cases}$

Equação da semi-tangente à esquerda de $x = 1$:

$g`(1^-) = 4$, $P(1; 3) : y - g(x_0) = g`(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - 3 = 4(x - 1)$

$\Leftrightarrow y = 4x - 4 + 3 \Leftrightarrow y = 4x - 1$

$y = 4x - 1$ é a equação da semitangente à esquerda $x = 1$.

Equação da semi-tangente à direita de $x = 1$:

$g`(1^+) = 3$, $P(1; 3) : y - g(x_0) = g`(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - 3 = 3(x - 1)$

$\Leftrightarrow y = 3x - 3 + 3 \Leftrightarrow y = 3x$ (se

$y = 3x$ é a equação da semitangente à direita $x = 1$.

(6) Ache a declividade da recta tangente à curva $m(x) = x^3 - x^2 - 4$, no ponto $x = 4$.

Resolução:

$m(x) = x^3 - x^2 - 4$, $m(4) = (4)^3 - (4)^2 - 4 = 64 - 16 - 4 = 44$

$$m`(x_0) = m`(4) = \lim_{x\to 4} \frac{m(x) - m(4)}{x - 4} = \lim_{x\to 4} \frac{x^3 - x^2 - 4 - 44}{x - 4} = \lim_{x\to 4} \frac{x^3 - x^2 - 48}{x - 4} = [\frac{0}{0}]$$

C.A.Usando o algorítmo de Briot Ruffini, efectua-se a decomposição:

$x^3 - x^2 - 48 = x^3 - x^2 + 0x - 48 = (x - 4)(x^2 + 3x + 12)$

	x^3	x^2	x	$T.I.$	$D(x) = x^3 - x^2 + 0x - 48$
	1	−1	0	−48	$d(x) = x - 4$
4		4	12	48	$q(x) = x^2 + 3x - 12$

1 3 12 0 $r(x) = 0$

$T.I.$ – Termo independente

$$\Rightarrow m`(4) = \lim_{x \to 4} \frac{x^3 - x^2 - 48}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)(x^2+3x+12)}{x-4} = \lim_{x \to 4}(x^2+3x+12) = 4^2 + 3 \times 4 + 12 = 40$$

$m`(4) = 40$ é a declividade da recta tangente à curva $m(x) = x^3 - x^2 - 4$, no ponto $\boldsymbol{x = 4}$**.**

4.6 DERIVAÇÃO POR TABELA

a) Regras principais para achar-se a derivada

Se **"c"** é uma constante **e** $\boldsymbol{y} = f(x)$ e $\boldsymbol{y} = g(x)$ são funções deriváveis no ponto $x = x_0$, então:

1) **Derivada de uma função constante**:

$\boldsymbol{y(x) = c, y`(x) = 0}$

2) **Derivada de uma função identidade**:

$\boldsymbol{y(x) = x, y`(x) = 1}$

3) **Derivada duma potência de "x" de expoente racional:**

$\boldsymbol{y(x) = x^p,\ y`(x) = p \times x^{p-1}}$

4) **Derivada duma soma:**

$\boldsymbol{y(x) = f(x) \pm g(x), y`(x) = f`(x) \pm g`(x)}$

5) **Derivada de um produto**

$\boldsymbol{y(x) = f(x) \times g(x), y`(x) = f`(x) \times g(x) \pm g`(x) \times f(x)}$

6) **Derivada de um produto de uma constante por uma função:**

$\boldsymbol{y(x) = Cf(x), y`(x) = Cf`(x)}$

7) **Derivada de um quociente**

$\boldsymbol{y(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, y`(x) = \frac{f`(x) \times g(x) - g`(x) \times f(x)}{[g(x)]^2}}$

8) **Derivada da função composta**

Se $\boldsymbol{y = f(u)}$ e $\boldsymbol{u = g(x)}$, isto é, onde $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{u}$ possuem derivadas, então**:**

1º Deriva-se a função principal "$\boldsymbol{f}$"**,** mantendo a função argumento "$\boldsymbol{u}$"

2º Multiplica-se a expressão obtida pela derivada da função argumento "$\boldsymbol{u}$"

$\boldsymbol{y(x) = f(u) = f[g(x)], y`(x) = f`[g(x)] \times g`(x)}$

Ou de outra forma**,**

$\boldsymbol{y` = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}}$.

Esta regra pode ser aplicada à cadeia de qualquer número finito de funções que podem ser derivadas.

9) **Derivada duma potência de expoente racional:**

$$y(x) = f(x)^p, \quad y`(x) = p \times f(x)^{p-1} \times f`(x)$$

10) **Derivada duma raiz**

$$y(x) = \sqrt[n]{f(x)}, y`(x) = \frac{f`(x)}{n \times \sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$$

11) **Derivada duma função exponencial**

a) $y(x) = a^{f(x)}, y`(x) = a^{f(x)} Ln(a) \times f`(x), (a > 0, a \neq 1)$

b) $y(x) = e^{f(x)}, y`(x) = e^{f(x)} \times f`(x)$

12) **Derivada duma função logarítmica**

a) $y(x) = \log_a[f(x)], y`(x) = \frac{f`(x)}{f(x) \times Ln(a)}$ $(f(x) > 0,\ a > 0, a \neq 1)$

b) $y(x) = Ln[f(x)], y`(x) = \frac{f`(x)}{f(x)}$ $(f(x) > 0)$

13) **Derivada duma função trigonométrica**

a) $y(x) = sen[f(x)], y`(x) = cos[f(x)] \times f`(x);$

b) $y(x) = cos[f(x)], y`(x) = -sen[f(x)] \times f`(x)$

c) $y(x) = tg[f(x)], y`(x) = \frac{f`(x)}{cos^2[f(x)]};$

d) $y(x) = c\,tg[f(x)], y`(x) = -\frac{f`(x)}{sen^2[f(x)]};$

e) $y(x) = arc\,sen[f(x)], y`(x) = \frac{f`(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$ $(|f(x)| < 1);$

f) $y(x) = arc\,cos[f(x)], y`(x) = -\frac{f`(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$ $(|f(x)| < 1);$

g) $y(x) = arctg[f(x)], y`(x) = \frac{f`(x)}{1+f(x)^2};$

h) $y(x) = arcctg[f(x)], y`(x) = -\frac{f`(x)}{1+f(x)^2}$

14) **Derivadas de funções hiperbólicas**

VEJA AS REGRAS DE DERIVAÇÃO DE FUNÇÕES HIPERBÓLICAS, NOUTRAS FONTES, COMO É O CASO DE B. DEMIDOVITCH, (19844), 4ª EDIÇÃO, PAGINA: 48.

4.6.1 DERIVADAS DE FUNÇÃO INVERSA

Se a derivada da função $y = f(x)$ é $y`_x = f`(x) \neq 0$, então, a derivada da função inversa $x = f^{-1}(y)$, será:

$x`_y = \frac{1}{y`_x} = \frac{1}{f`(x)}$ **, ou** $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

Exemplo (1): Seja dada a função $y = \log_2(x)$, ache $x`_y$, ou seja $\frac{dx}{dy}$.

Solução: $y`_x = \frac{1}{Ln(2)X}$ **(1)**

A derivada da função inversa de $X = 2^y$, **será:** $x`_y = 2^y Ln(2)$, mas se substituirmos "$2^y$" **por** "$X$", obtemos: $x`_y = XLn(2)$ **(2)**

Das expressões **(1)** e **(2),** conclui-se que: $x`_y = \frac{1}{y`_x} = \frac{1}{\frac{1}{Ln(2)X}} = XLn(2)$.

4.6.2 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO DADA EM FORMA PARAMÉTRICA

Se a dependência entre a função $y = f(x)$ e o argumento "X" é dada através dum parâmetro "t" $\begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \end{cases}$, então: $y`_x = \frac{y`_t}{x`_t}$, **ou ainda,** $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

Exemplo (2): Achar $\frac{dy}{dx}$, **se** $\begin{cases} x = acos(2t) \\ y = asen(3t) \end{cases}$

Solução: $\frac{dx}{dt} = a[-sen(2t)](2t)` = -2asen(2t)$; $\frac{dy}{dt} = acos(3t)(3t)` = 3acos(3t)$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3acos(3t);}{-2asen(2t)} = -\frac{3cos(3t)}{2sen(2t)}$$

4.6.3 DERIVADAS DE FUNÇÕES DADAS DE FORMA IMPLÍCITA

Sempre que temos uma função escrita na forma $y = f(x)$, dizemos que "$\boldsymbol{y}$" é uma função de "$\boldsymbol{X}$"**, pois podemos isolar a variável dependente de um lado e a expressão da função do outro.** Porém nem sempre isso é possível ou conveniente e**, caso isso ocorra, dizemos que** "$\boldsymbol{y}$" **é uma função implícita de** "$\boldsymbol{X}$"**.**

Uma dada função diz-se definida implicitamente, quando nenhuma das suas variáveis aparece expressa em função da outra, ou seja, se a dependência entre "$\boldsymbol{X}$" **e a função diferenciável** $y = f(x)$, é dada de forma implícita $\boldsymbol{F(x;y) = 0}$.

$\boldsymbol{F(x;y) = 0}$ é a forma implícita de da definição de uma função $\boldsymbol{y = f(x)}$.

(i) Exemplos de funções definidas explicitamente:

$\boldsymbol{y = \log_2(x)},\ \boldsymbol{y = 2^x},\ \boldsymbol{y} = x^3 - x^2 - 48\ \boldsymbol{,\ y} = \frac{5x^3 - x^2 - 48}{4x - 2}\ \boldsymbol{;\ y = \frac{-x}{1-x} = \frac{x}{x-1}}$

(ii) Exemplos de funções definidas implicitamente:

$\mathbf{x^2 + y^2 = 25,\ 5x - x^2y^2 = 2y,\quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1, x^3 + y^3 - 3axy = 9}$

Derivação: Para derivar uma função dada na forma implícita, basta lembrar que "$\boldsymbol{y}$" é função de "$\boldsymbol{X}$" e usar a regra de cadeia. E assim sendo, sempre que se derivar a parte do "$\boldsymbol{y}$"**,** deve-se multiplicar por "$\boldsymbol{y}$`"

Para encontrar-se a derivada $\boldsymbol{y`_x = y`}$**,** nos casos mais simples, é suficiente:

(a) Calcular a derivada em relação a "$\boldsymbol{X}$" de todos os termos da equação dada, considerando "$\boldsymbol{y}$" como função de "$\boldsymbol{X}$" ($y = f(x)$). Igualar esta derivada a zero, isto é, supor que $\frac{d}{dx}\boldsymbol{F(x;y) = 0}$;

(b) Resolver a equação obtida em relação a $\boldsymbol{y`}$**.**

Exemplos:

(1) Achar a derivada de cada uma das seguintes funções definidas explicitamente:

a) $\mathbf{x + y = xy,}$

b) $\mathbf{x^2 + y^2 = 25,}$

c) $\mathbf{5x - x^2y^2 = 2y,}$

d) $\mathbf{x^3 + y^3 - 3axy = 9}$

Resolução:

(1) Derivando a expressão dada, temos:

a) $\mathbf{x + y = xy \Rightarrow \ 1 + y` = y + xy`} \Leftrightarrow y` - xy` = y - 1 \Leftrightarrow y`(1 - x) = y - 1$

$\Leftrightarrow \ y` = \frac{y-1}{1-x}$ (1)

Observação: O "$\boldsymbol{y}$" que aparece na expressão **(1)** da função derivada no membro direito, representa a função dada**:** $\mathbf{x + y = xy \Leftrightarrow y - xy = x \Leftrightarrow y(1 - x) = -x} \Leftrightarrow \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{-x}}{\boldsymbol{1-x}} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x-1}}$

Como trata-se dum caso mais simples, onde é possível isolar a variável "$\boldsymbol{y}$"**,** derivando a função $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{-x}}{\boldsymbol{1-x}}$ usando a regra de derivação de um quociente, obtemos:

$$y` = \frac{-(1-x) - (-x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{x - 1 - x}{(1-x)^2} = \frac{-1}{(1-x)^2}\,(\mathbf{2})$$

Pode-se fazer uma comparação das duas formas de derivação, mas para isso, deve-se substituir o "$\boldsymbol{y}$" da expressão **(1)** pela expressão: $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{-x}}{\boldsymbol{1-x}}$, e obtém-se**:**

$$\boldsymbol{y`} = \frac{\boldsymbol{y - 1}}{\boldsymbol{1 - x}} = \frac{\frac{\boldsymbol{-x}}{\boldsymbol{1-x}} - \mathbf{1}}{\boldsymbol{1 - x}} = \frac{\frac{\boldsymbol{-x - (1 - x)}}{\boldsymbol{1-x}}}{\boldsymbol{1 - x}} = \frac{\frac{\boldsymbol{-x - 1 + x}}{\boldsymbol{1-x}}}{\boldsymbol{1 - x}} = \frac{\frac{\mathbf{-1}}{\boldsymbol{1-x}}}{\boldsymbol{1 - x}}$$

$$= \frac{\mathbf{-1}}{\boldsymbol{1-x}} \times \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{1-x}} = \frac{\mathbf{-1}}{\boldsymbol{(1-x)^2}}\,.$$

Conclui-se então que, as duas formas de derivação dão o mesmo resultado. Nos casos mais complexos, como, é o caso da expressão da alínea **c)**, não é possível isolar "$\boldsymbol{y}$" **(variável dependente)** num membro sozinho**,** assim sendo, torna-se desnecessário isolar o "$\boldsymbol{y}$"**.**

b) $\mathbf{x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow 2x + 2yy` = 0} \Leftrightarrow 2yy' = -2x \Leftrightarrow \boldsymbol{y`} = \frac{\boldsymbol{-2x}}{\boldsymbol{2y}}$

c) $\mathbf{5x - x^2y^2 = 2y}$

$\Rightarrow 5 - (2xy^2 + 2x^2yy`) = 2y` \Leftrightarrow 5 - 2xy^2 - 2x^2yy` = 2y`$

$$\Leftrightarrow 2y` + 2x^2yy` = 5 - 2xy^2 \Leftrightarrow y`(2 + 2x^2y) = 5 - 2xy^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{y`} = \frac{\mathbf{5 - 2}\boldsymbol{xy^2}}{\mathbf{2 + 2}\boldsymbol{x^2y}}$$

4.7 DERIVADAS DE ORDENS SUPERIORES

Definição de derivadas de ordens superiores

Derivada de segunda ordem, ou **segunda derivada** da função da função $y = f(x)$, chama-se a derivada de sua derivada, isto é, $(\boldsymbol{y`})`$**.**

A designação da segunda derivada é feita da seguinte forma**:** $\boldsymbol{y``}$, $\frac{\boldsymbol{d^2y}}{\boldsymbol{dx^2}}$, $\boldsymbol{f``(x)}$**.**

Em geral, a derivada de enésima ordem da função $y = f(x)$ é a derivada da derivada de ordem $(\boldsymbol{n-1})$**.** A derivada enésima designa-se assim:

$\boldsymbol{y^{(n)}},\ \boldsymbol{\frac{d^n y}{dx^n}},\ \boldsymbol{f^{(n)}(x)}$**.**

Exemplo (1) Derive sucessivamente a função $h(x) = Ln(2+x)$ até a derivada de ordem cinco, e determine o valor da derivada no ponto $x_0 = -1$.

Função	Função derivada: $h^{(n)}(x)$	Valor da derivada no ponto x_0: $h^{(n)}(x_0)$
$h(x) = Ln(2+x)$	$h^{(1)}(x) = \frac{(2+x)'}{2+x} = \frac{1}{2+x}$	$h^{(1)}(-1) = \frac{1}{2-1} = 1$
$h^{(1)}(x) = \frac{1}{2+x}$	$h^{(2)}(x) = \frac{(1)' \times (2+x) - (2+x)' \times 1}{(2+x)^2} = \frac{0-1}{(2+x)^2} = \frac{-1}{(2+x)^2}$	$h^{(2)}(-1) = \frac{-1}{(2-1)^2} = -1$
$h^{(2)}(x) = \frac{-1}{(2+x)^2}$	$h^{(3)}(x) = \frac{(-1)' \times (2+x)^2 - [(2+x)^2]' \times (-1)}{[(2+x)^2]^2} = \frac{0-2(2+x)}{(2+x)^4}$ $h^{(3)}(x) = \frac{2}{(2+x)^3}$	$h^{(3)}(-1) = \frac{2}{(2-1)^3} = 2$
$h^{(3)}(x) = \frac{2}{(2+x)^3}$	$h^{(4)}(x) = \frac{(2)' \times (2+x)^3 - [(2+x)^3]' \times (2)}{[(2+x)^3]^2} = \frac{0-6(2+x)^2}{(2+x)^6}$ $h^{(4)}(x) = \frac{-6}{(2+x)^4}$	$h^{(4)}(-1) = \frac{-6}{(2-1)^4} = -6$
$h^{(4)}(x) = \frac{-6}{(2+x)^4}$	$h^{(5)}(x) = \frac{(-6)' \times (2+x)^4 - [(2+x)^4]' \times (-6)}{[(2+x)^4]^2} = \frac{0-(-6\times 4)\times(2+x)^3}{(2+x)^8} = \frac{24}{(2+x)^5}$	$h^{(5)}(-1) = \frac{24}{(2-1)^5} = 24$

4.7.1 FÓRMULA DE LEIBNIZ

Se as funções $\boldsymbol{u = p(x)}$ **e** $\boldsymbol{v = p(x)}$ têm derivadas de até enésima ordem inclusive, para calcular a enésima derivada do produto destas funções, pode-se empregar, então a **fórmula de Leibniz:**

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})^{(n)} = (\boldsymbol{u})^{(n)}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{u})^{(n-1)}\boldsymbol{v}^{(1)} + \frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})}{\mathbf{1} \times \mathbf{2}}\boldsymbol{u}^{(n-2)}\boldsymbol{u}^{(2)} + \frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})(\boldsymbol{n}-\mathbf{2})}{\mathbf{1} \times \mathbf{2} \times \mathbf{3}}\boldsymbol{u}^{(n-3)}\boldsymbol{u}^{(3)} + \ \dots$$

$$+ \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{(n)}$$

4.8 APLICAÇÃO DAS DERIVADAS NO CÁLCULO DE LIMITES INDETERMINADOS DO TIPO $[\frac{0}{0}]$ E $[\frac{\infty}{\infty}]$

REGRA DE L`HOSPITAL – BERNOULLI

No cálculo de limites nos defrontamos diversas vezes com alguns limites do tipo

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$,com $\lim\limits_{x\to a}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ e $\lim\limits_{x\to a}\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, ou então com $\lim\limits_{x\to a}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to a}\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \infty$, sendo $y = g(x)$ uma função não identicamente nula e “a” um número real, podendo ser "∞" ou "$-\infty$".

Exemplos:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x} = 1$; (2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = 3$ (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x-3}{3x^3+7} = 0$

Nesses exemplos usa-se algum tipo de artifício, a fim de se efectuar o levantamento da indeterminação do tipo $[\frac{0}{0}]$ ou $[\frac{\infty}{\infty}]$. Mas para o caso deste limite $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$, nenhum dos artifícios vistos no cálculo de limites resolve o problema.

Coube a **BERNOULLI -** embora a publicação tenha sido de **L`HOSPITAL,** que emprestou o seu nome ao efeito – descobrir uma propriedade que permite calcular rapidamente limites desse tipo.

A engenhosa descoberta consiste em perceber que, na vizinhança de um ponto pode-se comparar o quociente de duas funções com o quociente de suas derivadas, desde que determinadas hipóteses estejam satisfeitas.

De maneira precisa, tem-se:

4.8.1 PRIMEIRA REGRA DE L`HOSPITAL

Sejam $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ duas funções contínuas num intervalo $\mathbf{I} = [\mathbf{c}; \mathbf{d}]$, deriváveis no interior de **I,** ou seja, em todos os pontos $\boldsymbol{x_0} \in]\mathbf{c}; \mathbf{d}[$, **e tais que $\mathbf{g}`(\mathbf{x_0}) \neq \mathbf{0}$**.

Seja $\mathbf{a} \in [\mathbf{c}; \mathbf{d}]$ **e** supondo que $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{g}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, e que existe $\lim\limits_{x\to a}\frac{f`(x)}{g`(x)}$ **, infinito ou finito,**

Então existe $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ **e** mais ainda:

$$\lim_{x\to a}\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\mathbf{g}(\mathbf{x})} = \lim_{x\to a}\frac{\mathbf{f}`(\mathbf{x})}{\mathbf{g}`(\mathbf{x})}, \mathbf{g}`(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$$

4.8.2 SEGUNGUNDA REGRA DE L`HOSPITAL

Sejam $y = f(x)$ e $y = g(x)$ duas funções contínuas e deriváveis em todos os pontos "**x**" **distintos de** "$\boldsymbol{a}$",

"**x**" pertencente a uma vizinhança $\boldsymbol{V}$ **de** "$\boldsymbol{a}$" $\boldsymbol{V} =]\mathbf{a} - \mathbf{r}; \mathbf{a} + \mathbf{r}[, \mathbf{r} > 0.$

Supondo que $\mathbf{g}`(\text{"}\mathbf{x}\text{"}) \neq \mathbf{0}$, para todo "**x**" $\in \boldsymbol{V}$ **e que** $\lim\limits_{x\to a} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lim\limits_{x\to a} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \infty$.

Se existe $\lim\limits_{x\to a} \frac{f`(x)}{g`(x)}$ **,** finito ou infinito, então existe $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ **e** mais ainda:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f`(x)}{g`(x)},\ g`(x) \neq 0$$

Com as regras de L`Hospital, muitos limites complicados são facilmente calculados. Entretanto, é necessário ter sempre o cuidado de verificar se as hipóteses estão satisfeitas.

OBSERVAÇÕES:

Se $\lim\limits_{x\to a} \frac{f`(x)}{g`(x)}$**,** $\mathbf{g}`(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$**,** torna a dar uma indeterminação no ponto $x = a$, nas condições citadas anteriormente **(deriváveis no ponto** $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ **e** $\mathbf{g}`(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$**),** aplica-se novamente a mesma regra, o que resulta na razão da 2ª , da 3ª, e assim sucessivamente.

Exemplos:

$$(1)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\text{L`Hospital}}{\triangleq} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0;$$

$$(2)\ \lim_{x\to\infty} \frac{Ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{Ln\left(\frac{x-1}{x}\right)} = \left[\frac{0}{0}\right] \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{Ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{Ln\left(\frac{x-1}{x}\right)} \overset{\text{L`Hospital}}{\triangleq} \lim_{x\to\infty} \frac{\left[Ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]`}{\left[Ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]`} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\frac{(x+1)`x - x`(x+1)}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}}{\frac{\frac{(x-1)`x - x`(x-1)}{x^2}}{\frac{x-1}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\frac{x - x - 1)}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}}{\frac{\frac{x - x + 1)}{x^2}}{\frac{x-1}{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}}{\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x-1}{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{x^2} \times \frac{x}{x+1}}{\frac{1}{x^2} \times \frac{x}{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{x(x+1)}}{\frac{1}{x(x-1)}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x(x-1)}{x(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-(x-1)}{(x+1)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{-(x-1)}{(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+1}{x+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x}=-1$$

$$(3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(3x)}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(3x)}{2x}\overset{\text{L`Hospital}}{\cong}\lim_{x\to 0}\frac{[\mathrm{tg}(3x)]`}{(2x)`}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{\cos^2(3x)}}{2}=\frac{\frac{3}{\cos^2(3\times 0)}}{2}$$

$$=\frac{\frac{3}{[\cos(o)]^2}}{2}=\frac{3}{2}$$

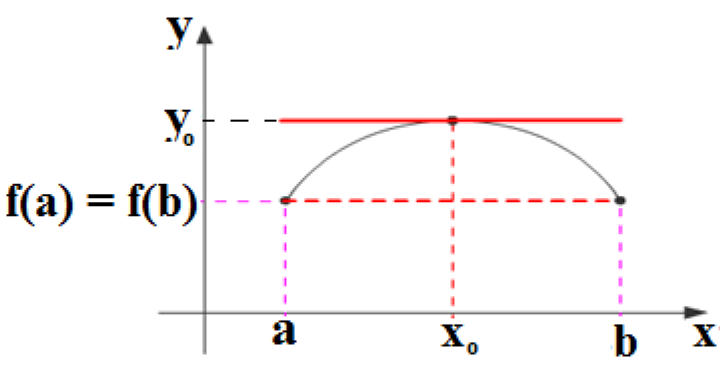
4.9 TEOREMAS DO VALOR MÉDIO, OU LEIS DA MÉDIA (Teorema de Rolle, Teorema de Lagrange, e Teorema de cauchy)

4.9.1 TEOREMA **DE ROLLE**

Seja $f : I = [a,b] \subset [R] \to [R]$ uma função contínua num intervalo fechado $[a,b]$ e diferenciável em todos pontos $x \in]a;b[$, em todos os pontos pertencentes ao interior do intervalo.

Se $\boldsymbol{f(a)=f(b)}$, então existe um ponto $x_0 \in]a;b[$ tal que $f`(x_0)=0$

A figura seguinte ilustra geometricamente o Teorema de Rolle. Nas condições enunciadas, existe um ponto $\boldsymbol{x_0}$ pertencente ao intervalo $[a;b]$, tal que a recta tangente ao gráfico da função $\boldsymbol{f}$ no ponto $(\boldsymbol{x_0};\boldsymbol{f(x_0)})$ é uma recta horizontal (isto é, com declive zero, o que é equivalente a ter-se $\boldsymbol{f`(x_0)=0}$.



Demonstração

Pelo teorema de Weierstrass podemos garantir que a função atinge um máximo, $\boldsymbol{M}$ e um mínimo, $\boldsymbol{m}$ no intervalo $[a;b]$.

Se $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{M}$ a função é constante e portanto, $\boldsymbol{f}`(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{0}\ \forall \boldsymbol{x_0} \in]\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}[$

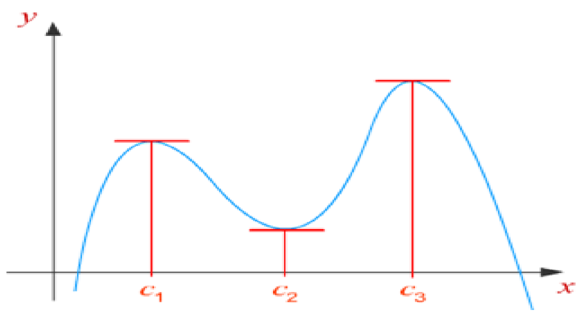
Se $\boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{M}$ como $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$**,** pelo menos o máximo ou o mínimo só pode ser atingido num ponto $\boldsymbol{x_0}$do interior do intervalo $[a;b]$. Sendo $\boldsymbol{f}$ diferenciável em $]a;b[$, tem-se que nesse ponto$\boldsymbol{x_0}$,

$\boldsymbol{f}`(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{0}$

Corolário

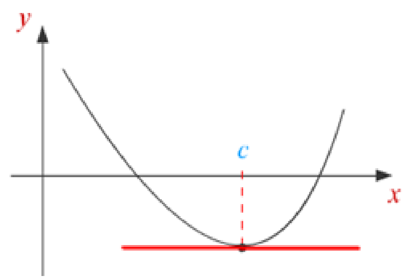
Entre dois zeros de uma função diferenciável num intervalo, há pelo menos um zero da sua derivada.

As figuras seguintes ilustram este corolário do teorema de Rolle.



Entre dois zeros consecutivos desta função existem três zeros da função derivada

$$f`(c_1) = f`(c_2) = f`(c_3) = 0$$



$$f`(c) = 0$$

Corolário

Entre dois zeros consecutivos da derivada de uma função não pode haver mais do que um zero da função

4.9.2 TEOREMA DE LAGRANGE

Teorema (de Lagrange)

Seja $f : I = [a,b] \subset [R] \rightarrow [R]$ uma função contínua num intervalo fechado$[a,b]$ e diferenciável em todos pontos $x \in]a;b[$, em todos os pontos pertencentes ao interior do intervalo. Então existe pelo menos um ponto $x_0 \in]a;b[$ tal que

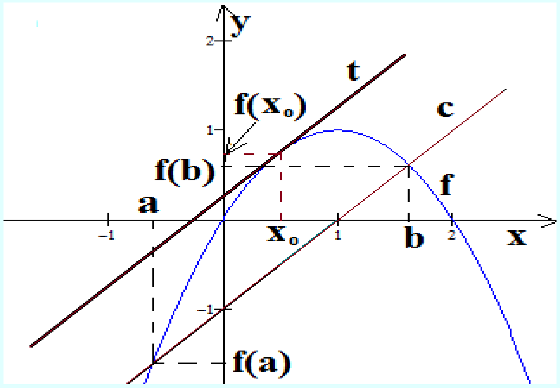
$$\boldsymbol{f}`(\boldsymbol{x_0}) = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}}$$

Demonstração

Em termos geométricos podemos observar que no gráfico de uma função nas

condições do teorema de Lagrange, entre dois pontos $(a; \boldsymbol{f(a)})$ e $(b; \boldsymbol{f(b)})$**,** há sempre um ponto $(x_o; \boldsymbol{f}(x_o))$ onde a tangente é paralela à

corda que une os pontos $(a; \boldsymbol{f(a)})$ e $(b; \boldsymbol{f(b)})$**.**



A demonstração do resultado pode ser feita recorrendo à função auxiliar

$$Q(x) = \boldsymbol{f(x)} - \frac{\boldsymbol{f(b) - f(a)}}{\boldsymbol{b - a}}(\boldsymbol{x - a})$$

Esta função verifica as condições do teorema de Rolle no intervalo $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ pois, para além de ser contínua em $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ e diferenciável em$]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ tem-se $\boldsymbol{Q(a) = Q(b) = f(a)}$

Podemos então garantir a existência de um ponto$\boldsymbol{x_0} \in]\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}[$, tal que $\boldsymbol{Q`(x_0) = 0}$

Como $Q(x) = \boldsymbol{f(x)} - \frac{\boldsymbol{f(b)-f(a)}}{\boldsymbol{b-a}}$

$$Q(x_0) = \boldsymbol{f(x_0)} - \frac{\boldsymbol{f(b) - f(a)}}{\boldsymbol{b - a}}$$

Então,

$Q`(x_0) = \boldsymbol{f`(x_0)} - \frac{\boldsymbol{f(b)-f(a)}}{\boldsymbol{b-a}} = \boldsymbol{0}$ o que permite concluir que existe um ponto $\boldsymbol{x_0} \in]\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}[$ tal que

$$\boldsymbol{f`(x_0)} = \frac{\boldsymbol{f(b) - f(a)}}{\boldsymbol{b - a}}$$

Vejamos agora uma outra interpretação (**mecânica**) do teorema de Lagrange.

Seja $\boldsymbol{S = s(t)}$a lei do movimento de um ponto móvel, isto é, a função que dá para cada valor de $\boldsymbol{t}$ o espaço percorrido.

A velocidade média entre os instantes $\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{t_0}$será (com $\boldsymbol{t > t_0}$) com $\frac{\boldsymbol{S(t)-S(t_0)}}{\boldsymbol{t-t_0}}$

Se o teorema de Lagrange for aplicável existirá um instante $\boldsymbol{t_1} \in]\boldsymbol{t}; \boldsymbol{t_o}[$no qual a velocidade instantânea é igual à velocidade média no intervalo considerado.

$S`(t_1) = \frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$

Serão apresentadas de seguida algumas consequências do teorema de Lagrange.

Corolário

Nas condições do teorema de Lagrange, se $f`(x_0) = 0\ \forall x_0 \in]a;b[$ *então a função* $\boldsymbol{f}$ *é uma função constante no intervalo* $[a;b]$

Demonstração

Sejam x_1 e x_2 dois quaisquer pontos distintos pertencentes a $[a;b]$

Aplicando o teorema de Lagrange à função *f* no intervalo $[x_1;x_2]$ podemos garantir a existência de um ponto $x_0 \in]\,x_1;x_2[$ tal que $\boldsymbol{f`(x_0)} = \frac{\boldsymbol{f(x_2)-f(x_1)}}{x_2-x_1}$

Como $f`(x_0) = 0$ concluímos que $\boldsymbol{f(x_1) = f(x_2)}$

o que demonstra que a função é constante no intervalo $[a;b]$.

Corolário

Nas condições do teorema de Lagrange, se $f`(x) = 0\ \forall x \in]a;b[$ *então a função* $\boldsymbol{f}$ *é uma função estritamente crescente no intervalo* $I = [a;b]$.

Demonstração

Pretendemos demonstrar que $\forall x_1, x_2 \in [a;b]: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Sejam x_1 e x_2 dois pontos quaisquer pertencentes a $[a;b]$ e tais que $x_1 < x_2$

Aplicando o teorema de Lagrange à função *f* no intervalo $[x_1;x_2]$ podemos garantir a existência de um

ponto $x_0 \in]\,x_1;x_2[$ tal que $\boldsymbol{f`(x_0)} = \frac{\boldsymbol{f(x_2)-f(x_1)}}{x_2-x_1}$

Como, por hipótese,

$x_2 - x_1 > 0$ e $\boldsymbol{f`(x_0)} > 0$**,** concluímos que $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Corolário

Nas condições do teorema de Lagrange,

f *crescente em* $I = [a,b] \Leftrightarrow f`(x) \geq 0, \forall x \in I,$

f *decrescente em* $I = [a,b] \Leftrightarrow f`(x) \leq 0, \forall x \in I.$

4.9.3 **TEOREMA DE CAUCHY**

Teorema (de Cauchy)

Se $f, g: I = [a; b] \subset [\mathbb{R}] \to [\mathbb{R}]$ são funções contínuas em $[a; b]$e diferenciáveis em $]a; b[$ e se para todo o $x \in]a; b[$, $g`(x) = 0$, então existe pelo menos um ponto $x_0 \in]a; b[$ tal que

$$\frac{\boldsymbol{f`(x_0)}}{\boldsymbol{g`(x_0)}} = \frac{\boldsymbol{f(b) - f(a)}}{\boldsymbol{g(b) - g(a)}}$$

Demonstração

A demonstração do resultado pode ser feita recorrendo à função auxiliar

$$\boldsymbol{H(x) = f(x) - f(a) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right] \times [f(x) - g(x)]}$$

Esta função verifica as condições do teorema de Rolle no intervalo $[a; b]$ pois, para além de ser contínua em $[a; b]$ e diferenciável em$]a;$ b[tem-se

$\boldsymbol{H(a) = H(b) = 0.}$

Podemos então garantir a existência de um ponto $x_0 \in]a; b[$ tal que

$\boldsymbol{H`(x_0) = 0}$

Como $\boldsymbol{H`(x) = f`(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right] \times f`(x)}$

$\boldsymbol{H`(x_0) = f`(x_0) - [\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}] \times g`(x)}$

Então, $\boldsymbol{H`(x_0) = f`(x_0) - [\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}] \times g`(x_0) = 0}$

o que permite concluir que existe um ponto $x_0 \in]\, x_1; x_2[$ tal que

$$\frac{\boldsymbol{f`(x_0)}}{\boldsymbol{g`(x_0)}} = \frac{\boldsymbol{f(b) - f(a)}}{\boldsymbol{g(b) - g(a)}}$$

Uma aplicação importante deste teorema é relativa ao levantamento de indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$
como veremos a seguir.

Corolário (Regra de Cauchy)

*Sejam **f** e **g** duas funções diferenciáveis em $]a; b[$ (a, b finitos ou não) e verificando as seguintes condições:*

a) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = +\infty.$

b) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ *ou* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = +\infty.$

Nestas condições, se existir $\lim_{x\to a} \frac{\mathbf{f`(x)}}{\mathbf{g`(x)}}$, $\mathbf{g`(x) \neq 0}$, *então também existe* $\lim_{x\to a} \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}}$,

e estes dois limites são iguais, ou seja $\lim_{x\to a} \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}} = \lim_{x\to a} \frac{\mathbf{f`(x)}}{\mathbf{g`(x)}}$, $\mathbf{g`(x) \neq 0}$

Exemplos:

(1) *Calcule o seguinte limite:* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathbf{\log x}}{\mathbf{2x+1}}$

Calculando directamente, obtemos uma indeterminação do tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathbf{\log x}}{\mathbf{2x+1}}=\frac{\mathbf{\log(\infty)}}{\mathbf{2(\infty)+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Aplicando a regra de Cauchy podemos escrever: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathbf{\log x}}{\mathbf{2x+1}}\overset{\mathbf{Cauchy}}{\triangleq}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{[\mathbf{\log x}]`}{[\mathbf{2x+1}]`}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}}{\mathbf{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2x}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\infty}}=\mathbf{0}$$

(2) *Calcule o seguinte limite:* $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\mathbf{x^2-sen^2(x)}}{\mathbf{x^3}}$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\mathbf{x^2-sen^2(x)}}{\mathbf{x^3}}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+0}\frac{\mathbf{x^2-sen^2(x)}}{\mathbf{x^3}}\overset{\mathbf{Cauchy}}{\triangleq}\lim_{x\to+0}\frac{[\mathbf{x^2-sen^2(x)}]`}{[\mathbf{x^3}]`}$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\mathbf{2x-2sen(x)cos(x)}}{\mathbf{3x^2}}=\lim_{x\to+0}\frac{\mathbf{2x-sen(2x)}}{\mathbf{3x^2}}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+0}\frac{\mathbf{2x-sen(2x)}}{\mathbf{3x^2}}\overset{\mathbf{Cauchy}}{\triangleq}\lim_{x\to+0}\frac{[\mathbf{2x-sen(2x)}]`}{[\mathbf{3x^2}]`}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\mathbf{2-2cos(2x)}}{\mathbf{6x}}\overset{\mathbf{Cauchy}}{\triangleq}\lim_{x\to+0}\frac{\mathbf{4sen(2x)}}{\mathbf{6}}=\frac{\mathbf{4sen(2\times 0)}}{\mathbf{6}}=\frac{\mathbf{4\times 0}}{\mathbf{6}}=\mathbf{0}$$

Exercícios de aplicação

(1) Ache aplicando a definição, para cada uma das seguintes funções: a **função derivada**, **o valor da derivada**, **e a equação da recta tangente**, nos pontos indicados:

a) $\boldsymbol{f(x)}=7\mathrm{x}+2$, no ponto $\mathbf{x=5}$ b) $\boldsymbol{g(x)=3x^2-2x}$**,** no ponto $\mathbf{x=2}$.

c) $\boldsymbol{h(x) = x^2 - 5x + 6}$**,** no ponto $\mathbf{x = 4}$

d) $\boldsymbol{i(x) = \frac{2}{x}}$**,** no ponto $\mathbf{x = 1}$

e) $\boldsymbol{j(x) = x^3}$**,** no ponto $\mathbf{x = 3}$

f) $\boldsymbol{k(x) = 2\sqrt[3]{x}}$**,** no ponto $\mathbf{x = 2}$

(2) Ao fim de $\boldsymbol{t}$ segundos um carro de madeira descendo um plano inclinado percorreu um espaço, em metros, dado pela seguinte lei de movimento: $\boldsymbol{S(t)} = 2\mathrm{t}^2 - 2\mathrm{t}$.

Supondo que o carro estava equipado com um velocímetro, qual era a velocidade que este indicaria ao fim de **3** segundos, ou seja, qual era a velocidade instantânea para $\mathrm{t} = 3$ s?

(3) Considere a função $\boldsymbol{h(x) = |x + 2|}$**.**

a) Mostre que h é contínua em $\boldsymbol{x = -2}$**.**

b) Averigúe se existe $\boldsymbol{h`(-2)}$**.**

c) Determine $\boldsymbol{h`(4)}$**.** A função $\boldsymbol{h}$ é contínua em $\boldsymbol{x = 4}$**? Justifique.**

(4) Ache a declividade da recta tangente às seguintes curvas, no ponto $\boldsymbol{x = 1}$**.**

a) $\boldsymbol{n(x) = 8 - 5x^2}$ **b)** $\boldsymbol{p(x) = \frac{2}{x+3}}$

(5) Calcule os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\operatorname{cotg}(\frac{x}{3})}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2^{2-x}-1}{2-x}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)-1}{2x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^4}}{x^3+4}$ **e)** $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+1}{\operatorname{Ln}(x)}$ **f)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{e^{x^2}-1}$

(6) Calcule $\frac{dy}{dx}$ por diferenciação implícita:

a) $\mathbf{x^2 + y^2 = 25}$ b) $\mathbf{5x - x^2y^2 = 2y}$ c) $\mathbf{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1}$

(7) Verifique a validade das condições do teorema de Cauchy para as funções $f(x) = x^2 + 2x$ e $g(x) = 6x - 2$ no Intervalo $[0; 1]$, caso seja válido

(8) Considere a função $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$. Aplicando o conceito de derivadas, responda as seguintes questões:

a) Faça o estudo da monotonia da função f;

b) Determine os pontos máximo e mínimo relativos de f

c) Faça o estudo da concavidade da função f;

d) Determine o ponto de inflexão de f;

e) Determine os zeros de f;

f) Esboce o gráfico de f.

(9) Considere a função $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[3]{(x-3)^2}}$. Verifique a validade do teorema de Rolle no segmento $[1; 4]$, caso seja válido, determine o valor de x_0 correspondente.

(10) Considere a função $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 6x}$. Verifique a validade do teorema de Lagrange no segmento $[\mathbf{1}; \mathbf{4}]$, caso seja válido, determine o valor de x_0 correspondente.

(11) Achar as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = (2x-1)^{\frac{3}{2}} - 2x^2 + \frac{7}{4}x$ b) $g(x) = 2^{4x^3} \times \frac{\cos(6x)}{12}$ **c)** $h(x) = \sqrt[3]{(x^2-4x)^2}$

d) $i(z) = \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}$ e) $j(x) = \frac{sen(x)+\cos(x)}{sen(x)-\cos(x)}$ f) $l(x) = x^3 \times Ln(9x)$

(12) Sendo dada a função $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[3]{(x^2-4)^2}}$, para que valor(**es**) de $x \in [-3; 3]$, a função não é derivável?

Fim

4.10 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

a) B. P. DEMIDOVITCH. **Problemas e Exercícios de Análise Matemática**, Moscovo, Editora Mir, 4ª Edição, 1977.

b) FRANK AYRES JR. & ELIOT MENDELSON. **Teoria e Problemas de CÁLCULO**, 4a Edição, Colecção SCHAUM, Bookman, São Paulo, 2007

c) NEVES, Maria augusta Ferreira; BRITO, Maria Luísa Carvalho. **MATEMÁTICA. Livro de texto.** 11º ano, 2º Volume. Porto Editora, S.D., p. 169 -184.

d) RODRIGUES, Bárbara, MENEGHETTI, Cinthya; POFFAL, Cristiana. **Continuidade de funções reais de uma variável**. 1ª Edição, T. Editora de Furg. Rio Grande. 2016

e) https://www.youtube.com/watch?v=nZ6wTYKCP6E

f) www.omatemmático.com

Nota: Caro estudante, consulte outras fontes relacionadas!