高中数学公式整理

by Frank

集合与不等式

摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$
$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

均值不等式：$\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}\le\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}\le\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\quad(a,b>0)$ ，当且仅当 $a=b$ 时取等

基本不等式：

$$a+b\ge 2\sqrt{ab}\qquad (a,b>0)$$

$$ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\qquad (a,b\in\mathbf{R})$$ ，当且仅当 $a=b$ 时取等

$$a^2+b^2\ge\frac{(a+b)^2}{2}\ge 2ab\qquad (a,b\in\mathbf{R})$$

三角不等式：$\big||a|-|b|\big|\le|a+b|\le|a|+|b|$

前一个等号当且仅当 $ab\le 0$ 时取等，后一个等号当且仅当 $ab\ge 0$ 时取等

柯西不等式：$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)\ge\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2,\quad a_i,b_i\in\mathbf{R},\quad i=1,2,\ldots,n$

当且仅当 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$ 时取等

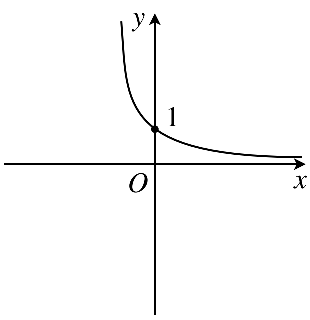
$n=2$ 时，$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2$，当且仅当 $ad=bc$ 时取等

同解变形：$|x|\le y\iff -y\le x\le y$

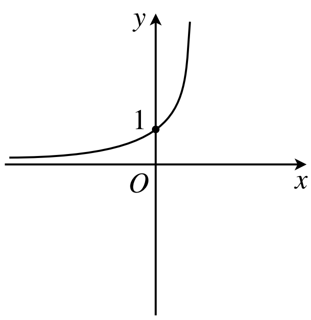
幂、指数与对数

指数函数的图像：

$y=a^x\quad(0<a<1)$

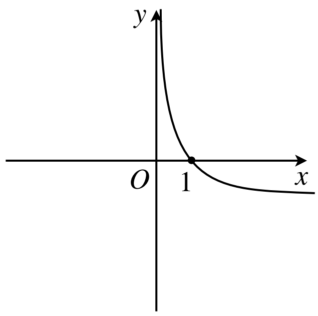


$y=a^x\quad(a>1)$

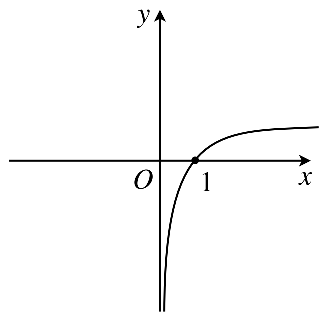


对数函数的图像:

$y = \log_a x \quad (0 < a < 1)$

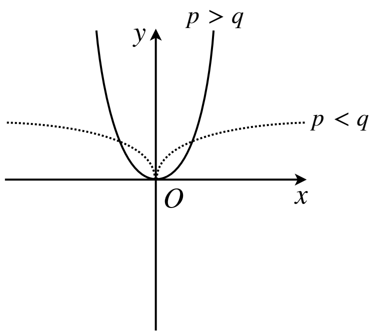


$y = \log_a x \quad (a > 1)$

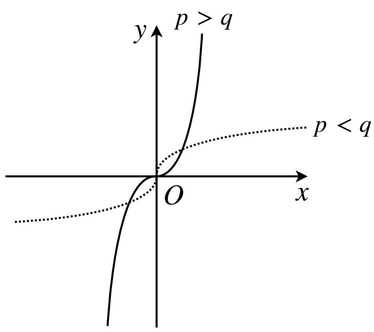


幂函数的图像:

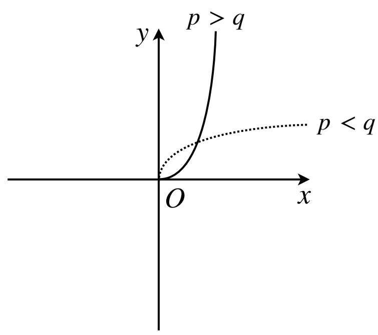
$y = x^{\frac{p}{q}}$ (p为偶数, q为奇数)



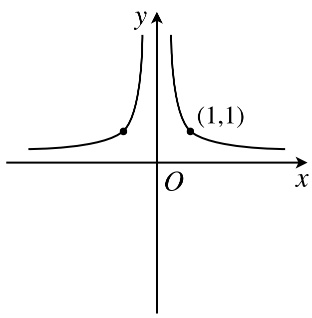
$y = x^{\frac{p}{q}}$ (p为奇数, q为奇数)



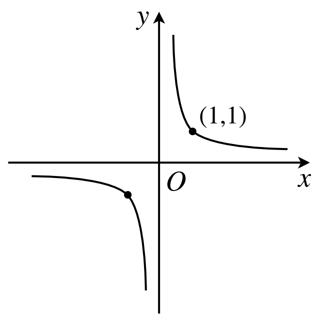
$y = x^{\frac{p}{q}}$ (p为奇数, q为偶数)



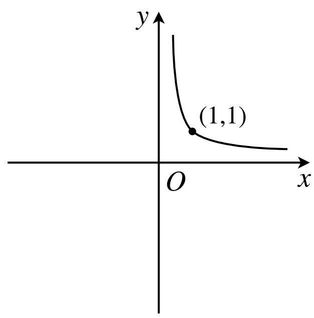
$y = x^{-\frac{p}{q}}$ (p为偶数, q为奇数)



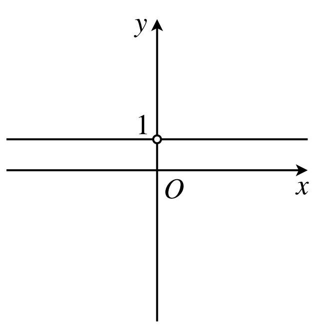
$y = x^{-\frac{p}{q}}$ (p为奇数, q为奇数)



$y = x^{-\frac{p}{q}}$ (p为奇数, q为偶数)



$y = x^0$

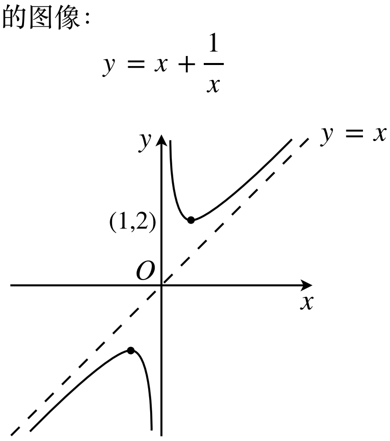


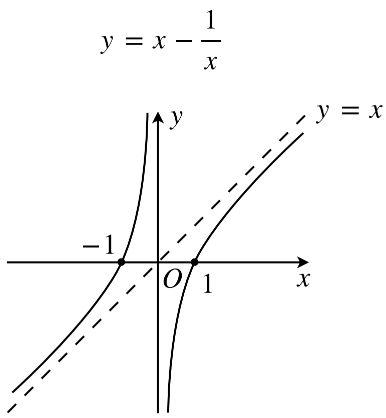
$$
\text{对数的性质：}
\begin{aligned}
&a^{\log_a N} = N && (N > 0)\\
&\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N && (M, N > 0)\\
&\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N && (M, N > 0)\\
&\log_a N^c = c \log_a N && (N > 0)\\
&\log_{a^q} N^p = \frac{p}{q} \log_a N && (N > 0)\\
&\log_a b = \frac{1}{\log_b a} && (a, b \neq 1)
\end{aligned}
$$

对数换底公式：$\log_b N = \dfrac{\log_a N}{\log_a b} \quad (N > 0)$

函数

对勾函数与川字函数的图像：





对于关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$, 有

一元二次方程求根公式：当 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ 时，$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (a \neq 0)$

韦达定理：$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \quad (a \neq 0)$

顶点坐标：$\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right) \quad (a \neq 0)$

函数的对称性：定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$, 对于 $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(a + x) + f(a - x) = 2b \iff f(x)$ 关于 (a, b) 对称

$$
\text{函数的周期性：对于 } \forall x \in \mathbf{R},\quad
\begin{aligned}
&f(x + a) = f(x) && \Rightarrow T = a\\
&f(x + a) = -f(x) && \Rightarrow T = 2a\\
&f(x + a) = \frac{1}{f(x)} && \Rightarrow T = 2a \qquad (f(x) \neq 0)\\
&f(x) + f(x + a) + f(x + 2a) = 0 && \Rightarrow T = 3a\\
&f(x + a) = \frac{f(x) + 1}{1 - f(x)} && \Rightarrow T = 4a \qquad (f(x) \neq 1)\\
&f(x) + f(x + 2a) = f(x + a) && \Rightarrow T = 6a
\end{aligned}
$$

函数的对称性与周期性：

$f(x)$ 关于 $(a,0),(b,0)$ 对称 $\Rightarrow T=2|a-b|$

$f(x)$ 关于直线 $x=a$，直线 $x=b$ 对称 $\Rightarrow T=2|a-b|$

$f(x)$ 关于直线 $x=a$，$(b,0)$ 对称 $\Rightarrow T=4|a-b|$

导数的定义：$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

函数的切线方程：$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

基本初等函数的导数：

$f(x)=C$	$f'(x)=0$	$f(x)=\mathrm{e}^x$	$f'(x)=\mathrm{e}^x$
$f(x)=kx+b$	$f'(x)=k$	$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x\ln a$
$f(x)=x^a$	$f'(x)=ax^{a-1}$	$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$		
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$	$f(x)=\log_a x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$

导函数的运算：

$$\left[af(x)\right]'=af'(x)$$

$$\left[f(x)\pm g(x)\right]'=f'(x)\pm g'(x)$$

$$\left[f(x)\cdot g(x)\right]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

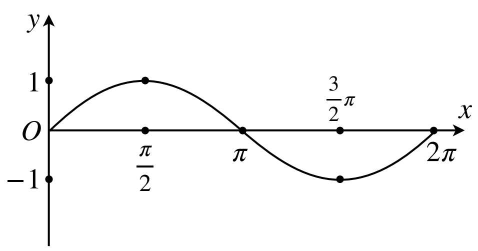
$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}\qquad (g(x)\neq 0)$$

$$\left\{f\left[g(x)\right]\right\}'=f'\left[g(x)\right]\cdot g'(x)$$

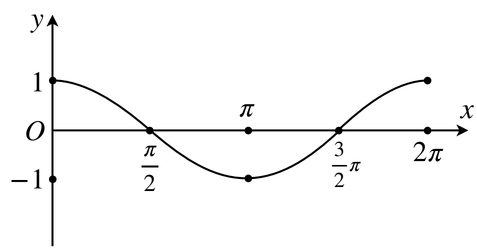
三角比与三角函数

正弦函数与余弦函数的图像：

$y=\sin x$

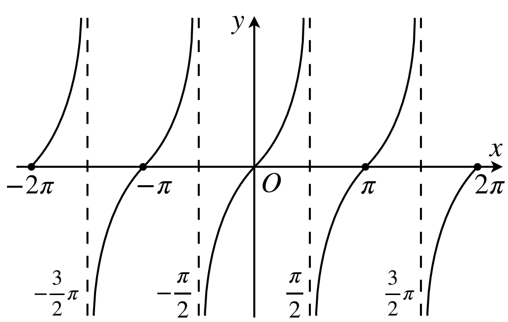


$y=\cos x$

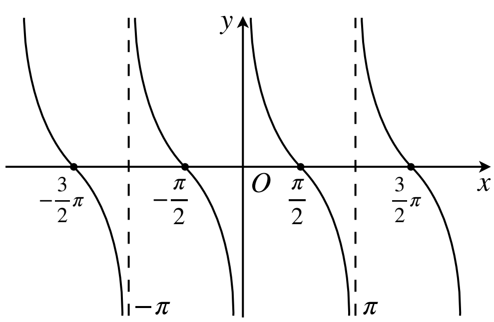


正切函数与余切函数的图像：

$y=\tan x$

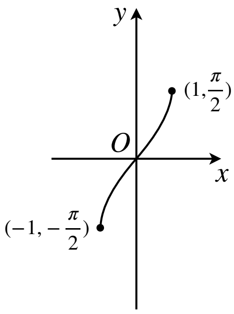


$y=\cot x$

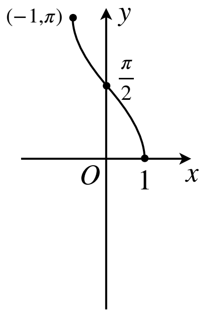


反三角函数的图像：

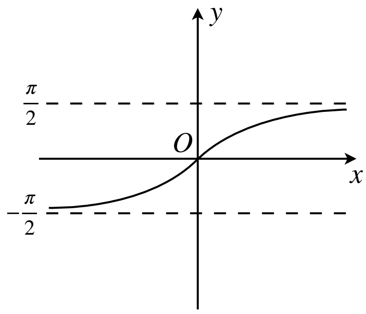
$y = \arcsin x$



$y = \arccos x$



$y = \arctan x$



诱导公式：

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha \qquad \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha \qquad \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot\alpha \qquad \tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot\alpha$$
$$\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan\alpha \qquad \cot(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\tan\alpha$$

两角和差公式：

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$
$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$$

二倍角公式：

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

半角公式：

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$
$$\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}$$

和差化积公式：

$$\begin{aligned}
\sin\alpha+\sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\sin\alpha-\sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha+\cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha-\cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\tan\alpha+\tan\beta &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\\
\tan\alpha-\tan\beta &= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}
\end{aligned}$$

积化和差公式：

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]\\
\cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]\\
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\left[-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]\\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]
\end{aligned}$$

降幂公式：

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha &= \frac{1-\cos2\alpha}{2}\\
\cos^2\alpha &= \frac{1+\cos2\alpha}{2}\\
\tan^2\alpha &= \frac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}
\end{aligned}$$

万能公式：

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\\
\cos\alpha &= \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\\
\tan\alpha &= \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

辅助角公式：$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(\alpha+\varphi)$，　其中 $\begin{cases}\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$

正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

正弦面积公式：$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

余弦定理：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

在 ΔABC 中，$\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C$

扇形面积公式：$S=\dfrac{1}{2}lr=\dfrac{1}{2}\theta r^2$

对于正弦函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi),\ A>0,\ \omega>0,$ 有最小正周期 $T_0=\dfrac{2\pi}{\omega}$

数列

等差数列通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d$

等差数列求和公式：$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2},\quad S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$

等比数列通项公式：$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$

等比数列求和公式：$S_n=\begin{cases}\dfrac{a_1(q^n-1)}{q-1} & (q\neq 1)\\ na_1 & (q=1)\end{cases}$

无穷项等比数列求和公式：$\lim\limits_{n\to+\infty}a+aq+aq^2+\cdots+aq^n=\dfrac{a}{1-q}\quad(|q|<1)$

平方和公式：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

立方和公式：$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

其他常用求和公式：$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

裂项公式：
$$\begin{aligned}
\frac{1}{n(n+1)}&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\\
\frac{1}{n(n+k)}&=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)\\
\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}&=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\\
\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+k}}&=\frac{1}{k}\left(\sqrt{n+k}-\sqrt{n}\right)\\
\frac{1}{(n-1)n(n+1)}&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]\\
\frac{1}{(n-k)n(n+k)}&=\frac{1}{2k^2}\left[\left(\frac{1}{n-k}-\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)\right]
\end{aligned}$$

向量

向量的单位向量：$\vec{a_0}=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$

向量的数量积：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$

向量夹角计算公式：$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

向量的数量投影：$b_a=|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$

向量的投影向量（简称投影）：$\overrightarrow{b_a}=b_a\cdot\overrightarrow{a_0}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a}$

平面向量数量积的坐标表示：$\begin{cases}\vec{a}=(x_1,y_1)\\ \vec{b}=(x_2,y_2)\end{cases}\Rightarrow\quad\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$

对于两平面向量$\begin{cases}\vec{a}=(x_1,y_1)\\ \vec{b}=(x_2,y_2)\end{cases}$，有 $x_1y_2=x_2y_1\iff\vec{a}\parallel\vec{b}$

三角形面积的坐标表示：$S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$

定比分点的坐标公式：$P_1(x_1,y_1),\ P_2(x_2,y_2),\ P(x,y),\quad\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}\iff\begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\end{cases}\quad(\lambda\in\mathbf{R},\ \lambda\neq-1)$

极化恒等式：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{4}\left[(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2\right]$

在 ΔPAB 中，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PO}|^2-\dfrac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2$

在平行四边形 $ABCD$ 中，$|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2=2\left(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2\right)$

对于 ΔABC 内任意一点 P, 有 $S_{\Delta BPC}\cdot\overrightarrow{PA}+S_{\Delta CPA}\cdot\overrightarrow{PB}+S_{\Delta APB}\cdot\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

I 为 ΔABC 内心 $\iff a\cdot\overrightarrow{IA}+b\cdot\overrightarrow{IB}+c\cdot\overrightarrow{IC}=\vec{0}\iff\sin A\cdot\overrightarrow{IA}+\sin B\cdot\overrightarrow{IB}+\sin C\cdot\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

G 为 ΔABC 重心 $\iff\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

H 为 ΔABC 垂心 $\iff\tan A\cdot\overrightarrow{HA}+\tan B\cdot\overrightarrow{HB}+\tan C\cdot\overrightarrow{HC}=\vec{0}\iff\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}$

O 为 ΔABC 外心 $\iff\sin 2A\cdot\overrightarrow{OA}+\sin 2B\cdot\overrightarrow{OB}+\sin 2C\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}\iff\begin{cases}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2\\ \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2\end{cases}$

解析几何

直线点斜式：$l:y-y_0=k(x-x_0)$

直线斜截式：$l:y=kx+b$

直线两点式：$l:y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

直线截距式：$l:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

直线点方向式：$l:\dfrac{x-x_0}{u}=\dfrac{y-y_0}{v},\quad\vec{d}=(u,v)\parallel l$

直线点法向式：$l: a(x-x_0)+b(y-y_0)=0,\quad \vec{n}=(a,b)\perp l$

直线一般式：$l: ax+by+c=0 \quad (a^2+b^2\neq 0)$

对于直线 $\begin{cases} l_1: a_1x+b_1y+c_1=0 \quad (a_1^2+b_1^2\neq 0) \\ l_2: a_2x+b_2y+c_2=0 \quad (a_2^2+b_2^2\neq 0)\end{cases}$，有 $l_1\perp l_2 \iff a_1a_2+b_1b_2=0$

直线系：$l: a_1x+b_1y+c_1+\lambda\left(a_2x+b_2y+c_2\right)=0 \quad (\lambda\in\mathbf{R})$

两直线夹角：$\tan\alpha=\left|\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$

点到直线距离公式：$d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

对于直线 $\begin{cases} l_1: ax+by+c_1=0 \\ l_2: ax+by+c_2=0\end{cases} \quad (a^2+b^2\neq 0)$，有两直线距离 $d_{l_1-l_2}=\dfrac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

圆的标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

圆的一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

其中 $\Delta=D^2+E^2-4F>0,\quad C\left(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2}\right),\quad r=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}$

圆的切线方程：$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$

阿氏圆：$C: |PA|=\lambda|PB|,\quad P(x,y)\quad (\lambda>0)$

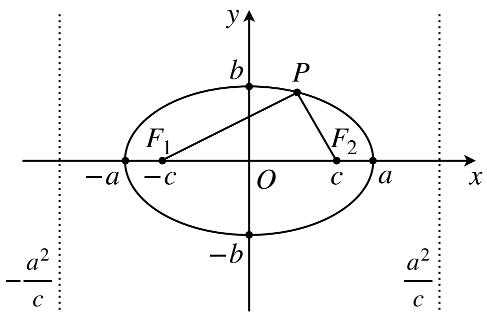
隐圆：$\begin{aligned} &C: |PA|^2+|PB|^2=c,\quad P(x,y)\quad (c>0) \\ &C: \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\lambda,\quad P(x,y)\quad \left(\lambda>-\dfrac{1}{4}|AB|^2\right)\end{aligned}$

对于圆心不重合的两圆 $\begin{cases} C_1: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0 \\ C_2: x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0\end{cases}$，有根轴 $l: (D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0$

圆系：$C: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda\left[(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2\right]=0 \quad (\lambda\in\mathbf{R})$

椭圆的标准方程（焦点在x轴）：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$$



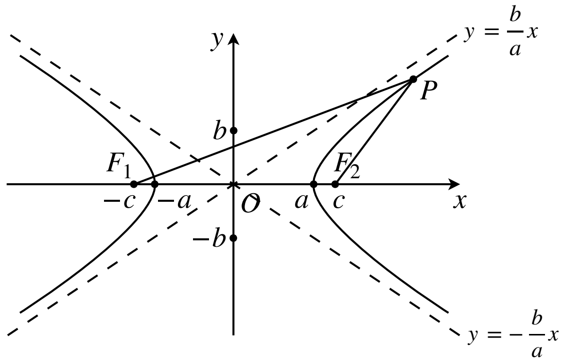
椭圆焦半径公式：$|PF_1|=a+ex,\quad |PF_2|=a-ex$

共轭直径定理：$k_{AB} \cdot k_{OM} = -\dfrac{b^2}{a^2}$

椭圆焦半径三角形面积公式：$S_{\Delta PF_1F_2} = b^2 \tan\dfrac{\theta}{2}$

双曲线的标准方程（焦点在x轴）：$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0)$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0)$$



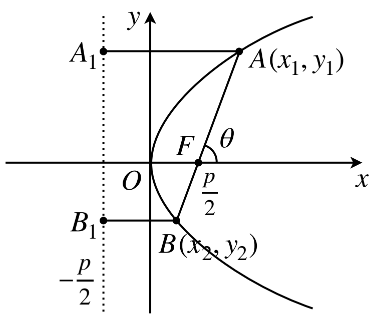
双曲线焦半径公式：$|PF_1| = |ex + a|$，$|PF_2| = |ex - a|$

共渐近线的双曲线：$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \lambda \quad (\lambda \neq 0)$

双曲线焦半径三角形面积公式：$S_{\Delta PF_1F_2} = b^2 \cot\dfrac{\theta}{2}$

抛物线的标准方程（焦点在x轴正半轴）：$y^2 = 2px \quad (p > 0)$

$$y^2 = 2px \quad (p > 0)$$



抛物线焦半径公式：$|AF| = x_1 + \dfrac{p}{2} = \dfrac{p}{1-\cos\theta}$，$|BF| = x_2 + \dfrac{p}{2} = \dfrac{p}{1+\cos\theta}$

抛物线焦点弦的性质：$|AB| = x_1 + x_2 + p = \dfrac{2p}{\sin^2\theta}$，$x_1x_2 = \dfrac{p^2}{4}$，$y_1y_2 = -p^2$

抛物线的弦的性质：$\angle AOB = 90^\circ \iff AB$ 经过 $(2p,0)$

圆锥曲线的离心率：$e = \dfrac{c}{a}$

圆锥曲线的通径：$l=\dfrac{2b^2}{a}$

直线的参数方程：$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\theta \\ y = y_0 + t\sin\theta \end{cases} \quad (t\in\mathbf{R})$

圆的参数方程：$\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases} \quad (\theta\in\mathbf{R})$

椭圆的参数方程：$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases} \quad (\theta\in\mathbf{R})$

极坐标系与直角坐标系的坐标转换：$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \quad (\rho\ge 0),\quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad (\rho\in\mathbf{R})$

圆锥曲线的统一极坐标方程：$C:\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta},\quad p=d_{F-l},\quad F(0,0)$

当 $e\in(0,1)$ 时，C 为以 F 为左焦点，l 为左准线的椭圆
当 $e=1$ 时，C 为以 F 为焦点，l 为左准线，开口向右的抛物线
当 $e>1$ 时，C 为以 F 为右焦点，l 为右准线的双曲线

复数

复数的运算：$z_1\cdot z_2=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i},\qquad \dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}$

复数的性质：$\begin{array}{l} z_1\cdot z_2=0 \iff z_1=0 \text{ 或 } z_2=0 \\ z^2\ge 0 \iff z\in\mathbf{R} \end{array}$

复数共轭的基本性质：$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2},\quad \overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2},\quad \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\quad \overline{(\bar z)}=z,\quad z=\bar z \iff z\in\mathbf{R}$

复数的模的基本性质：$|z|=|\bar z|,\qquad z\cdot\bar z=|z|^2,\qquad |z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\qquad \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}\quad (z_2\ne 0)$

对于关于 x 的实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\quad (a,b,c\in\mathbf{R},a\ne 0)$,

当 $\Delta=b^2-4ac\ge 0$ 时，$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a},\quad x_1+x_2=-\dfrac{b}{a},\quad x_1x_2=\dfrac{c}{a},\quad |x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{-\Delta}\mathrm{i}}{2a},\quad x_1+x_2=-\dfrac{b}{a},\quad x_1x_2=|x_1|^2=|x_2|^2=\dfrac{c}{a},\quad |x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{|a|},$

$x_1=\overline{x_2},\quad |x_1|=|x_2|=\sqrt{\dfrac{c}{a}},\quad \operatorname{Re}x_1=\operatorname{Re}x_2=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{b}{2a},\quad |\operatorname{Im}x_1|=|\operatorname{Im}x_2|=\dfrac{|x_1-x_2|}{2}=\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2|a|}$

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ 的性质：$\begin{array}{l} \omega^3=\varpi^3=1,\qquad \omega^2+\omega+1=0,\qquad \omega\cdot\varpi=1, \\ \omega^2=\varpi,\qquad \varpi^2=\omega,\qquad \omega+\varpi=-1,\qquad \omega+\dfrac{1}{\omega}=-1 \end{array}$

复数的三角形式：$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),\quad r \geq 0,\quad \theta = \arg z \in [0,2\pi),\quad \mathrm{Arg}\, z \in \mathbf{R}$

复数的三角形式运算：$\begin{cases} z_1 = r(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha), & r = |z_1| \\ z_2 = s(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta), & s = |z_2| \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} z_1 z_2 = rs\left[\cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)\right] \\ \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r}{s}\left[\cos(\alpha-\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha-\beta)\right] \quad (z_2 \neq 0) \\ z^n = r^n(\cos n\alpha + \mathrm{i}\sin n\alpha) \end{array}$

立体几何

公理 1：$\begin{cases} A \in \alpha \\ B \in \alpha \end{cases} \Rightarrow$ 对于 $\forall P \in AB$, 有 $P \in \alpha$

公理 2：不在同一直线上的三点确定一个平面

推论 1：一条直线和这条直线外的一点确定一个平面

推论 2：两条相交直线确定一个平面

推论 3：两条平行直线确定一个平面

公理 3：$P \in \alpha \cap \beta \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha \cap \beta = l \\ P \in l \end{cases}$

公理 4：$\begin{cases} a \parallel l \\ b \parallel l \end{cases} \Rightarrow \quad a \parallel b$

异面直线判定定理：$\begin{cases} A \in \alpha \\ CD \subset \alpha \\ A \notin CD \\ B \notin \alpha \end{cases} \Rightarrow$ AB 与 CD 异面

直线与平面平行的判定定理：$\begin{cases} a \subset \alpha \\ l \parallel a \\ l \not\subset \alpha \end{cases} \Rightarrow \quad l \parallel \alpha$

直线与平面平行的性质定理：$\begin{cases} a \parallel \alpha \\ a \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = b \end{cases} \Rightarrow \quad a \parallel b$

直线与平面垂直的判定定理：$\begin{cases} a, b \subset \alpha \\ a \cap b = P \\ a, b \perp l \end{cases} \Rightarrow \quad l \perp \alpha$

直线与平面垂直的性质定理：$\begin{cases} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{cases} \Rightarrow \quad a \parallel b$

两个平面平行的判定定理：$\begin{cases} a, b \subset \alpha \\ a \cap b = P \\ a, b \parallel \beta \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha \parallel \beta$

两个平面平行的性质定理：$\begin{cases} \alpha \parallel \beta \\ \gamma \cap \alpha = a \\ \gamma \cap \beta = b \end{cases} \Rightarrow \quad a \parallel b$

平面与平面垂直的判定定理：$\begin{cases} l \perp \alpha \\ l \subset \beta \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha \perp \beta$

平面与平面垂直的性质定理：$\begin{cases}\alpha\perp\beta\\ \alpha\cap\beta=l\\ a\subset\alpha\\ a\perp l\end{cases}\quad\Rightarrow\quad a\perp\beta$

球的体积公式：$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

球的表面积公式：$S=4\pi R^2$

台的体积公式：$V=\dfrac{1}{3}h\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right)$

圆台体积公式：$V=\dfrac{1}{3}\pi h\left(R^2+Rr+r^2\right)$

向量夹角计算公式：$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

空间向量数量积的坐标表示：$\begin{cases}\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)\\ \vec{b}=(x_2,y_2,z_2)\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

直线所成角计算公式：$\cos\theta=\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|},\quad\vec{a}\parallel l_1,\quad\vec{b}\parallel l_2$

线面角计算公式：$\sin\theta=\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{n}|}{|\vec{a}||\vec{n}|},\quad\vec{a}\parallel l,\quad\vec{n}\perp\alpha$

点到平面距离公式：$d=\dfrac{|\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|},\quad\vec{n}\perp\alpha,\quad A\in\alpha$

二面角计算公式：$\cos\theta=\pm\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|},\quad\overrightarrow{n_1}\perp\alpha,\quad\overrightarrow{n_2}\perp\beta$

异面直线距离公式：$d=\dfrac{|\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|},\quad\vec{n}\perp l_1,l_2,\quad M\in l_1,\quad N\in l_2$

排列、组合与概率初步

杨辉三角：

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 & & & & & \vdots & & & & & \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{C}_n^0 & \mathrm{C}_n^1 & \mathrm{C}_n^2 & \cdots & \mathrm{C}_n^k & \cdots & \mathrm{C}_n^n \\
\mathrm{C}_{n+1}^0 \quad \mathrm{C}_{n+1}^1 & \mathrm{C}_{n+1}^2 & \cdots & \mathrm{C}_{n+1}^k & \mathrm{C}_{n+1}^{k+1} & \cdots & \mathrm{C}_{n+1}^{n+1}
\end{array}$$

排列数的计算：$\mathrm{P}_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$

组合数的计算：$\mathrm{C}_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}=\dfrac{\mathrm{P}_n^m}{m!}$

组合数的性质：$\begin{aligned} &\mathrm{C}_n^m = \mathrm{C}_n^{n-m} \\ &\mathrm{C}_n^m = \mathrm{C}_{n-1}^{m-1} + \mathrm{C}_{n-1}^m \\ &k\,\mathrm{C}_n^k = n\,\mathrm{C}_{n-1}^{k-1} \\ &\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = 2^n \\ &(\mathrm{C}_n^0)^2 + (\mathrm{C}_n^1)^2 + \cdots + (\mathrm{C}_n^n)^2 = \mathrm{C}_{2n}^n \end{aligned}$

二项式定理：$(a+b)^n = \mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} b + \mathrm{C}_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} a b^{n-1} + \mathrm{C}_n^n b^n \quad (n \in \mathbf{Z})$

条件概率公式：$P(B\,|\,A) = \dfrac{|A \cap B|}{|A|} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

全概率公式：$P(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A\,|\,\Omega_k) P(\Omega_k) \qquad (\bigcup_{k=1}^{n} \Omega_k = \Omega,\quad \Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing,\quad i \neq j)$

贝叶斯公式：$P(\Omega_i\,|\,A) = \dfrac{P(A\,|\,\Omega_i) P(\Omega_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A\,|\,\Omega_k) P(\Omega_k)} \qquad (\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} \Omega_k = \Omega,\quad \Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing,\quad i \neq j)$

随机变量的分布：$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1, \quad 0 \le p_i \le 1, \quad i = 1,2,\cdots,n$

期望计算公式：$E[X] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$

方差计算公式：$D[X] = E\left[(X - E[X])^2\right] = E[X^2] - (E[X])^2$

独立事件的定义：$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

期望与方差的性质：$\begin{aligned} &E[aX+b] = aE[x] + b \\ &E[X+Y] = E[X] + E[Y], \\ &E[XY] = E[X]E[Y] \end{aligned} \quad \begin{aligned} &D[aX+b] = a^2 D[X] \\ &D[X+Y] = D[X] + D[Y] \end{aligned} \qquad (X,Y\text{独立})$

二项分布：$B(n,p) : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n \\ q^n & \mathrm{C}_n^1 p q^{n-1} & \mathrm{C}_n^2 p^2 q^{n-2} & \cdots & \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k} & \cdots & p^n \end{pmatrix}$

其中 $P(X=k) = \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}, \quad 0 < p < 1, \quad p + q = 1$, 满足 $E[X] = np, \quad D[X] = npq$

超几何分布：$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n \\ \dfrac{\mathrm{C}_b^n}{\mathrm{C}_{a+b}^n} & \dfrac{\mathrm{C}_a^1 \mathrm{C}_b^{n-1}}{\mathrm{C}_{a+b}^n} & \dfrac{\mathrm{C}_a^2 \mathrm{C}_b^{n-2}}{\mathrm{C}_{a+b}^n} & \cdots & \dfrac{\mathrm{C}_a^k \mathrm{C}_b^{n-k}}{\mathrm{C}_{a+b}^n} & \cdots & \dfrac{\mathrm{C}_a^n}{\mathrm{C}_{a+b}^n} \end{pmatrix}$,规定当 $k < 0$ 或 $k > n$ 时, $\mathrm{C}_n^k = 0$

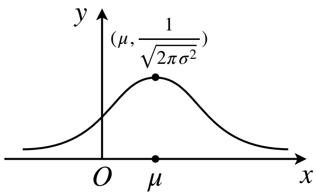
其中 $P(X=k) = \dfrac{\mathrm{C}_a^k \mathrm{C}_b^{n-k}}{\mathrm{C}_{a+b}^n}, \quad k \le n, \quad k \le a, \quad n - k \le b$

令 $p = \dfrac{a}{a+b}$, 满足 $E[X] = \dfrac{na}{a+b}, \quad D[X] = np(1-p)\left(1 - \dfrac{n-1}{a+b-1}\right)$

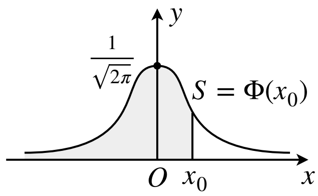
正态分布密度函数：$\varphi_{\mu,\sigma^2}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty$

正态分布密度函数图像：

$y = \varphi_{\mu,\sigma^2}(x)$



$y = \varphi(x)$



正态分布定义：对于 $\forall a, b \in \mathbf{R}$，$a < b$，有 $P(a < X < b) = \int_a^b \varphi_{\mu,\sigma^2}(x)\mathrm{d}x \iff X \sim N(\mu, \sigma^2)$

标准正态分布密度函数：$y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

标准正态分布函数：$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\mathrm{d}x$

正态分布密度函数的线性变换：$X \sim N(\mu, \sigma^2) \iff \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

正态分布的 3σ 原则：$\begin{matrix} P(|X-\mu| < \sigma) \approx 68.3\,\% \\ P(|X-\mu| < 2\sigma) \approx 95.4\,\%, \\ P(|X-\mu| < 3\sigma) \approx 99.7\,\% \end{matrix}$ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

统计

方差计算公式：$s^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

标准差计算公式：$s = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$

百分位数的估计：对于从小到大排列的一组数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，$i = n \cdot k\,\%$，$\mathrm{P}k = \begin{cases} \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2} & (i \in \mathbf{Z}) \\ x_{\lceil i \rceil} & (i \notin \mathbf{Z}) \end{cases}$

线性相关系数计算公式：$r = \cos\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle = \dfrac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$

其中 $\begin{cases} \vec{\alpha} = (x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \cdots, x_n - \bar{x}) \\ \vec{\beta} = (y_1 - \bar{y}, y_2 - \bar{y}, \cdots, y_n - \bar{y}) \end{cases}$

拟合误差计算公式：$Q = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y})^2$

回归方程：$y = \hat{a}x + \hat{b}$

回归系数计算公式：$\begin{cases} \hat{a}=\dfrac{\overrightarrow{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\overrightarrow{\alpha}|^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2} \\ \hat{b}=\overline{y}-\hat{a}\overline{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}y_i-\hat{a}\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} \end{cases}$

2×2 列联表：

	A 组	B 组	总计
0	a	b	$a+b$
1	c	d	$c+d$
总计	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

χ^2 计算公式：$\chi^2=\sum\dfrac{(\text{观测值}-\text{预期值})^2}{\text{预期值}}=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n=a+b+c+d$

χ^2 分布：
$P(\chi^2\geq 6.635)\approx 0.01$
$P(\chi^2\geq 5.024)\approx 0.025$
$P(\chi^2\geq 3.841)\approx 0.05$
$P(\chi^2\geq 2.706)\approx 0.1$

Frank 编辑
小贝 校对