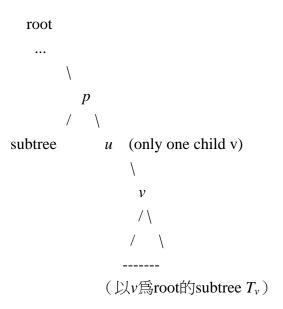
### Ex 16.3-5

先證明任何一種 prefix code tree 若要 optimal,必定會是 Full binary tree,也就是每個 internal node 一定有兩個 children。

#### Proof:

假設原來的 prefix code tree T 爲 optimal,並且不是 full binary tree,則對任何只有一個 child 的 internal node u ( 設其 child 爲 v ),可得下圖:



若將u和v兩個點合在一起,依然能夠維持prefix code tree的特性,因爲任何不屬於subtree  $T_v$ 之leaf所形成的code,必不會是 $T_v$ 之leaf所形成code的prefix(因爲在edge(p, v)上的label會造成不同),而 $T_v$ 之leaf所形成的code本來就是prefix code,所以合併後不會有影響。

又因爲合倂後 $T_v$ 之leaf所形成的code變短,所以會比原來的code更好,矛盾。

因爲 optimal prefix code tree 爲 full binary tree , 又有 n 個 leaves , 所以會有 n - 1 個 internal nodes 和 2n - 2 條 edges  $\circ$ 

# 表示法:(做法不只一種)

1. 將任何一種 optimal prefix code 以 left edge 標 0 , right 標 1 的方式,畫出 prefix code tree 之後,以 DFS 的方式做 tree traversal,每經過一條 edge,就將 edge 上的 label 照順序記下來,總共是 2n - 2bits,如此一來,利用括號配對的方式就可 以得知每一組相對的 0 和 1 ,並藉之將原來的 tree 還原。爲了知道何時終止,在後

面加一bit的1作爲識別。

所以表示 tree structure 的部份共須 2n - 1 bits。

- 2. 然後照每個 leaf 被 traverse 到的順序,將每一個 leaf 代表的 char 依序記錄,由於 char 的範圍是 $[0\dots n-1]$ ,所以每個 char 須要 ceiling(lg n)個 bits,總共是 n \* ceiling(lg n) bits。
  - 3. 總共需要 2n-1+n\* ceiling(lg n) bits。

#### Ex. 19.1-3

(a)

用歸納法證明:

在 $B_k$ 中,任何在depth *i*的node x都會有j = k - i個 1。

#### Basic:

當
$$k = 0$$
 時的 $B_0$ :  $j = 0$ , label =  $0$  (0 個'1') => 成立。

#### Assume:

設  $k=1 \sim n-1$  都滿足在 depth i 的 node x 都會有 j=k-i 個  $1 \sim n-1$ 

## When:

則k = n 時,對任何在  $B_n$  中depth i的node x而言:

 $B_n$ 是由兩個 $B_{n-1}$ 組合而成

若 x 在left tree中,則在  $B_{n-1}$  中相對於原本 $B_n$  depth i 會變成depth i-1,x 有(n-1) - (i-1) = n-i 個 1,又因 left tree 的 label 是加 0,所以在 $B_n$ 中,x有n-i + 0 = n-i 個 1

若 x 在right tree中,則在  $B_{n-1}$  中depth和原本相同, x 有(n-1) - i=n-i-1 個 1 ,又因 left tree 的 label 是加 1 , 所以在 $B_n$ 中,x有n-i-1+1=n-i 個 1

由數學歸納法可得証。

(b) 有i 個 1 的 node, 都在 depth i = k - i 的那一層中,

By Lemma 19.1, 共有 C(k, i) = C(k, k - j)個 k-strings。

(c) 由於 $B_k$ 中每一個node,都是小binomial tree的root,而在union時,只有root的degree 會變化,root下面的其他node,雖然最前面會補一個 0 或 1,但是由於題目說只看最右邊被 0 分開的 1,若不是root至少有一位已經是 0 而隔開了右邊的 1,因此不管前面補 0 還是 1,root以下的點如果原本符合之後還是會符合,故只要考慮 $B_i$ 的 root即可。

同樣用歸納法證明: $B_i$ 的root其degree寫i。

假設一直到i = k - 1 為止, $B_i$ 的root都滿足degree = i。

則在i = k時, $B_k$ 的root會是right  $B_{k-1}$ 的root, 而 $B_{k-1}$ 的root其 label 爲連續k-1 個 1, 所以 $B_k$ 的root其 label 爲 1+ 連續k-1 個 1=k個 1。

由數學歸納法得証。