Lógica de Primeira Ordem -1

Variáveis e Quantificadores

Semântica de Quantificadores

Tradução

Referência: Language, Proof and Logic
Dave Barker-Plummer,
Jon Barwise e John Etchemendy, 2011
Capítulo: 9

Variáveis e fórmulas atómicas

- Variáveis: aparecem como argumentos de predicados
  - Não referem objetos: marcam lugares nos argumentos dos predicados
  - LPO: lista infinita de variáveis
  - Tarski's World: u, v, w, x, y, z

Larger(x,y)

- Fórmulas atómicas
  - Fórmulas bem formadas
    - variáveis podem surgir como argumentos
  - Para serem frases: todas as variáveis quantificadas

Quantificadores

- Afirmações acerca do **número** de objetos que verificam uma condição
- $\forall$ todos os objetos satisfazem a condição
  - LN: *todo…, cada…, qualquer um…*
  - LPO: $\forall$x ligação de variável
    - para todo o objeto x…

      $\forall x\ NaSala(x)$

      $\forall x\ (AlunoMDIS(x) \rightarrow NaSala(x))$
- $\exists$ pelo menos 1 objeto satisfaz a condição
  - LN: *algum…, existe…, um…*
  - LPO: $\exists$x ligação de variável
    - para algum objeto x…

      $\exists x\ NaSala(x)$

      $\exists x\ (AlunoMDIS(x) \land NaSala(x))$

WFF – Fórmula bem formada

- AlunoMDIS(x) $\wedge$ NaSala(x)
  - expressão com variáveis não quantificadas
- WFF atómica:
  - predicado n-ário + n variáveis ou constantes
- Formação de WFF's
  - 1. P é wff, $\neg$P é wff
  - 2. P_1, … P_n são wff's, $(P_1 \wedge \ldots \wedge P_n)$ é wff
  - 3. P_1, … P_n são wff's, $(P_1 \vee \ldots \vee P_n)$ é wff
  - 4. P e Q são wff's, $(P \rightarrow Q)$ é wff
  - 5. P e Q são wff's, $(P \leftrightarrow Q)$ é wff
  - 6. P é wff e ν é variável
    - $\forall \nu$ P é wff (ocorrências de ν em P são ligadas)
  - 7. P é wff e ν é variável
    - $\exists \nu$ P é wff (ocorrências de ν em P são ligadas)

Frases

$(\mathrm{Cube}(x) \wedge \mathrm{Small}(x))$ wff com x variável livre

$\exists y\ \mathrm{LeftOf}(x,y)$ wff com x variável livre e y variável ligada

$((\mathrm{Cube}(x) \wedge \mathrm{Small}(x)) \rightarrow \exists y\ \mathrm{LeftOf}(x,y))$ wff

$\forall x\ ((\mathrm{Cube}(x) \wedge \mathrm{Small}(x)) \rightarrow \exists y\ \mathrm{LeftOf}(x,y))$ frase

- Frase: wff sem variáveis livres
  - expressão com variáveis todas quantificadas

$\exists x\ \underbrace{(\mathrm{AlunoMDIS}(x) \wedge \mathrm{NaSala}(x))}$

Frase? ✓

$\exists x\ \underbrace{\mathrm{AlunoMDIS}(x)} \wedge \mathrm{NaSala}(x)$

Frase? ✗

Satisfação de wff's

- Nas conetivas:

  valor lógico de fórmula complexa é função dos valores lógicos das componentes

- Expressões quantificadas: componentes não são frases

  $\exists$x Cube(x) Cube(x) não é frase, não é verdadeiro nem falso

- Satisfação de wff's
  - Objeto satisfaz wff
    - a satisfaz Cube(x) se a é cubo
    - a satisfaz (Cube(x) $\wedge$ Small(x)) se a é cubo e a é pequeno
    - a satisfaz (Cube(x) $\vee$ $\neg$Small(x)) se a é cubo ou a não é pequeno

Verificar se um objeto satisfaz a wff S(x)

- Objeto tem um nome: b
  - S(b) é frase
  - S(b) verdadeira : b satisfaz S(x)
- Objeto não tem nome
  - Escolhe-se um nome não usado: n1
  - S(n1) é frase
  - S(n1) é verdadeira: objeto satisfaz S(x)

Semântica dos quantificadores

- Frases quantificadas: são verdadeiras ou falsas em relação a um **domínio de discurso**
- Domínio de discurso:
  - coleção de coisas acerca das quais se fazem afirmações

- $\forall x\ S(x)$ Verdadeiro se e só se S(x) é satisfeito por todos os objetos do domínio de discurso
- $\exists x\ S(x)$ Verdadeiro se e só se S(x) é satisfeito por algum objeto do domínio de discurso

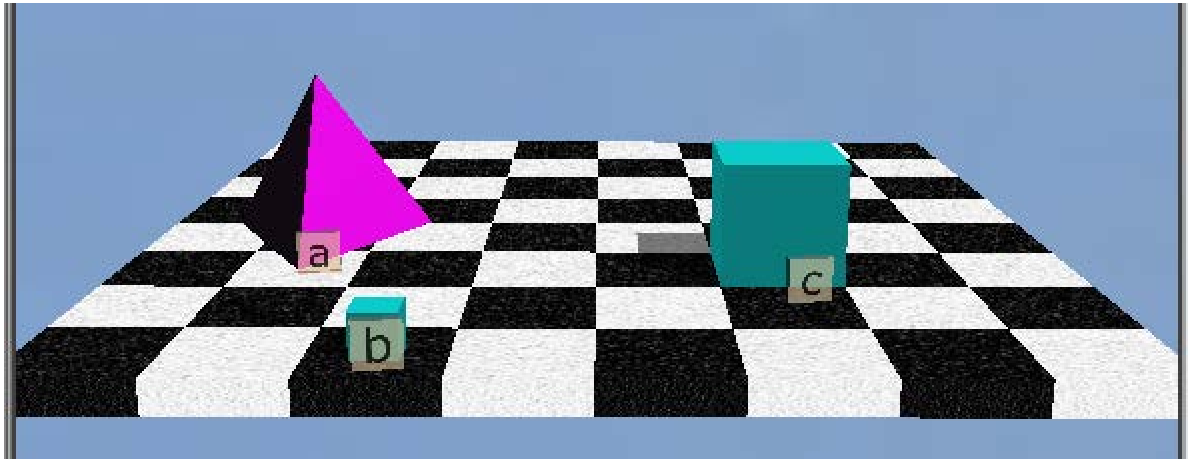
Quantificadores: regras do jogo

Nas regras para as conetivas: escolher frases e subfrases

Nas regras para os quantificadores: escolher objetos

Forma	Afirmação	Quem joga	Objetivo
$P \vee Q$	V F	nós Tarski's World	Escolher um de P e Q verdadeiro
$P \wedge Q$	V F	Tarski's World nós	Escolher um de P e Q falso
$\exists x\ P(x)$	V F	nós Tarski's World	Escolher objeto b que satisfaça a wff P(x)
$\forall x\ P(x)$	V F	Tarski's World nós	Escolher objeto b que não satisfaça a wff P(x)

Avaliar frases quantificadas



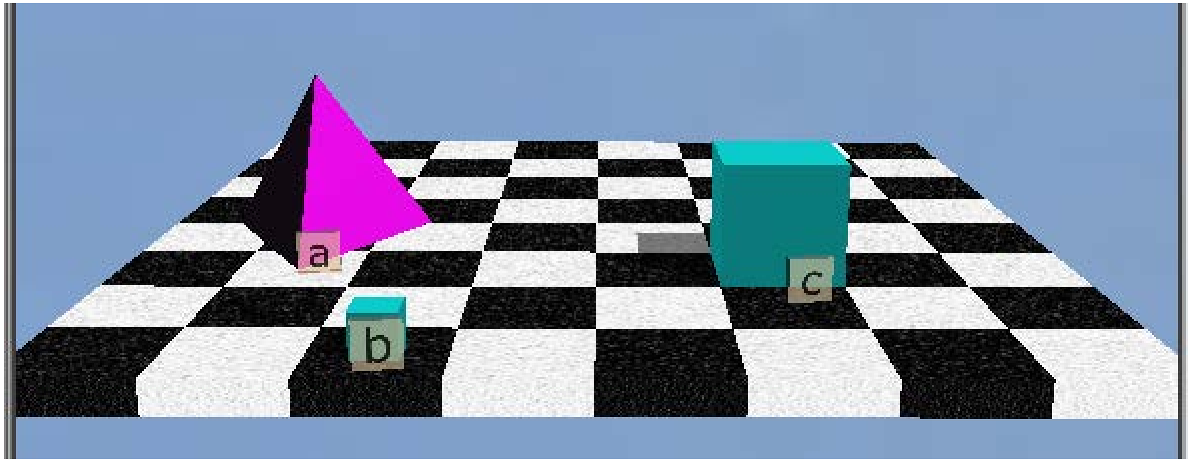
- $\forall x\ Cube(x)$? **F**
  - Cube(a) **F**
  - Cube(b) **T**
  - Cube(c) **T**

- $\exists x\ Cube(x)$? **T**
  - Cube(a) **F**
  - Cube(b) **T**
  - Cube(c) **T**

- $\forall y\ (Medium(y) \rightarrow Cube(y))$? **T**
  - $Medium(a) \rightarrow Cube(a)$ **T**
  - $Medium(b) \rightarrow Cube(b)$ **T**
  - $Medium(c) \rightarrow Cube(c)$ **T**

- $\exists z\ (Tet(z) \rightarrow Small(z))$? **T**
  - $Tet(a) \rightarrow Small(a)$ **F**
  - $Tet(b) \rightarrow Small(b)$ **T**
  - $Tet(c) \rightarrow Small(c)$ **T**

Avaliar frases quantificadas



- $\forall x\, ((Cube(x) \wedge Small(x)) \rightarrow \exists y\, LeftOf(x,y))$? **T**
  - x=a: $(Cube(a) \underset{\mathbf{F}}{\wedge} Small(a)) \rightarrow \underset{\mathbf{T}}{\exists y}\, LeftOf(a,y)$ **T**
  - x=b: $(Cube(b) \underset{\mathbf{T}}{\wedge} Small(b)) \rightarrow \underset{\mathbf{T}}{\exists y}\, LeftOf(b,y)$ **T**
  - x=c: $(Cube(c) \underset{\mathbf{F}}{\wedge} Small(c)) \rightarrow \underset{\mathbf{F}}{\exists y}\, LeftOf(c,y)$ **T**

y=a: LeftOf(a,a)
y=b: LeftOf(a,b) **T**
y=c: LeftOf(a,c) **T**
y=a: LeftOf(b,a)
y=b: LeftOf(b,b)
y=c: LeftOf(b,c) **T**
y=a: LeftOf(c,a)
y=b: LeftOf(c,b)
y=c: LeftOf(c,c)

As 4 formas aristotélicas

(1) *Todos os P's são Q's*

(2) *Alguns P's são Q's*

(3) *Nenhum P é Q*

(4) *Alguns P's não são Q's*

(1) $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$

(2) $\exists x\, (P(x) \land Q(x))$

porque não $\cancel{\exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x))}$?

(3) $\forall x\, (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$

serve $\neg\exists x\, (P(x) \land Q(x))$? $\surd$

(4) $\exists x\, (P(x) \land \neg Q(x))$

Exemplo

- Linguagem:
  - extensão da linguagem de 1ª ordem da aritmética
  - predicados adicionais Par(x) e Primo(x)

- Exprimir as afirmações:

  Nenhum número par é primo

  Todo o número primo é ímpar ou igual a 2

  Algum dos números primos é par

  Algum dos números primos não é par

- Quais são as frases verdadeiras ?

Tradução de frases nominais complexas

Um rapaz que vive em Cedofeita…

Todas as mulheres portuguesas…

- Frases existenciais *um…, alguma…, alguém…*

  Um cão pequeno e feliz está em casa

  $\exists x\ ((Cao(x) \land Pequeno(x) \land Feliz(x)) \land EmCasa(x))$

- Frases universais *todo…, cada…, as…, qualquer…*

  Todo o cão pequeno que está em casa está feliz

  $\forall x\ ((Cao(x) \land Pequeno(x) \land EmCasa(x)) \rightarrow Feliz(x)))$

Afirmações vacuosas

$$\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$$

- Mundos sem objetos que satisfaçam P(x): frase é verdadeira
  - diz-se uma generalização vacuosamente verdadeira
  - Exemplo:

$$\forall x\ (Tet(x) \rightarrow Small(x))$$

    - verdadeira em mundos onde não haja tetraedros

$$\forall x\ (Tet(x) \rightarrow Cube(x))$$

    - verdadeira em mundos onde não haja tetraedros (e só esses)
    - só pode ser verdadeira de forma vacuosa: é **inerentemente vacuosa**
- Frases vacuosamente verdadeiras: raras em LN

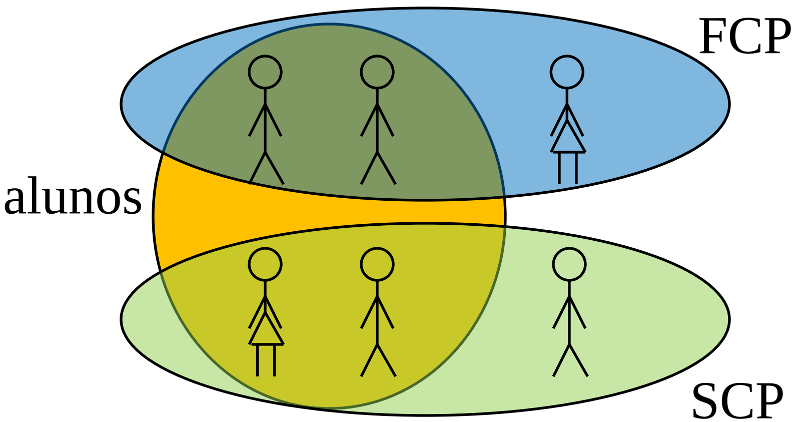
Todos os caloiros que frequentaram MDIS tiveram 18

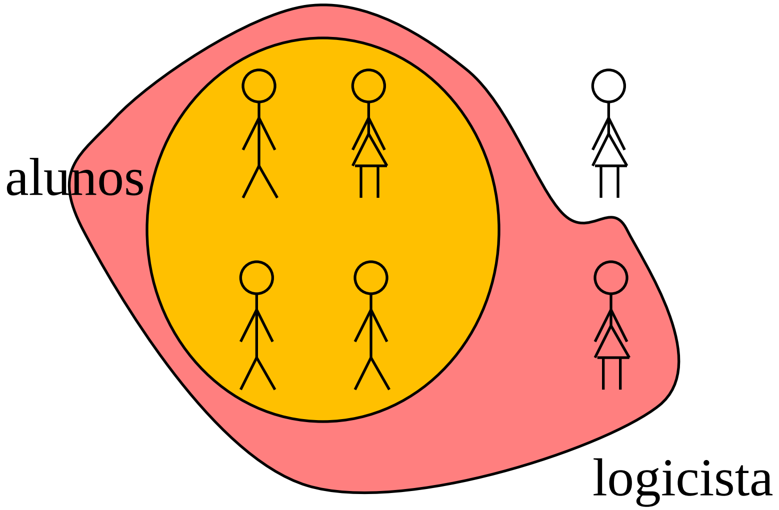
    - verdadeira se nenhum caloiro frequentou a cadeira
    - frases inerentemente vacuosas associadas à intenção de “enganar” o ouvinte

Contradição?

- Os pares de frases são contraditórios?
- Quais as frases verdadeiras nos mundos apresentados?

Alguns alunos de MDIS são do FCP Todos os alunos de MDIS são do FCP	Alguns alunos de MDIS gostam de Lógica Todos os alunos de MDIS gostam de Lógica





Decorrência conversacional

(1) *Alguns P's são Q's*

(2) *Todos os P's são Q's*

- Intuição: são contraditórias num discurso

  Alguns alunos de MDIS *vão passar*

  Todos os alunos de MDIS *vão passar*

- Se fossem contraditórias: tradução de (1) seria

  $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) \wedge \neg\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$

- De novo a decorrência conversacional

  $\neg\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$ não é parte do significado

  afirmações subsequentes a (1) podem afirmar (2) sem serem contraditórias

Símbolos de função

- Construir nomes complexos a partir de outros nomes
  - pai(pai(rui))
  - (1+ (1+1))
- Variáveis: podem aparecer nos termos
  - pai(pai(x))
  - (1+ (1+y))
- Wff's
  - MaisAlto(pai(pai(x)), x)
  - Par($y \times y$)
- Frases
  - $\forall y$ (Par(y) $\leftrightarrow$ Par($y \times y$))

Negação de frases quantificadas

Leis de DeMorgan para quantificadores

(1) $\neg\forall x\, P(x) \;\Leftrightarrow\; \exists x\, \neg P(x)$

(2) $\neg\exists x\, P(x) \;\Leftrightarrow\; \forall x\, \neg P(x)$

- Formas aristotélicas:
  - *Todos os P's são Q's* é negação de *Alguns P's não são Q's*

$\neg\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$

$\Leftrightarrow \neg\forall x\, (\neg P(x) \vee Q(x))$

$\Leftrightarrow \exists x\, \neg(\neg P(x) \vee Q(x))$

$\Leftrightarrow \exists x\, (\neg\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$

$\Leftrightarrow \exists x\, (P(x) \wedge \neg Q(x))$

Substituição de variáveis ligadas

- Para toda a wff P(x) e variável y que não ocorre em P(x)

(1) $\forall x\, P(x) \Leftrightarrow \forall y\, P(y)$

(2) $\exists x\, P(x) \Leftrightarrow \exists y\, P(y)$

Tradução com quantificadores

1. Só os bravos sabem como perdoar
2. Nenhum homem é uma ilha
3. Eu não me preocupo com ninguém, se ninguém se preocupar comigo
4. Cada nação tem o governo que merece
5. Não há certezas, à parte a lógica
6. A miséria (i.e., pessoa miserável) gosta de companhia
7. Nem tudo o que luz é ouro
8. Havia um moleiro alegre que viveu no rio Côa
9. Se prezas toda a gente não prezas ninguém
10. Algo está podre no reino da Dinamarca

Respostas

1. $\forall x\ (Perdoa(x) \rightarrow Bravo(x))$
2. $\forall x\ (Homem(x) \rightarrow \neg Ilha(x))$
3. $\neg\exists x\ Preocupa(x, eu) \rightarrow \neg\exists x\ Preocupa(eu, x))$ x’s diferentes
   - $\forall x\ (\neg Preocupa(x, eu) \rightarrow \neg Preocupa(eu, x))$ o que significa?
4. $\forall x\ (Nação(x) \rightarrow Merece(x, governo(x))$
   - $\forall x\ \forall y\ [(Nação(x) \wedge Governo(y) \wedge Tem(x,y)) \rightarrow Merece(x,y)]$
5. $Certo(Lógica) \wedge \neg\exists x\ (x \neq Lógica \wedge Certo(x))$ ou com $\forall$
6. $\forall x\ (Miserável(x) \rightarrow \exists y\ (Companhia(y, x) \wedge Gosta(x, y)))$
7. $\neg\forall x\ (Luz(x) \rightarrow Ouro(x))$
8. $\exists x\ (Moleiro(x) \wedge Alegre(x) \wedge Rio(Côa) \wedge Vive(x, Côa))$ sem tempo
9. $\forall x\ [(Pessoa(x) \wedge \forall y\ (Pessoa(y) \rightarrow Preza(x,y))) \rightarrow$
   $\forall y\ (Pessoa(y) \rightarrow \neg Preza(x,y))]$
10. $Reino(dinamarca) \wedge \exists x(Podre(x) \wedge Local(x, dinamarca))$