Plano Analítico

Análise Numérica

Regente da Cadeira drª. Rossana Haron Carimo Soares

Semana 1 e 2

Capítulo 1: Cálculo com números aproximados

Semana 3 e 4
Capítulo 2: Interpolação polinomial de funções

Semana 5, 6 e 7
Capítulo 3: Resolução de sistemas de equações algébricas lineares AX=B

Semana 8
Realização do Primeiro Teste

Capítulo 4: Raízes da equação não linear F(x)=0

Semana 9 e 10
Continuação do capítulo 4

Semana 11 e 12
Capítulo 5: Derivação e Integração numérica

Semana 13 e 14
Capítulo 6: Resolução numérica da equação diferencial ordinária y'=f(x,y)

Semana 15 e 16
Capítulo 7: Valores próprios e vectores próprios
Realização do Segundo Teste

Capítulo 1: Cálculo com números aproximados

1. Dê alguns exemplos de números exactos e de números aproximados.

2. Seja dado π = 3.14159… Calcular o erro absoluto do valor 3.14 aproximado de π.

3. Seja o valor de π com 15 casas decimais $\pi = 3.141592653589793$
   Faça o arredondamento até 5 dígitos decimais e calcule o erro absoluto $\Delta\pi$.

4. Seja o valor de e (a base do algoritmo natural) com 15 casas decimais $e = 2.718281828459045$
   Faça o arredondamento até 6 dígitos decimais e calcule o erro relativo Re.

5. Seja as seguintes grandezas:
   a) A temperatura máxima em Maputo de hoje é $25℃ \pm 2℃$
   b) A velocidade de um veículo é 70 ± 2 km por hora
   c) A distancia de Maputo a Beira é 1340 ± 10 Km

   Determinar os valores aproximados, erro absoluto e erro relativo respectivo de cada grandeza.

6. Seja $A = 115.3 \ \pm 0.5$ e $B = 10376 \ \pm 50$. Que valor é mais exacto?

7. Ordenar os seguintes valores pela ordem crescente de exactidão:
   $A = -123.43 \ \pm 0.13 \qquad B = 15632 \ \pm 50 \qquad C = 0.9342 \ \pm 0.0001$

8. Ordenar os seguintes valores e fazendo arredondamento até 3 casas decimais pela ordem decrescente de exactidão:

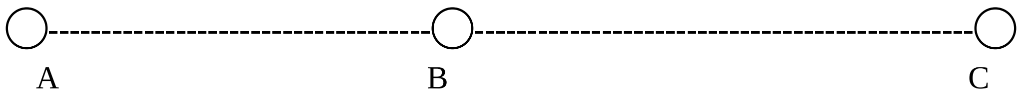
$$\pi = 3.141592653589793$$

$e = 2.718281828459045$

$$sen\,(1.0) = 0.84147098480$$

$$\sqrt{2} = 1.414213562$$

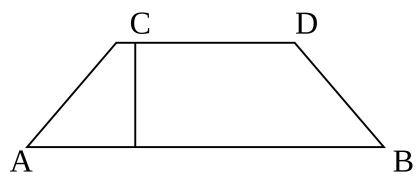
9. Sejam as três cidades A, B e C. Sabem se que a distância AB = 127 ± 0.5 (km), AC = 321 ± 2 (km). Calcule a distância BC.



10. Determinar a fórmula de erro absoluto quando calcular a área de um jardim rectangular medindo a sua largura X e o seu comprimento Y.

11. Determinar a área de um trapézio ABCD e erro absoluto respectivo, Sejam as medições

$X = CD = 5 \pm 1$ $\quad$ $Y = AB = 15 \pm 2$ $\quad$ $H = altura = 10 \pm 1$



12. Determina o erro absoluto ΔN ao calcular o valor (A+B)*C sendo

$A = -21.34 \pm 0.002,$ $\quad$ $B = 3.75 \pm 0.005,$ $\quad$ $C = 12.002 \pm 0.004$

13. Determina o erro absoluto ΔN ao calcular o Valor (A+B) (C-D) sendo

$\mathrm{A} = -21.134 \pm 0.002$ $\quad$ $\mathrm{B} = 3.75 \pm 0.005$

$\mathrm{C} = 12.002 \pm 0.004$ $\quad$ $\mathrm{D} = -2.12 \pm 0.004$

14. Determinar o valor aproximado e o erro absoluto respectivo ΔN para o valor

$\mathrm{N} = \frac{XY}{X+Y}$

a) Sendo X= 12.34 $\pm$ 0.02 e Y= -7.68 $\pm$ 0.001
b) Sendo X= -12.34 $\pm$0.02 $e\ Y = 7.68 \pm 0.01$

15. Demonstrar as fórmulas de erros para as seguintes funções:

(designa se ΔX- erro absoluto de X, δx -erro relativo de x)

a) F (x,y) =$x \pm y$ $|\Delta F| \leq \Delta x| + |\Delta y|$
b) F$(x, y) = x * y$ $\delta F \leq \delta x + \delta y$
c) F (x,y)= x/y $\delta F \leq \delta x + \delta y$
d) F (x) = $\sqrt{x}$ $\delta F \leq \frac{\delta X}{2}$

Capítulo 2: Interpolação Polinomial de Funções

1. Determinar o polinómio de Lagrange da forma $L(X) = AX^2 + BX + C$ para a função tabelada

a)

X	1	3	4
F(X)	5	12	-1

b)

X	1	$\frac{3}{2}$	4
F(X)	$\frac{5}{3}$	12	-1

2. Determinar o polinómio de Lagrange da forma $L(X) = AX^3 + BX^2 + CX + D$ para a função.

X	-1	0	2	3
F(X)	-12	2	-12	-28

Sugestão: Para um cálculo rápido do polinómio L(X), pode usar a expressão bem conhecida da matemática:

$$(X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+bc+ca)X - abc$$

3. Seja a função tabelada

X	1	3	4	5
F(X)	5	12	-1	6

a) Determinar o polinómio de Lagrange da forma $L(X) = AX^3 + BX^2 + CX + D$ para a função.
b) Calcular o valor f(3.5) usando o polinómio calculado em cima
c) Calcular o valor f(3.5) directamente pelas substituições numéricas.

4. Seja a função tabelada

X	1	1.34	1.76	2.02	2.50	2.81
F(X)	0.69315	1.52653	3.14478	4.50989	7.82977	10.56205

Calcular o valor f(1.91) pela fórmula de Lagrange.

5. Seja a função

X	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
F(X)	0.42355	0.47953	0.77655	1.12768	1.50663	1.88854	2.34433	2.53467

a) Verificar se X_i são igualmente espaçados? Caso sim determinar o incremento h
b) Calcular as diferenças até 4ª ordem
c) Determinar a marca de interpolação ND para o ponto X = 2.221
d) Determinar a marca de interpolação NA para o ponto X = 2.4634
e) Desenhar os caminhos de interpolação determinados na perguntas c) e d)
f) Listar as diferenças de cada caminho de interpolação acima determinado.

6. Seja a função

X	**F(X)**
1.0	-2.97745
1.1	-2.74938
1.2	-2.50042
1.3	-2.23050
1.4	-1.93955
1.5	-1.62749
1.6	-1.29423
1.7	-0.93969
1.8	-0.56373
1.9	-0.16626
2.0	0.25286

a) Suponhamos que vão se usar as interpolações ND ou NA, diga qual entre essas duas interpolações, a que dará a maior precisão de calcular:
   O valor f(1.25) ?
   O valor f(1.77) ?
b) Calcular o valor f (1.25)
c) Calcular o valor f (1.77)
d) Calcular o valor f (1.57) pelas fórmulas ND, NA e LG.

Capítulo 3: Resolução de Sistemas de Equações Algébricas AX = B

1. Resolva os seguintes Sistemas de Equações, e daí que determine as fórmulas para determinação de incógnitas no caso geral (de N equações e N incógnitas).

a) Sistema triangular (tipo A)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ & -3 & 2 & 3 \\ & & -3 & 1 \\ & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) Sistema Triangular (tipo B)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -5 & \\ 2 & 6 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \\ -21 \\ -2 \end{pmatrix}$$

c) Sistema Triangular (tipo C)

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & -3 & & \\ 2 & 6 & -3 & \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d) Sistema triangular (tipo D)

$$\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & -3 \\ & 6 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. Resolva os seguintes sistemas de equações com os métodos de Crámer e de Gauss

$$\begin{cases} 2X + 3Y + Z = 11 \\ -X + 2Y - Z = 0 \\ 3X + 2Z = 9 \end{cases}$$

3. Resolva os seguintes sistemas de equações com o método de Jordan

a) $\begin{cases} 3X + 6Y + 9Z = 42 \\ 2X + 5Y + 8Z = 36 \\ X + 4Y + 10Z = 39 \end{cases}$

4. Resolva os seguintes sistemas de equações com o método de Gauss com pivô:

   a) $\begin{cases} X + Y + Z = 1 \\ X + 2Y + 3Z = -1 \\ X + 4Y + 9Z = -9 \end{cases}$

5. É possível calcular o determinante do sistema nos métodos Gauss, GaussPivot, Jordan? Caso sim, como se pode calcular?

6. Resolva o seguinte sistema de equações com qualquer método:

$$\begin{cases} \frac{3}{7}X - \frac{4}{5}Y = \frac{59}{15} \\ \frac{2}{5}X + \frac{4}{3}Y = \frac{-46}{15} \end{cases}$$

7. Usando o método Jordan calcular a matriz inversa da matriz :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Sugestão : Cria-se a matriz estendida **A|I** (sendo I – a matriz unicidade) e aplique as transformações do método Jordan á medida que se obtenha a nova matriz I$|A^{-1}$, na posição da matriz A^{-1} ter-se-á a matriz inversa.

$$\begin{array}{c} \quad\quad\mathbf{A} \quad\quad\quad\quad\quad\quad \mathbf{I} \\ \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 6 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & 10 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 9 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

8. Calcular as normas da seguinte matriz:

$$\begin{matrix} 0.12356 & -0.08746 & -0.08746 \\ -0.17493 & -0.04956 & -0.17493 \\ -0.26239 & -0.34985 & 0.30029 \end{matrix}$$

9. É possível aplicar o método iterativo no caso em que exista só uma norma inferior que 1?

10. Como se pode escolher o vector inicial para um método iterativo convergente?

11. Resolva o seguinte sistema com o método de Jacobi com eps = 0.001

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_1 + 20x_2 - 2x_3 = -44 \\ -2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 22 \end{cases}$$

12. Ao resolver o sistema dado no exercício 11 com o método iterativo geral, calculando a matriz A e o vector H pelas fórmulas:

    G = I – KA

    H = KB K = 0.06390

    Calcule os vectores x_1 , x_2 e x_3 com $x_0 = (0, 0, 0)$.

Capítulo 4: Raízes da Equação não Linear F(X) = 0

1. Seja a equação da forma f(x) = 0, sendo $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 12x - 4$

Determinar o sinal da Expressão f(a)f(b) para os intervalos [a, b] =

a) [-3, -2.5]
b) [0.4, 1.2]
c) [3, 5]
d) [0, 2]

Quais são os intervalos que podem conter pelo menos uma raiz da equação?

2. Encontrar um intervalo [a, b] de modo que seja f(a)f(b) < 0 para as funções

   a) $f(x) = e^x - 2 - x$

   b) $f(x) = cosx + 1 - x$

   c) $f(x) = lnx - 5 + x$

3. Esboçar gráficos das funções, diga quantas raízes tem a seguinte equação $e^{-x/3} = 3 - x$

4. Seja a equação $x^3 + 4x^2 - 12x - 1 = 0$

   Determine o número de raízes que essa tem usando
   a) Tabelas de valores de função
   b) A primeira derivada f'(x)

5. Demonstra que a equação $x^3 + x^2 + x + 7 = 0$ tenha uma raiz apenas.

6. Determinar um intervalo contendo uma raiz da equação $x^3 + 5x^2 - 2x - 11 = 0$

7. Encontrar uma transformação convergente x= $\varphi(x)$ para a equação
   $x^3 + x - 1000 = 0$ no intervalo [9, 10]

8. Seja a equação f(x)=$x^3 + x^2 - 1 = 0$

   a) Verificar que essa equação tem uma raiz no intervalo [0, 1]
   b) Verificar que essa pode ser rescrita da forma x= $\varphi\ (x)$

$$x = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

   c) Encontrar a raiz com $x_o = 0.75$ e com precisão eps= 0.0001

9. Para calcular a raiz positiva da equação ×= $a - bx^2$ ($a, b > 0$) é possível utilizar o processo iterativo

$$X_{n+1} = a - bX_n$$

   Determina a,b para que o processo iterativo seja convergente.

10. Resolva a equação $x^3 + 4x^2 + 12x - 1 = 0$ no intervalo $[-2.26\,, 3.32]$ pelo método de Bissecção com precisão eps = 0.01.

11. Resolva a equação $2x^3 - 3x + 1 = 0$ no intervalo $[-5.80, -0.96]$ pelo método de Bissecção com precisão eps $= 0.01$.

12. Resolva a equação $lnx - 5 + x = 0$ pelo método de Bissecção com precisão eps= 0.01 (usando o resultado de localização de raízes do exercício 2)

13. Determina o ponto de Fourier para a equação $x^3 - 18 = O$ no intervalo [1, 3]

14. Seja a equação $x^{3\,+}4x^2 - 8 = 0$ no intervalo [0.48, 2.64]. Supondo que se utiliza o método das secantes
    a) Verificar se é possível aplicar esse método?
    b) Calcular o ponto de Fourier e o ponto x_o
    c) Escrever a fórmula concreta do método das secantes para a equação
    d) Calcular na raiz com precisão eps = 0.0001

15. A mesma pergunta como no exercício dado acima para a equação $x^6 - x^4 - x^3 - 1 = 0$ no intervalo [1.12, 1.75]

16. Para cada uma das seguintes equações é aplicado o método das tangentes. Faça os seguintes trabalhos:
    - Verificar se é possível aplicar esse método?
    - Calcular o ponto x_0
    - Escrever a fórmula concreta do método das tangentes para a equação
    - Calcular a raiz com precisão eps = 0.00001

    a) $x^3 - 2x - 7 = 0$ No intervalo [1.63 , 5.00]
    b) $e^x + 2x - 3 = 0$ No intervalo [0.07 , 1.85]

17. Encontrar todas raízes com precisão eps = 0.001 da equação
    a) $x^3 + 5x^2 - 2x - 11 = 0$

    b) $\sin(x)^2 - x^2 + 1 = 0$

    c) $x^4 - 5x^3 - 12x^2 + 76x - 79 = 0$

Capítulo 5: DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

1. Seja a função tabelada

X	X_0 X_1 X_2 .... X_n
F	F_0 F_1 F_2 .... F_n

   Sendo $X_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ igualmente espaçados.

   a) Deriva a fórmula de interpolação ND desta função até a 2ª ordem.

   b) Demonstra que

$$f(X_{ND}) = \frac{1}{h}[\Delta f_{ND} - \frac{1}{2}\Delta^2 f_{ND} + \frac{1}{3}\Delta^3 f_{ND} - \frac{1}{4}\Delta^4 f_{ND} + \dots]$$

2. Usando os 3 primeiros termos da fórmula de interpolação ND, demonstra a fórmula de integração de Simpson:

$$I_{simp} = \frac{h}{3}[f_0 + f_{2n} + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2n-2})]$$

3. Usando os 4 primeiros termos da fórmula de interpolação ND, demonstra a fórmula de integração dos Três Oitavos

$$\int_{x0}^{x3} f(x)dx = \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$$

4. Seja a função tabelada:

I	X	f(X)
0	5.000	-o.23423
1	5.200	-0.17202
2	5.400	-o.10565
3	5.600	-0.03779
4	5.800	0.02892
5	6.000	0.09200
6	6.200	0.14918
7	6.400	0.19849
8	6.600	0.23833
9	6.800	0.26750
10	7.000	0.28523

a) Calcula o integral definido de X_0 a X_{10} pelas fórmulas de integração de Trapézios e de Simpson.
b) Calcula o integral definido de X_3 a X_8 pela fórmula dos Trapézios.
c) Calcula o integral definido de X_1 a X_9 pela fórmula de Simpson.

5. Calcular os seguintes integrais (Trápezios e Simpson)

a) $I = \int_5^7 \ln(x + sen(x+3))dx$ (N = 10)

b) $I = \int_1^2 \mathrm{arctg}(x^2 + 3x)dx$ (N = 10)

c) $I = \int_5^7 \cos(x + \frac{3}{x})dx$ (N = 10)

d) $I = \int_1^3 \frac{e^{-x}\sin x}{2+x^2e^{-x}}dx$ (N = 8)

Capítulo 6: Resolução Numérica da Equação Diferencial Ordinária y' = f(x,y)

1. Solução analítica. **Método de Taylor.**

Suponhamos que a solução y(x) tem o desenvolvimento em série de Taylor:

$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'_0 + \frac{(x-x_0)^2 y''_0}{2!} + \frac{(x-x_0)^3 y'''_0}{3!} + \ \dots$ (1)

Exemplo 1

Seja a equação: $y' = X^2 + Y^2 \qquad y(0) = 0$

Determinamos as derivadas $y_0^{(i)}$ derivando sucessivamente a equação (1) até uma certa ordem (N = 7, por exemplo), e temos

$y' = x^2 + y^2$

$y'' = 2x + 2yy'$

$y^{(3)} = 2 + 2yy' + 2(y')^2$

$y^{(4)} = 2yy^{(3)} + 6y'y''$

$y^{(5)} = 2yy^{(4)} + 8y'^{y^{(3)}} + 6(y'')^2$

$y^{(6)} = 2yy^{(5)} + 10y'^{y^{(4)}} + 20y''^{y^{(3)}}$

$y^{(7)} = 2yy^{(6)} + 12y'^{y^{(5)}} + 30y''^{y^{(4)}} + 20(y^{(3)})^2$

Fazendo x = 0, temos $y'_0 = 0;\ y''_0 = 0;\ y'''_0 = 2;\ y^{(4)} = y^{(5)} = y^{(6)} = 0;\ y^{(7)} = 80$ Substituindo em (1) temos a solução aproximada $y(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$

Exemplo 2

Seja a equação y' = x – y   y(0) = 1

As derivadas sucessivas são:

$y(0) = 1$

$y'(0) = x - y = 0 - 1 = -1$

$y''(0) = 1 - y' = 1 —1 = 2$

$y''' = -2 \;\; y^{(4)} = 4 \;\; y^{(5)} = -2 \;\; y^{(6)} = 2$, ….

Caso geral, $\forall k \geq 2$ temos $y^{(k)} = (-1)^k 2$, então

$$y(x) = 1 - x + 2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k!} = 1 - x + 2(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k!} - 1 + x)$$

Tendo atenção que $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k!} = e^{-x}$ temos a solução:

$$y(x) = 2e^{-x} + x - 1$$

Pela semelhança, encontrar a solução da forma analítica para a equação:

a) $y' = x^2 + y^2 \qquad y(1) = 0$
b) $y' = \frac{1}{2}(x - y) \qquad y(0) = 1$

2. As fórmulas de Runge Kutta de ordem 2 são determinadas da seguinte forma:

$y_{l+1} = y_l + a_1K_1 + a_2K_2$

$K_1 = hf(x_l, y_l)$

$K_2 = hf(x_l + bh, y_l + cK_1)$

$x_{l+1} = x_l + h \qquad (l = 0, 1, 2, \dots)$

Sendo a_1, a_2 , b e c uma solução do sistema:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ 2a_2b = 1 \\ 2a_1c = 1 \end{cases}$$

Verifique que são fórmulas RK2 as seguintes (erro é de O(h^3))

RK2_1

$$y_{l+1} = y_l + (K_1 + K_2)/2$$

$$K_1 = hf(x_l, y_l)$$

$$K_2 = hf(x_l + h, y_l + K_1)$$

$$x_{l+1} = x_l + h$$

$$l = 0, 1, 2, \ldots$$

RK2_2

$$y_{l+1} = y_l + K_2$$

$$K_1 = hf(x_l, y_l)$$

$$K_2 = hf(x_l + \frac{h}{2}, y_l + \frac{1}{2}K_1)$$

$$x_{l+1} = x_l + h$$

$$l = 0, 1, 2, \ldots$$

1. A seguir se dão 2 fórmulas de Runge-Kutta de ordem 3 (erro é de O(h^4))

RK3_1

$$y_{l+1} = y_l + (K_2 + 3K_3)/4$$

$$K_1 = hf(x_l, y_l)$$

$$K_2 = hf(x_l + \frac{h}{3}, y_l + \frac{1}{3}K_1)$$

$$K_3 = hf(x_l + \frac{2h}{3}, y_l + \frac{2}{3}K_1)$$

$$x_{l+1} = x_l + h$$

$$l = 0, 1, 2, \ldots$$

RK3_2

$$y_{l+1} = y_l + (3K_2 + 2K_3)/4$$

$$K_1 = hf(x_l, y_l)$$

$$K_2 = hf(x_l + \frac{2h}{3}, y_l + \frac{2}{3}K_1)$$

$$K_3 = hf(x_l\,, y_l + K_2 - K_1)$$

$$x_{l+1} = x_l + h$$

$$l = 0, 1, 2, \ldots$$

Resolva a equação y' = -xy y(0) = 1 no intervalo [0, 0.5] h = 0.1 com RK3_1 e RK_2 e faça a comparação da exactidão com a solução exacta.

3. Resolva a equação $y' = sen(x) + sen(y)$ y(1.0) = 0 no intervalo [1, 1.5] h = 0.1 pelo método EULER.

4. Seja a equação $y' = arctg(x^2 + y^2)$ y(0) = 1 h = 0.1
   a. Escreva as fórmulas concretas de RK4 para a equação.
   b. Calcular os valores y_1 e y_2 da solução.

5. Escreva as fórmulas concretas e resolva as seguintes equações diferenciais pelo método RK4
   a) $y' = sen(xy)$ y(2) = 1.5 em [2, 3] , h = 0.2
   b) $y' = e^{-x}\cos(x + y)$ y(2) = 1.5 em [2, 2.6] , h = 0.15
   c) $y' = x + ln\frac{1+ x^2 + y^2}{arctg(xy)}$ y(1) = 1.51234 em [1, 1.5], h = 0.1

6. Sistema de equações diferenciais.

   Seja o sistema de equações: $\begin{cases} x' = f(t, x, y) \\ y' = g(t, x, y) \end{cases}$

   $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$

   O método de RK4 para esse sistema é dado pelas seguintes fórmulas:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + lK_3 + l_4)$$
$$K_1 = hf(t_i, x_i, y_i)$$
$$l_1 = hg(t_i, x_i, y_i)$$
$$K_2 = hf(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{K_1}{2}, y_i + \frac{l_1}{2})$$
$$l_2 = hg(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{K_1}{2}, y_i + \frac{l_1}{2})$$
$$K_3 = hf(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{K_2}{2}, y_i + \frac{l_2}{2})$$
$$l_3 = hg(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{K_2}{2}, y_i + \frac{l_2}{2})$$
$$K_4 = hf(t_i, x_i + K_3, y_i + l_3)$$
$$t_i = t_i + h$$

i = 0, 1,2, …

   Resolva o sistema: $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$

   X(0) = 6 , y(0) = 4, h = 0.2 e t do intervalo [0.0, 1.0]

   Sugestão. Pode fazer a seguinte tabela para organizar os cálculos.

i	t_i	X_i	Y_i	K_1	K_2	K_3	K_4	l_1	l_2	l_3	l_4
0	0.0	6	4	…	…	…	…	…	…	…	…
1	0.2										
2	0.4										

Capítulo 7: Valores Próprios e Vectores Próprios

1. Encontrar todos os valores próprios e vectores próprios correspondentes a cada valor próprio da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Usando os métodos directos

a) Determinar o polinómio característico da matriz det(A- γI)
b) Calcular todos os valores próprios da matriz
c) Calcular um vector próprio correspondente ao valor próprio de máximo módulo

3. No método iterativo para a determinação do valor próprio de máximo módulo de uma matriz, considera a seguinte série de vectores:

Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_{10}
1	3	10	35	126	463	1730	6555	25126	977223	379050
0	-1	-5	-21	-85	-341	-1365	-5461	-21845	-87381	-349525
0	0	1	8	45	220	1001	4368	18565	75540	320001

$Y_0 = (1,0,0)$

$Y_1 = A * Y_0 = (3,-1,0)$

$Y_0 = A * \ Y_1 \ = (10,-5,1)$ etc.

Calcular γ_1 pelas razões dos

a) Primeiros componentes
b) Segundos componentes
c) Terceiros Componentes

4. Usando o método Iterativo calcular o valor próprio de máximo módulo da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Com precisão eps = 0.01

5. Calcular o valor próprio da matriz de máximo módulo da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Com métodos directos (sugestão: p(γ) = $\gamma^4 + 4\gamma^3 - 40\gamma^2$ - 56 $\gamma - 20$)

b) Com métodos iterativos com precisão eps = 0.0001 (sugestão $\gamma_1 = 9.09990$)