电子科技大学

电子科学与工程学院
（示范性微电子学院）
School of Electronic Science and Engineering
(National Exemplary School of Microelectronics)

量子噪声建模工作总结

何松桓 崔逸飞

2024/9/13

一、目前的错误模型

错误模型

- 1.测量错误：提取每个qubit的测量错误，添加到仿真模型中
- 2.退相干错误：提取每个Qubit的T1，T2时间，应用amplitude and phase damping channel

$$\mathcal{E}_{AD} \circ \mathcal{E}_{PD}(\rho) = \mathcal{E}_{PD} \circ \mathcal{E}_{AD}(\rho).$$

$$E_1^D = E_1^{PD} E_1^{AD} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p_{AD}}\sqrt{1-p_{PD}} \end{bmatrix}$$

$$E_2^D = E_1^{PD} E_2^{AD} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{p_{AD}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_3^D = E_2^{PD} E_1^{AD} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p_{AD}}\sqrt{p_{PD}} \end{bmatrix}$$

- 其中，$e^{-t/T1} = 1 - P_{AD}$，$e^{-t/T2} = \sqrt{(1-P_{AD})(1-P_{PD})}$

*What is the connection between quantum thermal relaxation and phase and amplitude damping? - Physics Stack Exchange

退相干错误

- **采用Pauli Twirling技术，将退相干噪声转换成不对称的depolarizing channel**

$$\epsilon_{\mathrm{PT}}(\rho) = \frac{1}{4} \sum_{A \in 1-X,Y,Z} A^{\dagger} \epsilon(A \rho A^{\dagger}) A.$$

$$p_X = p_Y = \frac{1 - e^{-t/T_1}}{4},$$

$$p_Z = \frac{1 - e^{-t/T_2}}{2} - \frac{1 - e^{-t/T_1}}{4},$$

[1] Low-distance surface codes under realistic quantum noise
[2] Efficient error models for fault-tolerant architectures and the Pauli twirling approximation

其他错误

- 3. 由于退相干错误不能包含门的全部错误，为补偿其他错误，添加对称的depolarizing channel

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{depol} \circ \mathcal{E}_{relax}$$

- 首先，根据amplitude and phase damping channel计算该通道的保真度

$$\overline{F}(\mathcal{E}_p) = \int \langle\psi|\mathcal{E}_p(|\psi\rangle\langle\psi|)|\psi\rangle d\psi$$

- 再提取IBM每个qubit上，各个门的保真度（由于IBM支持的基础门集不包含CZ门，目前的方法是将组成CZ门的基础门的错误率相乘，作为CZ门的错误率）

*programming - How good is basic_device_noise_model() simulating the noise in the quantum computer? - Quantum Computing Stack Exchange

其他错误

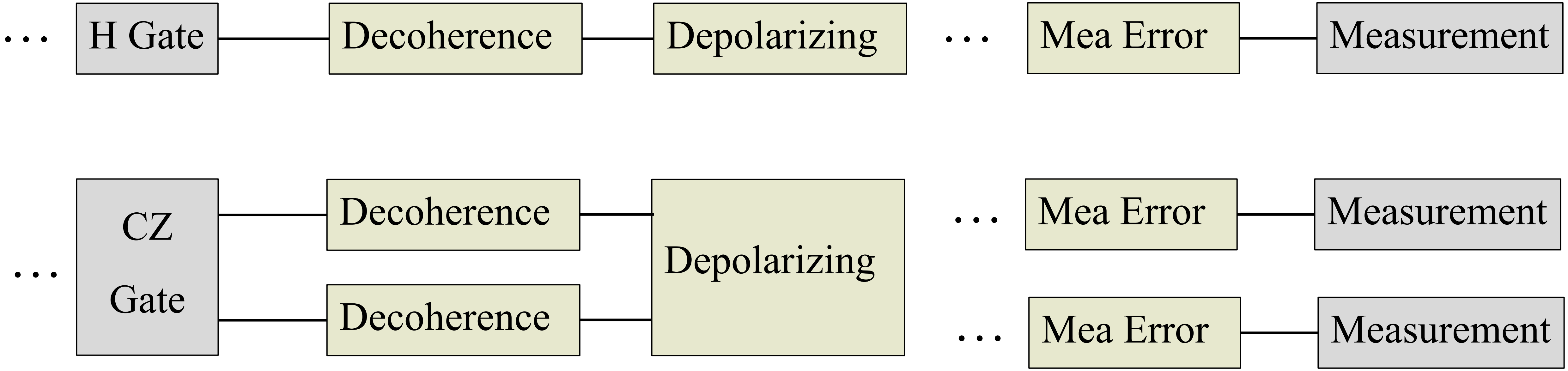
- **由各个门的保真度和退相干的保真度，计算depolarizing channel参数**

```
# For the n-qubit depolarizing channel E_dep = (1-p) * I + p * D, where
# I is the identity channel and D is the completely depolarizing
# channel. To compose the errors we solve for the equation
# F = F(E_dep * E_relax)
#   = (1 - p) * F(I * E_relax) + p * F(D * E_relax)
#   = (1 - p) * F(E_relax) + p * F(D)
#   = F(E_relax) - p * (dim * F(E_relax) - 1) / dim

# Hence we have that the depolarizing error probability
# for the composed depolarization channel is
# p = dim * (F(E_relax) - F) / (dim * F(E_relax) - 1)
```

*https://github.com/Qiskit/qiskit-aer/blob/5efea5735433ac4914e63b0ff866c6e10e881585/qiskit_aer/noise/device/models.py#L291

错误仿真图例



...
H Gate
Decoherence
Depolarizing
...
Mea Error
Measurement
...
CZ
Gate
Decoherence
Decoherence
Depolarizing
...
Mea Error
Measurement
...
Mea Error
Measurement

泄露噪声添加方式

- 假定泄露噪声仅发生于H门和CZ门后，若发生泄露，则其不参与后续错误，泄露比特的测量结果为随机结果

- 在每个门后，泄露比特有固定概率回退到随机的计算态

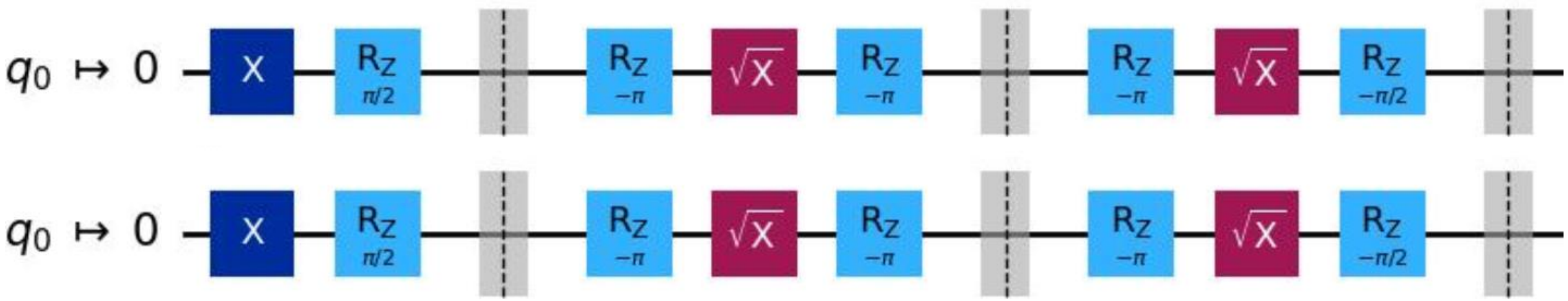
- 若CZ门发生在泄露比特和不泄露比特间，则不泄露比特在经过CZ门后将变成随机态

[3] Coping with qubit leakage in topological codes
Austin G. Fowler [1308.6642] Coping with qubit leakage in topological codes (arxiv.org)

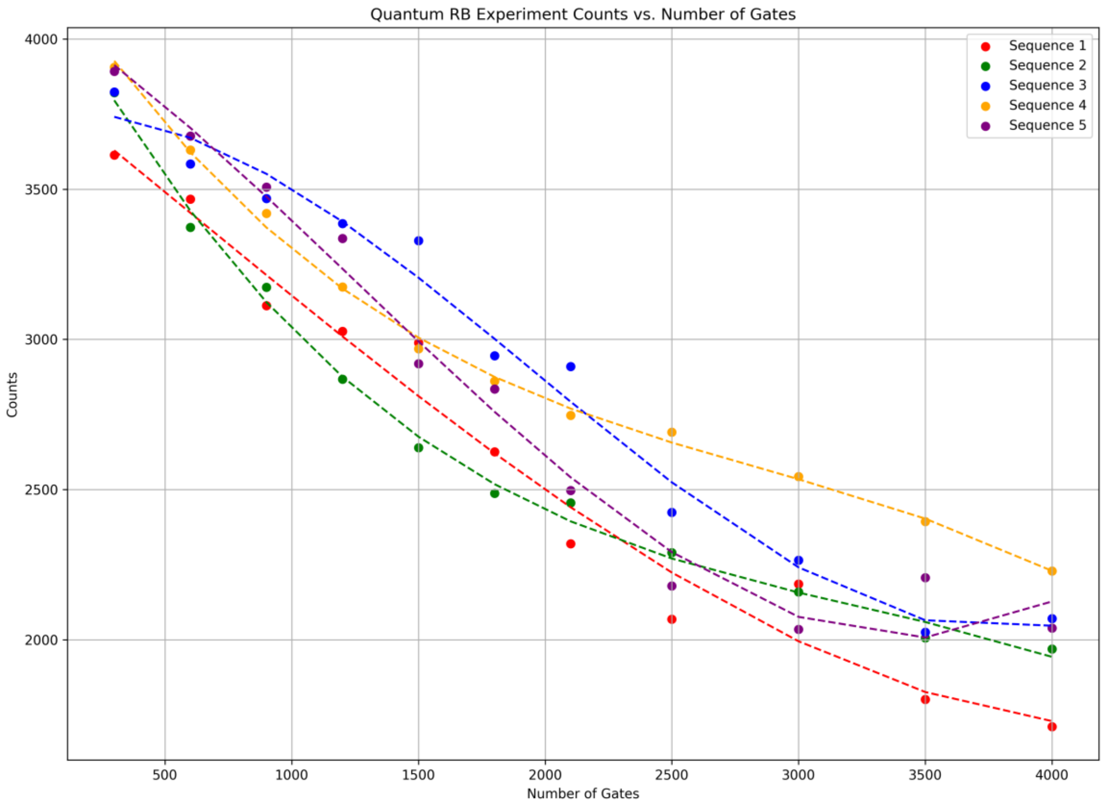
二、RB实验结果

单量子比特门RB实验

- 对相近的两个物理量子比特进行不同门序列以及不同门长度的RB实验（选择两个相近比特的目的是为了测量出串扰噪声对比特结果的影响）

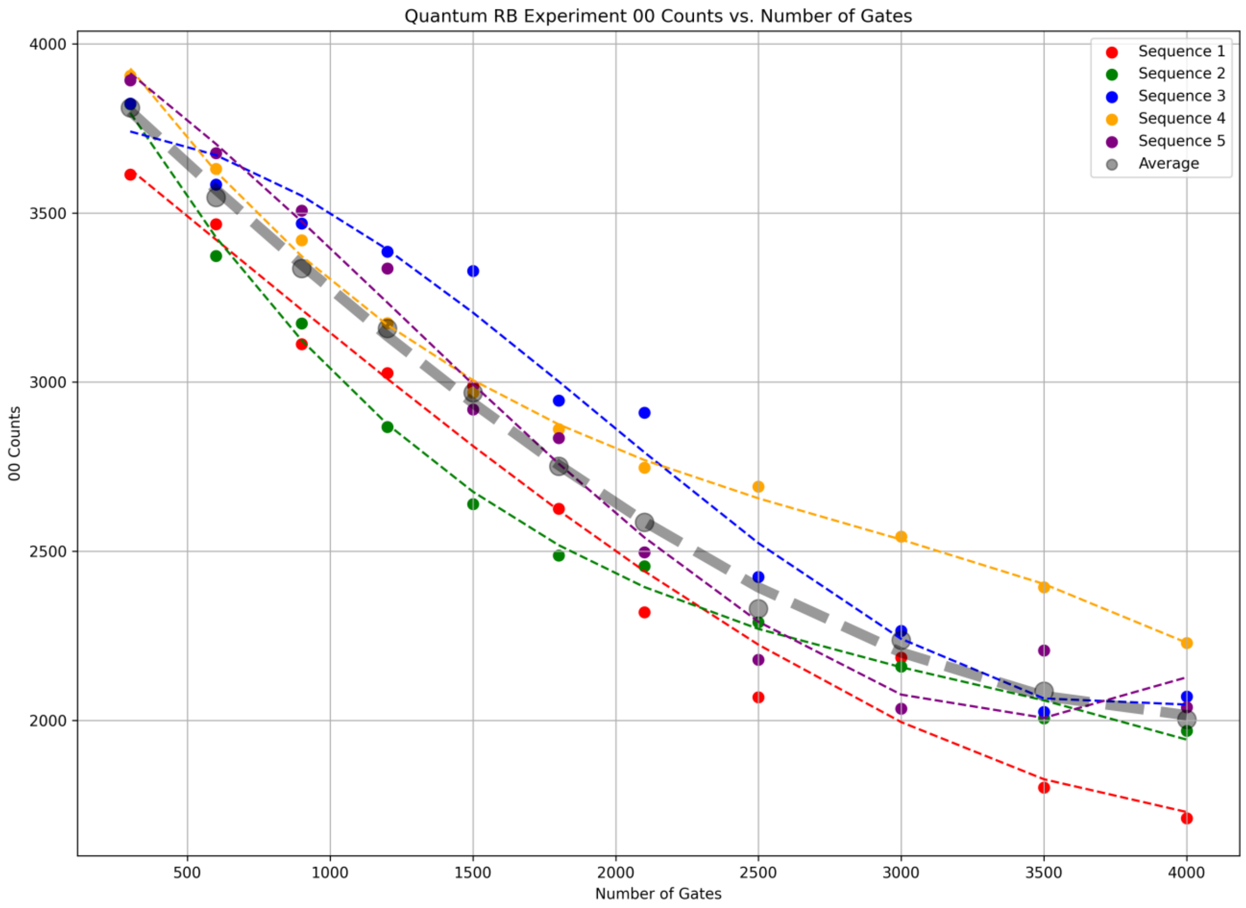


单量子比特门RB实验



- 五个不同随机门序列的IBM芯片测试结果，纵坐标是00状态的次数(即两个比特皆正确的结果)，每轮4096次。

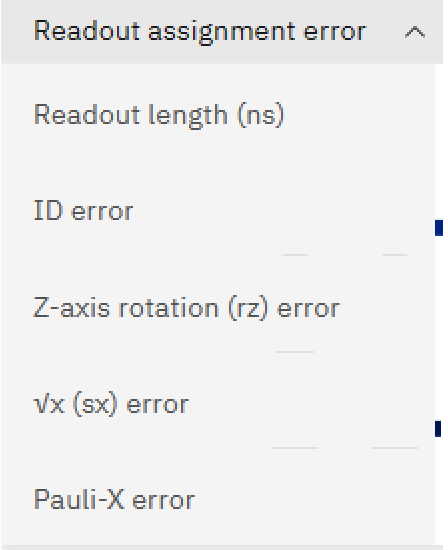
单量子比特门RB实验



Quantum RB Experiment 00 Counts vs. Number of Gates
4000
3500
3000
2500
2000
00 Counts
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
Number of Gates
Sequence 1
Sequence 2
Sequence 3
Sequence 4
Sequence 5
Average

单比特噪声仿真

- 电路级仿真：IBM对每个量子芯片的每个量子比特会有一个calibration，几个小时更新一次。
- 提取其中的参数：
- ①每个基础门（基础门构成单比特以及双比特门）的错误率



- 其中RZ相关的门错误率为0，因为IBM使用了“虚拟Z门”技术：*McKay D C, Wood C J, Sheldon S, et al. Efficient Z gates for quantum computing[J]. Physical Review A, 2017, 96(2): 022330.*

单比特噪声仿真

- ②测量错误率：

Prob meas0 prep1
Prob meas1 prep0

prob meas0 prep1 代表准备1状态而测量出0状态的概率
prob meas1 prep0 代表准备0状态而测量出1状态的概率

- ③相关时间参数:

T1 (us)
T2 (us)

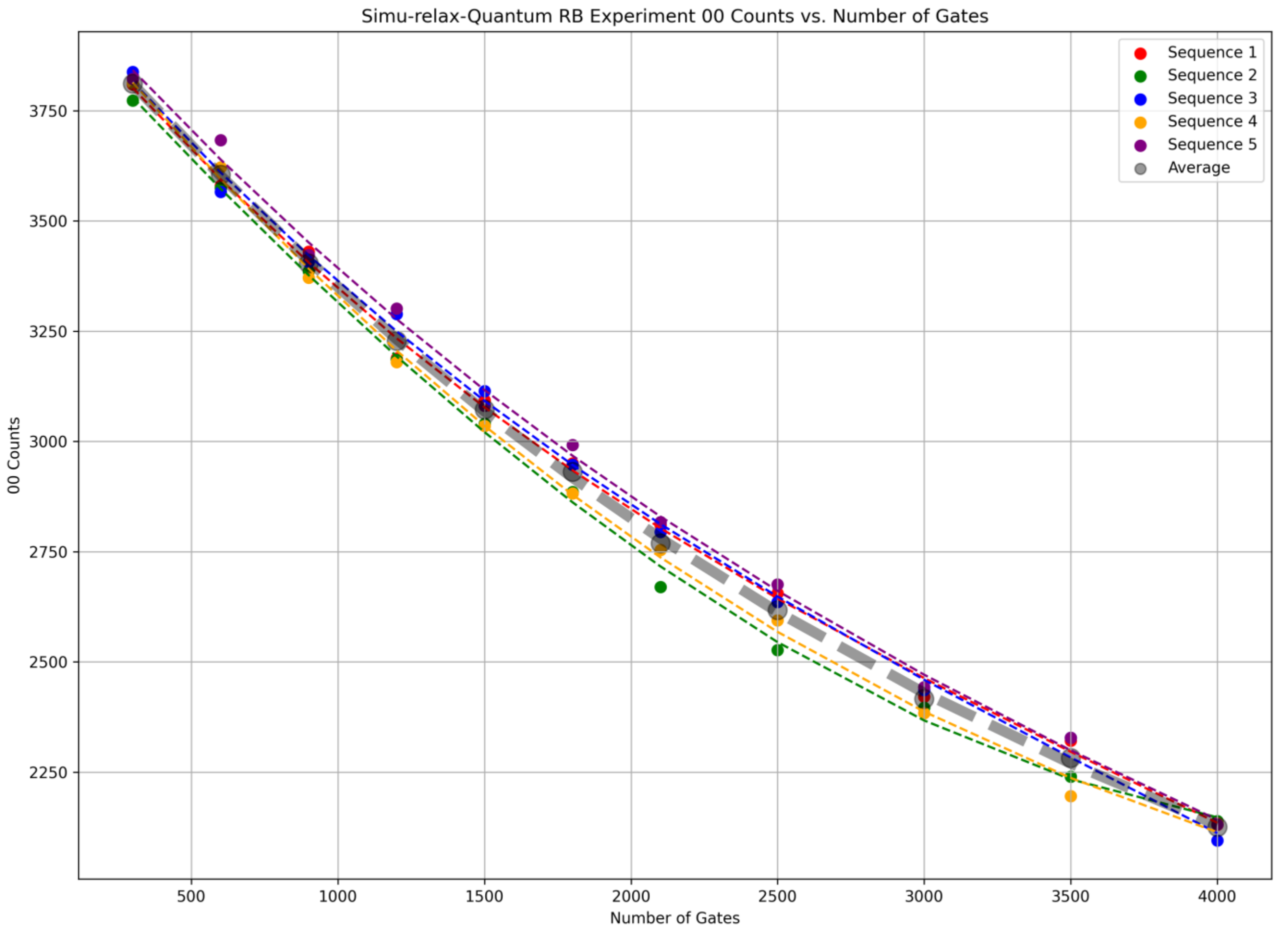
以及单比特门的执行时间t等

单比特噪声仿真（relax）

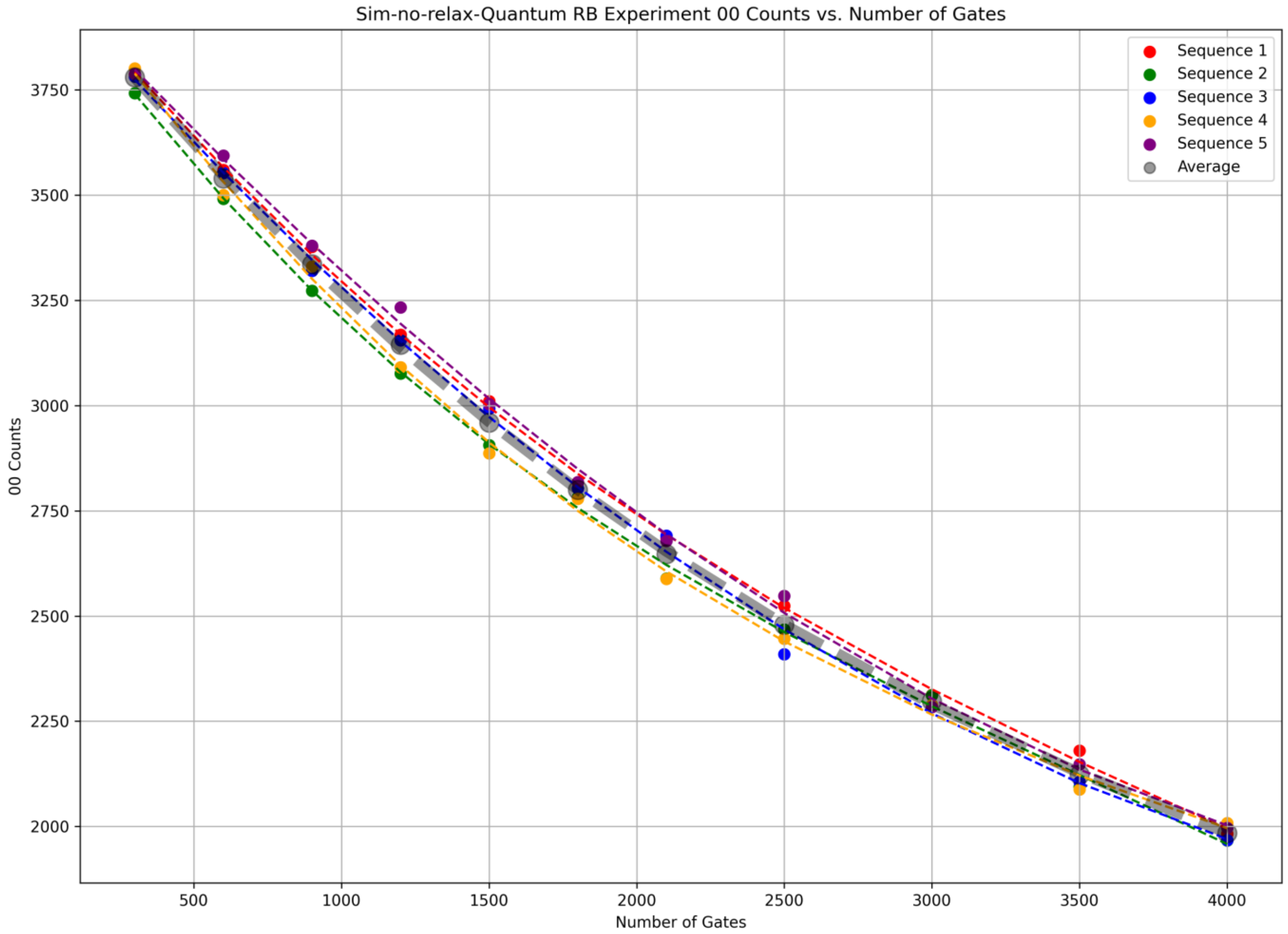
- Thermal relaxation（热弛豫），相当于是退相干噪声，由该比特的T1， T2时间以及门操作时间t决定。

- 理论上，在IBM所测得的基础门错误率中包含了Thermal relaxation 以及门本身的不完美忠诚度。现在，我们尝试把Thermal relaxation 以及门的不完美忠诚度分离并单独作用于每一个基础门，并与直接将基础门错误率作用于基础门的实验结果进行比较。

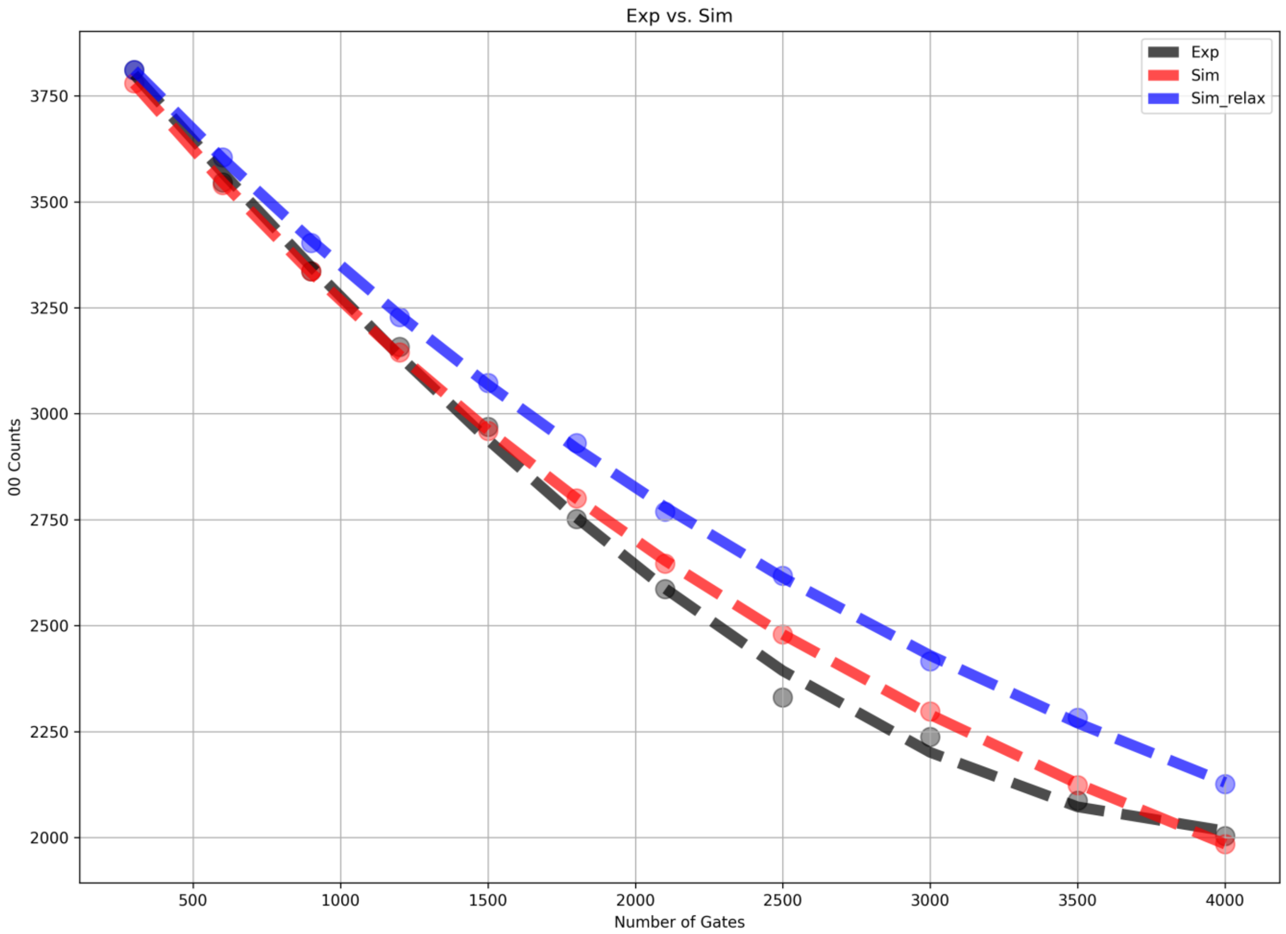
单比特噪声仿真（relax）



单比特噪声仿真（无relax）

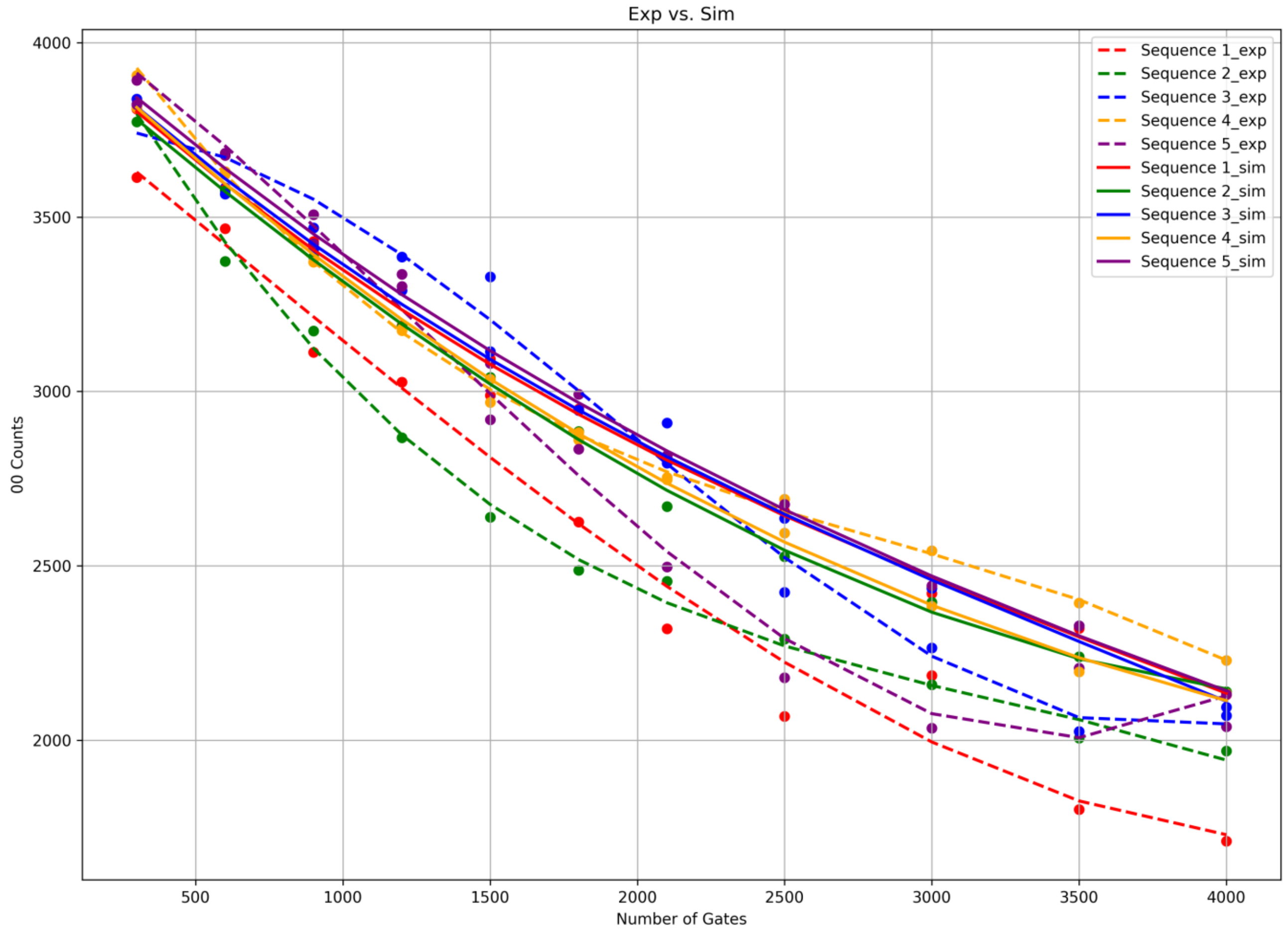


平均结果比较（准度）

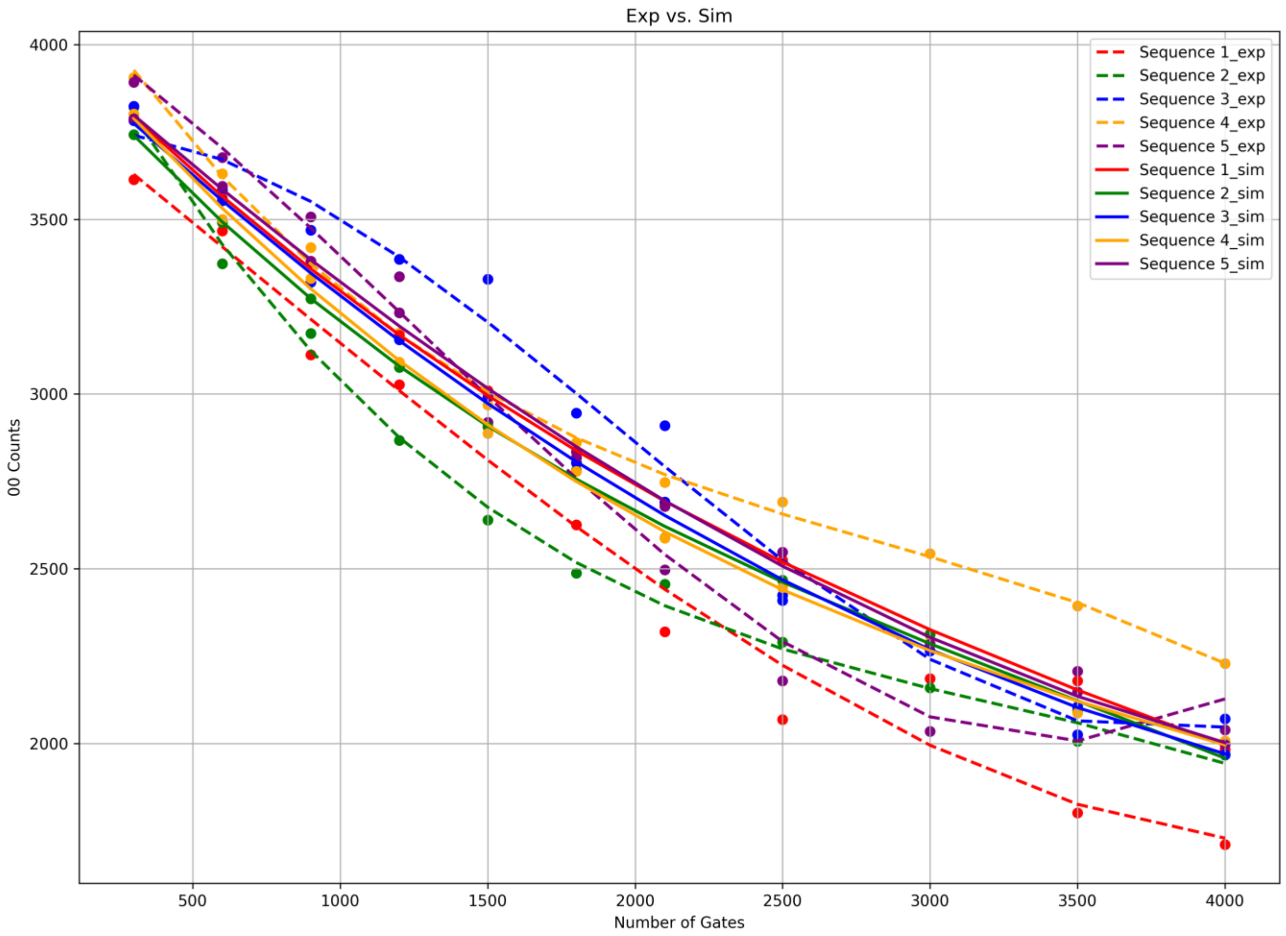


Exp vs. Sim
Exp
Sim
Sim_relax
3750
3500
3250
3000
2750
2500
2250
2000
00 Counts
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
Number of Gates

平均结果比较（散度）relax



平均结果比较（散度）无relax



小结

- **一、测量噪声：由于两种测量误差的概率相近且数值较小，在仿真结果中添加测量错误与不添加基本看不出区别。**

```
Prob_meas0_prep1_q107 = 0.01
Prob_meas1_prep0_q107 = 0.0066
```

0.0034 * 4096 ≈ 14

- **二、与relax模型相比，无relax模型的平均值更接近实验值，但无法严格证明（由于噪声时变）。**

- **三、由于仿真参数固定，仿真结果数值相对集中，在散度上与实验结果有较大差距。**

- **四、串扰的影响比较小，实验的平均曲线并没有与仿真平均曲线相差多少。**

噪声时间摆动

- 从实验结果得出，不同门序列的实验结果曲线会较大的上下摆动。理论上，门的序列的不同并不会造成如此大的摆动，所以我们考虑噪声是随时间变化的而不是一个固定的参数。IBM的calibration也证明了这一点：

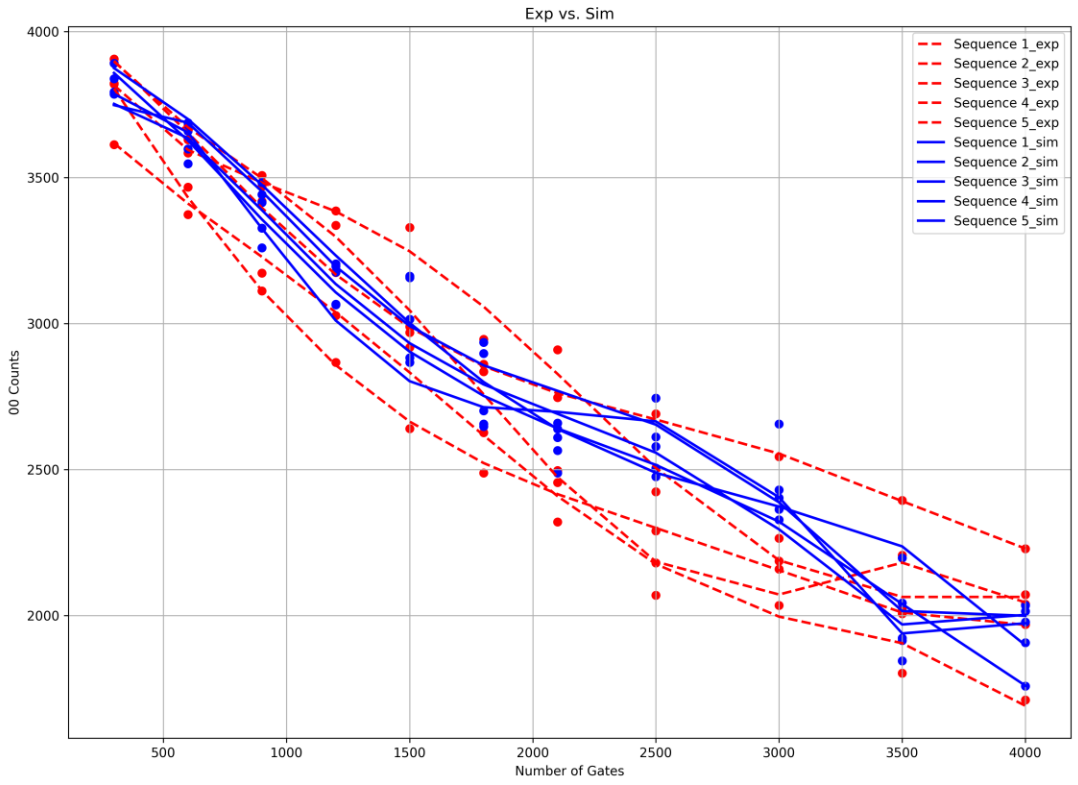
```
T1_q107 = 2.7544e-04
T2_q107 = 2.7484e-04
T1_q108 = 1.7391e-04
T2_q108 = 7.212e-05
F_q107 = 0.9998789
F_q108 = 0.999795'''
```

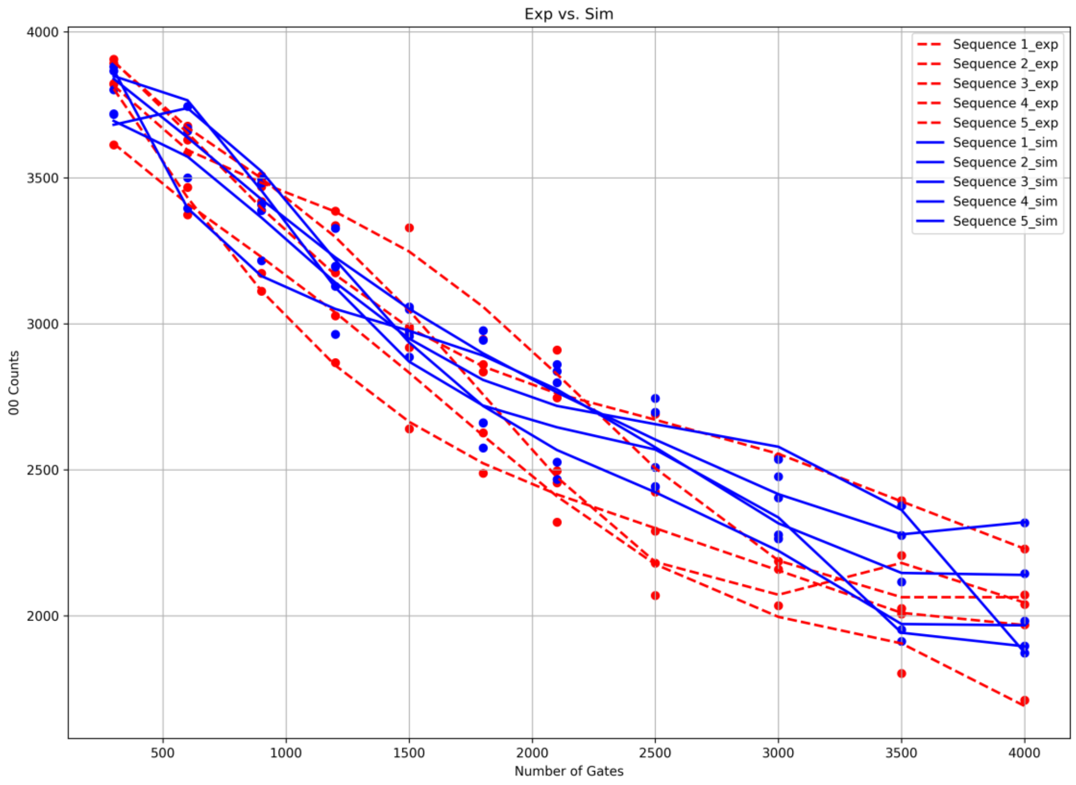
```
T1_q107 = 3.116e-04
T2_q107 = 2.8476e-04
T1_q108 = 1.2298e-04
T2_q108 = 7.173e-05
F_q107 = 0.9997854
F_q108 = 0.9997749'''
```

- 在不同时段的calibration结果显示，同一量子比特的基础门错误率可以相差1.7倍。

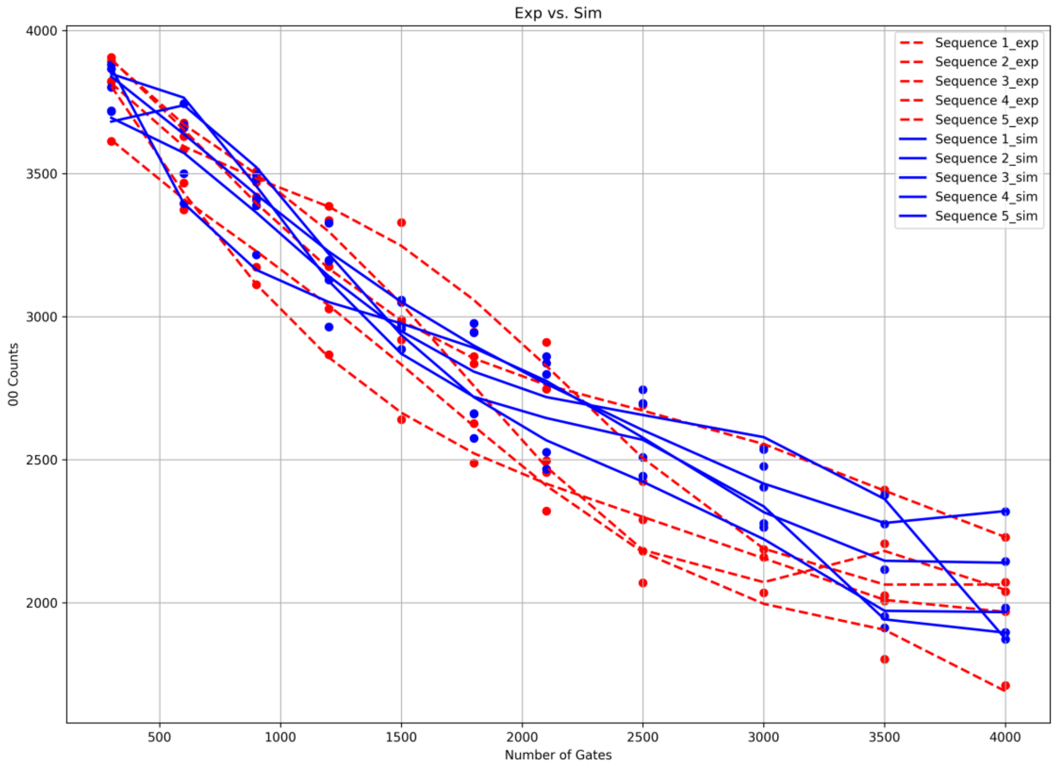
噪声时间摆动模型

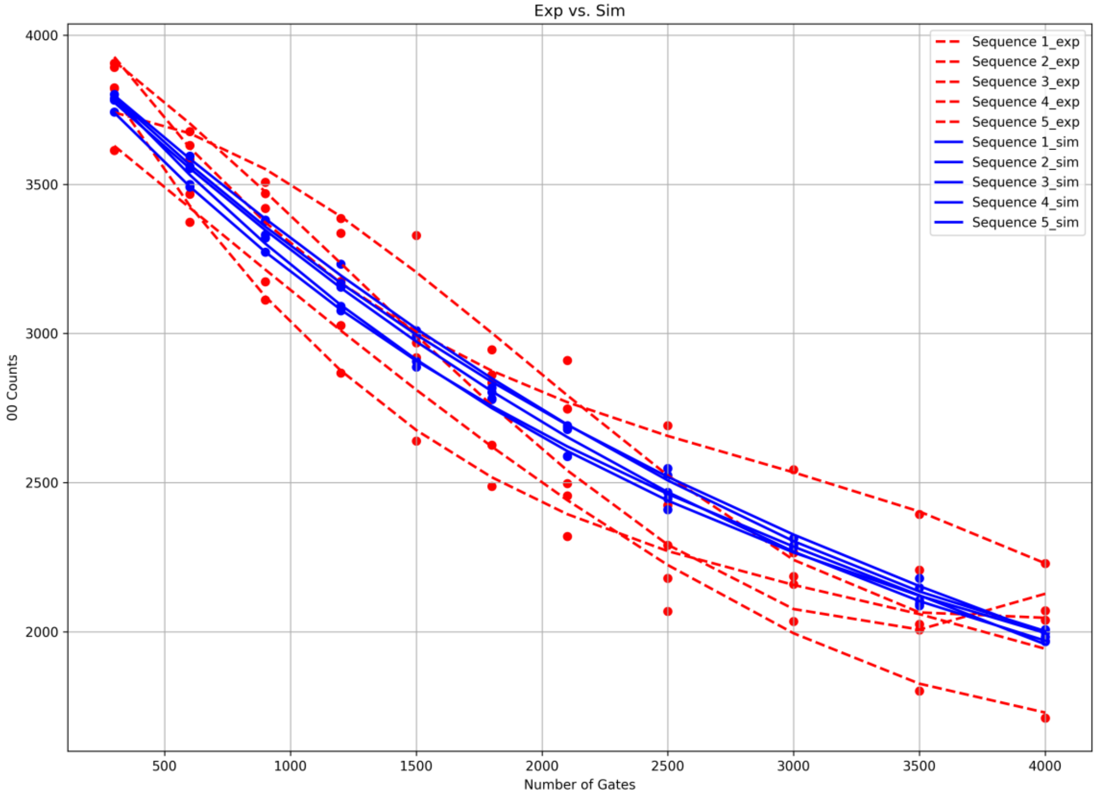
- 基于以上事实，尝试让噪声参数进行一定范围内摆动，仿真结果如下：





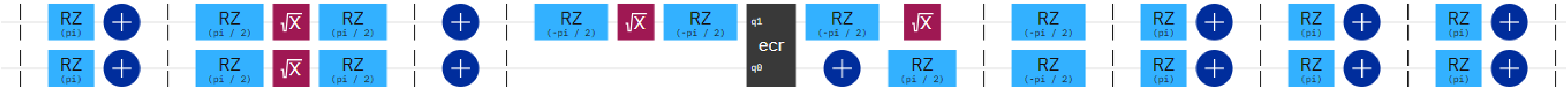
噪声时间摆动模型与无时间摆动模型比较



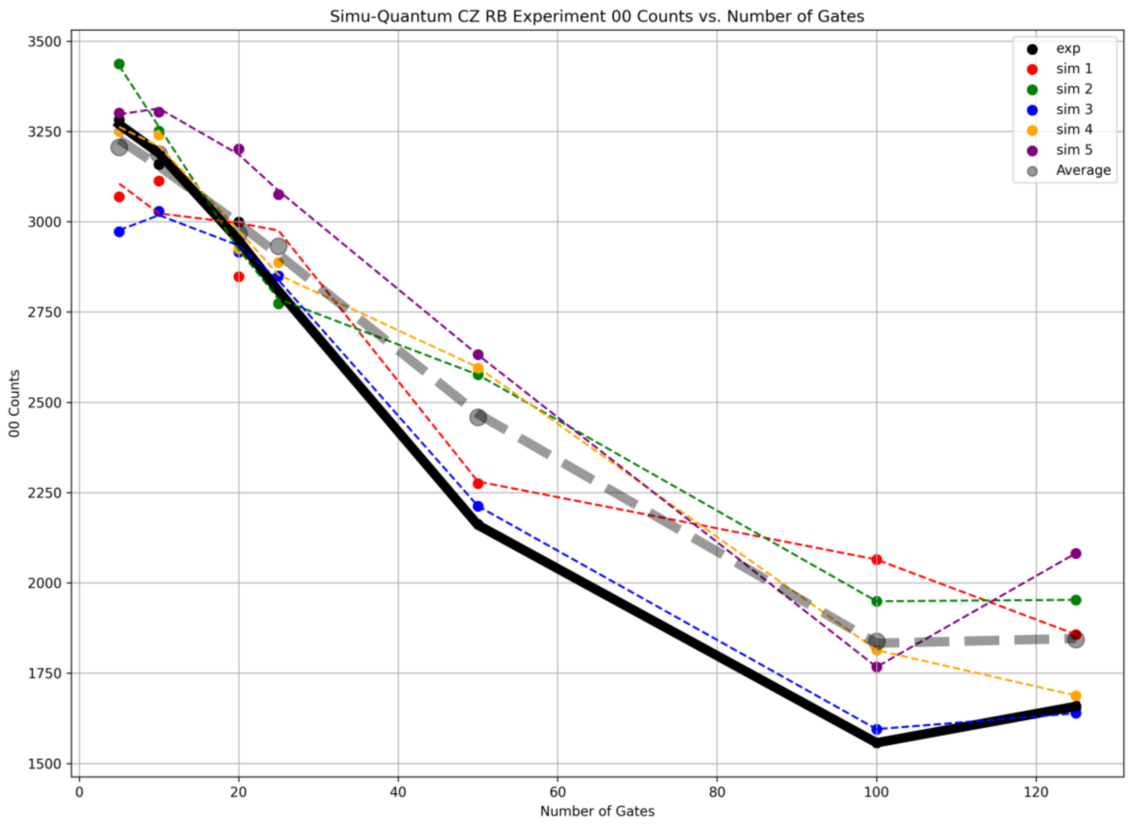


双比特量子门插入实验

- 在一固定序列固定长度的随机单比特量子门序列中，均匀插入一定个数的双比特门，在电路末尾同样加入反门，测量00状态的个数。



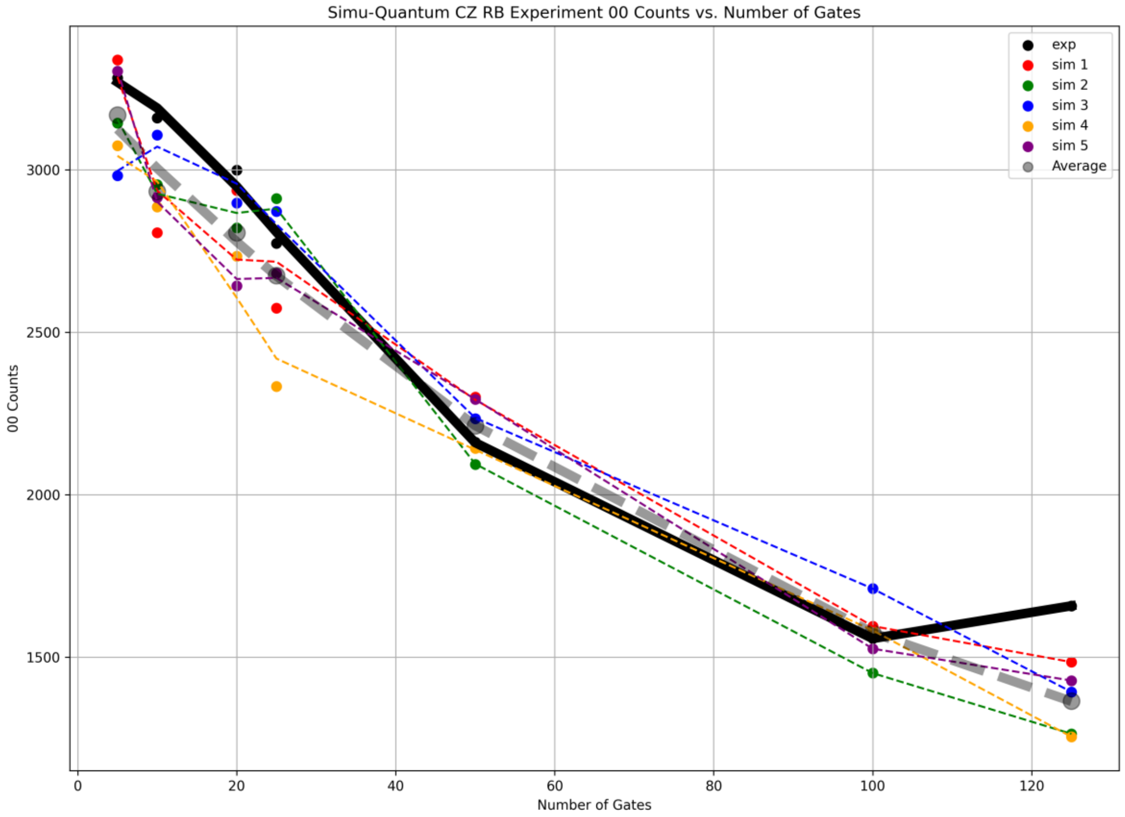
双比特门实验与仿真（无relax）对比



- 该仿真添加了噪声时变模型，横坐标是CZ门的个数。

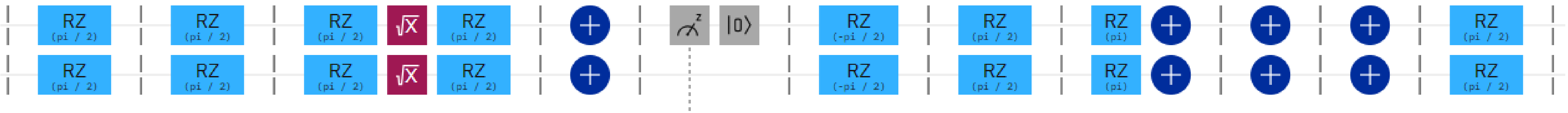
泄漏参数的添加仿真结果

- **由于，平均结果与实验结果差距较大，考虑CZ门的泄漏事件影响，添加p_leak_cz = 0.005参数。**



ID噪声实验

- 在surface code中，由于辅助量子比特在measure和reset时，数据量子比特通常处于空转状态，此时数据量子比特非常容易退相干。于是设计实验来观察数据比特的错误率。仿照双比特门插入实验，在一固定序列固定长度的随机单比特量子门序列中，均匀插入一定个数的measure和reset操作，数据量子比特加入反门，测量0状态个数。



ID噪声实验结果

```
0 Sequences
Job ID:cvc7nnpp7drg008sgrs0:Quantum RB Experiment with 5 num_measure: {'0': 2012, '1': 2084}Z-1   Z1
Job ID:cvcc5n6vawwg00890xmg:Quantum RB Experiment with 8 num_measure: {'0': 1208, '1': 2888}Z-1   Z1
Job ID:cvcdt2rvawwg008918d0:Quantum RB Experiment with 10 num_measure: {'0': 2271, '1': 1825}X1   X1
Job ID:cvcdy088w2g0008e8vhg:Quantum RB Experiment with 16 num_measure: {'0': 669, '1': 3427}Z-1   Z1
Job ID:cvcdyqtvawwg008918r0:Quantum RB Experiment with 20 num_measure: {'0': 2164, '1': 1932}Y-1  Y1
Job ID:cvcdzhew5350008wxyeg:Quantum RB Experiment with 25 num_measure: {'0': 3736, '1': 360}Z1    Z-1
Job ID:cvcga1gp7drg008shqpg:Quantum RB Experiment with 25 num_measure: {'0': 3660, '1': 436}
1 Sequence:
Job ID:cvcghbnw5350008wy520:Quantum RB Experiment with 5 num_measure: {'0': 1695, '1': 2401}Z-1  X1
Job ID:cvcgj0rw5350008wy530:Quantum RB Experiment with 8 num_measure: {'0': 2366, '1': 1730}Y-1  Y-1
Job ID:cvcgjmtz17rg008d2tzg:Quantum RB Experiment with 10 num_measure: {'0': 3192, '1': 904}Z1   X-1
Job ID:cvcgka5z17rg008d2v10:Quantum RB Experiment with 16 num_measure: {'0': 2065, '1': 2031}X1  Z1
Job ID:cvcgm1rvawwg00891ff0:Quantum RB Experiment with 20 num_measure: {'0': 2223, '1': 1873}Y-1  Y-1
Job ID:cvcgmvkz17rg008d2v5g:Quantum RB Experiment with 25 num_measure: {'0': 2122, '1': 1974}X-1  Z-1
2 Sequence:
Job ID:cvcgnqe8w2g0008e9350:Quantum RB Experiment with 5 num_measure: {'0': 2483, '1': 1613}Z1  X-1
Job ID:cvcgpa9kmd10008pn6kg:Quantum RB Experiment with 8 num_measure: {'0': 1959, '1': 2137}X-1  Z-1
Job ID:cvcgpybkmd10008pn6mg:Quantum RB Experiment with 10 num_measure: {'0': 2028, '1': 2068}X1  Z1
Job ID:cvcgqkevawwg00891fr0:Quantum RB Experiment with 16 num_measure: {'0': 2246, '1': 1850}X1  Z1
Job ID:cvcgrbsz17rg008d2vbg:Quantum RB Experiment with 20 num_measure: {'0': 2372, '1': 1724}Y-1  Y-1
Job ID:cvcgs648w2g0008e938g:Quantum RB Experiment with 25 num_measure: {'0': 1996, '1': 2100}X-1  Z-1
```

- **无法得出有效结论，猜测是因为measure和reset操作带入了其他噪声导致结果难以解释。**

*How to measure and reset a qubit in the middle of a circuit execution | IBM Quantum Computing Blog

ID噪声实验结果

- measure与reset的操作时间理应为

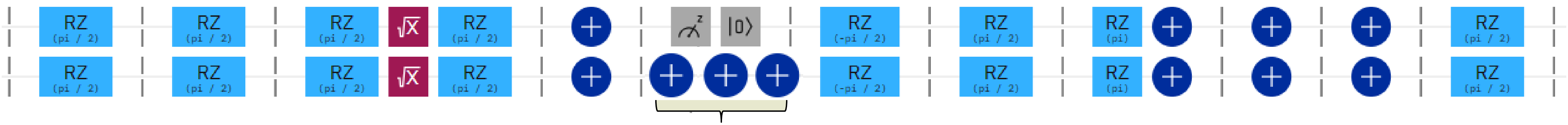
```
reset_t = 1.3013333333333333e-06
readout_t = 1.2444444444444443e-06
```

该结果由IBM给出，可实际实验中发现，每多添加一次measure与reset的操作，实验时间大概会增加2s。

☐	cvcgmvkz17rg008d2v5g	Completed	05 Sep 2024	05 Sep 2024	48s
☐	cvcgm1rvawwg00891ff0	Completed	05 Sep 2024	05 Sep 2024	40s
☐	cvcgka5z17rg008d2v10	Completed	05 Sep 2024	05 Sep 2024	33s
☐	cvcgjmtz17rg008d2tzg	Completed	05 Sep 2024	05 Sep 2024	21s
☐	cvcgj0rw5350008wy530	Completed	05 Sep 2024	05 Sep 2024	18s
☐	cvcghbnw5350008wy520	Completed	05 Sep 2024	05 Sep 2024	12s

ID噪声干预

- 为了减少ID噪声对数据比特的影响，我们可以在辅助比特measure与reset期间对数据比特添加一定数量的X门以防止数据比特进入空转状态。可以做实验验证该方法的测量结果



n个X门

- 由于每月的使用时间限制，只能等下一个月再做实验。

Workloads

Track the status and results of the workloads you have run on IBM Quantum resources via the instance **ibm-q/open/main.**

Monthly usage
10m 2s used / 10m

ⓘ **Qiskit Runtime no longer supports V1 primitives since 15 August 2024.** Learn More ↗

三、模型验证方式

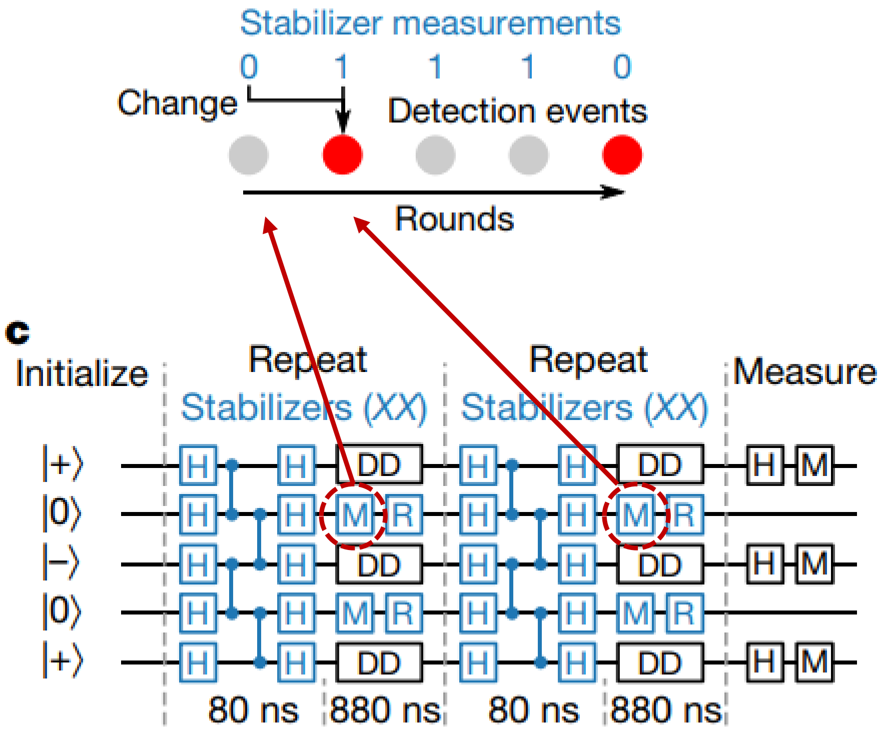
Detection Event

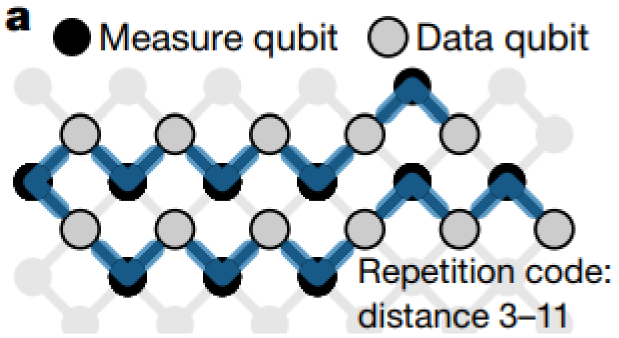
- 用于纠错码解码的数据，实际为每一轮测量子的测量结果

- 判断噪声模型是否有效，可看其所产生的测量子症状的样式，是否与实验获得的一致，这可以通过分析Detection Event的统计性质实现

Detection Event

- **Detection Event（Error）表示前后两次测量子测量结果不一致的事件**



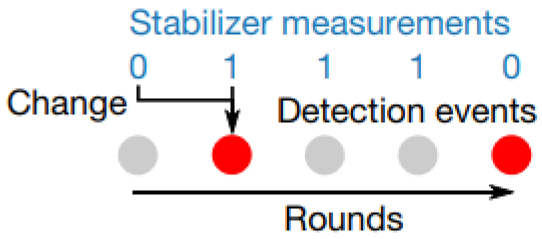


Repetiton Code Circuit

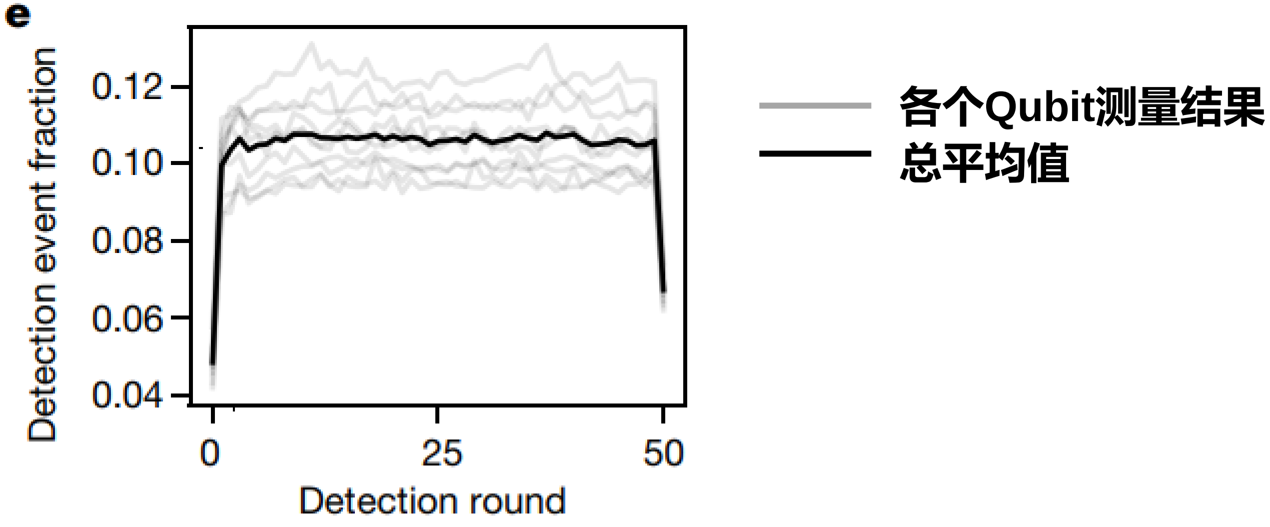
[4] Google Quantum AI. Exponential suppression of bit or phase errors with cyclic error correction. Nature 595, 383–387 (2021). https://doi.org/10.1038/s41586-021-03588-y

Detection Event

- **Detection Event表示前后两次测量子测量结果不一致的事件**

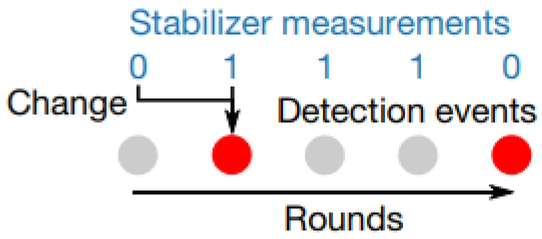


- **Detection Event Fraction表示发生此种事件的次数占总实验次数的比率**



Detection Event

- **Detection Event表示前后两次测量子测量结果不一致的事件**

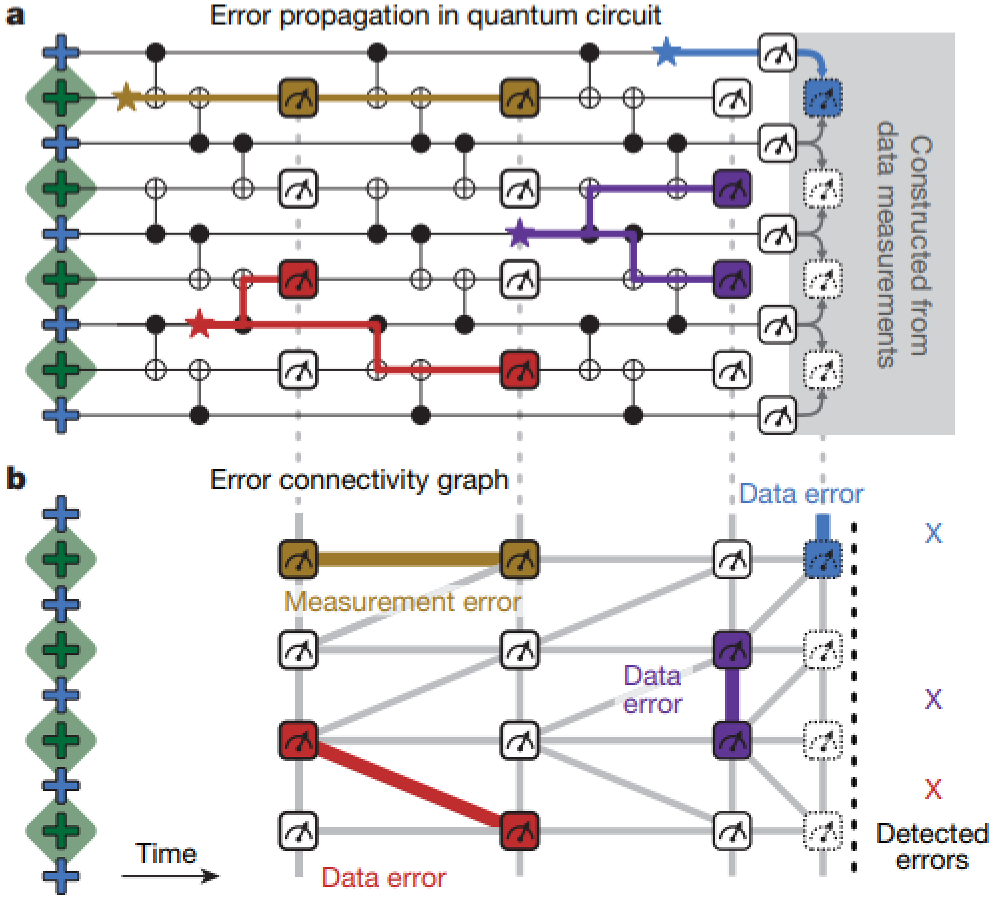


- **由于每一轮结束后测量子都会重新置零，测量结果不一致表示两次测量间有错误发生，其中，错误可分为三种类型**

Detection Pair错误类型

- 错误可分为三种类型，分别是spacelike pair，timelike pair，和spacetimelike pair

- Spacelike pair表示由于data qubit出现错误，同一轮中相邻两个测量子的测量结果发生改变，即发生detection error，如右图紫色线条所示

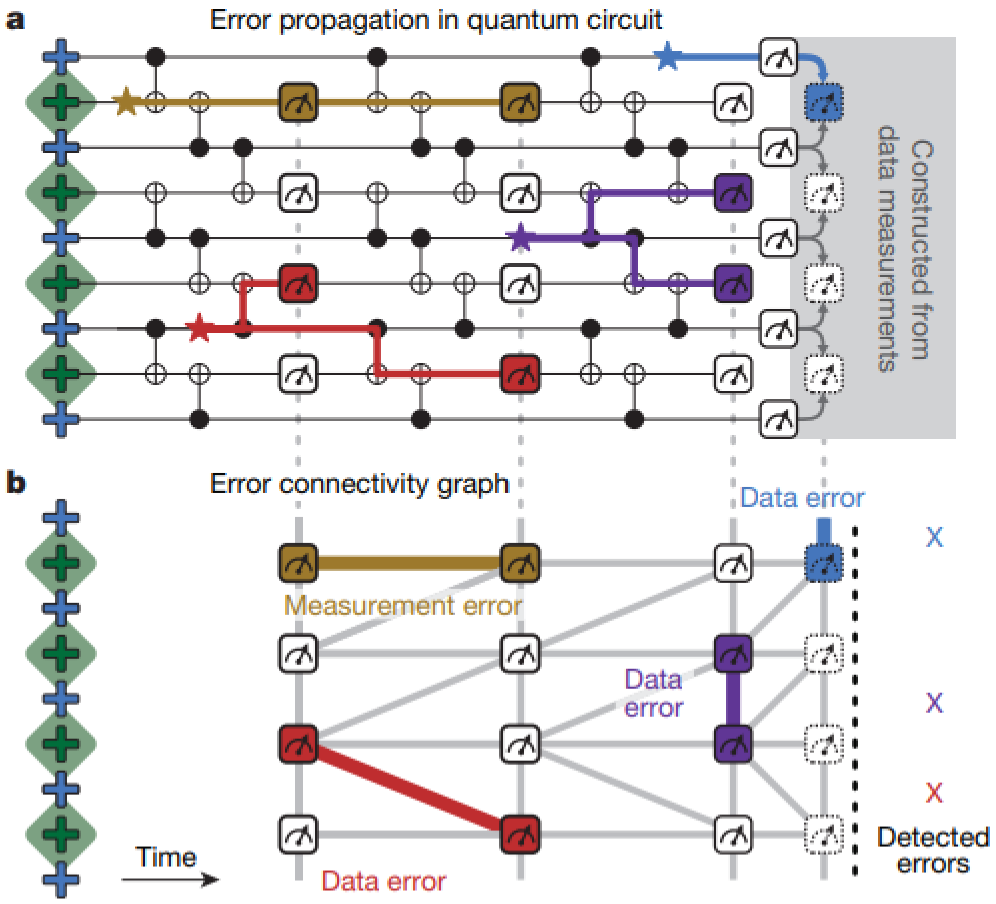


[5] Kelly, J., Barends, R., Fowler, A. et al. State preservation by repetitive error detection in a superconducting quantum circuit. Nature 519, 66–69

Detection Pair错误类型

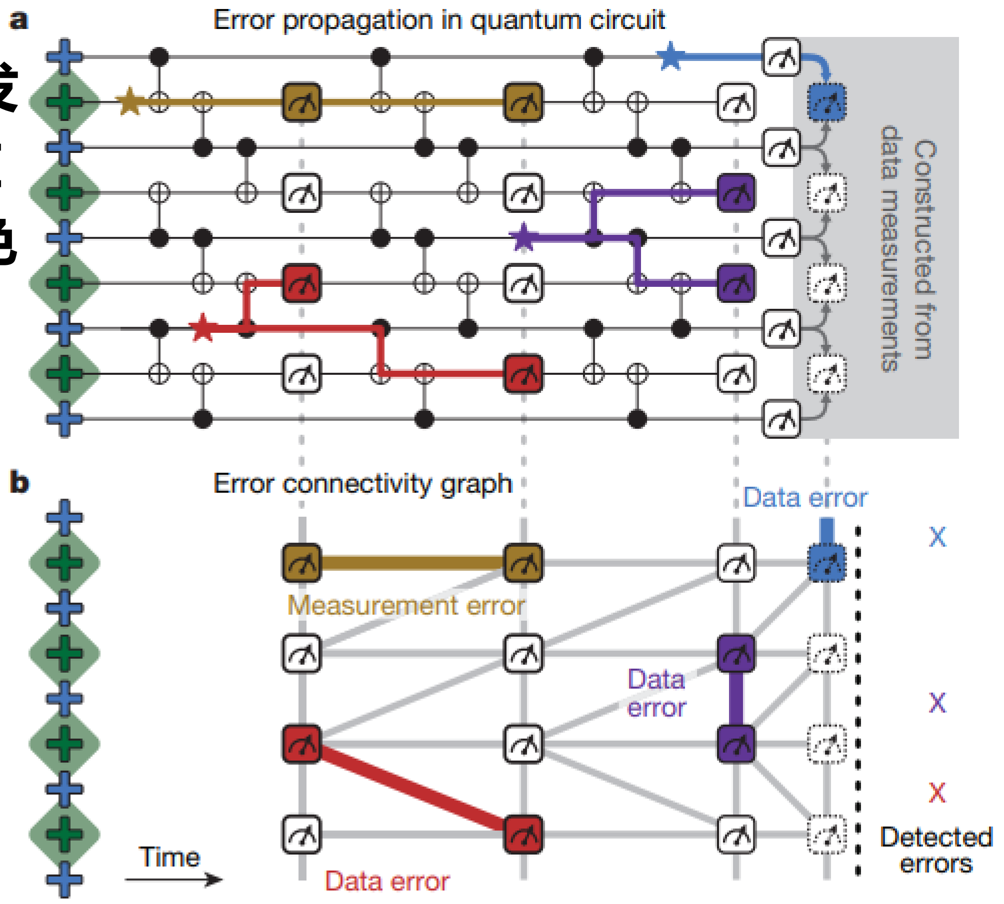
- 错误可分为三种类型，分别是spacelike pair，timelike pair，和spacetimelike pair

- Timelike pair表示由于measure qubit发生错误，其测量的结果在连续两轮出现detection errors，如右图棕色线条所示



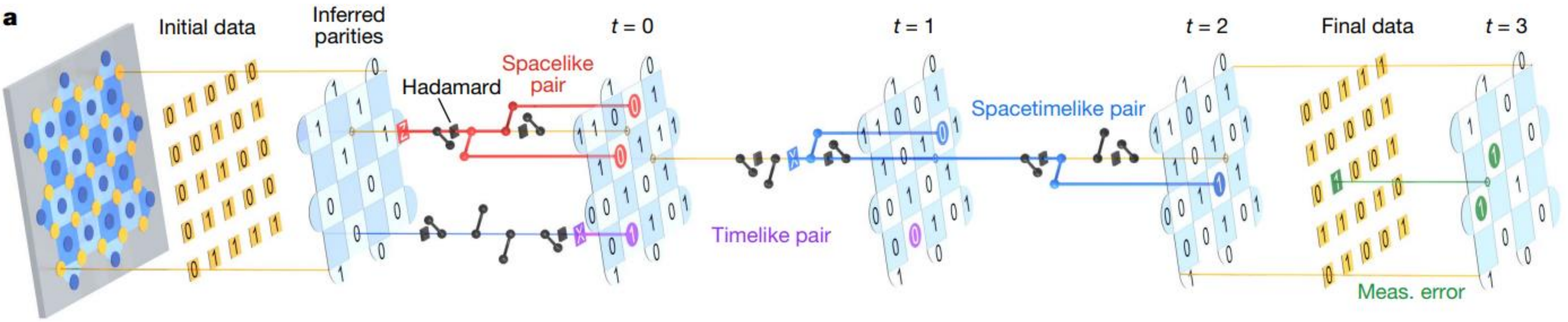
Detection Pair错误类型

- 错误可分为三种类型，分别是spacelike pair，timelike pair，和spacetimelike pair
- Spacetimelike pair表示data qubit在cz门间发生错误，该错误使得测得的detected errors在空间和时间上都有1个单位的偏移，如右图红色线条所示



Detection Pair错误类型

- 与Repetition Code一致，Surface Code也存在三种pair error



[6] Google Quantum AI. Suppressing quantum errors by scaling a surface code logical qubit. Nature 614, 676–681 (2023). https://doi.org/10.1038/s41586-022-05434-1

Correlations in error detection events

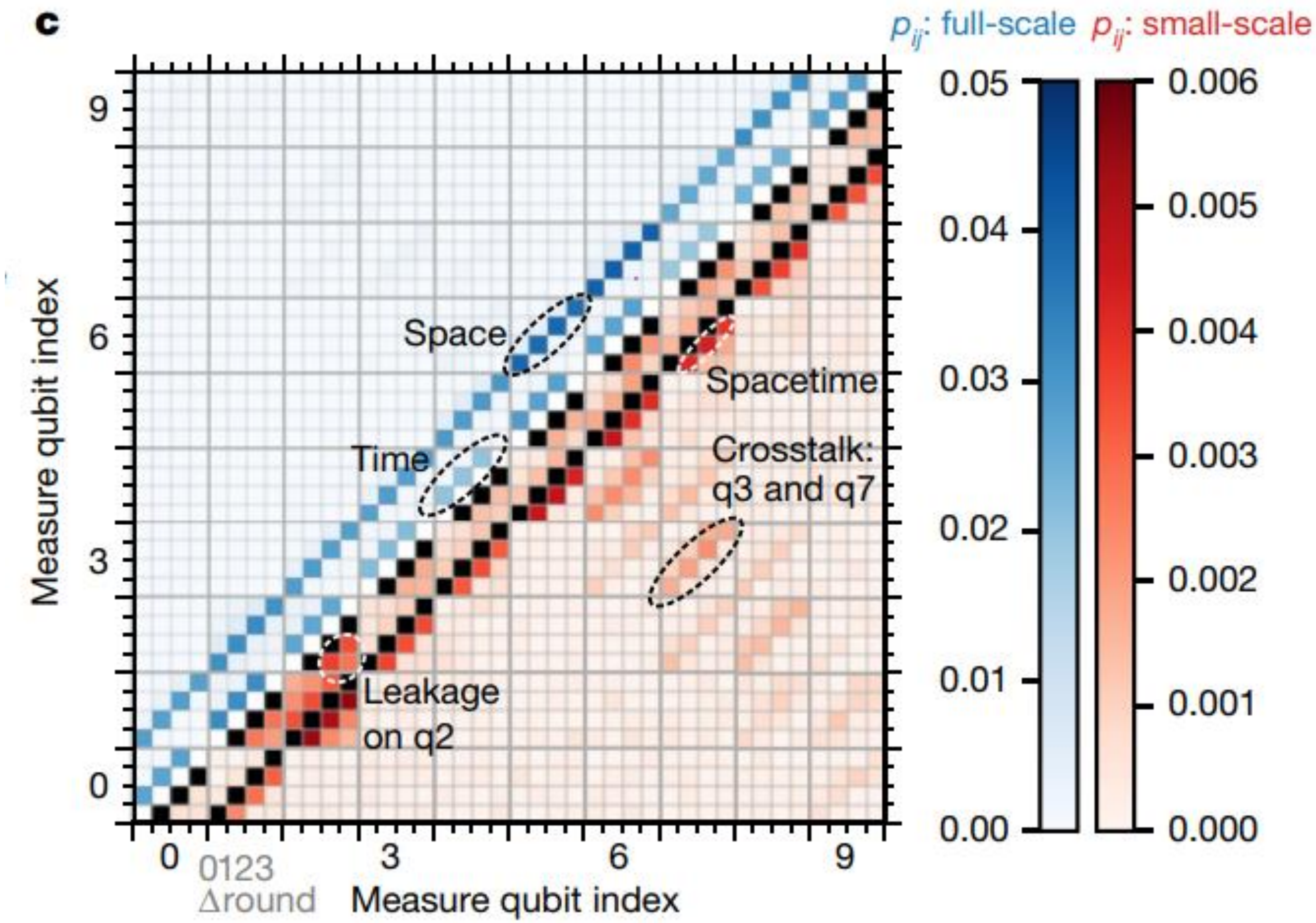
- 对于不同qubit在不同轮的测量结果，可以用如下公式判断其相关性：

$$p_{ij} \approx \frac{\langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle}{(1-2\langle x_i \rangle)(1-2\langle x_j \rangle)},$$

- <xi>表示索引为i的事件发生detection error的概率，<xixj>表示索引为i和索引为j的事件在同一次实验中发生detection error的概率

Correlations in error detection events

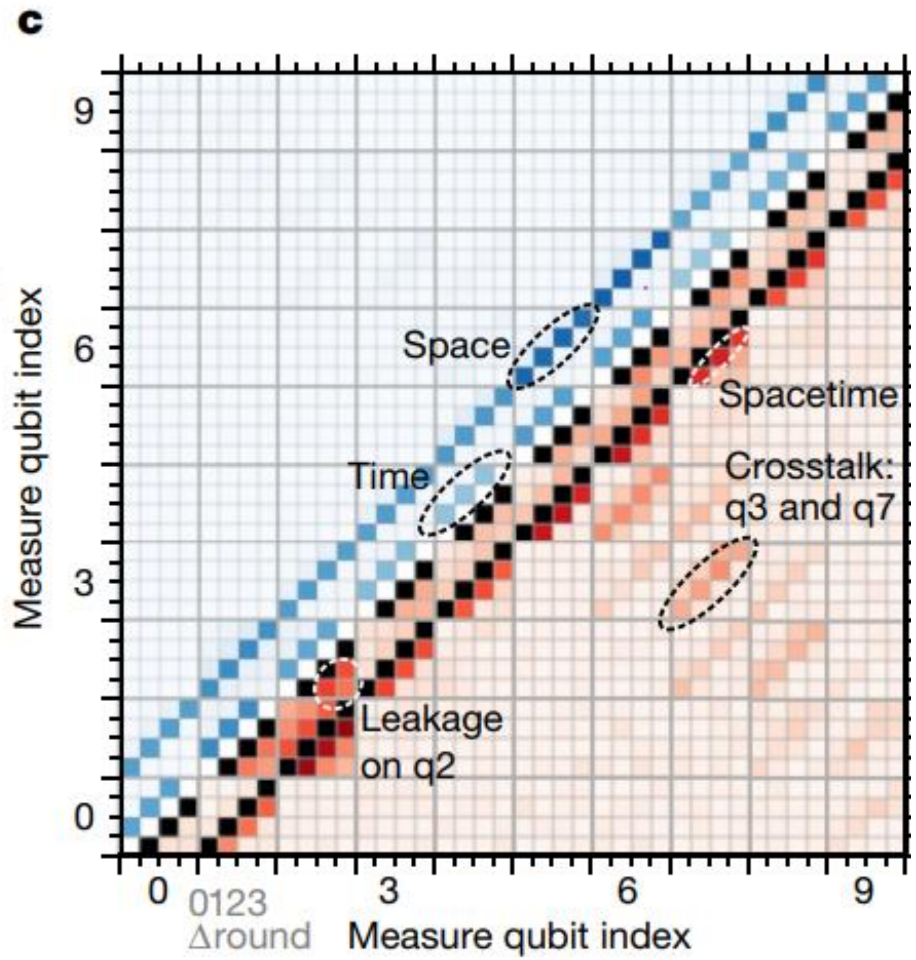
- **Google对于21比特Repetition Code的实验结果如图**



[4] Google Quantum AI. Exponential suppression of bit or phase errors with cyclic error correction. Nature 595, 383–387 (2021).

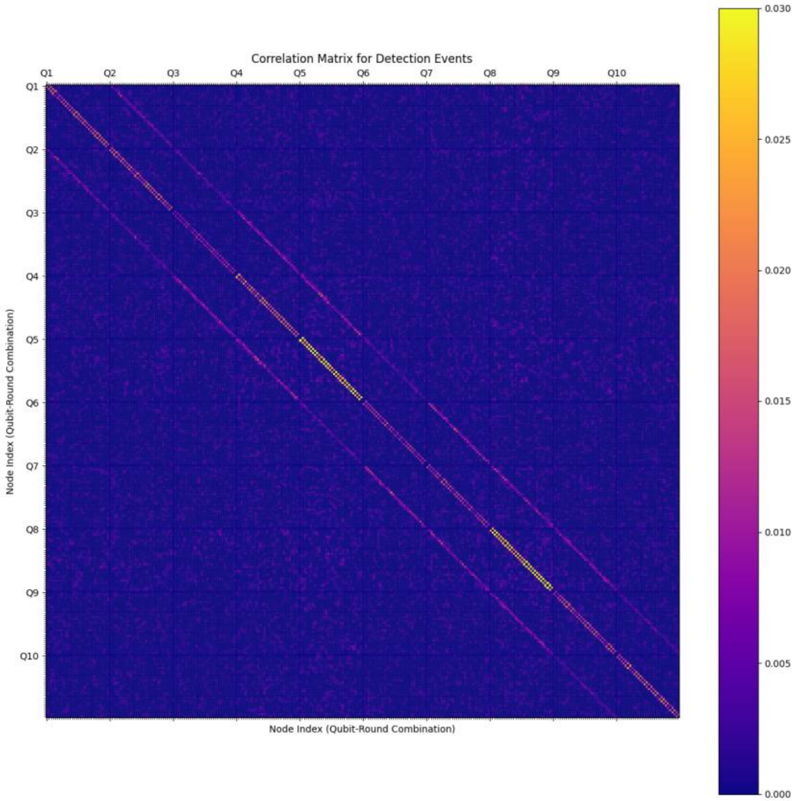
Correlations in error detection events

- 从图中可以看出，主要错误确实为spacelike pair，timelike pair，和spacetimelike pair三种类型
- 然而，还存在一定程度的串扰和泄露
- 串扰表现为不同qubit间存在的相关性
- 由于Google测得的泄露可能会持续八个周期，因此，泄露表现为额外的spacetime error

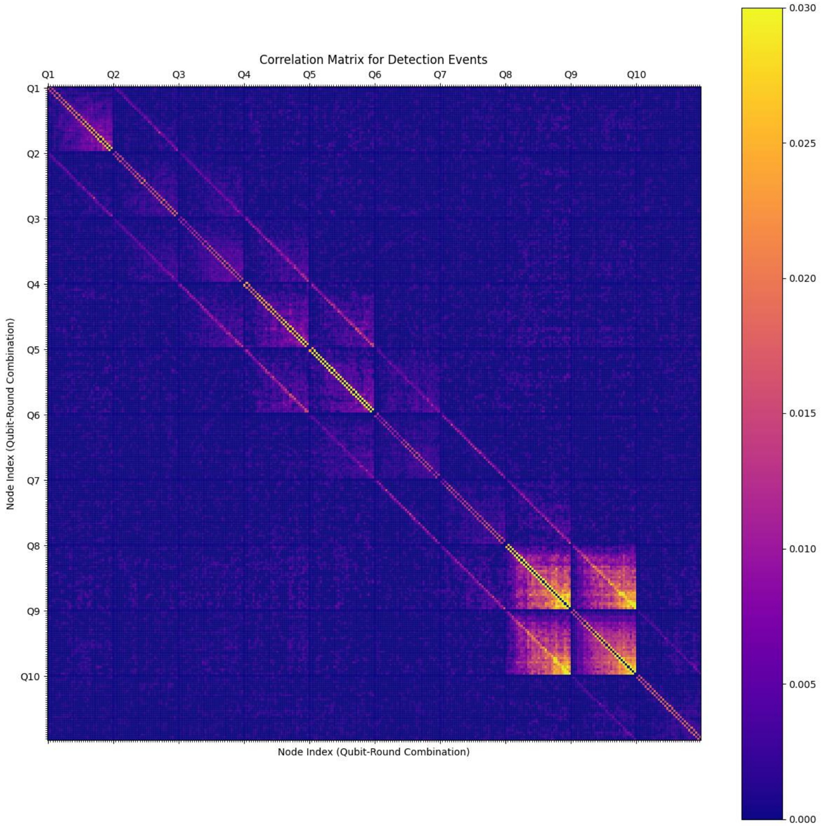


Correlation Matrix仿真与实验比较

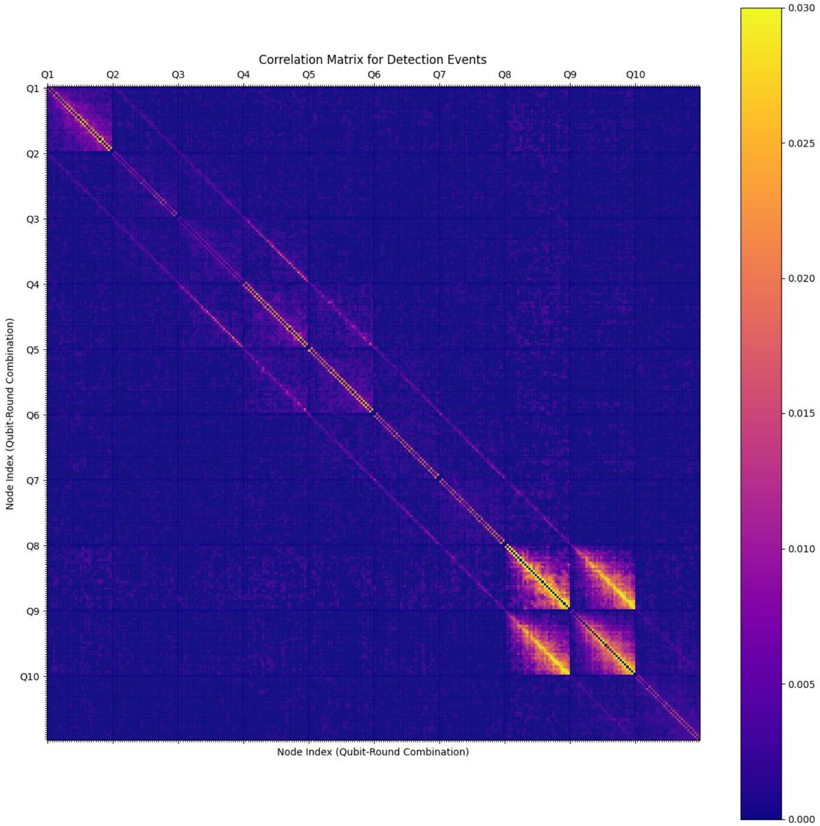
- **不含泄露仿真结果**



- **含泄露仿真结果**

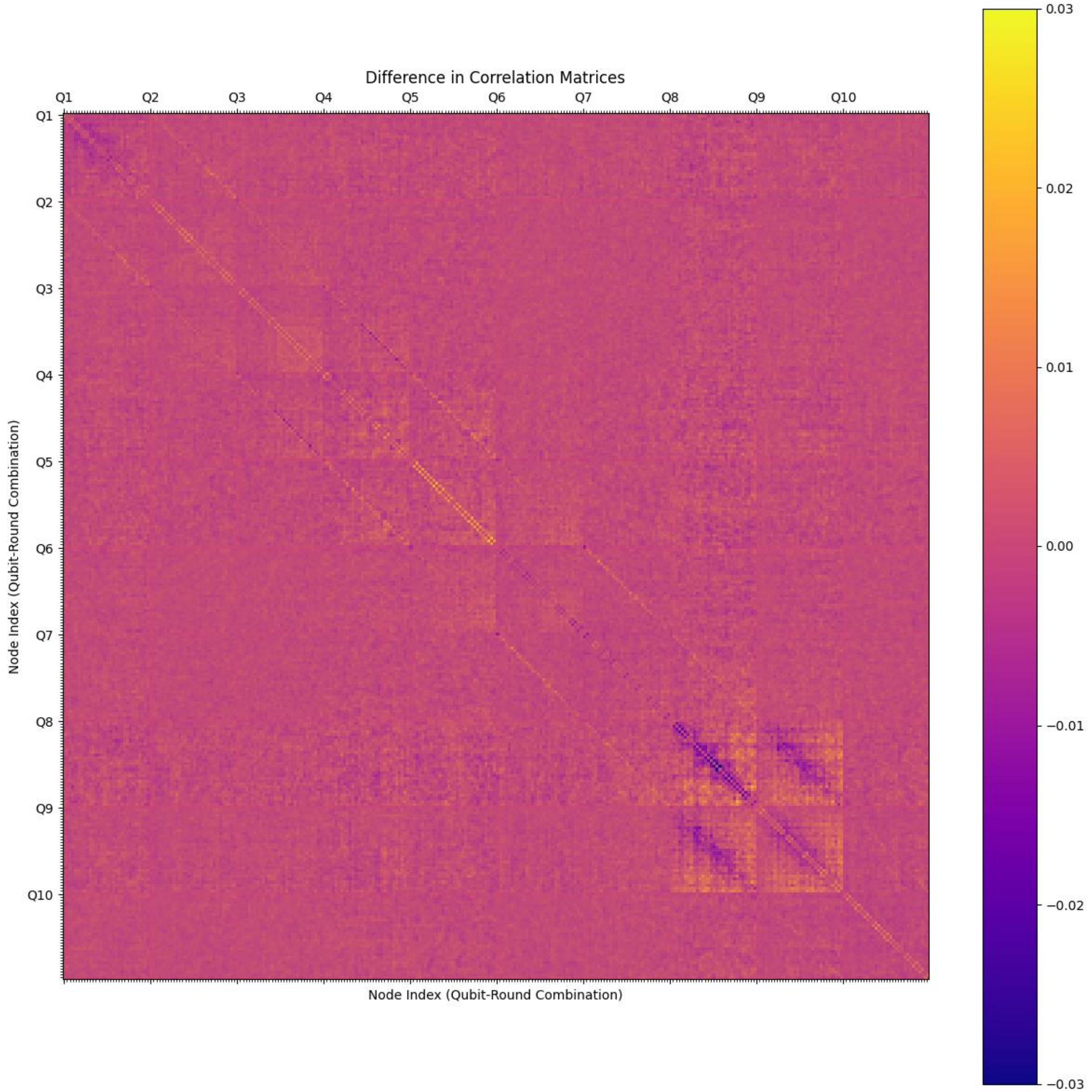


- **IBM实验结果**



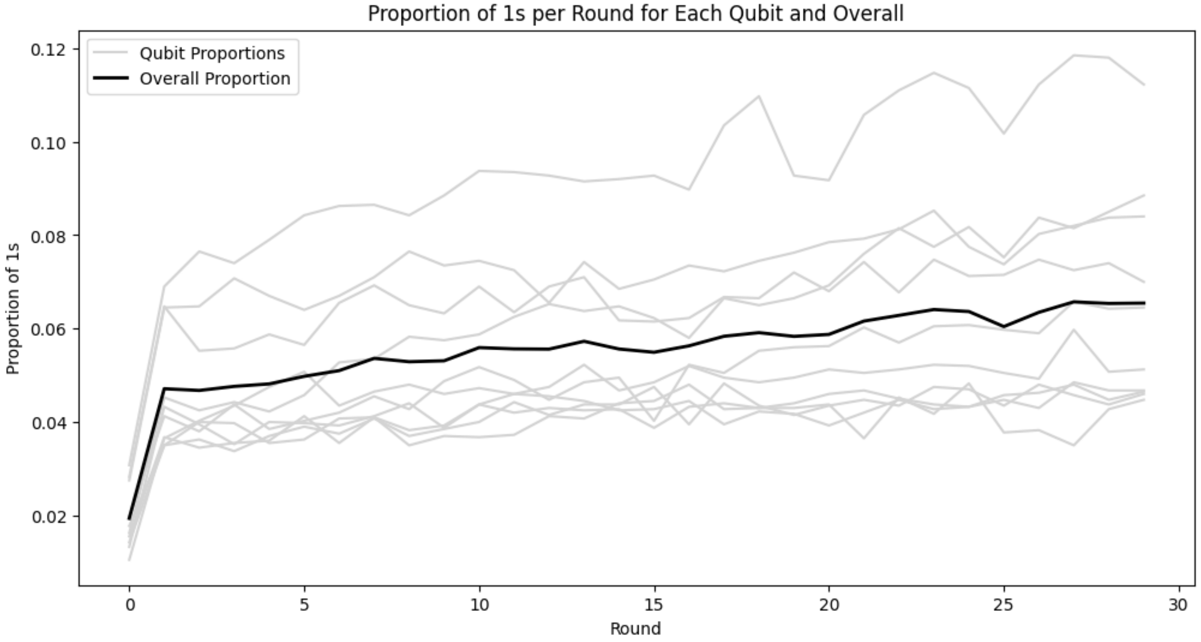
Correlation Matrix比较

- 将含泄露仿真结果与ibm实验结果做差，得到difference matrix如右图
- 泄露回退概率的参数还需进一步优化



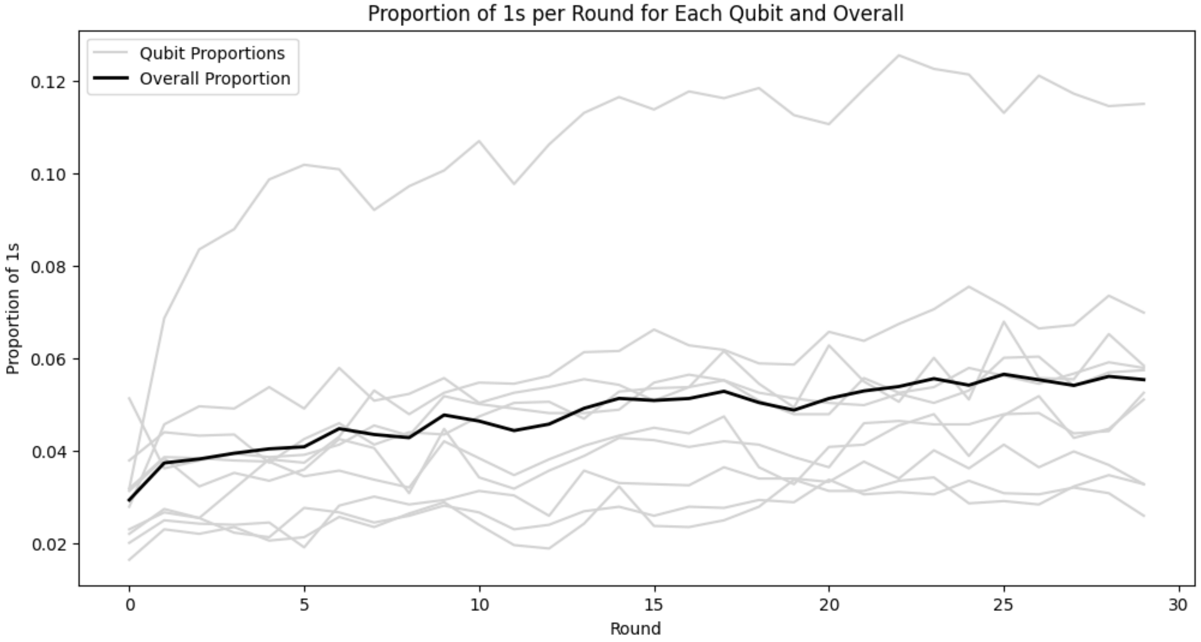
Detection Event Fraction比较

- **含泄露仿真结果**




```
{'Qubit 8': 0.09361666666666667,
 'Qubit 5': 0.072475,
 'Qubit 4': 0.065475,
 'Qubit 9': 0.06305,
 'Qubit 1': 0.05020833333333333,
 'Qubit 7': 0.04731666666666667,
 'Qubit 10': 0.04168333333333332,
 'Qubit 2': 0.04138333333333334,
 'Qubit 3': 0.04130833333333332,
 'Qubit 6': 0.03944166666666667}
```

- **IBM实验结果**




```
{'Qubit 8': 0.10535481770833334,
 'Qubit 9': 0.05550944010416667,
 'Qubit 4': 0.0536376953125,
 'Qubit 1': 0.0494873046875,
 'Qubit 5': 0.049365234375,
 'Qubit 6': 0.04047037760416667,
 'Qubit 7': 0.04029947916666666,
 'Qubit 3': 0.0315185546875,
 'Qubit 10': 0.027587890625,
 'Qubit 2': 0.02661946614583333}
```

四、模型优化（进行中）

参数优化——目标函数

- 为使得仿真模型与实验结果的correlation matrix相符，需优化泄露概率与回退概率参数，现选用如下两个目标函数，对参数进行优化

- 1. 对仿真与实验所得的correlation matrix的差值，除开time error外，取绝对值求和，这可以保证幅度上的一致性

$$\textit{Summed Difference} = \sum_{i,j \in leakage} \left| p_{ij,simulation} - p_{ij,experiment} \right|$$

参数优化——目标函数

- 2. 对仿真与实验所得的correlation matrix的差值，计算期望坐标，并取期望坐标与中心坐标的差值，这可以保证时间分布上的一致性

$$Expectation\ Coordinates$$

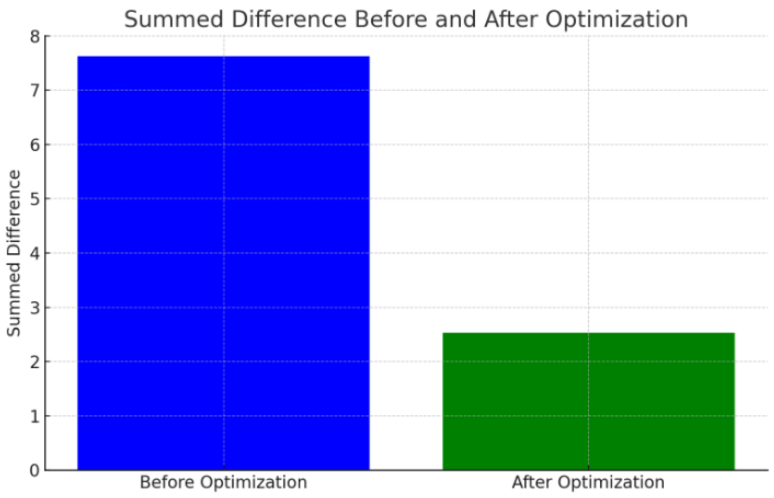
$$= \mathrm{i} \times \sum_j (p_{ij,simulation} - p_{ij,experiment}) - Centre\ Coordinates$$

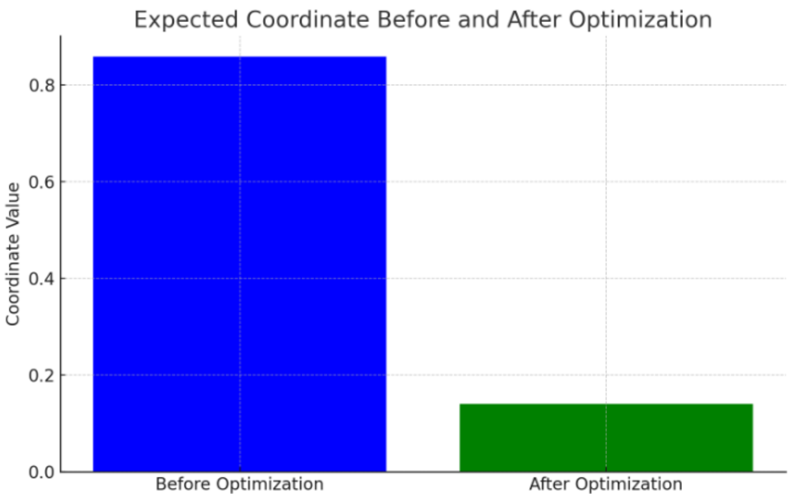
优化方法——NSGA-II

- NSGA-II (非支配排序遗传算法 II)
- 多目标优化需要找到一组解，代表不同目标之间的折中。在 NSGA-II 中，这组解被称为帕累托前沿（Pareto Front）
- 如果解 A 在所有目标上都不比解 B 差，且在至少一个目标上优于解 B，则称解 A 支配解 B。NSGA-II 使用帕累托支配来对解进行分类，并构建帕累托前沿
- 之后通过遗传算法，不断更替种群，获取最优的帕累托前沿

优化前后目标函数值比较

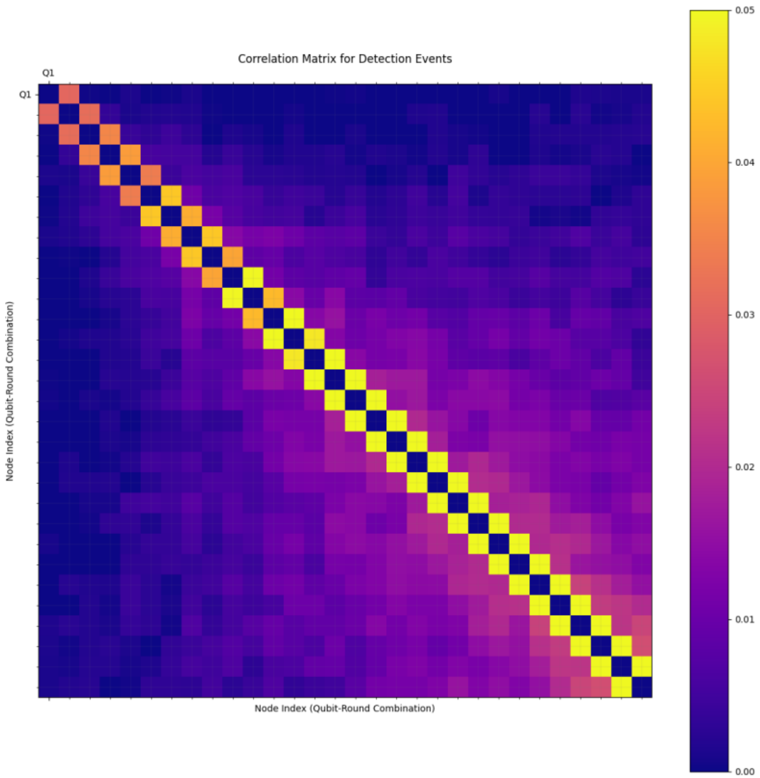
- 针对泄露较严重的第八个测量比特优化测试
- 优化前：Summed Difference = 7.628512617144899
  Expected Coordinates = (0.8587915521387597, 0.8587915521387597)
- 优化后：Summed Difference = 2.5290688674622577
  Expected Coordinates = (0.14066906870603013, 0.14066906870603013)



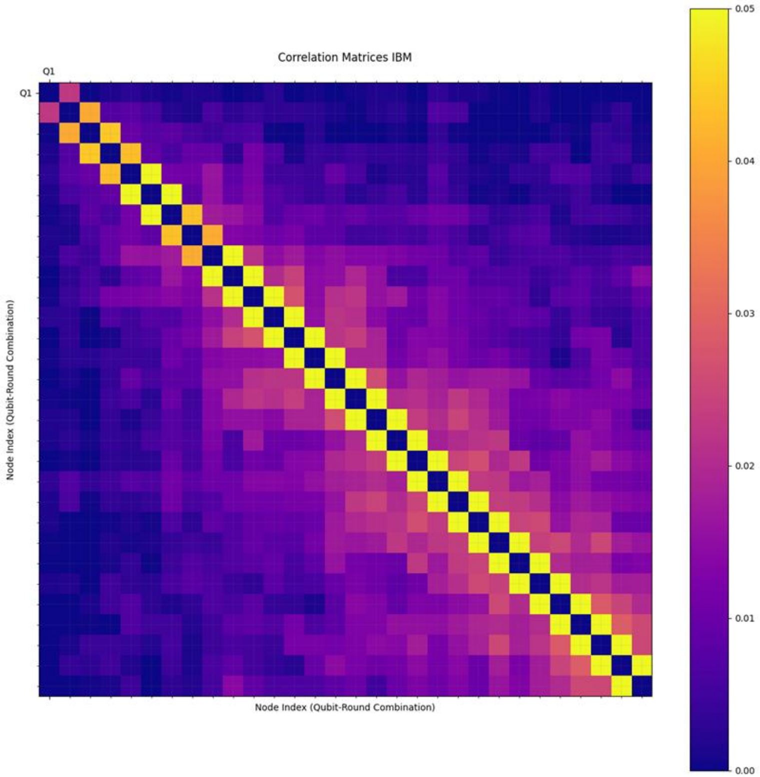


仿真与实验Correlation Matrix比较

- **优化后仿真结果**



- **实验结果**



五、其它验证电路

验证电路选择

- GHZ-state preparation

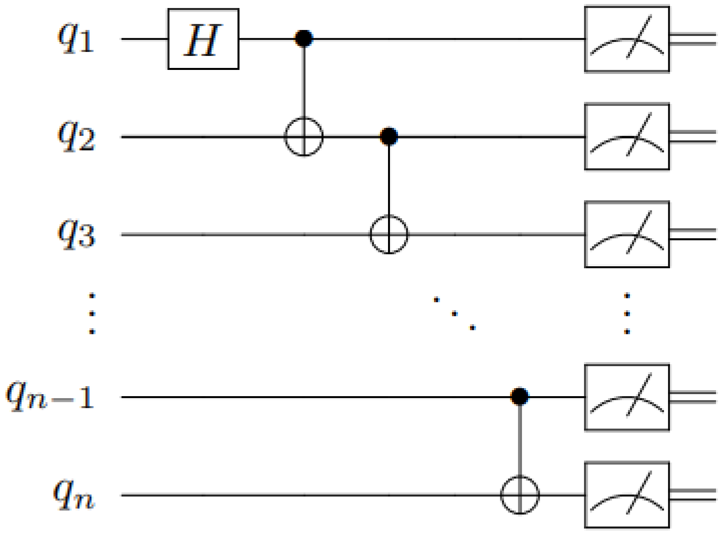
- Quantum Random Walk

GHZ-state preparation

- **GHZ态为一种特定的纠缠态**

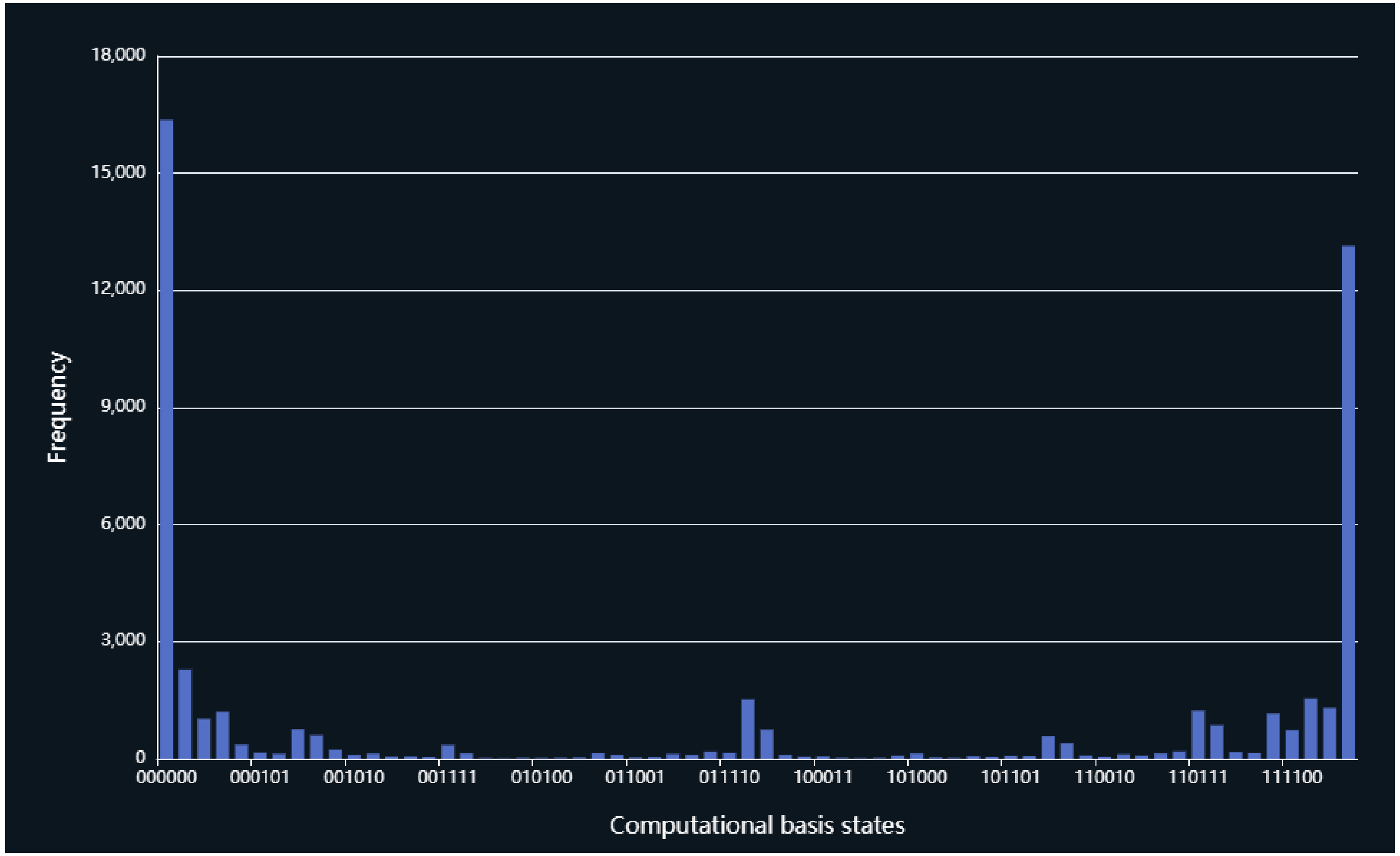
$$|\mathrm{GHZ}(n)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1, 0_2, ..., 0_n\rangle + |1_1, 1_2, ..., 1_n\rangle)$$

- **其制备电路仅涉及H门和CX门：**



GHZ-state preparation on Quafu

- 在Quafu Baiwang（原SC-Q136）上运行6比特GHZ态制备，理论上仅有000000和111111态，实际结果如下：



结果比较方法

- 实质上是比较噪声模型结果和真实实验结果的概率分布，可用统计学上两分布间距离表示
- Total Variation Distance总变差：

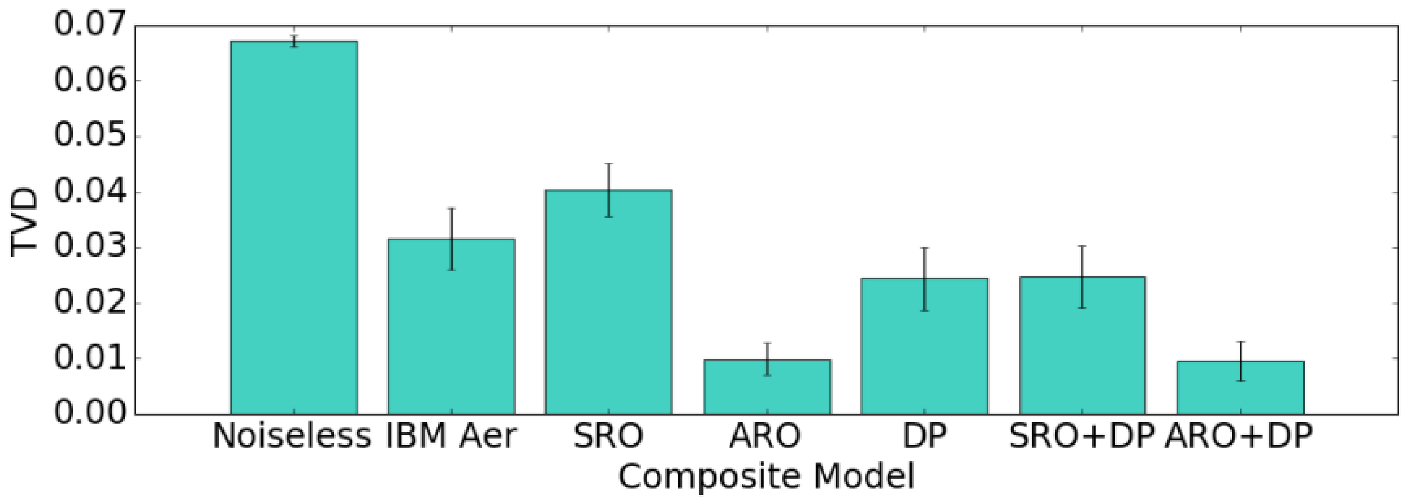
$$d_{\mathrm{TV}}(H_i, M_i) = \frac{1}{2}\sum_k \left| f_k(H_i) - f_k(M_i) \right|$$

- 其中，$f_k(H_i)$表示在验证电路中观察到第k个结果的频率，$f_k(H_i)$表示在噪声模型中观察到第k个结果的频率

[7] M. L. Dahlhauser and T. S. Humble, "Modeling noisy quantum circuits using experimental characterization," in Phys. Rev. A, vol. 103, no. 4, pp. 042603, Apr. 2021, doi: 10.1103/PhysRevA.103.042603.

Total Variation Distance

- **文章中，考虑symmetric readout (SRO)，asymmetric readout (ARO)，depolarizing error (DP)，采用2比特GHZ态制备为测试电路，TVD结果：**



[7] M. L. Dahlhauser and T. S. Humble, "Modeling noisy quantum circuits using experimental characterization," in Phys. Rev. A, vol. 103, no. 4, pp. 042603, Apr. 2021, doi: 10.1103/PhysRevA.103.042603.

结果比较方法

- **Hellinger distance：**

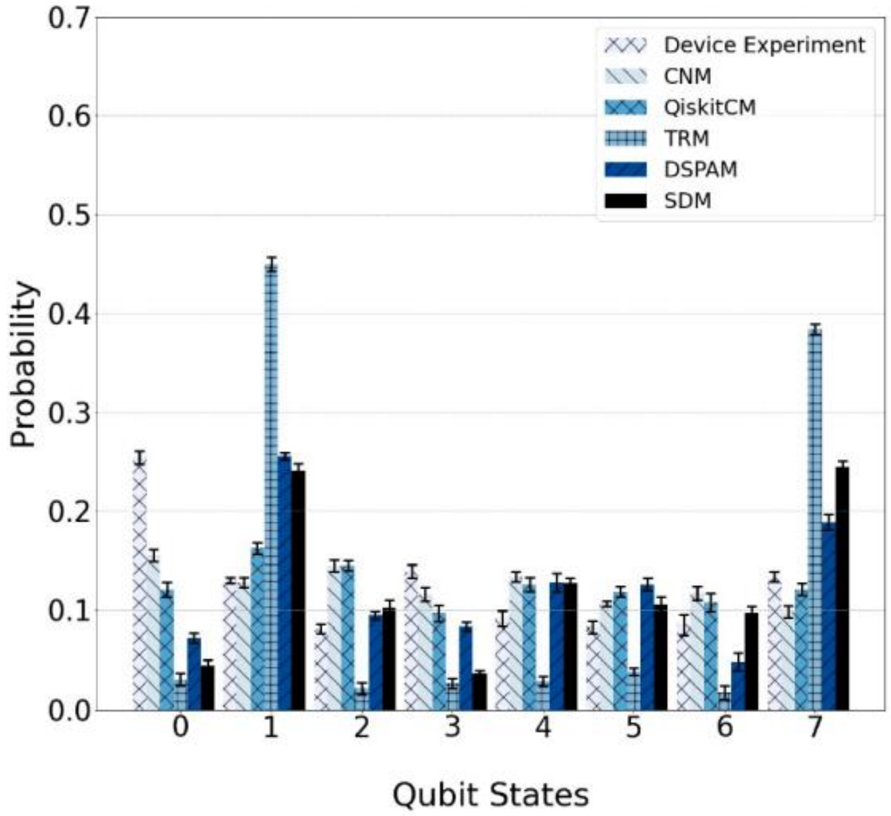
$$h(P, Q) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (\sqrt{p_i} - \sqrt{q_i})^2}.$$

- **其中，概率分布为** $P = \{p_i\}_{i \in [s]}$, $Q = \{q_i\}_{i \in [s]}$

[8] K. Georgopoulos, C. Emary, and P. Zuliani, "Modeling and simulating the noisy behavior of near-term quantum computers," in Phys. Rev. A, vol. 104, no. 6, pp. 062432, Dec. 2021, doi: 10.1103/PhysRevA.104.062432.

Hellinger distance

- 文章中，以3比特Quantum Random Walk为验证电路，结果如图



UNM: unified noise model

QiskitCM: the Qiskit composite model

DSPAM: depolarizing and SPAM

TRM: relaxation and dephasing model

SDM: simple depolarizing model

[8] K. Georgopoulos, C. Emary, and P. Zuliani, "Modeling and simulating the noisy behavior of near-term quantum computers," in Phys. Rev. A, vol. 104, no. 6, pp. 062432, Dec. 2021, doi: 10.1103/PhysRevA.104.062432.

Hellinger distance

- **Relation between total variational distance and Hellinger distance:**
- **For total variational distance :**

$$\delta(p,q) = \frac{1}{2}\sum_j |p(j) - q(j)| \,.$$

- **The relation is：**

$$H^2(p,q) \le \delta(p,q) \le \sqrt{2}H(p,q)$$

[9] Harper, R., Flammia, S.T. & Wallman, J.J. Efficient learning of quantum noise. Nat. Phys. 16, 1184–1188 (2020). https://doi.org/10.1038/s41567-020-0992-8

其他文章

- [10] A dynamical interpretation of the Pauli Twirling Approximation and Quantum Error
  验证PTA仅在“low decoherence and or short times”时比较有效
- [11] Benchmarking Quantum Computers and the Impact of Quantum Noise
  量子噪声综述
- [12] Comparing Neural Network Based Decoders for the Surface Code
  利用NN，对depolarizing noise和circuit level noise产生的症状进行解码
- [13] Quantification and characterization of leakage errors
  较为物理的泄露噪声建模

其他文章

- [14] Simulation and performance analysis of quantum error correction
  带有coherent噪声surface code仿真

- [15] Overcoming leakage in quantum error correction
  谷歌对于泄露噪声的解决方案：测量子每一轮结束时重置，数据子通过LeakageISWAP门返回计算基态

- [16] Density-matrix simulation of small surface codes under current and projected experimental noise
  利用density-matrix对surface code仿真

- [17] The XZZX surface code
  普通surface code的变式，可提高解码阈值，尤其是X，Z错误存在bias的情况下