



# ÉCOLE POLYTECHNIQUE

SIMULATION NUMÉRIQUE ALÉATOIRE (SNA) AUTOUR DES  
ÉVÈNEMENTS RARES

---

## Risques extrêmes en finance de marché

---

*Travail réalisé par :*  
Mallo Poundi Christel Astride  
Dzikouk Frank Dilane

*Sous la supervision de :*  
Clement Rey

25 juin 2025

## Introduction

Dans le cadre du Module Appliqué en Laboratoire (MODAL) APM\_43M02\_EP : *Simulation Numérique Aléatoire pour Événements Rares*, ce projet s'intéresse à l'évaluation des risques extrêmes en finance de marché, en particulier ceux liés aux portefeuilles de produits dérivés. Les produits dérivés, tels que les options d'achat (*Call*) et de vente (*Put*), jouent un rôle central dans la gestion des risques financiers, mais ils peuvent également exposer les investisseurs à des pertes significatives lors de mouvements extrêmes des marchés.

Afin d'évaluer ces risques extrêmes, nous nous plaçons dans un cadre probabiliste où les prix des actifs sous-jacents suivent des dynamiques stochastiques, et plus précisément des mouvements browniens géométriques. Nous considérons des portefeuilles composés d'options européennes, dont la valorisation repose sur la formule de Black-Scholes.

L'objectif principal de ce projet est d'estimer numériquement la probabilité que la valeur d'un portefeuille dépasse ou tombe en dessous d'un certain seuil critique, c'est-à-dire d'évaluer des événements rares associés à des pertes extrêmes. Ce type de quantification est essentiel dans l'estimation de la *Value-at-Risk* (VaR), indicateur réglementaire clé pour la gestion du capital et la couverture des risques.

Ce rapport est accompagné d'un notebook Jupyter et est organisé comme suit :

- Dans une **première partie**, nous présentons le sujet, les objectifs du projet ainsi que le cadre mathématique considéré.
- La **deuxième partie** est consacrée à la mise en œuvre de la méthode de Monte Carlo naïve (intuitive mais peu adaptée dans notre contexte) pour l'estimation des probabilités rares et des quantiles.
- La **troisième partie** introduit deux techniques d'échantillonnage d'importance — le changement de drift et la transformation d'Esscher — visant à améliorer l'efficacité des estimations ; nous y implémenterons également une méthode de détermination de quantile par échantillonnage d'importance.
- La **quatrième partie** présente des implémentations des méthodes dites de *splitting*, appliquées au calcul de probabilités rares et de quantiles extrêmes.
- Dans la **cinquième partie**, nous dressons un récapitulatif des résultats obtenus par les différentes méthodes afin de pouvoir les comparer directement.

**Remarque :** Étant donné que nous travaillons avec des variables aléatoires et que nous souhaitons garantir la reproductibilité des résultats présentés dans ce rapport, nous avons fixé la graine de NumPy via la fonction `reproductivite`.

Pour obtenir exactement les mêmes résultats que ceux du rapport, définissez

```
will = True
```

dans le notebook (c'est la valeur par défaut). Si vous préférez générer de nouveaux tirages à chaque exécution, mettez

```
will = False
```

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation du sujet</b>	<b>4</b>
1.1	Simulation de l'évolution de la valeur du portefeuille . . . . .	5
1.2	Histogramme des valeurs du portefeuille et de la valeur cumulée . . . . .	6
1.3	Présentation du portefeuille test . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Méthode de Monte Carlo naïve</b>	<b>9</b>
2.1	Présentation de la méthode . . . . .	9
2.2	Mise en œuvre pour le calcul des probabilités . . . . .	9
2.2.1	Principe et application aux portefeuilles du sujet . . . . .	9
2.2.2	Commentaires des résultats . . . . .	10
2.3	Détermination des quantiles . . . . .	10
2.3.1	Principe de la méthode . . . . .	10
2.3.2	Construction de l'intervalle de confiance . . . . .	11
2.3.3	Mise en œuvre sur les portefeuilles du sujet . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Méthodes d'échantillonnage d'importance</b>	<b>14</b>
3.1	Présentation de la méthode . . . . .	14
3.2	Échantillonnage d'importance par changement de drift . . . . .	15
3.2.1	Principe . . . . .	15
3.2.2	Choix du paramètre $\mu$ . . . . .	16
3.2.3	Test sur le portefeuille test . . . . .	17
3.3	Échantillonnage d'importance par transformation de Escher . . . . .	18
3.3.1	Principe . . . . .	18
3.3.2	Choix du paramètre $\theta$ . . . . .	20
3.3.3	Test sur le portefeuille test . . . . .	20
3.4	Applications aux portefeuilles du sujet . . . . .	21
3.5	Détermination de quantile . . . . .	23
3.5.1	Calcul de la variance de l'estimateur . . . . .	24
3.5.2	Choix du paramètre $\mu$ . . . . .	24
3.5.3	Test sur le portefeuille test . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Méthodes de Splitting</b>	<b>26</b>
4.1	Méthode de splitting par rejet . . . . .	27
4.1.1	Test sur le portefeuille test . . . . .	28
4.2	Méthode de Splitting par chaîne de Markov . . . . .	28
4.2.1	Choix du paramètre $\rho$ et des $q_i$ . . . . .	29
4.2.2	Test sur le portefeuille test . . . . .	30
4.2.3	Test sur les portefeuilles du sujet . . . . .	31
4.3	Méthode de la dernière particule . . . . .	31
4.3.1	Principe de la méthode et étapes de l'algorithme . . . . .	31
4.3.2	Test sur le portefeuille test . . . . .	32
4.3.3	Application aux portefeuilles du sujet . . . . .	33
4.4	Détermination de quantile . . . . .	33
4.4.1	Principe de la méthode et étapes de l'algorithme . . . . .	33
4.4.2	Test sur le portefeuille test . . . . .	34
4.4.3	Application aux portefeuilles du sujet . . . . .	35

<b>5</b>	<b>Récapitulatif des méthodes et comparaison</b>	<b>36</b>
5.1	Méthode de Monte Carlo naïve . . . . .	36
5.2	Échantillonnage d'importance . . . . .	36
5.3	Méthodes de Splitting . . . . .	36
5.4	Comparaison des résultats . . . . .	37
5.4.1	Calcul de probabilité sur le portefeuille test . . . . .	37
5.4.2	Calcul de probabilité sur les portefeuilles du sujet . . . . .	37
5.4.3	Calcul de quantiles sur le portefeuille test . . . . .	38
5.4.4	Calcul de quantiles sur les portefeuilles du sujet . . . . .	38
5.5	Conclusion . . . . .	38

# 1 Présentation du sujet

Dans ce projet, nous nous plaçons dans un cadre probabiliste où le prix d'un actif financier est modélisé par un mouvement brownien géométrique. Plus précisément, nous supposons que le prix d'un actif  $(S_t)_{t \geq 0}$  suit la dynamique suivante :

$$S_t = S_0 \exp \left( -\frac{1}{2} \sigma^2 t + \sigma W_t \right),$$

où  $S_0$  est le prix initial,  $\sigma > 0$  est la volatilité, et  $(W_t)_{t \geq 0}$  est un **mouvement brownien**, c'est-à-dire un processus stochastique continu, à accroissements indépendants et stationnaires, tel que  $W_0 = 0$  et  $W_{t+h} - W_t \sim \mathcal{N}(0, h)$  pour tout  $h > 0$ .

## Options : Call et Put

Nous considérons deux types d'options : les options d'achat (calls) et les options de vente (puts). Un call européen donne à son détenteur le droit (mais non l'obligation) d'acheter un actif à une date future  $T$  à un prix fixé à l'avance  $K$  (appelé prix d'exercice). À l'échéance, la valeur d'un call est donc  $(S_T - K)^+$ . De manière analogue, un put donne le droit de vendre l'actif au prix  $K$ , avec une valeur à l'échéance donnée par  $(K - S_T)^+$ .

Sous l'hypothèse de taux d'intérêt nul, les formules de **Black-Scholes** donnent les prix d'un call et d'un put à l'instant  $t$  comme suit :

$$\text{Call}(t, S_t) = S_t \cdot \mathcal{N}[d_+(T - t, S_t, K)] - K \cdot \mathcal{N}[d_-(T - t, S_t, K)],$$

$$\text{Put}(t, S_t) = K \cdot \mathcal{N}[d_+(T - t, K, S_t)] - S_t \cdot \mathcal{N}[d_-(T - t, K, S_t)],$$

où :

$$d_{\pm}(\tau, x, y) = \frac{1}{\sigma \sqrt{\tau}} \log \left( \frac{x}{y} \right) \pm \frac{1}{2} \sigma \sqrt{\tau},$$

et  $\mathcal{N}$  désigne la fonction de répartition de la loi normale standard.

## Portefeuille d'options

Un portefeuille est défini comme une combinaison linéaire d'options sur plusieurs actifs. Si l'on considère  $I_0$  actifs, la valeur du portefeuille à l'instant  $t$  est donnée par :

$$V_t = \sum_{i=1}^{I_0} \alpha_i \cdot \text{Call}_i(t, S_t^i) + \beta_i \cdot \text{Put}_i(t, S_t^i),$$

où  $(\alpha_i, \beta_i)$  représentent les coefficients (quantités) respectifs des calls et puts sur le  $i^{\text{ème}}$  actif  $S_t^i$ .

Le portefeuille peut être **couvert** (hedgé) à l'instant initial. Dans ce cas, on soustrait à chaque option sa sensibilité initiale (dite delta) multipliée par le prix courant de l'actif. La valeur du portefeuille couvert s'écrit :

$$\begin{aligned} V_t^H = & \sum_{i=1}^{I_0} \alpha_i \left( \text{Call}_i(t, S_t^i) - \frac{\partial \text{Call}_i}{\partial S^i}(0, S_0^i) \cdot S_t^i \right) \\ & + \sum_{i=1}^{I_0} \beta_i \left( \text{Put}_i(t, S_t^i) - \frac{\partial \text{Put}_i}{\partial S^i}(0, S_0^i) \cdot S_t^i \right). \end{aligned}$$

Cependant, dans ce travail, nous nous concentrerons uniquement sur les portefeuilles **non couverts**, c'est-à-dire sans stratégie de couverture.

Nous souhaitons estimer des **probabilités rares** sur la valeur finale du portefeuille, telles que :

$$\mathbb{P}(V_T \leq \text{seuil}) \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}(V_T \geq \text{seuil})$$

ainsi que des **quantiles extrêmes** (par exemple au niveau 99.99% ou 99.999%).

Plutôt que de travailler sur la valeur cumulée  $V_0 - V_T$ , nous avons choisi de considérer directement les probabilités sur  $V_T$ . En effet, comme  $V_0$  est une constante déterministe, ces deux approches sont **strictement équivalentes** du point de vue probabiliste.

## Portefeuilles étudiés

Nous étudierons les trois portefeuilles suivants :

- **Portefeuille 1** :  $I_0 = 10$ , avec  $\alpha_i = -10$  et  $\beta_i = -5$  pour tout  $i \in \{1, \dots, 10\}$ .
- **Portefeuille 2** :  $I_0 = 10$ , avec  $\alpha_i = 10$  et  $\beta_i = 5$  pour tout  $i \in \{1, \dots, 10\}$ .
- **Portefeuille 3** :  $I_0 = 10$ , avec :
  - $\alpha_i = -10$ ,  $\beta_i = -5$  pour  $i \in \{1, \dots, 5\}$ ,
  - $\alpha_i = 10$ ,  $\beta_i = 5$  pour  $i \in \{6, \dots, 10\}$ .

### 1.1 Simulation de l'évolution de la valeur du portefeuille

Dans cette partie, nous implémentons une fonction `simulation` qui, à partir des paramètres du portefeuille, permet de :

1. **Tracer l'évolution de la valeur du portefeuille**  $V(t)$  au cours du temps ( en rouge) ;
2. **Tracer la valeur cumulée**  $V(0) - V(t)$ , représentant la perte (ou le gain) de valeur au fil du temps (en noir) ;
3. **Tracer les trajectoires des actifs sous-jacents**, simulés selon un mouvement brownien géométrique.

Pour cela, nous procédons comme suit :

- Nous effectuons une **discrétisation temporelle** de l'intervalle  $[0, T]$  avec un pas de temps  $dt$  ;
- Nous simulons les trajectoires de  $I_0$  actifs sous-jacents à l'aide d'un **mouvement brownien géométrique** ;
- À chaque instant  $t$ , nous calculons la valeur du portefeuille en fonction de la valorisation des options (calls et puts).

```
S0 = 100 # Prix initial de l'actif
K = S0 # strike
sigma = 2 # Volatilité de l'actif
T = 1 # Maturité (en années)
N = 1000 # Nombre de pas de temps
dt = T / N # Pas de temps
IO = 10 # Nombre de trajectoires simulées
alpha # Poids de chaque option call
beta # Poids de chaque option put
```

Listing 1 – Paramètres utilisés pour la simulation

Les résultats sont présentés sur la Figure 1 page 6.

## 1.2 Histogramme des valeurs du portefeuille et de la valeur cumulée

Maintenant que nous maîtrisons la simulation de la dynamique d'un portefeuille depuis l'instant initial jusqu'à la maturité, nous nous intéressons à la distribution statistique des valeurs possibles du portefeuille.

Dans cette section, nous implémentons une fonction `calcul_histogramme` qui trace :

- L'histogramme des valeurs finales du portefeuille  $V(T)$ ,
- L'estimation de densité par noyau gaussien des valeurs observées, à l'aide de `gaussian_kde`.

Les résultats sont présentés sur la Figure 1 page 6.

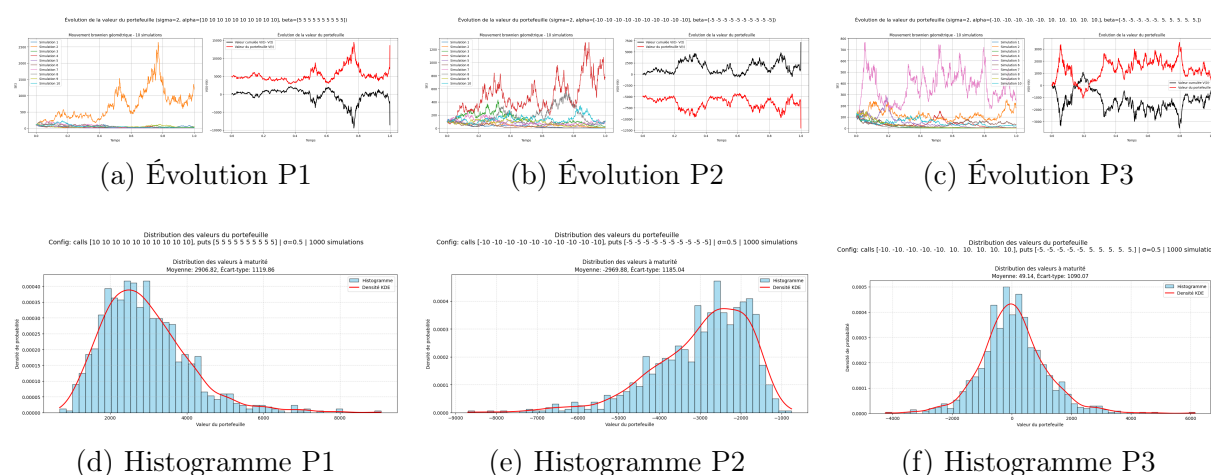


FIGURE 1 – Pour chaque portefeuille : Ligne 1 – évolutions des valeurs. Ligne 2 – histogrammes des valeurs finales.

## 1.3 Présentation du portefeuille test

Une difficulté récurrente dans l'étude des événements rares réside dans le fait que l'on ne dispose généralement pas d'un accès explicite à la densité de la variable aléatoire

considérée. Dans notre cas, pour des paramètres de portefeuille  $I_0, \alpha, \beta$ , il est en général difficile de connaître la loi de  $V_T$ .

En revanche, nous construisons ici un portefeuille de référence (que nous appellerons *portefeuille test*) dont la valeur terminale est suffisamment simple pour permettre un calcul *exact* des probabilités d'intérêt. Cette étape est cruciale : elle nous permettra de comparer directement les résultats produits par nos estimateurs avec les vraies valeurs théoriques, afin d'en évaluer la pertinence et la précision. Par la suite, nous appliquerons nos méthodes aux portefeuilles présentés dans la section précédente.

Considérons un portefeuille synthétique défini par les paramètres suivants :

$$I_0 = 1, \quad \alpha = 1, \quad \beta = -1,$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  désignent respectivement les coefficients associés à une position acheteuse sur un call et une position vendeuse sur un put.

La valeur terminale du portefeuille s'écrit alors :

$$V_T^*(S_T) = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K.$$

**Remarque :** Il aurait également été possible d'utiliser la parité call-put à une date intermédiaire, mais dans le cadre de cette étude, seule la valeur à maturité  $T$  nous intéresse.

Nous cherchons à calculer la probabilité que la valeur finale du portefeuille soit inférieure (ou supérieure) à un certain seuil donné. On a :

$$\mathbb{P}(V_T^* \leq \text{seuil}) = \mathbb{P}(S_T \leq \text{seuil} + K) = \mathbb{P}(\log(S_T) \leq \log(\text{seuil} + K)).$$

En notant que  $\log(S_T) = \log(S_0) + X_T$ , avec

$$X_T = \log\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = -\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma W_T,$$

on obtient :

$$\mathbb{P}(V_T^* \leq \text{seuil}) = \mathbb{P}\left(X_T \leq \log\left(\frac{\text{seuil} + K}{S_0}\right)\right).$$

Étant donné que  $X_T \sim \mathcal{N}\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma^2 T\right)$ , cette probabilité s'écrit à l'aide de la fonction de répartition standard  $\Phi$  de la loi normale :

$$\mathbb{P}(V_T^* \leq \text{seuil}) = \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{\text{seuil} + K}{S_0}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

De manière analogue, on a :

$$\mathbb{P}(V_T^* \geq \text{seuil}) = 1 - \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{\text{seuil} + K}{S_0}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Nous pouvons aussi déterminer le *quantile* (ou *Value-at-Risk* à un niveau donné  $\gamma$ ).



Par définition, le quantile d'ordre  $\gamma$  du portefeuille correspond à la valeur  $q_\gamma$  telle que :

$$\mathbb{P}(V_T^* \leq q_\gamma) = \gamma.$$

D'après la relation précédente :

$$\mathbb{P}(V_T^* \leq q_\gamma) = \Phi \left( \frac{\log \left( \frac{q_\gamma + K}{S_0} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 T}{\sigma \sqrt{T}} \right) = \gamma.$$

On en déduit :

$$\frac{\log \left( \frac{q_\gamma + K}{S_0} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 T}{\sigma \sqrt{T}} = \Phi^{-1}(\gamma),$$

et donc :

$$\log \left( \frac{q_\gamma + K}{S_0} \right) = \sigma \sqrt{T} \Phi^{-1}(\gamma) - \frac{1}{2} \sigma^2 T,$$

ce qui donne :

$$q_\gamma = S_0 \exp \left( \sigma \sqrt{T} \Phi^{-1}(\gamma) - \frac{1}{2} \sigma^2 T \right) - K.$$

Ces expressions seront utilisées comme *références exactes* pour comparer les résultats issus de nos différentes méthodes d'estimation probabiliste.

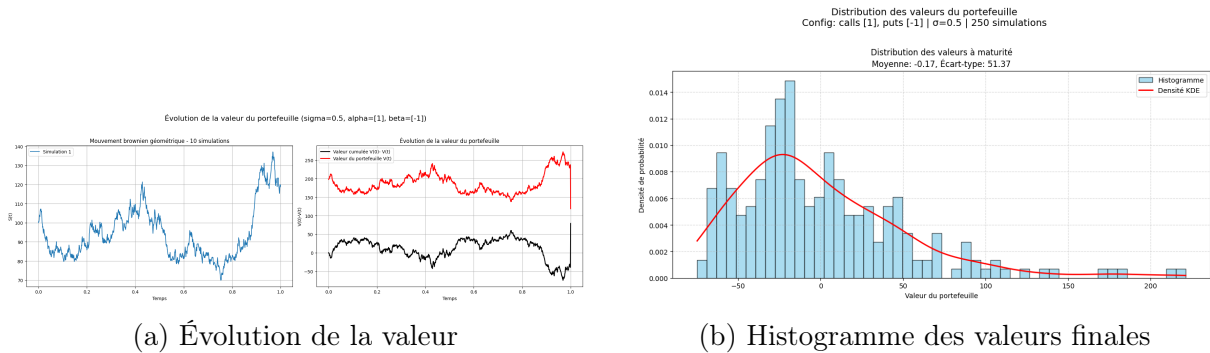


FIGURE 2 – Portefeuille test : à gauche l'évolution de la valeur du portefeuille , à droite l'histogramme des valeurs finales.

Dans le cas du portefeuille test en regardant les histogrammes, nous allons considérer les événements suivants :

- $V_T > 0$  : **pas rare du tout**,
- $V_T > 200$  : **peu rare**,
- $V_T > 900$  : **événement rare**.

## 2 Méthode de Monte Carlo naïve

### 2.1 Présentation de la méthode

La méthode de Monte Carlo naïve permet d'estimer numériquement une espérance ou une intégrale en utilisant les tirages aléatoires. Elle est dite naïve car elle représente l'application directe de la loi des grands nombres, sans optimiser l'efficacité du calcul.

#### Principe

Soit une variable aléatoire  $X$  définie sur un espace de probabilité, et  $f$  une fonction mesurable. On cherche à estimer  $\mu = \mathbb{E}[f(X)]$ .

D'après la loi des grands nombres, si  $f$  est telle que  $\mathbb{E}[|f(X)|] < \infty$ , alors la variable aléatoire :

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i)$$

converge presque sûrement vers  $\mathbb{E}[f(X)]$ , où les  $X_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  sont des variables indépendantes et identiquement distribuées selon la loi de  $X$ . L'idée est donc d'approximer  $\mu$  par  $\hat{\mu}_n$  pour des valeurs assez élevées de  $n$ .

### 2.2 Mise en œuvre pour le calcul des probabilités

#### 2.2.1 Principe et application aux portefeuilles du sujet

Le principe précédent peut être appliqué à la recherche de la probabilité d'un événement  $A$  ; il suffit juste pour cela de prendre :

$$f(X) = \mathbb{1}_{X \in A}.$$

On obtient donc qu'un estimateur de  $p = \mathbb{P}(A)$  est :

$$\hat{p}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i \in A}.$$

Par ailleurs, pour  $n$  suffisamment grand, le théorème central limite permet d'écrire :

$$\hat{p}_n - p \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

avec  $\sigma^2 = \text{Var}(\mathbb{1}_{X \in A}) = p(1 - p)$ .

Mais puisque

$$\hat{p}_n \xrightarrow{\text{p.s.}} p,$$

$$\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n) \xrightarrow{\text{p.s.}} p(1 - p)$$

et le théorème de Slutsky nous permet de conclure que

$$\sqrt{n} \left( \frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n)}} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1),$$

ce qui nous donne un intervalle de confiance asymptotique de niveau  $1-\alpha$  pour l'estimation de  $p$  donné par :

$$I_\alpha = [\hat{p}_n - z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}; \hat{p}_n + z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}]$$

où  $\hat{\sigma}_n = \sqrt{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}$  et  $z_{1-u}$  est le quantile d'ordre  $1-u$  de la loi  $\mathcal{N}(0,1)$ .

Nous utilisons cela pour obtenir la probabilité  $\mathbb{P}(V_T > q)$  (portefeuilles 1 et 3) et  $\mathbb{P}(V_T > q)$  (portefeuille 2) dans les cas suivants :

- $q = 5000$ , puis  $q = 10^4$  pour le Porte-feuille 1
- $q = -2500$ , puis  $q = -10^4$  pour le Porte-feuille 2
- $q = 2500$ , puis  $q = 10^5$  pour le Porte-feuille 3

et les intervalles de confiances asymptotiques de niveau 95% pour ces probabilités.

La fonction `MC_naif` nous permet d'obtenir les résultats souhaités en se servant de la fonction `sample` qui donne des réalisations de  $V_T$ . Elle nous fournit les résultats de la Figure 3 page 10 lorsqu'on prend  $\sigma = 0.5$  dans la formule liant  $S_t$  à  $W_t$ .

```
Estimation par MC naïf de la probabilité pour le portefeuille 1 alpha = [10 10 10 10 10 10 10 10 10], beta = [5 5 5 5 5 5 5 5 5], sigma = 0.5...
La valeur de la probabilité par MC_naif est P(V_T >= 5000) = 0.049, IC(95%) = [0.03562036179861354, 0.062379638201386464]
La valeur de la probabilité par MC_naif est P(V_T >= 10000) = 0.0, IC(95%) = [0.0, 0.0]

Estimation par MC naïf de la probabilité pour le portefeuille 2 alpha = [-10 -10 -10 -10 -10 -10 -10 -10 -10], beta = [-5 -5 -5 -5 -5 -5 -5 -5 -5]
La valeur de la probabilité par MC_naif est P(V_T <= -2500.0) = 0.59, IC(95%) = [0.5595158559247598, 0.6204841440752401]
La valeur de la probabilité par MC_naif est P(V_T <= -10000) = 0.0, IC(95%) = [0.0, 0.0]

Estimation par MC naïf de la probabilité pour le portefeuille 3 alpha = [-10. -10. -10. -10. -10. 10. 10. 10. 10.], beta = [-5. -5. -5. -5. -5.
La valeur de la probabilité par MC_naif est P(V_T >= 2500.0) = 0.02, IC(95%) = [0.011322710100497969, 0.02867728989950203]
La valeur de la probabilité par MC_naif est P(V_T >= 100000) = 0.0, IC(95%) = [0.0, 0.0]
```

FIGURE 3 – Résultats du test de la fonction `MC_naif` sur les portefeuilles 1, 2 et 3.

## 2.2.2 Commentaires des résultats

Les seuils ont été choisis de manière un peu heuristique en observant les histogrammes de la partie précédente. Pour chaque portefeuille, nous avons choisi deux seuils de manière à ce que :

- Le premier seuil correspond à un événement *non rare*. La méthode de Monte Carlo naïve reste alors relativement performante et fournit une estimation non nulle de la probabilité.
- Le second seuil est choisi de sorte qu'aucune réalisation de l'échantillon ne le franchisse. Dans ce cas, la méthode de Monte Carlo naïve échoue — elle renvoie 0 non pas parce que la probabilité est réellement nulle, mais parce qu'aucune particule n'a satisfait la condition  $\{V_T \geq \text{seuil}\}$  ou  $\{V_T \leq \text{seuil}\}$  selon le cas. Par conséquent, il est nécessaire de recourir à des méthodes adaptées aux événements rares pour obtenir une meilleure estimation et un intervalle de confiance valide.

## 2.3 Détermination des quantiles

### 2.3.1 Principe de la méthode

Dans cette partie, Nous mettons en œuvre une méthode empirique pour le calcul du quantile d'ordre  $\alpha$ , en nous appuyant sur l'estimation de la fonction de répartition.

Même si la loi de  $V_T$  n'est pas connue explicitement, nous pouvons obtenir des réalisations indépendantes de cette variable via la fonction `sample` que nous avons introduite précédemment. En répétant cette procédure  $n$  fois, on obtient un échantillon :

$$X_1, X_2, \dots, X_n.$$

À partir de ces réalisations, nous définissons la **fonction de répartition empirique** :

$$F_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i \leq x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Nous introduisons également les **statistiques d'ordre** associées à l'échantillon :

$$X_{(1,n)} \leq X_{(2,n)} \leq \dots \leq X_{(n,n)}$$

La fonction de répartition empirique  $F_n(x)$  peut alors s'exprimer en fonction de ces statistiques d'ordre comme suit :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < X_{(1,n)} \\ \frac{i}{n} & \text{si } X_{(i,n)} \leq x < X_{(i+1,n)} \\ 1 & \text{si } x \geq X_{(n,n)} \end{cases}.$$

Le quantile empirique d'ordre  $\alpha$  est défini comme :

$$\hat{q}_n(\alpha) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid F_n(x) \geq \alpha\}$$

ce qui revient à :

$$\hat{q}_n(\alpha) = X_{(\lceil n \cdot \alpha \rceil, n)}.$$

Sous des hypothèses classiques de régularité, on dispose de la convergence presque sûre suivante :  $\lim_n \hat{q}_n(\alpha) = q(\alpha)$ ,  $\alpha \in ]0, 1[$ , où  $q(\alpha)$  est le quantile théorique d'ordre  $\alpha$ .

### 2.3.2 Construction de l'intervalle de confiance

Pour un niveau  $u \in ]0, 1[$ , on considère les bornes définies par :

$$u_n^- := u - 1.96 \frac{\sqrt{u(1-u)}}{\sqrt{n}}, \quad u_n^+ := u + 1.96 \frac{\sqrt{u(1-u)}}{\sqrt{n}}.$$

L'intervalle

$$[\hat{q}_n(u_n^-), \hat{q}_n(u_n^+)[$$

constitue un intervalle de confiance asymptotique de probabilité de couverture 95% pour  $q(u)$ .

### 2.3.3 Mise en œuvre sur les portefeuilles du sujet

La fonction `fonction_repartition_empirique` de notre Notebook construit et trace la fonction de répartition empirique associée à un échantillon de  $V_T$ , simulé à l'aide de `mult_sample`.

De son côté, `quantile_empirique` estime la valeur d'un quantile d'ordre donné, calcule l'intervalle de confiance asymptotique correspondant (comme énoncé précédemment), et renvoie également les valeurs minimale et maximale de l'échantillon utilisé.

Nous choisissons les valeurs suivantes pour les niveaux de quantile :  $\alpha_1 = 0,6$  et  $\alpha_2 = 10^{-4}$  pour les trois configurations de portefeuilles.

Ces valeurs sont choisies de sorte que :

- $\alpha_1$  soit une valeur raisonnable, proche de 0.5. La méthode naïve devrait pouvoir donner une estimation correcte du quantile associé, ainsi qu'un intervalle de confiance pertinent.
- $\alpha_2$  soit une valeur très faible, correspondant à un événement rare. Dans ce cas, la méthode naïve développée ici devrait échouer à estimer correctement le quantile. L'intuition est qu'elle renverra simplement le plus petit élément observé dans l'échantillon, avec un intervalle de confiance qui, de la manière dont il a été construit ( $[a, b]$ ), sera vide.

La Figure 4 page 13 donne les résultats du test de ces fonctions sur les trois portefeuilles.

## Commentaires des résultats

Nous observons un comportement attendu pour l'estimation du quantile avec les deux seuils utilisés :

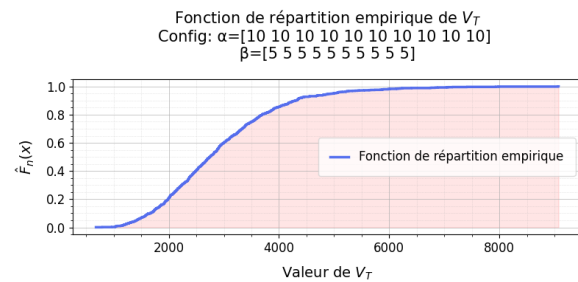
- Le seuil  $\alpha = 0,6$  est raisonnable pour la méthode empirique. En effet, on cherche  $q$  tel que  $\mathbb{P}(V_T < q) = 0,6$ . Cela se fait assez bien avec un échantillonnage direct de la loi, comme le permet la méthode empirique développée ici. Ce seuil est relativement proche de la médiane, ce qui facilite une estimation fiable à partir de l'échantillon.
- En revanche, pour un quantile plus extrême,  $\alpha = 10^{-4}$ , la méthode échoue. Comme évoqué plus haut, un échantillonnage direct ne permet plus de capturer de manière fiable un événement aussi rare. L'algorithme retourne simplement la plus petite valeur de l'échantillon avec un IC qui est vide de la façon dont on l'écrit, ce qui ne constitue pas une estimation pertinente du quantile recherché.

Cette limite justifie le recours à d'autres méthodes adaptées à l'estimation de quantiles extrêmes, comme l'échantillonnage d'importance ou les techniques de splitting que nous allons développer dans la suite.

```

estimation du quantile empirique pour alpha = 0.6 : 3927.1525555124826, IC(95%) = [2951.158121201477, 3111.883857674958]
estimation du quantile empirique pour alpha = 0.0001 : 794.458431803013, IC(95%) = [794.458431803013, 794.458431803013],
Plus petite valeur observée : 794.458431803013
  
```

(a) Portefeuille 1 : résultats du quantile empirique

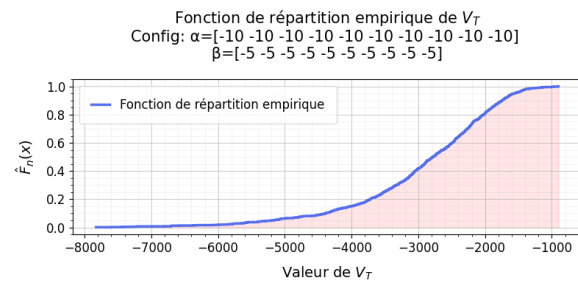


(b) Portefeuille 1 : fonction de répartition empirique

```

estimation du quantile empirique pour alpha = 0.6 : -2581.8218758264767, IC(95%) = [-2571.181678562257, -2481.175547528668]
estimation du quantile empirique pour alpha = 0.0001 : -13929.898664811196, IC(95%) = [-13929.898664811196, -13929.898664811196],
Plus petite valeur observée : -13929.898664811196
  
```

(c) Portefeuille 2 : résultats du quantile empirique

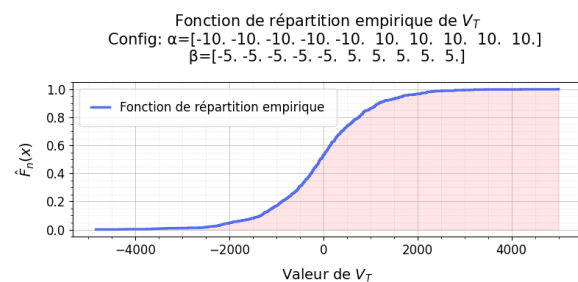


(d) Portefeuille 2 : fonction de répartition empirique

```

estimation du quantile empirique pour alpha = 0.6 : 238.43655362391312, IC(95%) = [169.22783826561896, 291.0854111970805]
estimation du quantile empirique pour alpha = 0.0001 : 7126.817968798436, IC(95%) = [7126.817968798436, 7126.817968798436],
Plus petite valeur observée : 7126.817968798436
  
```

(e) Portefeuille 3 : résultats du quantile empirique



(f) Portefeuille 3 : fonction de répartition empirique

FIGURE 4 – Estimation du quantile empirique (gauche) et la fonction de répartition empirique (droite).

## 3 Méthodes d'échantillonnage d'importance

### 3.1 Présentation de la méthode

Lorsque l'on souhaite estimer une probabilité rare, comme  $\mathbb{P}(V_T > \text{seuil})$ , la méthode de Monte Carlo naïve devient rapidement inefficace : la plupart des trajectoires simulées ne réalisent pas l'événement rare, ce qui engendre une variance très élevée de l'estimateur.

Pour pallier cette difficulté, on utilise une technique différente du Monte Carlo Naïf : **l'échantillonnage d'importance** (*importance sampling*). L'idée centrale est de modifier la distribution de probabilité utilisée pour la simulation, afin de générer plus fréquemment des trajectoires pertinentes (celles qui contribuent à l'événement rare), puis de corriger ce biais à l'aide d'un facteur de pondération.

Mathématiquement, soit  $X$  une variable aléatoire simulée sous la loi  $\mathbb{P}$ , et soit  $\mathbb{Q}$  une loi absolument continue par rapport à  $\mathbb{P}$ , alors il existe une fonction  $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$  appelée **dérivée de Radon-Nikodym**, telle que pour tout événement  $A$  :

$$\mathbb{P}(A) = \int_A \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} d\mathbb{Q}.$$

Alors, pour tout événement  $A$ ,

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\mathbf{1}_A(X)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \mathbf{1}_A(X) \cdot \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}(X) \right].$$

On peut donc simuler des trajectoires sous la mesure modifiée  $\mathbb{Q}$ , et corriger chaque trajectoire par le **poids d'échantillonnage**  $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$ .

Dans la pratique, nous avons simulé  $n$  trajectoires  $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$  sous la loi  $\mathbb{Q}$ , et on utilise l'estimateur empirique de la moyenne :

$$\hat{p}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_A(X^{(i)}) \cdot w^{(i)}, \quad \text{avec} \quad w^{(i)} = \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}(X^{(i)}).$$

Cet estimateur est non biaisé, c'est-à-dire que  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\hat{p}_n] = \mathbb{P}(X \in A)$ . L'estimateur empirique de la variance est :

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{1}_A(X^{(i)}) \cdot w^{(i)} - \hat{p}_n)^2.$$

Ainsi toute la subtilité réside dans le choix de la nouvelle loi  $\mathbb{Q}$ . Dans notre projet, nous mettons en œuvre deux techniques du choix de loi  $\mathbb{Q}$  :

- le **changement de drift**, qui modifie la dérive du mouvement brownien dans la simulation ;
- la **transformation d'Esscher**, qui applique un tilt exponentiel à la distribution de  $\log S_T$  pour recentrer la masse de probabilité vers la zone de rareté.

Nous allons ensuite mettre en œuvre ces méthodes sur un portefeuille test pour lequel les probabilités peuvent être calculées de manière exacte, afin de comparer leur efficacité.

## Rappel du contexte

Nous considérons un portefeuille composé de  $I_0$  actifs identiques, chacun suivant une dynamique de type brownien géométrique donnée par :

$$S_t = S_0 \exp \left( -\frac{1}{2} \sigma^2 t + \sigma W_t \right),$$

où :

- $S_0$  est le prix initial commun à tous les actifs,
- $\sigma$  est la volatilité commune,
- $W_t$  est un mouvement brownien standard.

À la maturité  $T$ , la valeur du portefeuille est donnée par :

$$V_T(S_T) = \sum_{i=1}^{I_0} \alpha_i (S_T - K)^+ + \beta_i (K - S_T)^+,$$

où  $K$  est le prix d'exercice (strike) commun à toutes les options, et  $\alpha_i, \beta_i$  sont les poids des calls et puts.

L'objectif est d'estimer une probabilité rare de la forme :

$$\mathbb{P}(V_T \geq \text{seuil}) \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}(V_T \leq \text{seuil}).$$

Pour cette partie, nous avons implémenté une fonction `valeur_portefeuille_bis` qui calcule directement la valeur du portefeuille à l'instant  $T$ , en utilisant la formulation de  $V_T$  donnée précédemment, sans simuler l'évolution des trajectoires. Cette simplification est possible car la dynamique complète de  $V(t)$  n'est ici pas nécessaire (comme dans la partie 1 pour la visualisation de l'évolution) : seule la valeur finale nous intéresse.

## 3.2 Échantillonnage d'importance par changement de drift

Cette méthode est implémentée par la fonction `importance_sampling_probability` du notebook

### 3.2.1 Principe

Cette première méthode est celle qui nous a semblé la plus intuitive. L'intuition est la suivante : supposons qu'en tirant des flèches, nous voulons la probabilité qu'une flèche arrive dans une zone extrême. Ce qu'on peut faire est d'incliner la main ou changer la direction de lancement. On modifie donc ainsi le processus de tir et l'on ajuste plus tard les résultats avec un certain poids.

Nous allons faire quelque chose d'analogue, ainsi plutôt que de simuler des mouvements browniens sous  $\mathbb{P}$  (brownien standard), nous allons leur donner un drift (une moyenne)  $\mu$  de sorte que sous  $\mathbb{Q}^\mu$ ,  $W_t^{(\mu)} = W_t + \mu t$  (cela revient à tirer  $W_t^{(\mu)} \sim \mathcal{N}(\mu t, t)$ ).

La dynamique de  $S_T$  est donc :

- sous  $\mathbb{P}$  :

$$S_t = S_0 \exp \left( -\frac{1}{2} \sigma^2 t + \sigma W_t \right)$$



— sous  $\mathbb{Q}^\mu$  :

$$S_t = S_0 \exp \left( -\frac{1}{2} \sigma^2 t + \sigma W_t^{(\mu)} \right) = S_0 \exp \left( \left( -\frac{1}{2} \sigma^2 + \mu \sigma \right) t + \sigma W_t \right)$$

Définissons la variable  $X_T := \log(S_T/S_0)$ . Alors :

— Sous  $\mathbb{P}$  :

$$X_T \sim \mathcal{N} \left( -\frac{1}{2} \sigma^2 T, \sigma^2 T \right), \quad \text{donc la densité est :}$$

$$f_{\mathbb{P}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp \left( -\frac{(x + \frac{1}{2}\sigma^2 T)^2}{2\sigma^2 T} \right)$$

— Sous  $\mathbb{Q}^\mu$  :

$$X_T \sim \mathcal{N} \left( \left( -\frac{1}{2} \sigma^2 + \mu \sigma \right) T, \sigma^2 T \right), \quad \text{donc la densité est :}$$

$$f_{\mathbb{Q}^\mu}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp \left( -\frac{(x - (-\frac{1}{2}\sigma^2 + \mu\sigma) T)^2}{2\sigma^2 T} \right)$$

Ainsi, la **dérivée de Radon-Nikodym** s'écrit :

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}^\mu}(x) = \frac{f_{\mathbb{P}}(x)}{f_{\mathbb{Q}^\mu}(x)} = \exp \left( -\frac{(x + \frac{1}{2}\sigma^2 T)^2 - (x - (-\frac{1}{2}\sigma^2 + \mu\sigma) T)^2}{2\sigma^2 T} \right)$$

Ce rapport peut être simplifié algébriquement (on peut aussi l'exprimer en fonction de  $W_T$  :

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}^\mu}(X_T) = \exp \left( -\frac{\mu X_T}{\sigma} - \frac{\mu T \sigma}{2} + \frac{\mu^2 T}{2} \right)$$

### 3.2.2 Choix du paramètre $\mu$

La question qui se pose ensuite est donc : *comment choisir efficacement le paramètre  $\mu$  ?*

Puisque nous voulons rendre l'événement  $V_T \geq \text{seuil}$  « moins rare » sous la loi de probabilité modifiée, nous choisissons un drift  $\mu$  tel que :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\mu}[V_T] = \text{seuil}.$$

Cela permet de concentrer la masse de probabilité autour de la zone critique pour laquelle l'événement d'intérêt se produit.

Ainsi, nous avons implémenté dans le notebook deux fonctions :

`simulate_portfolio_values` et `plot_results`

qui permettent de tracer la valeur moyenne du portefeuille  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\mu}[V_T]$  en fonction du paramètre  $\mu$ , ce qui nous aide à identifier la valeur optimale de  $\mu$  pour notre IS.

### 3.2.3 Test sur le portefeuille test

Dans le cas du portefeuille test, il n'est pas nécessaire d'examiner les courbes générées par :

`simulate_portfolio_values` et `plot_results`

puisque nous pouvons obtenir une expression analytique explicite de  $\mu_{\text{opt}}$ .

Sous  $\mathbb{Q}^\mu$ ,  $\log(S_T/S_0) \sim \mathcal{N}\left(\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 + \mu\sigma\right)T, \sigma^2T\right)$ , donc :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\mu}[S_T] = S_0 \cdot \exp\left(\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 + \mu\sigma\right)T + \frac{1}{2}\sigma^2T\right) = S_0 \exp(\mu\sigma T).$$

On en déduit :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\mu}[V_T^*] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\mu}[S_T - K] = S_0 e^{\mu\sigma T} - K.$$

En posant cela égal au seuil, on obtient l'équation :

$$S_0 e^{\mu\sigma T} - K = \text{seuil} \Leftrightarrow e^{\mu\sigma T} = \frac{\text{seuil} + K}{S_0}.$$

Donc finalement,

$$\mu_{\text{opt}} = \frac{1}{\sigma T} \log\left(\frac{\text{seuil} + K}{S_0}\right).$$

Les résultats du test de la fonction sur le portefeuille test sont présentés sur la Figure 5 page 17.

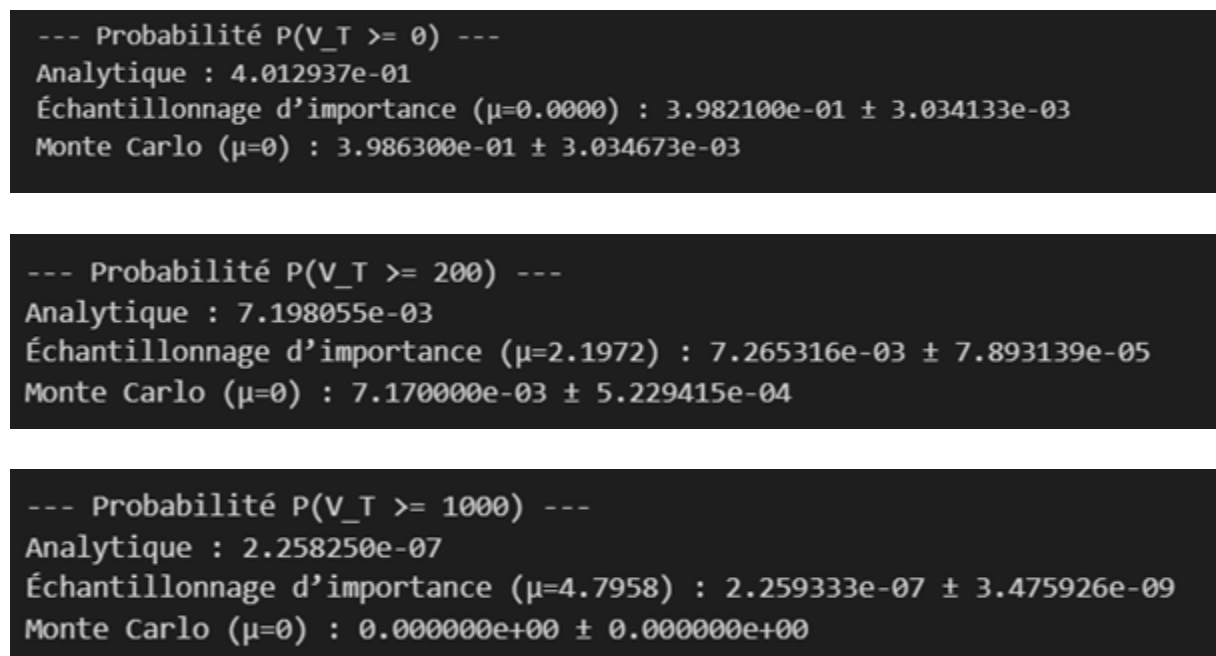


FIGURE 5 – Résultats du test de méthode de drift sur le portefeuille test

Par abus, cette partie du notebook appelle Monte Carlo Naïf le résultat de cette méthode lorsque  $\mu = 0$  en effet dans ce cas la dérivée de Radon-Nikodym est 1 et c'est exactement du Monte Carlo Naïf.

### 3.3 Échantillonnage d'importance par transformation de Escher

Cette méthode est implémentée par la fonction `importance_sampling_esscher` du notebook

#### 3.3.1 Principe

Supposons que, dans notre cadre d'un tir à l'arc, nous cherchons toujours à estimer la probabilité qu'une flèche atteigne une zone extrême, c'est-à-dire un événement rare. Plutôt que de modifier la trajectoire des flèches (simuler des trajectoires sous une autre loi), on peut adopter une autre stratégie : On conserve la distribution initiale des trajectoires, mais on effectue un changement de mesure (ou changement de loi) sur la variable terminale.

Plus précisément, rappelons que sous la mesure  $\mathbb{P}$  initiale, la variable aléatoire  $X_T = \log\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$  est telle que  $X_T \sim \mathcal{N}\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma^2 T\right)$ . Sa densité s'écrit donc :

$$f_{\mathbb{P}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp\left(-\frac{\left(x + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)^2}{2\sigma^2 T}\right).$$

On modifie la loi de  $X_T$  via une transformation d'**Esscher**, en définissant une nouvelle mesure  $\mathbb{Q}^\theta$  telle que la dérivée de Radon-Nikodym soit :

$$\frac{d\mathbb{Q}^\theta}{d\mathbb{P}} = \frac{e^{\theta X_T}}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{\theta X_T}]} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}^\theta} = \exp\left(-\theta X - \frac{1}{2}\theta\sigma^2 T + \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2 T\right)$$

Sous  $\mathbb{Q}^\theta$ , la variable  $X_T$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(\mu_\theta, \sigma^2 T)$  avec  $\mu_\theta = -\frac{1}{2}\sigma^2 T + \theta\sigma^2 T$ . En effet sa densité  $f_{\mathbb{Q}}(x)$  est donnée par

$$f_{\mathbb{Q}}(x) = \frac{d\mathbb{Q}^\theta}{d\mathbb{P}} f_{\mathbb{P}}(x) = f_{\mathcal{N}(\mu_\theta, \sigma^2 T)}(x)$$

Lorsque nous avons conçu ces méthodes — en particulier avec l'intuition visuelle des « fléchettes » lancées vers les zones rares — nous nous attendions à ce qu'elles conduisent à des comportements fondamentalement différents. Cependant, en comparant les expressions des dérivées de Radon-Nikodym dans les deux cas, ainsi que les densités terminales, il s'avère qu'elles coïncident parfaitement si l'on pose  $\theta = \frac{\mu}{\sigma}$ . Dans ce cas particulier, les deux approches produisent le même résultat et sont en réalité **équivalentes**.

- La première méthode (changement de drift) modifie la dynamique du mouvement brownien sous-jacent en lui appliquant un *drift*  $\mu$ . Elle oriente ainsi directement les trajectoires simulées vers les zones rares, en ajustant la loi du processus dans son ensemble.
- La seconde méthode (transformation d'Esscher) ne modifie pas les trajectoires du processus : elle applique uniquement un changement de mesure sur la variable terminale  $X_T$ , en ajustant la densité a posteriori. Autrement dit, elle agit sur la loi finale, sans modifier la simulation elle-même.

#### Comparaison des espérances sous $\mathbb{Q}_\mu$ et $\mathbb{Q}_\theta$ , cas du portefeuille test

L'objectif de cette partie est de montrer l'équivalence entre les deux approches. Nous pouvons le faire de façon exacte dans le cas du portefeuille test.

On considère le portefeuille test :

$$V_T^* = S_T - K \quad \text{avec} \quad S_T = S_0 \exp \left( -\frac{1}{2} \sigma^2 T + \sigma W_T \right).$$

Ainsi, la variable  $X_T := \log(S_T/S_0)$  suit sous la mesure historique  $\mathbb{P}$  une loi normale :

$$X_T \sim \mathcal{N} \left( -\frac{1}{2} \sigma^2 T, \sigma^2 T \right).$$

**Sous la mesure  $\mathbb{Q}_\mu$  (changement de drift).** Le mouvement brownien est modifié par un drift  $\mu$ , i.e.,  $W_t^{(\mu)} = W_t + \mu t$ , et donc :

$$X_T^\mu = \log \left( \frac{S_T}{S_0} \right) \sim \mathcal{N} \left( \left( -\frac{1}{2} \sigma^2 + \mu \sigma \right) T, \sigma^2 T \right).$$

Par conséquent :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\mu}[S_T] = S_0 \cdot \exp(\mu \sigma T) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\mu}[V_T^*] = S_0 \cdot \exp(\mu \sigma T) - K.$$

**Sous la mesure  $\mathbb{Q}_\theta$  (transformation d'Esscher).** La densité de  $X_T$  sous  $\mathbb{Q}_\theta$  devient :

$$X_T^\theta \sim \mathcal{N} \left( -\frac{1}{2} \sigma^2 T + \theta \sigma^2 T, \sigma^2 T \right),$$

ce qui donne :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\theta}[S_T] = S_0 \cdot \exp \left( \left( -\frac{1}{2} \sigma^2 + \theta \sigma^2 \right) T + \frac{1}{2} \sigma^2 T \right) = S_0 \cdot \exp(\theta \sigma^2 T),$$

et donc :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\theta}[V_T^*] = S_0 \cdot \exp(\theta \sigma^2 T) - K.$$

**Cas particulier :**  $\theta = \mu/\sigma$  Si l'on choisit  $\theta = \mu/\sigma$ , alors :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\theta}[V_T^*] = S_0 \cdot \exp(\mu \sigma T) - K = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\mu}[V_T^*].$$

et

$$X_T^\theta \sim \mathcal{N} \left( -\frac{1}{2} \sigma^2 T + \mu \sigma T, \sigma^2 T \right), \quad X_T^\mu \sim \mathcal{N} \left( \left( -\frac{1}{2} \sigma^2 + \mu \sigma \right) T, \sigma^2 T \right).$$

**Conclusion.**

Si  $\theta = \frac{\mu}{\sigma}$ ,  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\theta}[V_T^*] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\mu}[V_T^*]$

Ainsi, dans ce cas particulier, la moyenne du portefeuille test est identique sous les deux mesures et la variable terminale  $X_T$  suit la même loi, d'où le fait qu'elles soient identiques.

### 3.3.2 Choix du paramètre $\theta$

Comme démontré précédemment, les deux méthodes sont équivalentes dès lors que l'on pose  $\theta = \frac{\mu}{\sigma}$ . Ainsi, imposer la condition  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\theta}[V_T] = \text{seuil}$  revient à prendre  $\theta_{\text{opt}} = \frac{\mu_{\text{opt}}}{\sigma}$ , ce que nous adopterons par la suite. Dans un tel contexte, il n'y a donc pas de réel avantage à privilégier l'une ou l'autre de ces deux méthodes.

Ce que nous aurions pu envisager — bien que cela n'ait pas été implémenté ici, mais que nous mettrons en œuvre plus bas dans le cadre de l'estimation d'un quantile — est la stratégie suivante : considérer un voisinage  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  de  $\frac{\mu_{\text{opt}}}{\sigma}$  dans laquelle on fait varier  $\theta$ , et choisir  $\theta_{\text{opt}} \in [a, b]$  comme la valeur minimisant la *variance relative* de l'estimateur.

Cette approche adaptative permettrait d'optimiser directement la qualité de l'estimation pour la méthode de Esscher.

### 3.3.3 Test sur le portefeuille test

Les résultats du test des fonctions d'échantillonnage sur le portefeuille test sont présentés sur la Figure 6 page 20.

```
--- Probabilité P(V_T >= 0) ---
Analytique : 4.012937e-01
Échantillonnage d'importance (μ=0.0000) : 3.982100e-01 ± 3.034133e-03
Échantillonnage Esscher (θ=0.0000) : 3.986300e-01 ± 3.034673e-03
Monte Carlo (μ=0) : 4.030700e-01 ± 3.040241e-03
```

```
--- Probabilité P(V_T >= 200) ---
Analytique : 7.198055e-03
Échantillonnage d'importance (μ=2.1972) : 7.121994e-03 ± 7.819029e-05
Échantillonnage Esscher (θ=4.3944) : 7.178084e-03 ± 7.875502e-05
Monte Carlo (μ=0) : 7.120000e-03 ± 5.211280e-04
```

```
--- Probabilité P(V_T >= 1000) ---
Analytique : 2.258250e-07
Échantillonnage d'importance (μ=4.7958) : 2.257585e-07 ± 3.464253e-09
Échantillonnage Esscher (θ=9.5916) : 2.265836e-07 ± 3.472408e-09
Monte Carlo (μ=0) : 0.000000e+00 ± 0.000000e+00
```

FIGURE 6 – Résultats du test des méthodes d'échantillonnage d'importance sur le portefeuille test

Nous pouvons aussi visualiser les échantillons qui ont été utilisés pour l'estimation des probabilités les résultats sont présentés sur la Figure 7 page 21.

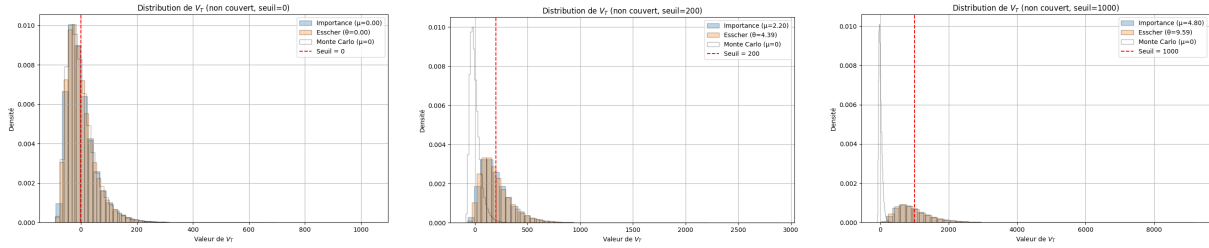


FIGURE 7 – Echantillons utilisés pour l'estimation des probabilités

### 3.4 Applications aux portefeuilles du sujet

Puisque la méthode d'échantillonnage par transformation d'Escher fonctionne plutôt bien, et au vu des bons résultats obtenus, nous choisissons de l'appliquer aux portefeuilles étudiés dans le cadre du sujet. Les résultats sont présentés sur la Figure 8 page 21.

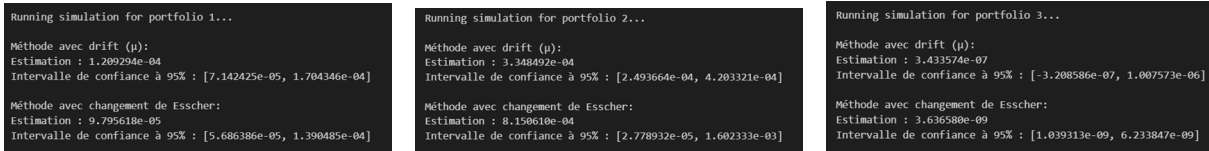


FIGURE 8 – Résultats de l'échantillonnage d'importance sur les portefeuilles du sujet

#### Analyse du comportement du portefeuille 3

On observe bien ce qui était attendu : les méthodes de changement de loi via drift et par transformation d'Esscher donnent des résultats quasiment identiques pour les portefeuilles 1 et 2. Les petites variations observées dans les estimations peuvent être attribuées à l'aléa de simulation, et la cohérence est confirmée par le recouvrement de leurs intervalles de confiance.

Un phénomène plus préoccupant apparaît avec le portefeuille 3 : les deux méthodes ne produisent pas des résultats similaires, et l'on observe une instabilité marquée, avec notamment des intervalles de confiance dont la borne inférieure est négative. Cela reflète une variance particulièrement élevée de l'estimateur.

Pour comprendre cette instabilité, il faut s'intéresser à la structure même de ce portefeuille.

**Définition du portefeuille 3.** Le portefeuille est construit selon la structure suivante :

- $\alpha_i = -10$ ,  $\beta_i = -5$  pour  $i \in \{1, \dots, 5\}$ ,
- $\alpha_i = 10$ ,  $\beta_i = 5$  pour  $i \in \{6, \dots, 10\}$ .

La valeur terminale du portefeuille s'écrit alors :

$$V_T = \sum_{i=1}^5 [-\alpha(S_T^i - K)^+ - \beta(K - S_T^i)^+] + \sum_{i=6}^{10} [\alpha(S_T^i - K)^+ + \beta(K - S_T^i)^+],$$

avec  $\alpha, \beta > 0$ . En développant les fonctions en parties affines, on obtient :

$$V_T = \sum_{i=1}^5 \left[ -\alpha(S_T^i - K) \cdot \mathbf{1}_{\{S_T^i \geq K\}} - \beta(K - S_T^i) \cdot \mathbf{1}_{\{S_T^i < K\}} \right] \\ + \sum_{i=6}^{10} \left[ \alpha(S_T^i - K) \cdot \mathbf{1}_{\{S_T^i \geq K\}} + \beta(K - S_T^i) \cdot \mathbf{1}_{\{S_T^i < K\}} \right].$$

**Espérance sous la mesure d'origine.** En prenant l'espérance, on obtient :

$$\mathbb{E}(V_T) = \sum_{i=1}^5 \left[ -\mathbb{E} \left( \alpha(S_T^i - K) \cdot \mathbf{1}_{\{S_T^i \geq K\}} \right) - \mathbb{E} \left( \beta(K - S_T^i) \cdot \mathbf{1}_{\{S_T^i < K\}} \right) \right] \\ + \sum_{i=6}^{10} \left[ \mathbb{E} \left( \alpha(S_T^i - K) \cdot \mathbf{1}_{\{S_T^i \geq K\}} \right) + \mathbb{E} \left( \beta(K - S_T^i) \cdot \mathbf{1}_{\{S_T^i < K\}} \right) \right].$$

Or, pour deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , on a la décomposition :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}_Y [\mathbb{E}(XY | Y)].$$

En appliquant ce résultat, on obtient par exemple :

$$\mathbb{E} \left( \alpha(S_T^i - K) \cdot \mathbf{1}_{\{S_T^i \geq K\}} \right) = \alpha \cdot \mathbb{P}(S_T^i \geq K) \cdot \mathbb{E} (S_T^i - K | S_T^i \geq K).$$

Tous les actifs suivant la même dynamique sous  $\mathbb{P}$ , à savoir :

$$\log \left( \frac{S_T^i}{S_0} \right) \sim \mathcal{N} \left( -\frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma^2 T \right),$$

on en déduit que les lois des  $S_T^i$  sont identiques, et donc que les contributions du premier et du second groupe s'annulent exactement, ce qui donne :

$$\mathbb{E}(V_T) = 0.$$

**Effet d'un drift constant.** Si l'on applique un biais de drift constant  $\mu$  à tous les actifs, la dynamique devient :

$$\log \left( \frac{S_T^i}{S_0} \right) \sim \mathcal{N} \left( -\frac{1}{2}\sigma^2 T + \mu\sigma T, \sigma^2 T \right).$$

Mais comme la structure du portefeuille reste parfaitement symétrique, on retrouve toujours :

$$\mathbb{E}_\mu(V_T) = 0.$$

**Conséquences.** Imposer une condition telle que :

$$\mathbb{E}_\mu(V_T) = \text{seuil}$$

n'a pas de sens dans ce cas : la fonction  $\mu \mapsto \mathbb{E}_\mu(V_T)$  est **constante égale à zéro**, modulo du bruit statistique. Il n'existe donc pas de lien structurel entre  $\mu$  et l'espérance

du portefeuille dans ce contexte, et les fluctuations observées ne traduisent rien d'autre que de la variance de simulation ( On peut s'en rendre compte sur la la Figure 9 page 23.

Ainsi, les méthodes de changement de mesure par drift constant (ou transformation d'Esscher équivalente) sont inefficaces pour un tel portefeuille (où tout les actifs suivent la même dynamique avec les mêmes condition  $S_0, \sigma$ ), et conduisent à des instabilités fortes. On aurait par exemple pu appliquer un drift différencié, c'est-à-dire  $\mu_1$  pour les positions positives et  $\mu_2$  pour les positions négatives, de sorte à briser la symétrie présente et ensuite appliquer la condition

$$\mathbb{E}_{\mu_1, \mu_2}(V_T) = \text{seuil}.$$

Nous n'avons pu le faire ici par manque de temps.

Dans la suite, nous implémenterons des méthodes de type *splitting*, qui, même dans des configurations de portefeuilles déséquilibrés ou symétriques, permettront de surmonter cette difficulté.

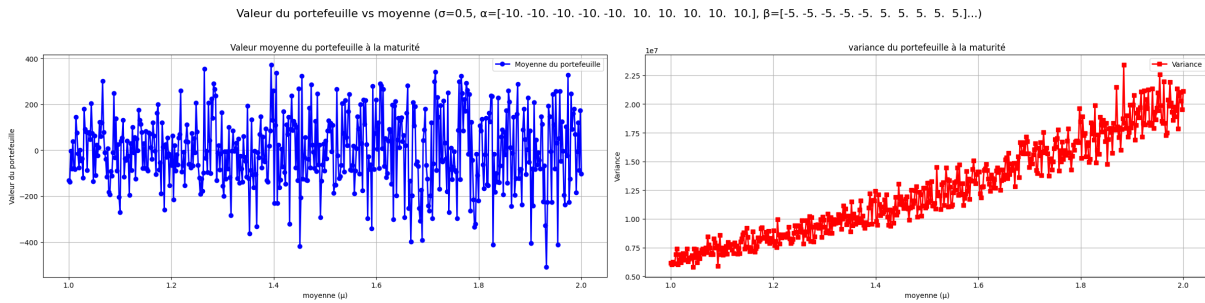


FIGURE 9 –  $\mathbb{E}_{\mu}(V_T)$  en fonction de  $\mu$  à gauche pour le portefeuille 3

### 3.5 Détermination de quantile

Ce qui suit est implémenté par la fonction `importance_sampling_quantile` du notebook.

Notre objectif ici est d'estimer un quantile  $\alpha$ -ième d'une variable aléatoire  $V_T$ , c'est-à-dire trouver  $q_{\alpha}$  tel que :

$$\mathbb{P}(V_T \leq q_{\alpha}) = \alpha$$

Cependant l'événement  $V_T \leq q_{\alpha}$  étant rare sous  $\mathbb{P}$ , nous allons générer les trajectoires de  $V_T$  sous une mesure modifiée  $\mathbb{Q}$ , et non directement sous la mesure originale  $\mathbb{P}$ .

La fonction de répartition de  $V_T$  sous  $\mathbb{P}$  peut être réécrite en utilisant la dérivée de Radon-Nikodym entre  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{Q}$  :

$$\mathbb{P}(V_T \leq x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \mathbf{1}_{V_T \leq x} \cdot \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \right]$$

On construit alors un estimateur empirique de la fonction de répartition, en pondérant chaque trajectoire par son poids Radon-Nikodym.

La méthode pratique est la suivante :

1. On génère  $N$  trajectoires  $(V_T^{(i)})_{1 \leq i \leq N}$  sous la mesure  $\mathbb{Q}$  qui est celle utilisée dans `importance_sampling_probability` ( le drift  $\mu$ ).



2. Pour chaque trajectoire, on calcule le poids (déjà calculé plus haut) :

$$w_i = \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \left( V_T^{(i)} \right)$$

3. On trie les  $V_T^{(i)}$  par ordre croissant :

$$V_T^{(i_1)} \leq V_T^{(i_2)} \leq \dots \leq V_T^{(i_N)}$$

4. On calcule les poids cumulés normalisés :

$$W_j := \sum_{k=1}^j \frac{w_{i_k}}{\sum_{l=1}^n w_{i_l}}$$

5. Le quantile empirique d'ordre  $\alpha$  est donné par :

$$q_\alpha \approx V_T^{(i_k)} \quad \text{où } k = \min \{j \mid W_j \geq \alpha\}$$

### 3.5.1 Calcul de la variance de l'estimateur

Pour évaluer la précision de notre estimation du quantile, nous avons recours à une méthode de bootstrap. Plus précisément, à partir des  $n_{\text{iter}}$  trajectoires simulées et pondérées par les poids d'importance correspondants, nous générons  $B$  échantillons bootstrap (avec remise). Pour chaque échantillon bootstrap, nous recalculons l'estimation du quantile d'ordre  $1 - \alpha$ .

La variance empirique des quantiles obtenus à partir de ces  $B$  échantillons bootstrap fournit alors une estimation de la variance de notre estimateur. Cela permet de construire des intervalles de confiance.

### 3.5.2 Choix du paramètre $\mu$

Le choix du paramètre  $\mu$  dans le cas de l'estimation d'un quantile nous semble beaucoup plus délicat. Néanmoins, voici l'idée que nous avons mise en œuvre : Nous ne pouvons pas utiliser un critère similaire à celui de l'estimation de probabilité, à savoir :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\mu_{\text{opt}}}}[V_T] = \text{seuil}.$$

En revanche, puisque nous savons déjà bien estimer la probabilité, nous allons chercher un seuil  $\text{seuil}^*$  tel que  $\mathbb{P}(V_T \geq \text{seuil}^*)$  soit de l'ordre de grandeur de  $1 - \alpha$ . Cela nous donne une indication sur la position du quantile et donc sur le paramètre  $\mu$  associé, que nous notons  $\mu^{\text{opt}}$ , utilisé pour estimer  $\mathbb{P}(V_T \geq \text{seuil}^*)$ . Ensuite, nous considérons un voisinage  $\mathcal{V}(\mu^{\text{opt}})$  et cherchons, dans cet intervalle, la valeur de  $\mu$  qui minimise la variance relative de l'estimateur.

### 3.5.3 Test sur le portefeuille test

Nous appliquons cette méthode pour tenter d'estimer le quantile d'ordre 99,99999% (c'est-à-dire  $1 - \alpha = 10^{-7}$ ) du portefeuille test. Pourquoi cette valeur ? Car, précédemment, nous avons estimé la probabilité  $\mathbb{P}(V_T \geq 900)$  et obtenu un résultat de l'ordre de  $10^{-7}$  avec un  $\mu$  approximativement égal à 2,03. Nous choisissons donc d'échantillonner 20 points dans le voisinage [1,8, 2,5]. Les résultats sont présentés sur la Figure 11 page 28.

```

mu = 1.80, Quantile estimé = 1138.38, Variance = 4.214051e+03
mu = 1.84, Quantile estimé = 1057.68, Variance = 1.908367e+03
mu = 1.87, Quantile estimé = 1057.42, Variance = 1.926333e+03
mu = 1.91, Quantile estimé = 1058.27, Variance = 4.786375e+03
mu = 1.95, Quantile estimé = 1021.04, Variance = 3.701513e+03
mu = 1.98, Quantile estimé = 1170.95, Variance = 1.660557e+03
mu = 2.02, Quantile estimé = 1052.01, Variance = 2.761491e+03
mu = 2.06, Quantile estimé = 1119.85, Variance = 1.455715e+03
mu = 2.09, Quantile estimé = 1195.42, Variance = 2.049853e+03
mu = 2.13, Quantile estimé = 1182.87, Variance = 2.894040e+03
mu = 2.17, Quantile estimé = 985.23, Variance = 1.399444e+03
mu = 2.21, Quantile estimé = 1060.39, Variance = 2.895699e+02
mu = 2.24, Quantile estimé = 1107.36, Variance = 7.111718e+02
mu = 2.28, Quantile estimé = 1113.54, Variance = 2.513395e+03
mu = 2.32, Quantile estimé = 1037.36, Variance = 7.675430e+02
mu = 2.35, Quantile estimé = 1139.04, Variance = 5.604652e+02
mu = 2.39, Quantile estimé = 1111.26, Variance = 4.153955e+02
mu = 2.43, Quantile estimé = 1076.41, Variance = 1.006531e+03
mu = 2.46, Quantile estimé = 1092.14, Variance = 1.723510e+02
mu = 2.50, Quantile estimé = 1104.78, Variance = 7.039423e+02

Meilleur mu = 2.46 (variance relative minimale = 1.578107e-01)
Quantile à 99.99999000000001% estimé : 1092.14
Valeur exacte : 1087.78
Variance de l'estimateur : 1.578107e-01
Intervalle de confiance à 95% : [1091.36, 1092.92]
  
```

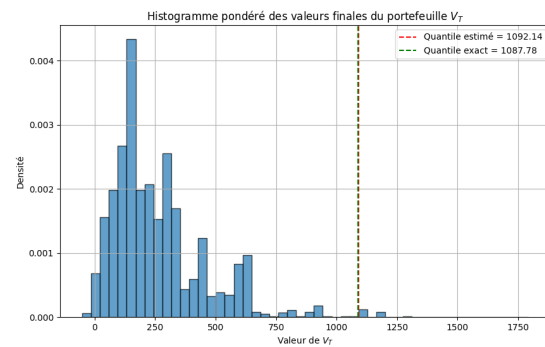


FIGURE 10 – Détermination de quantile par échantillonnage d'importance

## 4 Méthodes de Splitting

Nous nous concentrons ici sur les méthodes de splitting, qui consistent à décomposer un événement rare en plusieurs paliers moins rares. Cette technique améliore l'efficacité des simulations en augmentant la fréquence des échantillons pertinents, permettant ainsi une estimation plus précise avec moins de calculs.

### Principe de la méthode de splitting

Soit  $q \in \mathbb{R}$  un seuil tel que nous souhaitons estimer la probabilité de l'événement  $\{V_T \geq q\}$ . On introduit une suite de niveaux

$$-\infty = q_0 < q_1 < q_2 < \dots < q_n = q$$

de sorte que

$$\mathbb{P}(V_T \geq q) = \mathbb{P}(V_T \geq q_0) \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(V_T \geq q_i \mid V_T \geq q_{i-1}). \quad (1)$$

Comme  $q_0 = -\infty$ , on a  $\mathbb{P}(V_T \geq q_0) = 1$ .

On pose par ailleurs

$$V_T = V_T(\vec{W}), \quad \vec{W} = (W_T^1, \dots, W_T^{I_0}),$$

où chaque  $W_T^j$  est l'incrément brownien terminal du  $j^{\text{e}}$  actif.

Alors la factorisation (1) s'écrit

$$\mathbb{P}(V_T \geq q) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(V_T(\vec{W}) \geq q_i \mid V_T(\vec{W}) \geq q_{i-1}).$$

Le principe algorithmique est le suivant :

1. **Décomposition de l'événement.** On découpe  $\{V_T \geq q\}$  en  $n$  sous-événements imbriqués  $\{V_T \geq q_i\}$  conditionnels à  $\{V_T \geq q_{i-1}\}$ .
2. **Simulation conditionnelle.** Pour chaque niveau  $i = 1, \dots, n$  :
  - On génère  $N$  trajectoires  $\vec{W}_1^{(i)}, \dots, \vec{W}_N^{(i)}$  selon la loi conditionnelle  $\mathcal{L}(\vec{W} \mid V_T(\vec{W}) \geq q_{i-1})$ .
  - On estime la probabilité de franchissement de  $q_i$  par

$$\hat{p}_i = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \mathbf{1}_{\{V_T(\vec{W}_m^{(i)}) \geq q_i\}}.$$

3. **Estimateur final.** La probabilité recherchée est approchée par le produit des estimateurs successifs :

$$\hat{\mathbb{P}}(V_T \geq q) = \prod_{i=1}^n \hat{p}_i.$$

On distingue ainsi plusieurs variantes du Splitting suivant la façon dont on simule les  $\vec{W}_m^{(i)}$ .

## 4.1 Méthode de splitting par rejet

Cette variante de splitting repose sur un échantillonnage conditionnel « par rejet ». Elle est implémentée dans les fonctions `splitting` et `mult_sample_cond`.

À chaque niveau  $i$ , pour générer une particule  $\mathbf{W}_m^{(i)}$  distribuée selon  $\mathcal{L}(\mathbf{W} \mid f(\mathbf{W}) \geq q_{i-1})$ , on procède ainsi :

### Répéter

Simuler  $\vec{\mathbf{W}}_m^{(i)}$  sous la loi de  $\vec{\mathbf{W}}$

**Tant que**  $V_T(\vec{\mathbf{W}}_m^{(i)}) < q_{i-1}$

**Retourner**  $\vec{\mathbf{W}}_m^{(i)}$

Autrement dit, on répète la génération de  $\mathbf{W}$  jusqu'à obtenir  $\{V_T(\mathbf{W}) \geq q_{i-1}\}$ , puis on conserve la première trajectoire valide.

Cette méthode présente malheureusement un inconvénient résidant dans la façon même dont elle est réalisée. En effet, lorsque l'évènement  $\{V_T \geq q\}$  est rare, l'algorithme prend énormément de temps ; ceci parce que l'évènement  $\{V_T(\vec{\mathbf{W}}_m^{(i)}) < q_{i-1}\}$  est presque toujours vérifié à mesure que  $q_{i-1}$  se rapproche de  $q$ , et on reste dans la boucle **Tant que**. Par contre, elle marche très bien lorsque l'évènement n'est pas rare.

## Détermination de l'intervalle de confiance

À chaque étape  $i$ , l'estimateur  $\hat{p}_i$  suit, par le théorème central limite (TCL), la distribution asymptotique suivante :

$$\sqrt{n}(\hat{p}_i - p_i) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, p_i(1 - p_i)).$$

En appliquant la méthode delta à la fonction  $x \mapsto \log(x)$ , on obtient :

$$\sqrt{n}(\log(\hat{p}_i) - \log(p_i)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1 - p_i}{p_i n}\right).$$

Puisque les  $\hat{p}_i$  sont issus d'échantillons indépendants, les variables  $\log(\hat{p}_i)$  sont asymptotiquement indépendantes. Ainsi, en sommant, on obtient :

$$\sqrt{n} \left( \log \left( \prod_{i=1}^m \hat{p}_i \right) - \log \left( \prod_{i=1}^m p_i \right) \right) = \sqrt{n} (\log(\hat{P}) - \log(P)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left( 0, \sum_{i=1}^m \frac{1 - p_i}{p_i n} \right).$$

Posons alors :

$$\beta := \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \frac{1 - p_i}{p_i}}.$$

On en déduit un intervalle de confiance asymptotique à 95 % pour  $P = \prod_{i=1}^m p_i$ , après exponentiation :

$$IC_{95\%} = \left[ \hat{P} \cdot \exp(-1,96 \beta), \hat{P} \cdot \exp(1,96 \beta) \right].$$

Dans la pratique, les vraies valeurs  $p_i$  étant inconnues, on les remplace par leurs estimateurs empiriques  $\hat{p}_i$  pour obtenir un estimateur empirique de  $\beta$  :

$$\hat{\beta} := \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \frac{1 - \hat{p}_i}{\hat{p}_i}}.$$

Ainsi, l'intervalle de confiance final s'écrit :

$$IC_{95\%} = \left[ \hat{P} \cdot \exp(-1,96 \hat{\beta}), \hat{P} \cdot \exp(1,96 \hat{\beta}) \right].$$

#### 4.1.1 Test sur le portefeuille test

Nous appliquons cette méthode au portefeuille test, et présentons les résultats obtenus ci-dessous. Afin d'éviter que la boucle de rejet ne s'exécute indéfiniment, nous avons imposé une limite de temps d'une minute (modifiable via le paramètre *time\_allowed*).

Cette méthode est censée être efficace lorsque l'événement étudié n'est pas rare — par exemple, pour un seuil égal à zéro. En revanche, si le seuil est élevé (et donc l'événement rare), l'algorithme devrait nécessiter un temps de calcul important, dépassant la limite fixée. Les résultats sont présentés sur la Figure 11 page 28. Comme prévu, la méthode

```

----- Estimation de P(V_T >= 0.0) -----
proba stp1: 0.457
proba stp2: 0.473344
proba stp3: 0.44971748
proba stp4: 0.445569227264
proba stp5: 0.42299627448388
proba stp6: 0.4381237108379832
proba stp7: 0.43463872835767934
proba stp8: 0.429802297733872
proba stp9: 0.42339164957339975
proba stp10: 0.4174641664793722
proba stp11: 0.4127008088185784
proba stp12: 0.4099836268802283
proba stp13: 0.4071137486976667
proba stp14: 0.404263704512783
proba stp15: 0.4002213058676552
proba stp16: 0.394618206796788
proba stp17: 0.3914348522761379
proba stp18: 0.39008031171188364
proba stp19: 0.38599214797095803
proba stp20: 0.3821322640804516
estimation de P(V_T >= 0.0) : 3.821322e-01, IC(95%) = [3.554182e-01, 4.108634e-01]
Valeur analytique attendue : 4.012937e-01

```

```

----- Estimation de P(V_T >= 900.0) -----
proba stp1: 0.021
proba stp2: 0.01008
proba stp3: 0.00497952
proba stp4: 0.00247980096
proba stp5: 0.0012851832665599998
▲ Temps d'exécution > 2 minutes, arrêt de la méthode au niveau 6.
Estimation de P(V_T >= 900.0) : 1.205183e-03, IC(95%) = [7.748417e-04, 1.874533e-03]
Valeur analytique attendue : 6.014170e-07

```

FIGURE 11 – Méthode de splitting par rejet sur le portefeuille test

fonctionne bien lorsque l'événement n'est pas rare, mais devient très chronophage pour des événements rares.

Pour y remédier, nous allons implémenter une méthode permettant de générer efficacement des échantillons sous la loi conditionnelle. Cependant, cela entraîne une perte d'indépendance entre les paquets d'échantillons, et par conséquent, les estimateurs  $\hat{p}_i$  ne seront plus indépendantes.

## 4.2 Méthode de Splitting par chaîne de Markov

Cette méthode est implémentée par la fonction `MCMC_splitting`. Contrairement à la méthode de rejet, qui génère les  $\vec{W}_m^{(i)}$  de façon totalement indépendante, la méthode par chaînes de Markov utilise les résultats vérifiant déjà  $f(\vec{W}_m^{(i)}) \geq q_{i-1}$  pour en générer d'autres.

Supposons qu'au niveau  $i$  on ait  $(\vec{W}_{m_1}^{(i)}, \dots, \vec{W}_{m_k}^{(i)})$  issus de la simulation de l'étape  $i-1$  et vérifiant  $f(\vec{W}_{m_j}^{(i)}) \geq q_{i-1}$  avec  $m_k < N$  pour compléter l'échantillon, l'algorithme par chaîne de Markov fait ceci :

- Tirer aléatoirement et de manière uniforme  $\vec{W}_0 = \vec{W}_{m_j}^{(i)}$  dans l'échantillon précédent

- Générer les variables suivant une chaîne de Markov commençant en  $\vec{W}_0$  et définie ainsi qu'il suit :

à l'étape  $p + 1$ ,

$$\vec{W}_{\frac{1}{2}} = \rho \vec{W}_p + \sqrt{1 - \rho^2} \mathcal{N}(0, T I_0)$$

avec  $\rho \in (0, 1)$

$$\vec{W}_{p+1} = \begin{cases} \vec{W}_{\frac{1}{2}} & \text{si } V_T(\vec{W}_{\frac{1}{2}}) \geq q_{i-1}, \\ \vec{W}_p & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Prendre  $\vec{W}_{m_k+1}^{(i)} = \vec{W}_{n_{Markov}}$
- Répéter ce processus jusqu'à ce que notre échantillon contienne exactement  $N$  éléments.

#### 4.2.1 Choix du paramètre $\rho$ et des $q_i$

On rappelle que dans notre méthode, la mutation est réalisée ainsi qu'il suit :

$$\vec{W}_{\text{new}} = \rho \vec{W}_{\text{parent}} + \sqrt{1 - \rho^2} \vec{Z}, \quad \vec{Z} \sim \mathcal{N}(0, I),$$

##### Impact de $\rho$ sur l'algorithme

- $\rho \rightarrow 1$  :
  - On a des mutations très corrélées à la trajectoire parent.
  - On a un taux d'acceptation élevé (peu de rejets), mais il faut un grand nombre d'itérations de mutation pour « oublier » l'influence de  $\vec{W}_{\text{parent}}$  et obtenir une "indépendance".
- $\rho \rightarrow 0$  :
  - On a des mutations quasi indépendantes (tirage pur de  $\mathcal{N}(0, I)$ ).
  - On a un taux d'acceptation très faible, car la plupart des propositions retombent en zone non valide, ce qui conduit à beaucoup de rejets.

**Choix pratique** Il faut donc faire un compromis entre les deux influences précédentes, nous avons retenue la valeur de

$$\rho = 0,8$$

**Choix des niveaux  $q_i$**  Le choix des niveaux intermédiaires  $q_0 < q_1 < \dots < q_n$  est déterminant pour la robustesse de l'algorithme. En effet :

- Pour  $i$  proche de  $n$ , on se situe dans la *zone rare* : si les écarts  $q_i - q_{i-1}$  sont trop importants, il est très probable qu'aucune trajectoire (complétées) simulée de l'étape  $i - 1$  ne satisfasse la condition

$$V_T(\vec{W}_{m_j}^{(i)}) \geq q_i,$$

ce qui entraînerait l'arrêt prématuré de l'algorithme et il retournera 0.

- Pour  $i$  éloigné de  $n$ , on est dans la *zone non rare* : les écarts  $q_i - q_{i-1}$  peuvent être plus larges, sans risque qu'on ait le problème précédent.

Pour concilier ces deux contraintes, nous utilisons la fonction `grille_niveaux_hybride`, qui construit une grille *hybride* selon le principe suivant :

1. Dans la zone non rare  $[q_0, \text{seuil} - \delta]$ , les niveaux croissent progressivement suivant une loi quadratique, ce qui limite le nombre de niveaux et accélère les premières étapes.
2. Dans la zone rare  $[\text{seuil} - \delta, \text{seuil}]$ , les niveaux sont espacés de manière *constante* (pas fixe), pour garantir qu'à chaque étape suffisamment de trajectoires franchissent le seuil intermédiaire.

Ce choix adaptatif permet de maintenir un nombre de particules survivantes non nul à chaque itération, tout en concentrant l'effort de calcul sur la partie la plus critique de la distribution des gains.

## Détermination de l'intervalle de confiance

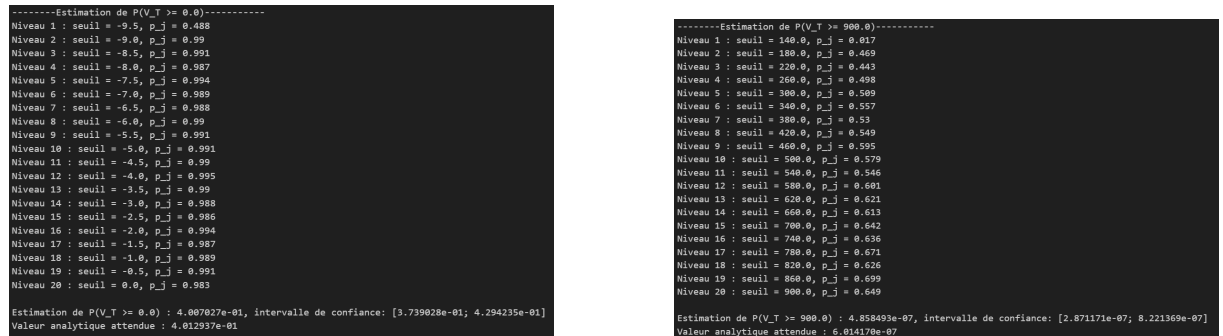
Comme mentionné en début de cette sous-partie, dans cette méthode, les paquets d'échantillons ne sont plus indépendants : les échantillons utilisés pour estimer  $p_i$  ne sont pas indépendants de ceux utilisés pour estimer  $p_{i+1}$ . Par conséquent, les variables aléatoires  $\hat{p}_i$  et  $\hat{p}_j$  ne sont plus indépendantes, et le théorème central limite utilisé précédemment n'est plus applicable.

Nous n'avons pas réussi à construire un théorème central limite valide dans ce cadre. Ce que nous faisons donc est de supposer que, pour un paramètre  $n_{\text{Markov}}$  suffisamment grand, nous avons une indépendance relative entre  $\vec{W}_{\text{parent}}$  et  $\vec{W}_{\text{new}}$ , de sorte à conserver une forme d'indépendance partielle dans les échantillons (mais clairement pas entre les paquets d'échantillons) ce qui nous permet de reprendre le calcul d'IC précédent.

Ainsi, les intervalles de confiance présentés plus bas doivent être interprétés avec prudence.

### 4.2.2 Test sur le portefeuille test

Nous mettons en œuvre notre méthode pour estimer les probabilités  $\mathbb{P}(V_T \geq 0)$  et  $\mathbb{P}(V_T \geq 900)$  sur le portefeuille test. Les résultats sont présentés dans la figure 12 page 30.



(a) Seuils et résultats de  $\mathbb{P}(V_T^* > 0)$

(b) Seuils et résultats de  $\mathbb{P}(V_T^* > 900)$

FIGURE 12 – Seuils et résultats de l'algorithme Splitting par chaînes de Markov sur le portefeuille test

On peut remarquer que cette méthode marche très bien, comparée à la méthode de Splitting par rejet qui dure longtemps dans le cas des événements rares.

### 4.2.3 Test sur les portefeuilles du sujet

Les résultats de cet algorithme sur les portefeuilles du sujet sont donnés ci-dessous. les résultats sont présentés sur la figure 13 page 31.

```
Running simulation for portfolio 1...
Méthode de splitting MC:
Estimation : 1.546291e-04, intervalle de confiance: [1.171485e-04; 2.041013e-04]

Running simulation for portfolio 2...
Méthode de splitting MC:
Estimation : 6.065515e-04, intervalle de confiance: [4.607755e-04; 7.984467e-04]

Running simulation for portfolio 3...
Méthode de splitting MC:
Estimation : 1.807989e-06, intervalle de confiance: [1.403625e-06; 2.328845e-06]
```

FIGURE 13 – Seuils et résultats de l’algorithme Splitting par chaînes de Markov sur les portefeuilles du sujet

## 4.3 Méthode de la dernière particule

L’algorithme implémenté dans cette partie est légèrement différent de l’algorithme précédent en ceci que nous n’allons plus fixer la liste des seuils  $a[\ ]$  à priori

### 4.3.1 Principe de la méthode et étapes de l’algorithme

On considère un portefeuille dont la valeur finale est donnée par :

$$V_T = V_T(\vec{W}), \quad \text{où } \vec{W} = (W_T^1, W_T^2, \dots, W_T^{I_0}) \in \mathbb{R}^{I_0},$$

et on cherche à estimer la probabilité rare suivante :

$$\mathbb{P}(V_T \geq q).$$

#### 1. Initialisation

Générer  $n$  trajectoires indépendantes d’un mouvement brownien terminal :

$$(\vec{W}_1^{(0)}, \vec{W}_2^{(0)}, \dots, \vec{W}_n^{(0)}) \sim \mathcal{L}(\vec{W}).$$

#### 2. Itérations

Pour  $j = 0, 1, 2, \dots$ ,

(a) *Calcul du niveau minimal :*

$$L_j = \min \left\{ V_T(\vec{W}_1^{(j)}), \dots, V_T(\vec{W}_n^{(j)}) \right\}.$$

(b) *Mise à jour des trajectoires :* pour chaque particule  $m = 1, \dots, n$ ,

$$\vec{W}_m^{(j+1)} = \begin{cases} \vec{W}_m^{(j)} & \text{si } V_T(\vec{W}_m^{(j)}) > L_j, \\ \vec{W}^* \sim \mathcal{L}(\vec{W} \mid V_T(\vec{W}) > L_j) & \text{si } V_T(\vec{W}_m^{(j)}) = L_j. \end{cases}$$



### 3. Critère d'arrêt

Arrêter dès que :

$$L_j > q,$$

et définir :

$$J_n := \min \{j \mid L_j > q\}.$$

L'estimateur final de la probabilité est alors donné par :

$$\hat{p}_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{J_n}.$$

**Remarque :** Une question se pose à une étape  $j$  : comment tirer sous la loi conditionnelle  $\mathcal{L}(\vec{\mathbf{W}} \mid V_T(\vec{\mathbf{W}}) > L_j)$  ? Nous faisons comme précédemment,

1. Identifier l'indice réalisant le minimum :

$$m^* = \arg \min_{1 \leq m \leq n} V_T(\vec{\mathbf{W}}_m^{(j)}), \quad \text{et notons } \vec{\mathbf{W}}_\star^{(j)} := \vec{\mathbf{W}}_{m^*}^{(j)}.$$

2. Tirer uniformément une particule *parmi les autres* :

$$\vec{\mathcal{W}}_0^{(j)} \sim \text{Uniforme sur } \left\{ \vec{\mathbf{W}}_1^{(j)}, \dots, \vec{\mathbf{W}}_n^{(j)} \right\} \setminus \left\{ \vec{\mathbf{W}}_\star^{(j)} \right\}.$$

Alors

$$\vec{\mathcal{W}}_0^{(j)} \sim \mathcal{L}(\vec{\mathbf{W}} \mid V_T(\vec{\mathbf{W}}) > L_j).$$

3. Appliquer le procédé de mutation conditionnelle pour générer la particule  $\vec{\mathbf{W}}^\star$  :  
— Générer :

$$\vec{\mathcal{W}}_{\frac{1}{2}}^{(j)} = \rho \vec{\mathcal{W}}_0^{(j)} + \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \mathcal{N}(0, T I_{I_0}),$$

avec  $\rho \in (0, 1)$  un paramètre à choisir.

- Accepter ou rejeter :

$$\vec{\mathcal{W}}_1^{(j)} = \begin{cases} \vec{\mathcal{W}}_{\frac{1}{2}}^{(j)} & \text{si } V_T(\vec{\mathcal{W}}_{\frac{1}{2}}^{(j)}) > L_j, \\ \vec{\mathcal{W}}_0^{(j)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Répéter ce processus  $n$  fois et poser  $\vec{\mathbf{W}}^\star = \vec{\mathcal{W}}_n^{(j)}$ .

**Remarque :** On peut montrer (Tony LELIÈVRE s. d.) qu'un intervalle de confiance à 95% de l'estimateur est

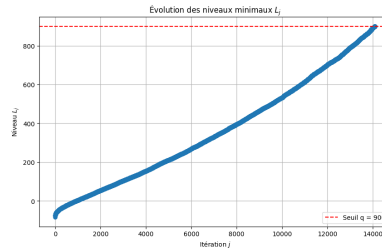
$$IC(95\%) = \left[ p_n \left( 1 \pm \frac{1.96 \sqrt{-\log(p_n)}}{\sqrt{n}} \right) \right]$$

#### 4.3.2 Test sur le portefeuille test

Nous allons essayer une fois de plus d'estimer la probabilité  $\mathbb{P}(V_T^\star \geq 900)$  sur le portefeuille test : les résultats sont présentés dans la Figure 14 page 33.

```
Estimation de  $P(V_T \geq 900)$  :  $7.501050e-07 \pm 1.7459615254367713e-07$   
Nombre d'itérations ( $i_n$ ) : 14096  
Valeur analytique attendue :  $6.814170e-07$ 
```

(a) Distribution estimée de la probabilité finale



(b) Convergence du niveau  $L_j$  au fil des itérations

FIGURE 14 – Méthode de la dernière particule appliquée au portefeuille test pour le calcul de probabilité. (a) Estimation finale de la probabilité, (b) Évolution des niveaux successifs  $L_j$ .

```
Running simulation for portfolio 1...  
Méthode de la dernière particule:  
Estimation :  $1.873950e-04 \pm 3.40263773250039e-05$ 
```

```
Running simulation for portfolio 2...  
Méthode de la dernière particule:  
Estimation :  $4.657616e-04 \pm 7.995938758756982e-05$ 
```

```
Running simulation for portfolio 3...  
Méthode de la dernière particule:  
Estimation :  $6.350452e-06 \pm 1.3616111728573533e-06$ 
```

FIGURE 15 – Résultats de l'échantillonnage d'importance sur les portefeuilles du sujet

### 4.3.3 Application aux portefeuilles du sujet

Les résultats de cet algorithme sur le portefeuille test sont donnés ci-dessous. Les résultats sont présentés sur la Figure 15 page 33.

## 4.4 Détermination de quantile

Nous implémentons ici l'estimation du quantile par méthode de la dernière particule.

### 4.4.1 Principe de la méthode et étapes de l'algorithme

Dans cette partie on cherche à estimer le seuil  $q_\alpha$  de sorte :

$$\mathbb{P}(V_T \geq q_\alpha) = \alpha \quad \text{avec } \alpha \text{ petit}$$

La méthode est en générale identique à celle du calcul de probabilité.

#### 1. Initialisation

Générer  $n$  trajectoires indépendantes d'un mouvement brownien terminal :

$$(\vec{W}_1^{(0)}, \vec{W}_2^{(0)}, \dots, \vec{W}_n^{(0)}) \sim \mathcal{L}(\vec{W}).$$

#### 2. Itérations

Pour  $j = 0, 1, 2, \dots$ ,

(a) *Calcul du niveau minimal :*

$$L_j = \min \left\{ V_T \left( \vec{\mathbf{W}}_1^{(j)} \right), \dots, V_T \left( \vec{\mathbf{W}}_n^{(j)} \right) \right\}.$$

(b) *Mise à jour des trajectoires :* pour chaque particule  $m = 1, \dots, n$ ,

$$\vec{\mathbf{W}}_m^{(j+1)} = \begin{cases} \vec{\mathbf{W}}_m^{(j)} & \text{si } V_T(\vec{\mathbf{W}}_m^{(j)}) > L_j, \\ \vec{\mathbf{W}}^* \sim \mathcal{L} \left( \vec{\mathbf{W}} \mid V_T(\vec{\mathbf{W}}) > L_j \right) & \text{si } V_T(\vec{\mathbf{W}}_m^{(j)}) = L_j. \end{cases}$$

### 3. Critère d'arrêt

On exécute l'algorithme jusqu'à :

$$j_n = \left\lceil \frac{\log(p)}{\log(1 - n^{-1})} \right\rceil,$$

et retourner :

$$\hat{q}_n := L_{j_n}.$$

**Remarque :** On montre (Tony LELIÈVRE s. d.) qu'en posant

$$j_n^\pm := -n \ln p \pm 1.96 \sqrt{-n \ln p}$$

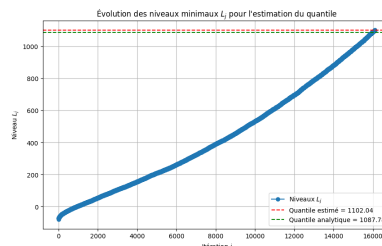
alors un IC de niveau asymptotique 95% est  $[L_{\lfloor j_n^- \rfloor}, L_{\lceil j_n^+ \rceil}]$ .

#### 4.4.2 Test sur le portefeuille test

Nous allons appliquer cette méthode pour tenter (encore) d'estimer le quantile d'ordre 99,99999% (c'est-à-dire  $1 - \alpha = 10^{-7}$ ) du portefeuille test. Les résultats sont présentés sur la Figure 16 page 34.

```
Estimation du quantile à alpha = 1e-07: 1102.04
Valeur analytique : 1087.78
Nombre d'itérations (j_n) : 16111
Intervalle de confiance à 95% : [1076.51, 1102.04]
```

(a) Résultats de la simulation  
du quantile



(b) Évolution du niveau  $L_j$  au  
fil des itérations

FIGURE 16 – Méthode de la dernière particule pour la détermination du quantile sur le portefeuille test. (a) Simulation finale et distribution estimée, (b) Convergence du niveau  $L_j$ .

### 4.4.3 Application aux portefeuilles du sujet

Nous appliquons cette méthode de détermination de quantile aux différents portefeuilles du sujet.

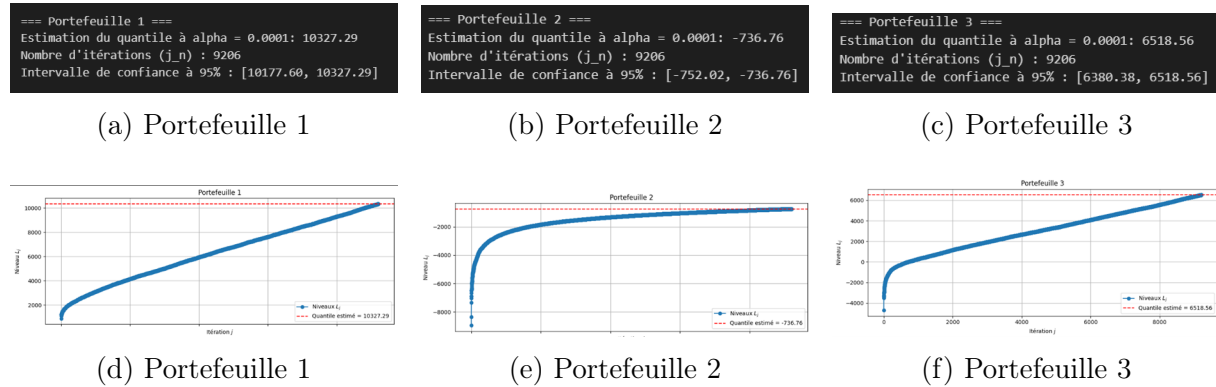


FIGURE 17 – Méthode de la dernière particule appliquée aux trois portefeuilles test. Ligne 1 : résultats finaux (quantile ou probabilité). Ligne 2 : évolution des niveaux  $L_j$ .

## 5 Récapitulatif des méthodes et comparaison

Dans cette dernière section, nous comparons les différentes méthodes mises en œuvre au cours de ce projet pour estimer des probabilités rares et des quantiles extrêmes. Chacune a ses avantages et limitations, selon la rareté de l'événement et la complexité du portefeuille.

### 5.1 Méthode de Monte Carlo naïve

- Facile à implémenter.
- Donne de bons résultats pour des événements non rares.
- Inefficace pour les événements rares : renvoie souvent zéro avec un intervalle de confiance vide.

### 5.2 Échantillonnage d'importance

#### Changement de drift :

- Permet de mieux cibler les trajectoires importantes.
- Nécessite un choix judicieux du paramètre  $\mu$ , qui peut être guidé par l'espérance cible.
- Fournit des estimateurs non biaisés avec variance réduite.
- Pas adaptée pour un portefeuille symétrique.

#### Transformation d'Esscher :

- Alternative au changement de drift, modifie la loi du log rendement.
- Moins intrusive que le changement de drift sur la dynamique.
- Équivalente au drift pour un choix particulier de paramètres.
- Pas adaptée pour un portefeuille symétrique.

### 5.3 Méthodes de Splitting

#### Par rejet :

- Conceptuellement simple.
- Très lente lorsque l'événement est trop rare.

#### Par chaînes de Markov (MCMC Splitting) :

- Plus efficace que le splitting par rejet pour les événements rares.
- Permet d'estimer des probabilités très faibles avec un coût raisonnable.
- Nécessite un choix judicieux des seuils  $q_i$  et de  $\rho$ .
- Difficulté de construction de l'intervalle de confiance, car perte d'indépendance des échantillons.

#### Méthode de la dernière particule :

- Très efficace pour les probabilités et quantiles extrêmes.
- Permet d'obtenir un estimateur avec un intervalle de confiance calculable.
- Plus complexe à implémenter, mais robuste.
- Ne nécessite pas de fixer des paramètres de simulation.

## 5.4 Comparaison des résultats

### 5.4.1 Calcul de probabilité sur le portefeuille test

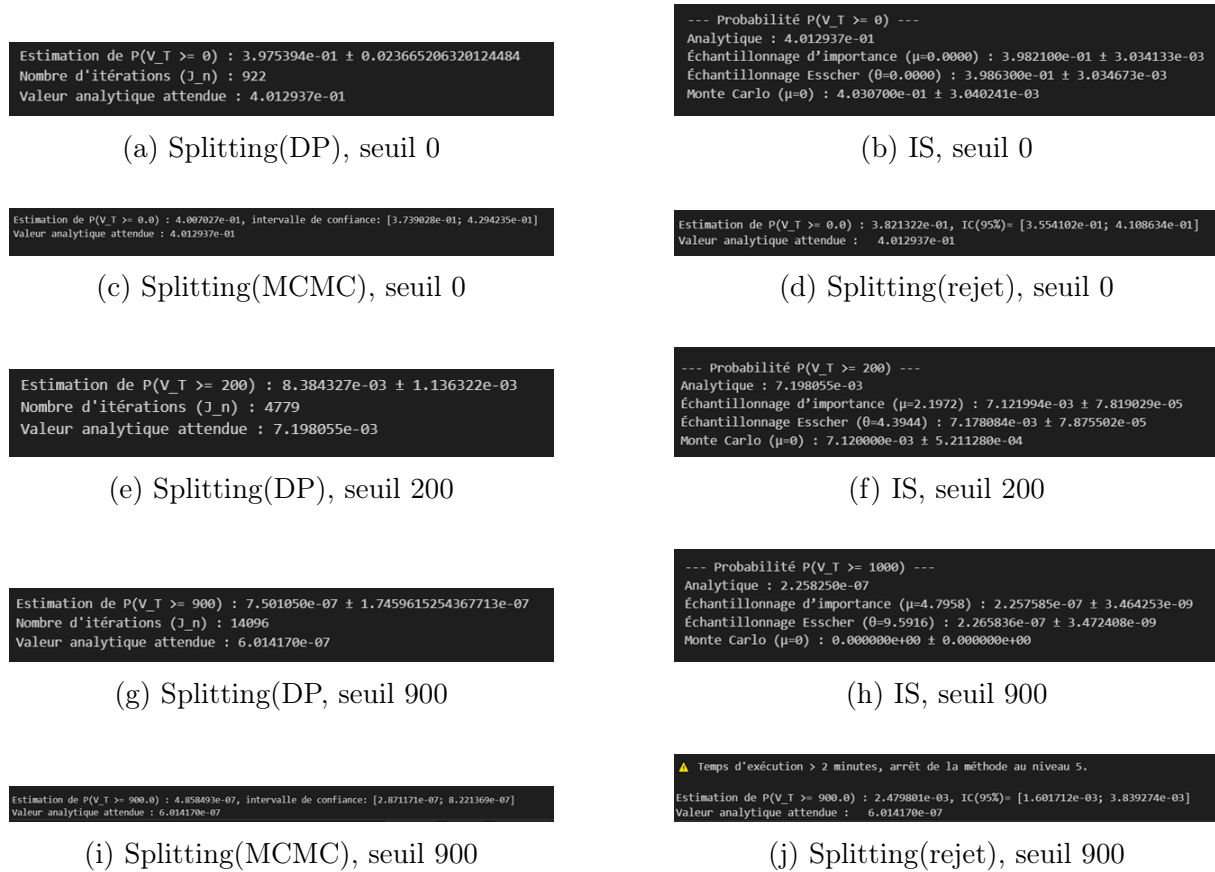


FIGURE 18 – Résultats des méthodes de splitting sur les portefeuilles du sujet.

### 5.4.2 Calcul de probabilité sur les portefeuilles du sujet

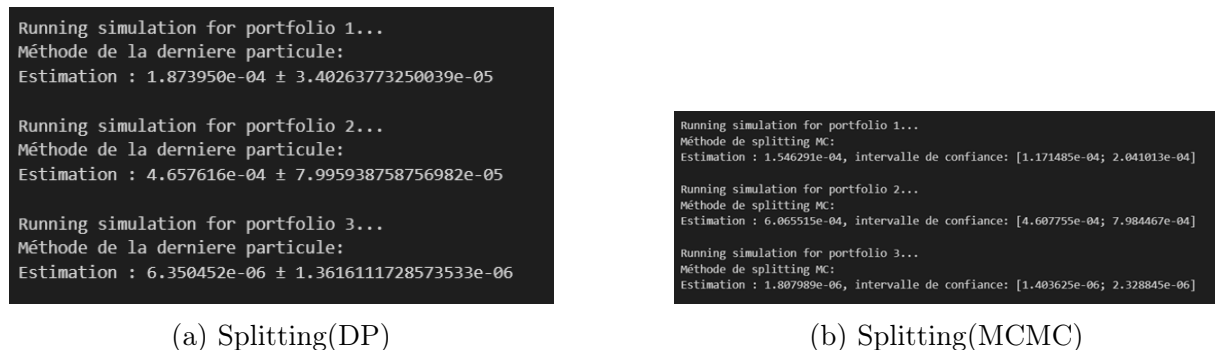


FIGURE 19 – Résultats des méthodes d'échantillonnage d'importance et splitting pour différents seuils.

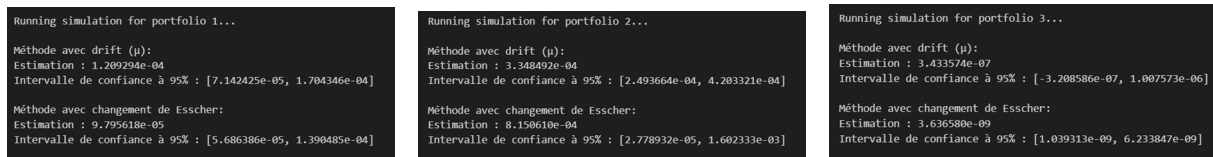


FIGURE 20 – Résultats de l'échantillonnage d'importance sur les portefeuilles du sujet

### 5.4.3 Calcul de quantiles sur le portefeuille test

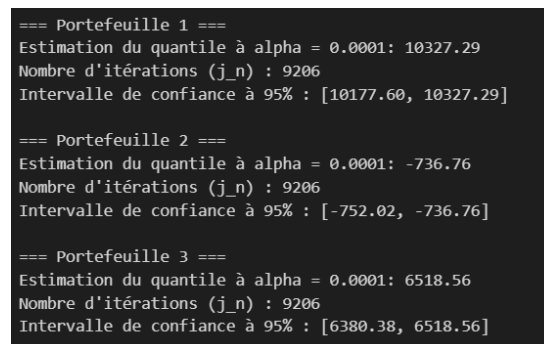


(a) IS

(b) Splitting(DP)

FIGURE 21 – Résultats des méthodes d'échantillonnage d'importance et splitting pour différents seuils pour quantile.

### 5.4.4 Calcul de quantiles sur les portefeuilles du sujet



(a) Splitting

FIGURE 22 – Résultats des méthodes de splitting sur les portefeuilles du sujet pour quantile.

## 5.5 Conclusion

Ce projet a permis de mettre en œuvre et de comparer plusieurs techniques de simulation adaptées à l'estimation d'événements rares. Il ressort que, selon le contexte — en particulier la rareté de l'événement et la structure du portefeuille — certaines méthodes s'avèrent plus appropriées que d'autres. Un bon compromis entre efficacité, biais, complexité de mise en œuvre et précision statistique doit toujours être recherché.

## Références

- EGLOFF, Daniel et Markus LEIPPOLD (avr. 2010). “Quantile estimation with adaptive importance sampling”. en. In : *The Annals of Statistics* 38.2. arXiv :1002.4946 [math]. ISSN : 0090-5364. DOI : 10.1214/09-AOS745. URL : <http://arxiv.org/abs/1002.4946> (visité le 23/05/2025).
- GUYADER, Arnaud, Nicolas HENGARTNER et Eric MATZNER-LØBER (oct. 2011). “Simulation and Estimation of Extreme Quantiles and Extreme Probabilities”. en. In : *Applied Mathematics & Optimization* 64.2. Publisher : Springer Science and Business Media LLC, p. 171-196. ISSN : 0095-4616, 1432-0606. DOI : 10.1007/s00245-011-9135-z. URL : <http://link.springer.com/10.1007/s00245-011-9135-z> (visité le 23/05/2025).
- LELIÈVRE, T (s. d.). “Splitting methods for rare event simulations Part 2 : The dynamic case”. en. In : ().
- LELIÈVRE, Tony (s. d.). “Méthodes adaptatives multi-niveaux”. fr. In : ().