



# RAPPORT EA RECHERCHE

## Pricing et hedging des options forward-start dans le modèle de Heston

11 décembre 2025

Frank DZIKOUK - Christele JASSER - Anas DAHBI



# TABLE DES MATIÈRES

<b>1</b>	<b>Le modèle de Heston</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Processus à racine carrée et variance intégrée</b>	<b>4</b>
2.1	Processus à racine carrée . . . . .	4
2.2	Difficultés de la discrétisation . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Le schéma Quadratic Exponential (QE)</b>	<b>5</b>
3.1	Principe général . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Le schéma Integrated Variance implicit (iVi)</b>	<b>6</b>
4.1	Idée centrale et reformulation intégrée . . . . .	6
4.2	Lien avec le théorème de Dambis–Dubins–Schwarz . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Application au modèle de Heston</b>	<b>8</b>
5.1	Dynamique du prix et rôle de $(U, Z)$ . . . . .	8
5.2	Comparaison qualitative des performances . . . . .	8
<b>6</b>	<b>Introduction aux Options Forward-Start</b>	<b>10</b>
6.1	Applications et Rôle de Bloc de Construction . . . . .	10
6.2	Formulation Contractuelle et Prix . . . . .	10
<b>7</b>	<b>Valorisation et Couverture du Forward Start</b>	<b>11</b>
<b>8</b>	<b>Valorisation</b>	<b>12</b>
8.1	Formule fermée du prix du forward start à tout instant avant sa maturité . . . . .	12
8.1.1	Fonction caractéristique de $\ln\left(\frac{S_{T_2}}{S_{T_1}}\right)$ conditionnelle à $\mathcal{F}_t$ dans le modèle de Heston . . . . .	12
8.1.2	Transformée de Fourier et prix du Forward Start . . . . .	14
8.2	Résultats numériques . . . . .	20
<b>9</b>	<b>Couverture quadratique du forward-start dans le modèle de Heston</b>	<b>24</b>
9.1	Cadre général et incomplétude du marché . . . . .	24
9.2	Théorème de couverture quadratique . . . . .	24
9.3	Application au forward-start . . . . .	26
9.4	Résultats numériques . . . . .	28

## Résumé

Ce travail étudie la valorisation et la couverture quadratique d'options forward-start dans le modèle de Heston. Nous analysons la simulation du processus de variance de type CIR, essentiel pour les produits dépendant de la variance intégrée, en comparant les schémas *Quadratic Exponential* (QE) et *Integrated Variance implicit* (iVi). Ce dernier, introduit récemment par Abi Jaber [1], offre une précision remarquable même avec un nombre très réduit de pas de temps, y compris dans des régimes extrêmes du modèle, ce qui confirme son intérêt pour la simulation robuste de la variance stochastique. Nous résumons nos contributions en deux points principaux :

- Sur le volet de la valorisation, nous dérivons une **formule fermée du prix du forward-start** à tout instant  $t \leq T_2$ , obtenue via la caractéristique conditionnelle de  $\ln(S_{T_2}/S_{T_1})$  et une inversion de Fourier rigoureuse. Cette expression sert de **référence analytique** pour évaluer la qualité des schémas numériques.
- Sur le volet de la couverture, nous appliquons la théorie de la **couverture quadratique** au payoff forward-start dans un marché incomplet : en calculant explicitement les processus  $Z_t$  et  $Z_t^\perp$ , nous obtenons la **stratégie optimale** et caractérisons l'erreur quadratique minimale ainsi que les conditions de couverture parfaite lorsque  $|\rho| = 1$ . Le rôle de la corrélation, déjà mis en évidence dans les travaux d'AbiJaberQuad, apparaît ici central pour déterminer la complétude du marché et la qualité de la réplication.

# 1

## LE MODÈLE DE HESTON

Le modèle de Heston (1993) est l'un des modèles de volatilité stochastique les plus utilisés en finance quantitative. Il décrit l'évolution conjointe du prix d'un actif  $S_t$  et de sa variance instantanée  $V_t$  sous la mesure risque-neutre  $\mathbb{Q}$ . Le modèle repose sur un système d'équations différentielles stochastiques couplées :

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_t}S_t dW_t^{(S)}, \\ dV_t = \kappa(\theta - V_t) dt + \gamma\sqrt{V_t} dW_t^{(V)}, \end{cases} \quad (1)$$

où  $W_t^{(S)}$  et  $W_t^{(V)}$  sont deux mouvements browniens corrélés tels que :

$$dW_t^{(S)} dW_t^{(V)} = \rho dt, \quad \rho \in [-1, 1]. \quad (2)$$

## INTERPRÉTATION DES PARAMÈTRES

Les paramètres du modèle s'interprètent comme suit :

- $r$  : taux d'intérêt sans risque.
- $\theta \geq 0$  : variance moyenne de long terme (*long-run variance*).
- $\kappa \geq 0$  : vitesse de réversion de  $V_t$  vers  $\theta$ .

- $\gamma > 0$  : volatilité de la variance (*vol-of-vol*), contrôle la dispersion de  $V_t$ .
- $\rho \in [-1, 1]$  : corrélation entre les chocs du prix et ceux de la variance.
  - Un  $\rho < 0$  permet de modéliser le *skew* négatif généralement observé sur les marchés actions (effet de levier).

Le processus de variance est une diffusion à racine carrée (processus de Cox–Ingersoll–Ross) :

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t) dt + \gamma\sqrt{V_t} dW_t^{(V)}. \quad (3)$$

La positivité stricte du processus de variance ( $V_t$ ) dépend de la **condition de Feller** :

$$2\kappa\theta \geq \gamma^2. \quad (4)$$

Si cette condition est respectée, l'origine 0 est inatteignable. Si elle est violée ( $2\kappa\theta < \gamma^2$ ), la variance peut atteindre zéro, ce qui nécessite des schémas de discrétisation spécifiques pour éviter les instabilités numériques.

## 2

# PROCESSUS À RACINE CARRÉE ET VARIANCE INTÉGRÉE

## 2.1 PROCESSUS À RACINE CARRÉE

On considère un processus de variance  $(V_t)_{t \geq 0}$  solution de l'équation différentielle stochastique

$$V_t = V_0 + \int_0^t (a + bV_s) ds + c \int_0^t \sqrt{V_s} dW_s, \quad (5)$$

où  $V_0, a \geq 0, b, c \in \mathbb{R}$ , et  $(W_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien standard. Comme le drift et la variance instantanée sont des fonctions affines de  $V_t$  le modèle appartient à la classe des processus affines. Cette structure implique que la fonction caractéristique du log-prix admet une représentation fermée via un système différentiel de type Riccati, ce qui permet d'utiliser des méthodes fondées sur la transformée de Fourier pour l'évaluation des produits dérivés

Pour les besoins de la simulation, on introduit deux quantités fondamentales, pour  $s \leq t$  :

$$U_{s,t} := \int_s^t V_r dr, \quad Z_{s,t} := \int_s^t \sqrt{V_r} dW_r. \quad (6)$$

Le processus  $(Z_{s,t})_{t \geq s}$  est une martingale continue de variation quadratique

$$\langle Z_{s,\cdot} \rangle_t = U_{s,t}.$$

La paire  $(U_{s,t}, Z_{s,t})$  décrit donc respectivement la variance accumulée et le bruit brownien pondéré par la racine de la variance.

La quantité  $U_{s,t}$  intervient directement dans les payoffs de produits comme les variance swaps, les volatility swaps, et, plus généralement, dans les dérivés forward-start dont le payoff dépend de la variance réalisée sur une fenêtre future  $[T_1, T_2]$ .

## 2.2 DIFFICULTÉS DE LA DISCRÉTISATION

Sur un maillage de temps  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ , les schémas classiques suivent une logique en trois étapes, pour chaque intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  :

1. Simuler  $V_{t_{i+1}}$  sachant  $V_{t_i}$  ;
2. Simuler  $U_{t_i, t_{i+1}}$  souvent conditionnellement à  $V_{t_i}$  et  $V_{t_{i+1}}$  ;
3. Reconstruire  $Z_{t_i, t_{i+1}}$  à partir de (5) :

$$Z_{t_i, t_{i+1}} = \frac{1}{c} (V_{t_{i+1}} - V_{t_i} - a(t_{i+1} - t_i) - bU_{t_i, t_{i+1}}), . \quad (7)$$

Les schémas d'Euler ou dérivés appliqués à (5) peuvent facilement violer la contrainte  $V_t \geq 0$ , entraînant des instabilités numériques et un biais potentiel sur la variance intégrée. D'autres approches, dites *distributionnelles*, utilisent des lois approchées (chi-deux non centrée, exponentielle, mélanges) pour  $V_{t_{i+1}} | V_{t_i}$  et  $U_{t_i, t_{i+1}}$ , mais au prix d'une certaine complexité et d'un lien plus ténu avec la dynamique de base.

## 3

## LE SCHÉMA QUADRATIC EXPONENTIAL (QE)

### 3.1 PRINCIPE GÉNÉRAL

Le schéma QE a été proposé pour améliorer la simulation des processus de type Heston/CIR tout en conservant un bon compromis entre précision et coût. L'idée est d'approximer la loi conditionnelle de  $V_{t_{i+1}}$  sachant  $V_{t_i}$  par une loi simple, choisie parmi deux familles en fonction du régime de variance.

Plus précisément, on distingue :

- un régime de *variance élevée*, où l'on utilise une approximation de type "gaussien décalé au carré" ;
- un régime de *variance faible*, où l'on utilise une loi exponentielle ajustée pour faire correspondre les deux premiers moments.

Un critère de *switching* détermine dans quel régime on se trouve à partir de  $V_{t_i}$  et des paramètres du modèle.

Une fois  $V_{t_{i+1}}$  simulé, la variance intégrée  $U_{t_i, t_{i+1}}$  est typiquement approximée par une règle du point milieu :

$$U_{t_i, t_{i+1}} \approx \frac{V_{t_i} + V_{t_{i+1}}}{2} \Delta_i. \quad (8)$$

On en déduit alors  $Z_{t_i, t_{i+1}}$ .

## 4

## LE SCHÉMA INTEGRATED VARIANCE IMPLICIT (IVI)

### 4.1 IDÉE CENTRALE ET REFORMULATION INTÉGRÉE

Le schéma iVi propose un changement de perspective : au lieu de simuler d'abord la trajectoire de  $V$  et d'en déduire la variance intégrée  $U$ , on simule directement  $U$  sur chaque pas de temps, puis on reconstruit  $Z$  et  $V$ .

Le point de départ est la *forme intégrée exacte* de la dynamique de  $V$ , obtenue en appliquant une variation de la constante à l'équation (5) :

$$V_r = V_s e^{b(r-s)} + a \frac{e^{b(r-s)} - 1}{b} + c \int_s^r e^{b(r-u)} dZ_{s,u}, \quad s \leq r. \quad (9)$$

En intégrant cette expression sur l'intervalle  $[s, t]$ , on obtient alors une *représentation exacte de la variance intégrée* :

$$U_{s,t} = V_s \frac{e^{b(t-s)} - 1}{b} + \frac{a}{b} \left( \frac{e^{b(t-s)} - 1}{b} - (t-s) \right) + c \int_s^t e^{b(t-r)} Z_{s,r} dr. \quad (10)$$

L'intégrale stochastique est ensuite approchée par une règle de type Euler en point droit :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{b(t_{i+1}-r)} Z_{t_i,r} dr \approx \frac{e^{b\Delta_i} - 1}{b} Z_{t_i,t_{i+1}}. \quad (11)$$

En notant

$$\alpha_i = \hat{V}_i \frac{e^{b\Delta_i} - 1}{b} + \frac{a}{b} \left( \frac{e^{b\Delta_i} - 1}{b} - \Delta_i \right), \quad \sigma_i = c \frac{e^{b\Delta_i} - 1}{b}, \quad (12)$$

on obtient alors l'approximation implicite

$$U_{t_i,t_{i+1}} \approx \alpha_i + \sigma_i Z_{t_i,t_{i+1}}. \quad (13)$$

### 4.2 LIEN AVEC LE THÉORÈME DE DAMBIS–DUBINS–SCHWARZ

Le processus  $(Z_{t_i,s})_{s \geq t_i}$  est une martingale continue de variation quadratique  $\langle Z_{t_i,\cdot} \rangle_s = U_{t_i,s}$ . Le théorème de Dambis–Dubins–Schwarz permet donc de l'écrire sous la forme

$$Z_{t_i,s} = \tilde{W}_{U_{t_i,s}}, \quad (14)$$

pour un certain mouvement brownien  $(\tilde{W}_u)_{u \geq 0}$ . En particulier,

$$Z_{t_i,t_{i+1}} = \tilde{W}_{U_{t_i,t_{i+1}}}. \quad (15)$$

En substituant dans l'approximation précédente, on obtient une équation implicite en la variable aléatoire  $U$  :

$$U \approx \alpha_i + \sigma_i \tilde{W}_U. \quad (16)$$

Cette équation caractérise la loi du temps de passage d'un brownien dérivé, qui est précisément une loi inverse-gaussienne. La forme de la loi de  $U_{t_i, t_{i+1}}$  est donc ici *déduite* de la structure de la dynamique et du choix de la discrétisation, plutôt que post-hoc par ajustement de moments.

---

**Algorithm 1** Le schéma iVi : Mise à jour sur un pas  $[t_i, t_{i+1}]$

---

**Input:**  $\hat{V}_i$ , paramètres  $a, b, c$ , pas de temps  $\Delta_i$

**Output:** Valeurs mises à jour  $\hat{V}_{i+1}, \hat{U}_{i,i+1}, \hat{Z}_{i,i+1}$

- 1 Pour  $i = 0$  allant à  $n - 1$  :
- 2     Calculer les quantités :

$$\alpha_i = \hat{V}_i \frac{e^{b\Delta_i} - 1}{b} + \frac{a}{b} \left( \frac{e^{b\Delta_i} - 1}{b} - \Delta_i \right), \quad \sigma_i = c \frac{e^{b\Delta_i} - 1}{b}$$

- 3     Simulation de l'incrément intégré

$$\hat{U}_{i,i+1} \sim IG \left( \alpha_i, \left( \frac{\alpha_i}{\sigma_i} \right)^2 \right)$$

où  $IG(\mu, \lambda)$  est la loi Inverse Gaussienne

- 4     Reconstruction du mouvement Brownien

$$\hat{Z}_{i,i+1} = \frac{1}{\sigma_i} (\hat{U}_{i,i+1} - \alpha_i)$$

- 5     Mise à jour de la variance

$$\hat{V}_{i+1} = \hat{V}_i + a\Delta_i + b\hat{U}_{i,i+1} + c\hat{Z}_{i,i+1}$$


---

Le schéma iVi présente plusieurs avantages essentiels. Il repose sur une discrétisation d'Euler en point droit appliquée à la représentation intégrée de la variance, exploitant directement la structure affine du modèle. Cette construction garantit la non-négativité, car la mise à jour de la variance peut être réécrite sous la forme

$$\hat{V}_{i+1} = A(b, \Delta_i) \hat{U}_{i,i+1} + B(a, b, \Delta_i),$$

où  $A > 0$  et  $B \geq 0$ , ce qui impose  $\hat{V}_{i+1} \geq 0$  dès que  $\hat{U}_{i,i+1} > 0$ .

Le schéma reproduit exactement les premiers moments conditionnels et la loi Inverse Gaussienne de  $U_{t_i, t_{i+1}}$  découle directement de la dynamique discrétisée, sans ajustement de moments a posteriori. Enfin, les résultats numériques montrent que iVi atteint une haute précision même avec très peu de pas de temps, y compris dans des régimes extrêmes du modèle de Heston.

## 5

# APPLICATION AU MODÈLE DE HESTON

### 5.1 DYNAMIQUE DU PRIX ET RÔLE DE $(U, Z)$

Dans le modèle de Heston, le prix d'actif  $(S_t)_{t \geq 0}$  satisfait

$$dS_t = S_t \sqrt{V_t} (\rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^\perp), \quad S_0 > 0, \quad (17)$$

où  $W^\perp$  est un mouvement brownien indépendant de  $W$ , et  $\rho \in [-1, 1]$  est le paramètre de corrélation entre le bruit de variance et le bruit du prix.

En intégrant entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$ , on obtient pour le log-prix :

$$\log S_{t_{i+1}} - \log S_{t_i} = -\frac{1}{2} U_{t_i, t_{i+1}} + \rho Z_{t_i, t_{i+1}} + \sqrt{1 - \rho^2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{V_r} dW_r^\perp. \quad (18)$$

Conditionnellement à  $U_{t_i, t_{i+1}}$ , le dernier terme est gaussien de variance  $U_{t_i, t_{i+1}}$ . En pratique, on simule donc

$$\log \hat{S}_{i+1} = \log \hat{S}_i - \frac{1}{2} \hat{U}_{i, i+1} + \rho \hat{Z}_{i, i+1} + \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{\hat{U}_{i, i+1}} N_i, \quad (19)$$

où  $(N_i)$  est une suite de variables normales centrées réduites indépendantes.

Ainsi, une fois que l'on sait simuler  $(\hat{U}_{i, i+1}, \hat{Z}_{i, i+1})$  selon un schéma donné (QE ou iVi), l'extension au prix d'actif est immédiate. L'enjeu pour la valorisation d'options est donc essentiellement de contrôler la qualité de la simulation de  $(U, Z)$ .

### 5.2 COMPARAISON QUALITATIVE DES PERFORMANCES

La Figure 1 présente l'erreur absolue entre les différents schémas et les valeurs de référence, en fonction du nombre de pas de temps (de 1 à 100 en échelle log-log), pour trois configurations de moneyness : In-the-Money (ITM), At-the-Money (ATM) et Out-of-the-Money (OTM). Les trois colonnes correspondent aux trois jeux de paramètres du modèle de Heston résumés dans le Tableau :

Cas	$V_0$	$a$	$b$	$c$	$\rho$
Cas 1	0.006	$17.25 \times 0.018$	-17.25	2.95	-0.68
Cas 2	0.023	$2.15 \times 0.057$	-2.15	0.86	-0.70
Cas 3	0.04	$0.5 \times 0.04$	-0.5	1.0	-0.9

Ces trois scénarios représentent respectivement : (i) un régime extrême caractérisé par une forte volatilité de volatilité et une réversion très rapide (Case 1), (ii) un régime plus modéré, calibré sur des niveaux de marché typiques (Case 2), (iii) un régime de maturité longue avec paramètres adoucis (Case 3).



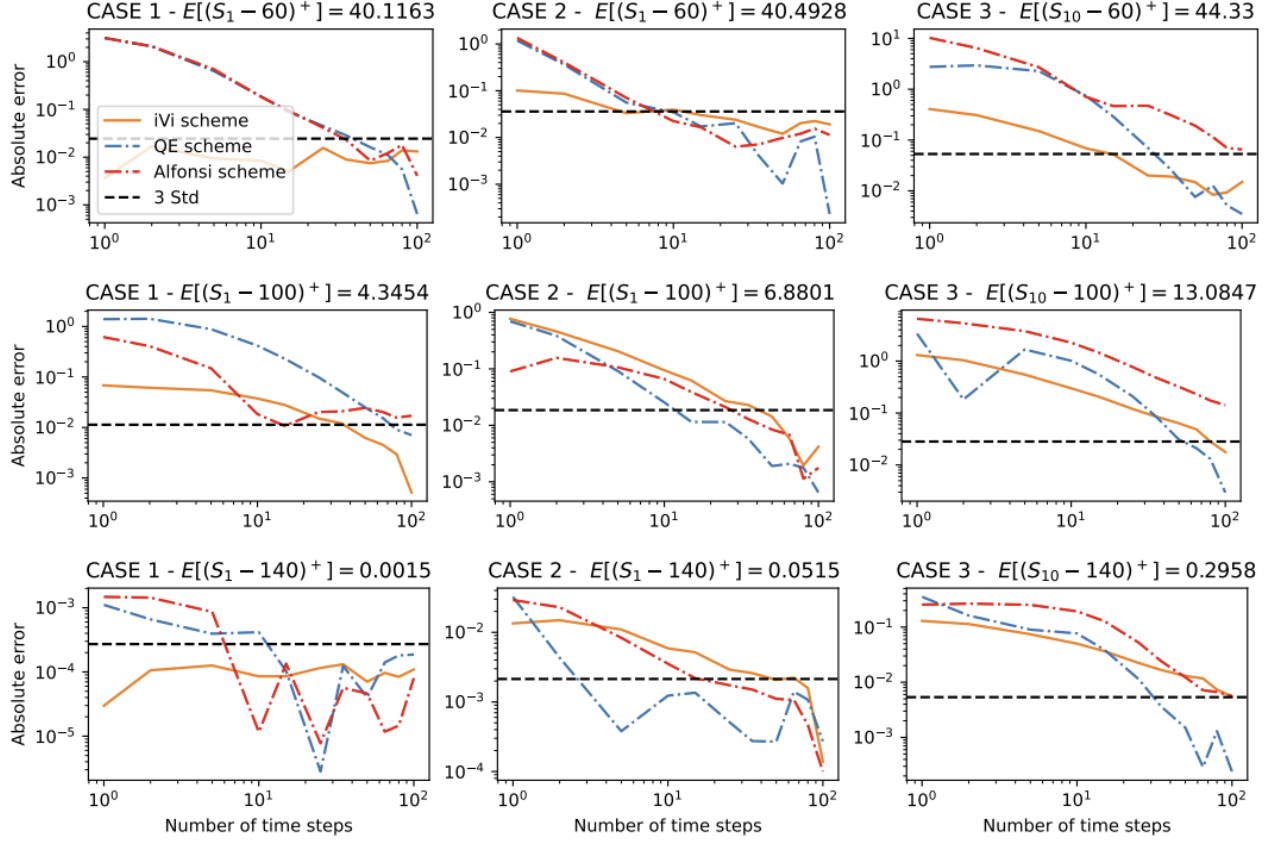


FIGURE 1 – Options call ITM, ATM et OTM sur  $S$  : erreur sur les prix en fonction du nombre de pas de temps pour les trois cas, avec 2 millions de trajectoires Monte Carlo.

Dans l'ensemble des configurations, on observe de nouveau la convergence du schéma iVi. Pour les options ITM (première ligne), le schéma iVi présente une convergence nettement plus rapide que les schémas QE et Alfonsi pour les trois jeux de paramètres. En particulier, dans le régime extrême de la Case 1, le schéma atteint une précision située à l'intérieur de trois écarts types dès un unique pas de temps, ce qui corrobore les observations de la Figure 3.

Pour les options ATM et OTM (deuxième et troisième lignes), l'augmentation du strike entraîne une dégradation du taux de convergence du schéma iVi, comparativement au schéma QE. Néanmoins, même dans le régime particulièrement difficile de la Case 1, un seul pas de temps reste suffisant pour obtenir une précision remarquable.

## 6

## INTRODUCTION AUX OPTIONS FORWARD-START

Les options *forward-start*, aussi désignées comme options de performance, constituent une catégorie de produits dérivés dont la valeur est déterminée non pas par la valeur absolue d'un sous-jacent, mais par la performance de cet actif sur une période future. Elles peuvent être considérées comme des options européennes dont le début d'exercice est décalé dans le temps .

Une distinction cruciale réside dans la date de référence pour le prix initial. Alors que pour les options européennes classiques la valeur initiale de l'actif  $S_0$  est connue au temps  $t_0$ , pour les options *forward-start* cette valeur est inconnue à  $t_0$  car elle sera fixée à une date future  $T_1$  . Leur valeur dépend ainsi de la performance réalisée par l'actif sous-jacent  $S_t$  sur l'intervalle futur  $[T_1, T_2]$  .

## 6.1 APPLICATIONS ET RÔLE DE BLOC DE CONSTRUCTION

Les options *forward-start* sont fréquemment utilisées pour la construction d'autres produits dérivés plus complexes , notamment les options *cliquet* (ou *ratchet*) . Une option cliquet est composée d'une série d'options *forward-start* consécutives . Ces instruments sont couramment rencontrés sur les marchés d'actions et de taux d'intérêt.

Une caractéristique importante des options cliquet est leur capacité à bloquer périodiquement les profits (*locking in of profits*) . Par exemple, si un actif performe bien sur  $[T_i, T_{i+1}]$  mais mal sur  $[T_{i+1}, T_{i+2}]$ , l'investisseur conserve le gain obtenu sur la première période sans subir la perte de la seconde . Comme les gains peuvent être limités contractuellement (par exemple à 20%) , les options cliquet peuvent représenter une alternative relativement moins coûteuse aux options européennes..

## 6.2 FORMULATION CONTRACTUELLE ET PRIX

Pour deux échéances  $T_1$  et  $T_2$  telles que  $t_0 < T_1 < T_2$  , le paiement d'une option *forward-start* est défini à partir de la performance en pourcentage du sous-jacent mesurée entre  $T_1$  et  $T_2$ .

Le payoff d'un call forward-start à maturité  $T_2$  est donné par :

$$V(T_2; T_1, T_2) = \max \left( \frac{S(T_2) - S(T_1)}{S(T_1)} - K, 0 \right), \quad (20)$$

où  $K$  est le prix d'exercice .

Ce payoff peut être réécrit en utilisant le facteur  $k = K + 1$  :

$$V(T_2, S; T_1, T_2) = \max \left( \frac{S(T_2)}{S(T_1)} - k, 0 \right). \quad (21)$$

Si  $t_0 = T_1$ , cette expression se réduit à un call européen standard de maturité  $T_2$ , avec un paiement de la forme :

$$V(T_2; T_1, T_2) = \frac{1}{S_0} \max(S(T_2) - K^*, 0), \quad K^* = S_0(K + 1),$$

La valeur actuelle  $V(t_0, S; T_1, T_2)$  de l'option, dont le paiement intervient à  $T_2$ , est donnée par l'espérance sous la mesure risque-neutre  $\mathbb{Q}$  :

$$V(t_0, S; T_1, T_2) = M(t_0) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{1}{M(T_2)} \max \left( \frac{S(T_2)}{S(T_1)} - k, 0 \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right], \quad (22)$$

où  $M(t)$  désigne le compte d'épargne.

Si les taux d'intérêt sont constants, on obtient :

$$V(t_0, S; T_1, T_2) = \frac{M(t_0)}{M(T_2)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \max \left( \frac{S(T_2)}{S(T_1)} - k, 0 \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]. \quad (23)$$

L'expression peut encore être reformulée en introduisant le log-rendement

$$X(T_1, T_2) := \log \frac{S(T_2)}{S(T_1)} = \log S(T_2) - \log S(T_1),$$

ce qui donne :

$$V(t_0, S; T_1, T_2) = \frac{M(t_0)}{M(T_2)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \max \left( e^{X(T_1, T_2)} - k, 0 \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right], \quad (24)$$

formulation qui reste indépendante des dynamiques spécifiques de  $S(t)$ .

## 7

# VALORISATION ET COUVERTURE DU FORWARD START

Dans cette partie, nous abordons premièrement la valorisation du forward start, puis sa couverture sous le modèle de Heston.

Nous utilisons pour cela la convention suivante pour la dynamique du sous-jacent  $S_t$  et de sa variance  $V_t$  sous la mesure risque-neutre :

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dB_t, \\ dV_t = \kappa(\theta - V_t) dt + \gamma \sqrt{V_t} dW_t^1, \end{cases}$$

où

$$B_t = \rho W_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^2,$$

avec  $(W_t^1)_{t \geq 0}$  et  $(W_t^2)_{t \geq 0}$  deux mouvements browniens indépendants.

Cette dynamique est valable sous la mesure risque-neutre  $\mathbb{Q}$ , mesure que nous utiliserons dans toute la suite. Nous notons par  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  la filtration canonique associée à  $(W_t^1)_{t \geq 0}$  et  $(W_t^2)_{t \geq 0}$ .

## 8

# VALORISATION

---

Notre méthode de valorisation est basée sur la transformée de Fourier. Nous l'utiliserons dans un premier temps pour obtenir une formule fermée du prix du forward start avant de comparer nos résultats à ceux obtenus par combinaison de schémas iVi et QE à Monte Carlo.

### 8.1 FORMULE FERMÉE DU PRIX DU FORWARD START À TOUT INSTANT AVANT SA MATURITÉ

---

Nous rappelons que le payoff d'un forward start de maturité  $T_2$  et de strike  $k$  qui débute à la date  $T_1$  est donné par :

$$\xi = \max \left( \frac{S_{T_2}}{S_{T_1}} - k, 0 \right).$$

Son prix à tout instant  $0 \leq t \leq T_2$  sous la mesure risque-neutre est donné par :

$$P(t, S_t, T_1, T_2, k) = e^{-r(T_2-t)} \mathbb{E} [\xi \mid \mathcal{F}_t].$$

L'idée principale de notre méthode est de calculer la fonction caractéristique de  $\ln \left( \frac{S_{T_2}}{S_{T_1}} \right)$  sachant  $\mathcal{F}_t$ , avant de calculer l'espérance précédente en obtenant la densité de distribution par transformée inverse de Fourier.

#### 8.1.1 • FONCTION CARACTÉRISTIQUE DE $\ln \left( \frac{S_{T_2}}{S_{T_1}} \right)$ CONDITIONNELLE À $\mathcal{F}_t$ DANS LE MODÈLE DE HESTON

Soit  $u \in \mathbb{R}$ , notons  $\Psi(u, t, T_1, T_2)$  la fonction caractéristique de  $\ln \left( \frac{S_{T_2}}{S_{T_1}} \right)$  conditionnelle à  $\mathcal{F}_t$ , évaluée en  $u$ . Alors,

$$\Psi(u, t, T_1, T_2) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left( iu \ln \left( \frac{S_{T_2}}{S_{T_1}} \right) \right) \mid \mathcal{F}_t \right].$$

**Proposition 1.** 1) Pour  $t < T_1 \leq T_2$ , on a

$$\Psi(u, t, T_1, T_2) = \exp(\phi(\Delta, iu)) \left( \frac{1}{1 - 2\psi(\Delta, iu)\bar{C}(T_1, t)} \right)^{\delta/2} \exp \left( \frac{\psi(\Delta, iu)\bar{C}(T_1, t)\bar{\kappa}(T_1, t)}{1 - 2\psi(\Delta, iu)\bar{C}(T_1, t)} \right),$$

où  $\Delta = T_2 - T_1$ , et où  $\phi$  et  $\psi$  sont les fonctions de Riccati définies par :

$$\psi(t, u) = \frac{\beta(u) - D(u, 0)}{\gamma^2} \frac{1 - e^{-D(u, 0)t}}{1 - G(u, 0)e^{-D(u, 0)t}},$$

et

$$\phi(t, u) = \frac{\kappa\theta}{\gamma^2} \left[ (\beta(u) - D(u, 0))t - 2 \log \left( \frac{G(u, 0)e^{-D(u, 0)t} - 1}{G(u, 0) - 1} \right) \right], \quad t \geq 0,$$

où

$$\beta(u) = -b - u\rho c, \quad D(u, \omega) = \sqrt{\beta(u)^2 + c^2(-2\omega + u - u^2)}, \quad G(u, \omega) = \frac{\beta(u) - D(u, \omega)}{\beta(u) + D(u, \omega)}.$$

De plus,

$$\bar{C}(T_1, t) = \frac{\gamma^2}{4\kappa}(1 - e^{-\kappa(T_1-t)}), \quad \delta = \frac{4\kappa\theta}{\gamma^2}, \quad \bar{\kappa}(T_1, t) = \frac{4\kappa V_t e^{-\kappa(T_1-t)}}{\gamma^2(1 - e^{-\kappa(T_1-t)})}.$$

2) Pour  $T_1 \leq t \leq T_2$ , on a :

$$\Psi(u, t, T_1, T_2) = \exp(\phi(\Delta_t, iu) + \psi(\Delta_t, iu)V_t + iu \log(S_t/S_{T_1})),$$

où  $\psi$  et  $\phi$  sont les fonctions de Riccati précédentes, et  $\Delta_t = T_2 - t$ .

*Démonstration.* 1) On part de la définition de la fonction caractéristique forward-start :

$$\Psi(u, t, T_1, T_2) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left( e^{iu \ln \left( \frac{S_{T_2}}{S_{T_1}} \right)} \mid \mathcal{F}_{T_1} \right) \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Conditionnellement à  $\mathcal{F}_{T_1}$ , la dynamique entre  $T_1$  et  $T_2$  est celle d'un modèle de Heston redémarré à  $T_1$ . En utilisant la formule caractéristique affine (B.1) (cf. [1]) avec

$$u \leftarrow iu, \quad w \leftarrow 0, \quad t \leftarrow T_1, \quad T \leftarrow T_2,$$

on obtient

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left( e^{iu \ln(S_{T_2}/S_{T_1})} \mid \mathcal{F}_{T_1} \right) = \exp(\phi(\Delta, iu) + \psi(\Delta, iu)V_{T_1}), \quad \Delta := T_2 - T_1.$$

Ainsi,

$$\Psi(u, t, T_1, T_2) = e^{\phi(\Delta, iu)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{\psi(\Delta, iu)V_{T_1}} \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Enfin, on applique la formule (7.93) (cf. [2]) avec  $\alpha = \psi(\Delta, iu)$ ,

ce qui conclut la démonstration.

2) Pour  $T_1 \leq t \leq T_2$ , on a :

$$\begin{aligned} \Psi(u, t, T_1, T_2) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left( iu \ln \left( \frac{S_{T_2}}{S_{T_1}} \right) \right) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left( iu \ln \left( \frac{S_{T_2}}{S_t} \right) \right) \mid \mathcal{F}_t \right] \exp \left( iu \ln \left( \frac{S_t}{S_{T_1}} \right) \right), \end{aligned}$$

car  $S_t$  et  $S_{T_1}$  sont  $\mathcal{F}_t$ -mesurables.

La formule souhaitée est retrouvée par application de la formule de la fonction caractéristique de  $\ln \left( \frac{S_{T_2}}{S_{T_1}} \right)$  conditionnellement à  $\mathcal{F}_t$ , comme précédemment.  $\square$

*Remarque 1.* Cette fonction caractéristique existe pour tout  $u \in \mathbb{R}$ , et on peut la prolonger analytiquement sur un domaine ouvert de  $\mathbb{C}$  par la fonction

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left( iz \ln \left( \frac{S_{T_2}}{S_{T_1}} \right) \right) \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Ce domaine se met sous la forme :

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) \in (a, b)\},$$

où  $a$  et  $b$  sont des bornes d'intégrabilité de  $\exp(iz \ln \left( \frac{S_{T_2}}{S_{T_1}} \right))$ , qui dépendent des paramètres  $\kappa, \gamma, \theta$  et  $\rho$ . Par la suite, nous noterons ce domaine  $\mathcal{D}_{\Psi}$ .

### 8.1.2 • TRANSFORMÉE DE FOURIER ET PRIX DU FORWARD START

#### Définition de la transformée de Fourier et rappel de ses propriétés

**Définition 1.** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . La transformée de Fourier de  $f$ , notée  $\hat{f}$ , est la fonction définie pour tout  $u \in \mathbb{R}$  par :

$$\hat{f}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f(x) dx.$$

**Théorème 1** (Inversion). Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  est tel que  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , alors

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} \hat{f}(u) du, \quad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}.$$

**Proposition 2.** Soient  $f, \varphi \in L^1(\mathbb{R})$  tels que  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) \hat{\varphi}(-x) dx.$$

*Démonstration.* Comme  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , d'après le théorème d'inversion,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} \hat{f}(u) du \right) dx.$$

Puisque  $\hat{f}$  et  $\varphi$  appartiennent à  $L^1(\mathbb{R})$ , la fonction  $(x, u) \mapsto \hat{f}(u) \varphi(x) e^{-iux}$  appartient à  $L^1(\mathbb{R}^2)$ . Ainsi, d'après le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} \hat{f}(u) du \right) dx &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u) \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} \varphi(x) dx \right) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u) \hat{\varphi}(-u) du. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

**Application à notre cas** Posons pour la suite

$$f(x) = (e^x - k)^+.$$

Alors,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\xi \mid \mathcal{F}_t] = \int_{\mathbb{R}} f(w) \varphi_t(w) dw,$$

où  $\varphi_t$  est la densité conditionnelle de  $\ln\left(\frac{S_{T_2}}{S_{T_1}}\right)$  conditionnellement à  $\mathcal{F}_t$ .

On aimerait bien appliquer la proposition précédente à  $\int_{\mathbb{R}} f(w) \varphi_t(w) dw$ , mais  $f$  n'est pas intégrable : on ne peut donc définir sa transformée de Fourier sur  $\mathbb{R}$ .

Pour résoudre ce problème, nous allons définir la transformée de Fourier de  $f$  sur des droites parallèles à l'axe des réels, à l'aide de la transformée de Fourier sur  $\mathbb{R}$  d'une fonction qui lui est liée.

Soit  $v > 1$ . On définit la fonction  $h_v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$h_v(x) = e^{-vx} f(x).$$

Alors,  $h_v \in L^1(\mathbb{R})$  et

$$\widehat{h_v}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} e^{-vx} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{i(u+iv)x} f(x) dx.$$

On peut donc, pour  $v > 1$ , poser

$$\widehat{f}(z) = \widehat{h_v}(u) \quad \text{pour } z = u + iv.$$

Par ailleurs, pour tout tel  $z$ ,

$$\widehat{h_v}(u) = \int_{\ln k}^{\infty} e^{i(u+i(v-1))x} dx - k \int_{\ln k}^{\infty} e^{i(u+iv)x} dx.$$

On obtient alors :

$$\widehat{h_v}(u) = \frac{-1}{i(u+iv-i)} k^{i(u+iv-i)} + k \frac{k^{i(u+iv)}}{i(u+iv)}.$$

Ce qui se simplifie en :

$$\widehat{h_v}(u) = -\frac{k^{i(z-i)}}{(u+iv)(u+iv-i)} = -\frac{k^{i(z-i)}}{z(z-i)}, \quad \text{avec } \text{Im}(z) > 1.$$

Notons :

$$\mathcal{D}_{\widehat{f}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 1\}.$$

**Proposition 3.** Pour tout  $z \in \mathcal{D}_{\widehat{f}}$ ,

$$f(\text{Re}(z)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(t + i\text{Im}(z)) e^{-i\text{Re}(z)(t+i\text{Im}(z))} dt.$$

*Démonstration.* Soit  $z = u + iv \in \mathcal{D}_{\hat{f}}$ . Alors  $v > 1$ , donc  $h_v \in L^1(\mathbb{R})$  et, pour  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\widehat{h}_v(t) = -\frac{k^{i(z_t-i)}}{z_t(z_t-i)},$$

où  $z_t = t + iv$ .

Par ailleurs,

$$|\widehat{h}_v(t)| = \frac{k^{-v+1}}{|z_t||z_t-i|} = \frac{k^{-v+1}}{\sqrt{t^2+v^2}\sqrt{t^2+(v-1)^2}}.$$

La fonction  $t \mapsto |\widehat{h}_v(t)|$  est continue puisque  $v > 1$ . De plus,

$$|\widehat{h}_v(t)| \leq \frac{k^{-v+1}}{t^2}$$

Donc  $\widehat{h}_v \in L^1(\mathbb{R})$ , et on peut appliquer le théorème d'inversion à  $h_v$ . En d'autres termes, pour tout  $w \in \mathbb{R}$ ,

$$h_v(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}_v(u) e^{-i u w} du = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(u + iv) e^{-i u w} du,$$

par définition de  $\widehat{f}$ .

Ainsi,

$$e^{-v w} f(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x + iv) e^{-i u x} dx,$$

i.e.

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i w(x+iv)} \widehat{f}(x + iv) dx.$$

□

*Remarque 2.* Cette dernière égalité peut encore être notée :

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{iv-\infty}^{iv+\infty} \widehat{f}(z) e^{-i w z} dz,$$

par changement de variable  $z = x + iv$ , avec  $v > 1$ .

**Proposition 4.** Soit  $v > 1$ . Supposons que  $-iv \in \mathcal{D}_{\Psi}$ . Alors,

$$\mathbb{E}[f(X)] = \frac{1}{2\pi} \int_{iv-\infty}^{iv+\infty} \widehat{f}(z) \Psi(-z, t, T_1, T_2) dz.$$

*Démonstration.* Supposons que  $v > 1$  et  $-iv \in \mathcal{D}_{\Psi}$ .

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi_t(x) dx.$$

Mais comme  $v > 1$ ,  $z = x + iv \in \mathcal{D}_{\hat{f}}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , et d'après la proposition précédente,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(u + iv) e^{-i x(u+iv)} du.$$



Donc

$$\mathbb{E}[f(X)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_t(x) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u+iv) e^{-ix(u+iv)} du \right] dx.$$

Mais comme  $-iv \in \mathcal{D}_\Psi$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_t(x) e^{vx}| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_t(x) e^{vx} dx = \mathbb{E}^\mathbb{Q}[e^{-i(iv)X} \mid \mathcal{F}_t] < +\infty,$$

et donc  $x \mapsto \varphi_t(x) e^{vx} \in L^1(\mathbb{R})$ .

Puisque  $\hat{h}_v \in L^1(\mathbb{R})$ , on obtient que  $(x, u) \mapsto \varphi_t(x) e^{vx} \hat{h}_v(u) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ , et, d'après le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_t(x) e^{vx} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}_v(u) e^{-ixu} du \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}_v(u) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_t(x) e^{-ixu} e^{vx} dx \right) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}_v(u) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_t(x) e^{ix(-u-iv)} dx \right) du. \end{aligned}$$

Posons  $z = u + iv$ . Alors  $-z \in \mathcal{D}_\Psi$  et  $z \in \mathcal{D}_{\hat{f}}$ . De plus, lorsque  $u$  parcourt  $\mathbb{R}$ ,  $z$  parcourt la droite complexe  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = v\}$ . Par ailleurs,  $dz = du$  et donc

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}_v(u) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_t(x) e^{ix(-u-iv)} dx du \\ &= \int_{iv-\infty}^{iv+\infty} \hat{f}(z) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_t(x) e^{-ixz} dx dz \\ &= \int_{iv-\infty}^{iv+\infty} \hat{f}(z) \Psi(-z, t, T_1, T_2) dz. \end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}[f(X)] = \frac{1}{2\pi} \int_{iv-\infty}^{iv+\infty} \hat{f}(z) \Psi(-z, t, T_1, T_2) dz.$$

□

Ainsi, pour tout  $v > 1$  tel que  $-iv \in \mathcal{D}_\Psi$ ,

$$\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_t] = \frac{1}{2\pi} \int_{iv-\infty}^{iv+\infty} \frac{-k^{i(z-i)}}{z(z-i)} \Psi(-z, t, T_1, T_2) dz.$$

**Proposition 5.** Soit  $v > 1$ . Supposons que  $-iv \in \mathcal{D}_\Psi$  ; alors

$$\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_t] = \Psi(-i, t, T_1, T_2) - \frac{k}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{Re} \left( \frac{k^{-i(u-i/2)}}{u^2 + 1/4} \Psi(u - i/2, t, T_1, T_2) \right) du.$$

*Démonstration.* Puisque  $-iv \in \mathcal{D}_\Psi$  et que  $-v < -1 < -1/2 < 0$  et que  $\Psi(0, t, T_1, T_2) = 1 < +\infty$ , on a  $-i/2 \in \mathcal{D}_\Psi$  et

$$z \mapsto \Psi(-z, t, T_1, T_2)$$

est holomorphe sur un ouvert contenant

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid 1/2 \leq \text{Im}(z) \leq v\}.$$

Pour  $a > 0$ , définissons :

$$\begin{aligned}\Gamma_a^1 &= \{u + iv \mid u \in [-a, a]\}, \\ \Gamma_a^2 &= \{a + i(v + 1/2 - u) \mid u \in [1/2, v]\}, \\ \Gamma_a^3 &= \{-u + i/2 \mid u \in [-a, a]\}, \\ \Gamma_a^4 &= \{-a + iu \mid u \in [1/2, v]\}, \\ \Gamma_a &= \Gamma_a^1 \cup \Gamma_a^2 \cup \Gamma_a^3 \cup \Gamma_a^4.\end{aligned}$$

La fonction

$$z \mapsto \frac{-k^{i(z-i)}}{z(z-i)}$$

est méromorphe sur  $\mathbb{C}$  de pôles 0 et  $i$ , et l'intérieur de  $\Gamma_a$  contient  $i$ .

Par application de la formule des résidus, on a :

$$\int_{\Gamma_a} g(z) dz = \text{Res}_i(g) \times 2i\pi,$$

où l'on a posé

$$g(z) = \frac{-k^{i(z-i)}}{z(z-i)} \Psi(-z, t, T_1, T_2).$$

On a

$$\int_{\Gamma_a} g(z) dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\Gamma_a^j} g(z) dz.$$

Pour  $\Gamma_a^1$  et  $\Gamma_a^3$  :

$$\int_{\Gamma_a^1} g(z) dz = \int_{-a}^a g(u + iv) du, \quad \int_{\Gamma_a^3} g(z) dz = \int_{-a}^a -g(u + i/2) du.$$

Pour  $\Gamma_a^2$  et  $\Gamma_a^4$ , on peut montrer que

$$\left| \int_{\Gamma_a^2} g(z) dz \right| \leq \frac{C}{a^2}, \quad \left| \int_{\Gamma_a^4} g(z) dz \right| \leq \frac{C}{a^2},$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $a$ .

En faisant tendre  $a \rightarrow +\infty$ ,  $\int_{\Gamma_a^2} g(z) dz$  et  $\int_{\Gamma_a^4} g(z) dz$  tendent vers 0, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u + iv) du - \int_{-\infty}^{+\infty} g(-u + i/2) du = 2\pi i \operatorname{Res}_i(g).$$

Or,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(-u + i/2) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-k^{i(u+i/2)}}{(u^2 + 1/4)} \Psi(u - i/2, t, T_1, T_2) du,$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u + iv) du = \int_{iv-\infty}^{iv+\infty} \frac{-k^{i(z-i)}}{z(z-i)} \Psi(-z, t, T_1, T_2) dz,$$

et

$$\operatorname{Res}_i(g) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{-k^{i(z-i)}}{z} \Psi(-z, t, T_1, T_2) = \frac{\Psi(-i, t, T_1, T_2)}{i}.$$

On obtient :

$$\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_t] = \Psi(-i, t, T_1, T_2) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^{-i(u+i/2)}}{u^2 + 1/4} \Psi(u - i/2, t, T_1, T_2) du.$$

Par symétrie de l'intégrande (en utilisant que  $\Psi(-u - i/2) = \overline{\Psi(u - i/2)}$ ), on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^{-i(u+i/2)}}{u^2 + 1/4} \Psi(u - i/2, t, T_1, T_2) du = 2k \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left( \frac{k^{-i(u-i/2)}}{u^2 + 1/4} \Psi(u - i/2, t, T_1, T_2) \right) du.$$

D'où le résultat. □

À cette étape, il nous faut une expression explicite de  $\Psi(-i, t, T_1, T_2)$ .

**Proposition 6.**

$$\Psi(-i, t, T_1, T_2) = \begin{cases} e^{r(T_2-T_1)} & \text{si } t \leq T_1, \\ \frac{S_t}{S_{T_1}} e^{r(T_2-t)} & \text{si } T_1 \leq t \leq T_2. \end{cases}$$

*Démonstration.*

$$\Psi(-i, t, T_1, T_2) = \mathbb{E} \left[ \exp \left( \ln \left( \frac{S_{T_2}}{S_{T_1}} \right) \right) \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E} \left[ \frac{S_{T_2}}{S_{T_1}} \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Soit  $Y_t = e^{-rt} S_t$ . D'après le lemme d'Itô :

$$dY_t = -rY_t dt + e^{-rt} dS_t = e^{-rt} S_t \sqrt{V_t} dB_t, \quad \forall t \geq 0,$$

donc

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t e^{-rs} S_s \sqrt{V_s} dB_s.$$

Alors :

$$\mathbb{E}[Y_t \mid \mathcal{F}_s] = Y_0 + \int_0^s e^{-ru} S_u \sqrt{V_u} dB_u = Y_s, \quad \forall 0 \leq s \leq t,$$

donc

$$\mathbb{E}[S_t | \mathcal{F}_s] = S_s e^{r(t-s)}, \quad \forall t \geq s \geq 0.$$

Ainsi, si  $t \leq T_1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\frac{S_{T_2}}{S_{T_1}} \middle| \mathcal{F}_t\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{S_{T_1}} \mathbb{E}[S_{T_2} | \mathcal{F}_{T_1}] \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= e^{-r(T_1-T_2)} \mathbb{E}\left[\frac{S_{T_1}}{S_{T_1}} \middle| \mathcal{F}_t\right] = e^{-r(T_1-T_2)}. \end{aligned}$$

Si  $T_1 \leq t \leq T_2$ ,

$$\mathbb{E}\left[\frac{S_{T_2}}{S_{T_1}} \middle| \mathcal{F}_t\right] = \frac{1}{S_{T_1}} \mathbb{E}[S_{T_2} | \mathcal{F}_t] = \frac{1}{S_{T_1}} S_t e^{r(T_2-t)}.$$

□

En conclusion, le prix du forward-start dans le modèle de Heston est :

$$P(t, S_t, T_1, T_2) = \begin{cases} e^{-r(T_1-t)} - e^{-r(T_2-t)} \frac{k}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left( \frac{k^{-i(u-i/2)}}{u^2 + 1/4} \Psi(u - i/2, t, T_1, T_2) \right) du, & t \leq T_1, \\ \frac{S_t}{S_{T_1}} - \frac{k e^{-r(T_2-t)}}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left( \frac{k^{-i(u-i/2)}}{u^2 + 1/4} \Psi(u - i/2, t, T_1, T_2) \right) du, & T_1 \leq t \leq T_2. \end{cases}$$

## 8.2 RÉSULTATS NUMÉRIQUES

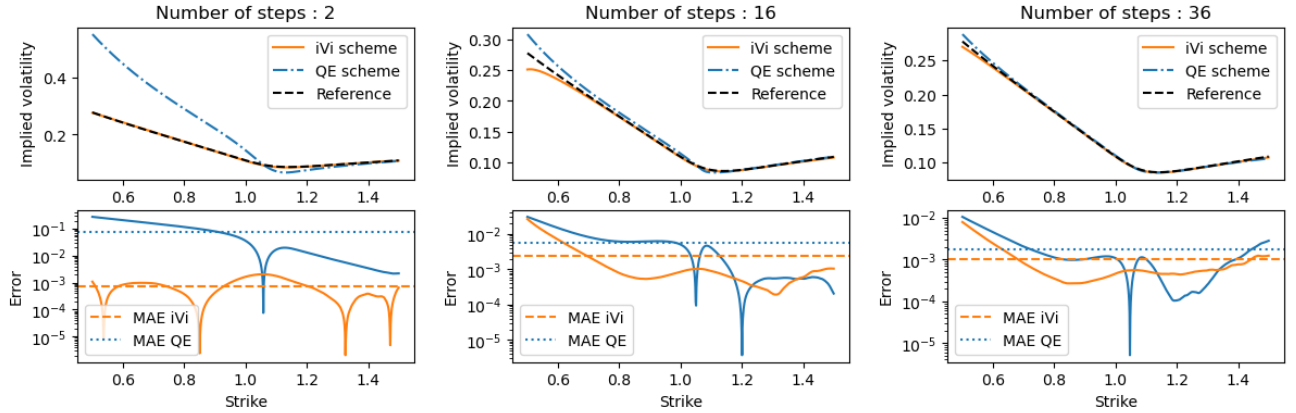
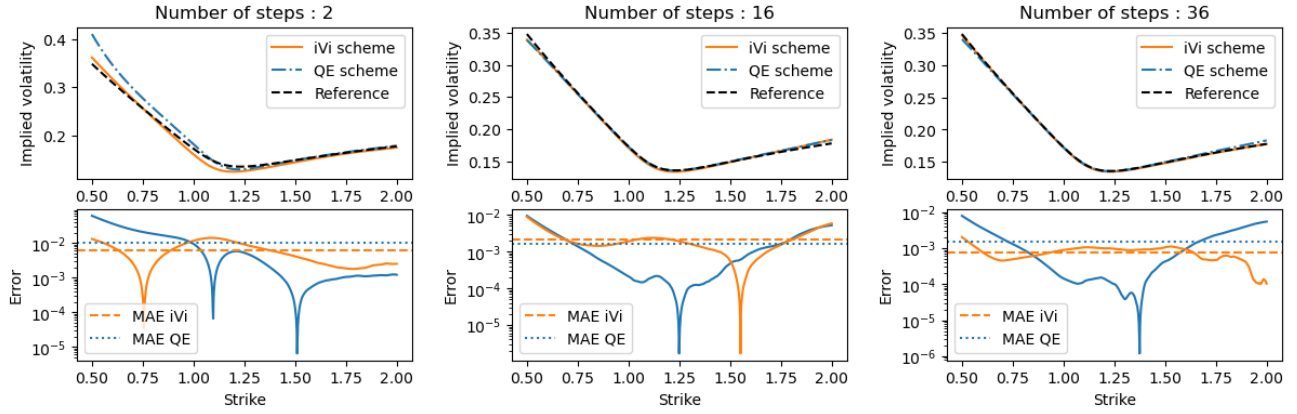
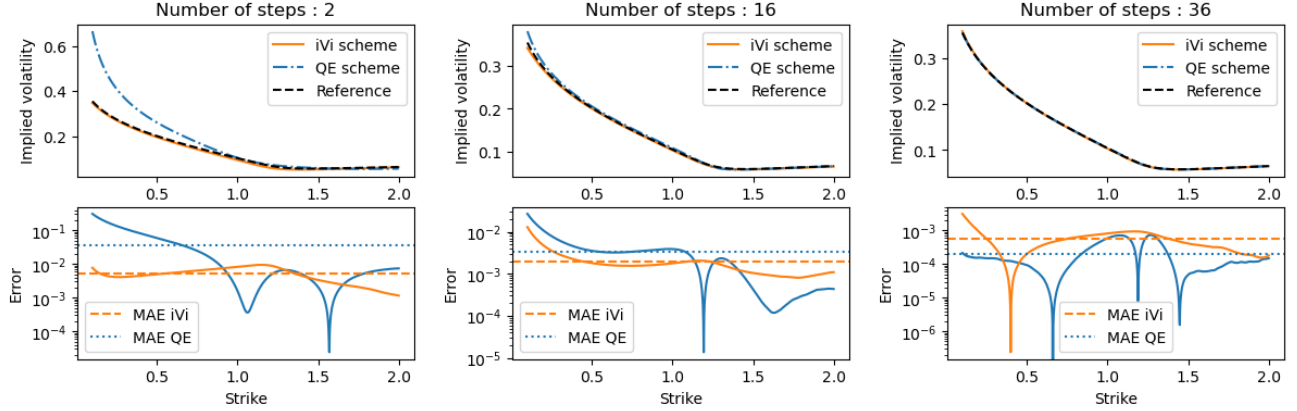


FIGURE 2 – Cas 1 : Volatilité implicite pour  $T_2 = 1$  et  $T_1 = T_2/2$  avec 1,4 million de trajectoires

FIGURE 3 – Cas 2 : Volatilité implicite pour  $T_2 = 1$  et  $T_1 = T_2/2$  avec 1,4 million de trajectoiresFIGURE 4 – Cas 3 : Volatilité implicite pour  $T_2 = 1$  et  $T_1 = T_2/2$  avec 1,4 million de trajectoires

Les Figures 2, 3 et 4 présentent les tranches complètes de volatilité implicite obtenues avec 2, 16 et 36 pas de temps, pour les trois configurations paramétriques définies dans la partie 6.2) du rapport. Elles incluent également les erreurs absolues et les erreurs absolues moyennes associées à chaque tranche. Dès 2 pas de temps, le schéma IVI fournit une précision remarquable, en particulier pour le Cas 1. Lorsque 36 pas sont utilisés, les courbes issues du schéma IVI se confondent presque entièrement avec les valeurs de référence pour l'ensemble des cas étudiés.

La convergence des schémas IVI et QE est ensuite analysée en faisant varier le nombre de pas temporels. Comme attendu, l'erreur diminue régulièrement lorsque la discrétisation temporelle est affinée, et les courbes de volatilité implicite se rapprochent progressivement de la solution de référence obtenue par inversion de Fourier. Ce comportement met en évidence la stabilité numérique des deux méthodes et leur capacité à reproduire fidèlement la volatilité implicite.

Les Figures 5, 6 et 7 présentent l'évolution temporelle du prix du forward-start obtenue par inversion de Fourier ainsi que par les deux schémas de discrétisation (IVI et QE), pour chacun des trois cas étudiés.

Nous y représentons également la trajectoire du sous-jacent  $S_t$  et celle de la variance  $V_t$ , afin de visualiser la dynamique complète du modèle de Heston et son impact sur la valorisation.

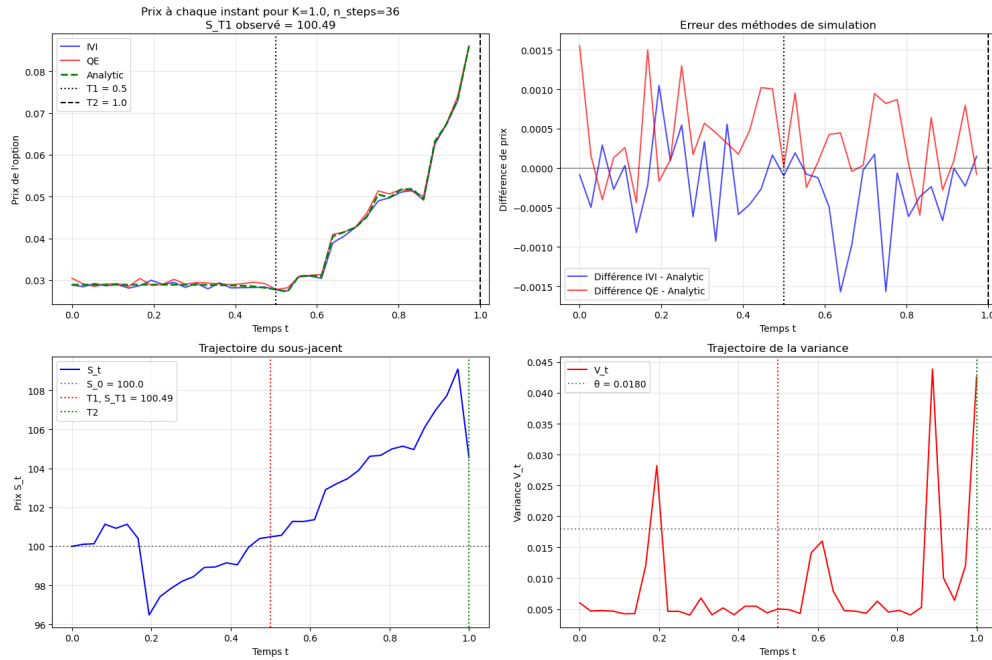


FIGURE 5 – Cas 1 : Trajectoires du prix à chaque instant obtenue par Fourier et les deux schémas,  $n_{steps}=36$ .

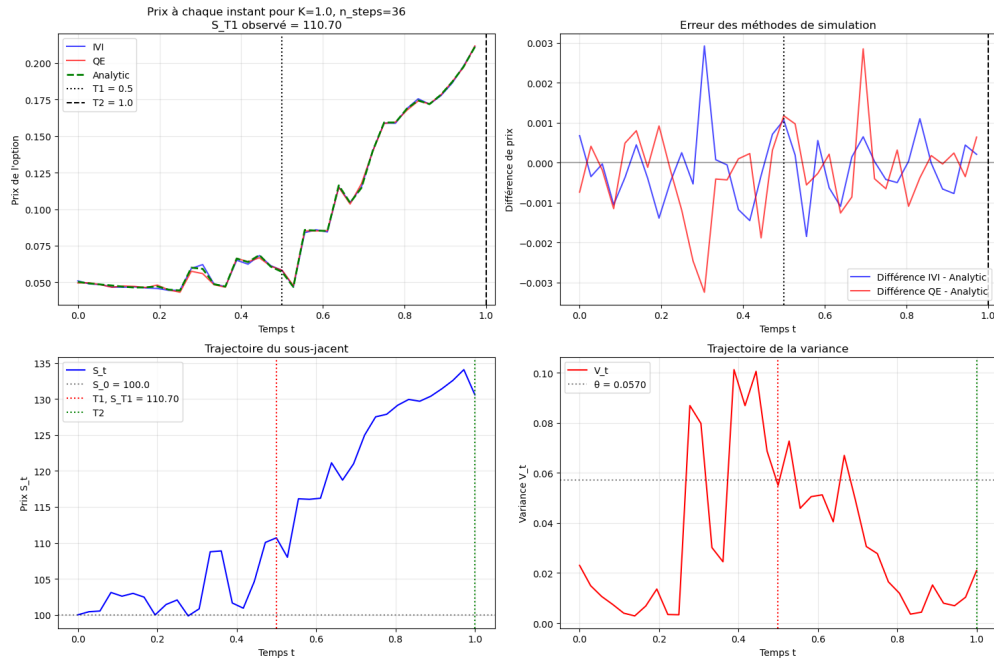


FIGURE 6 – Cas 2 : Trajectoires du prix à chaque instant obtenue par Fourier et les deux schémas,  $n_{steps} = 36$

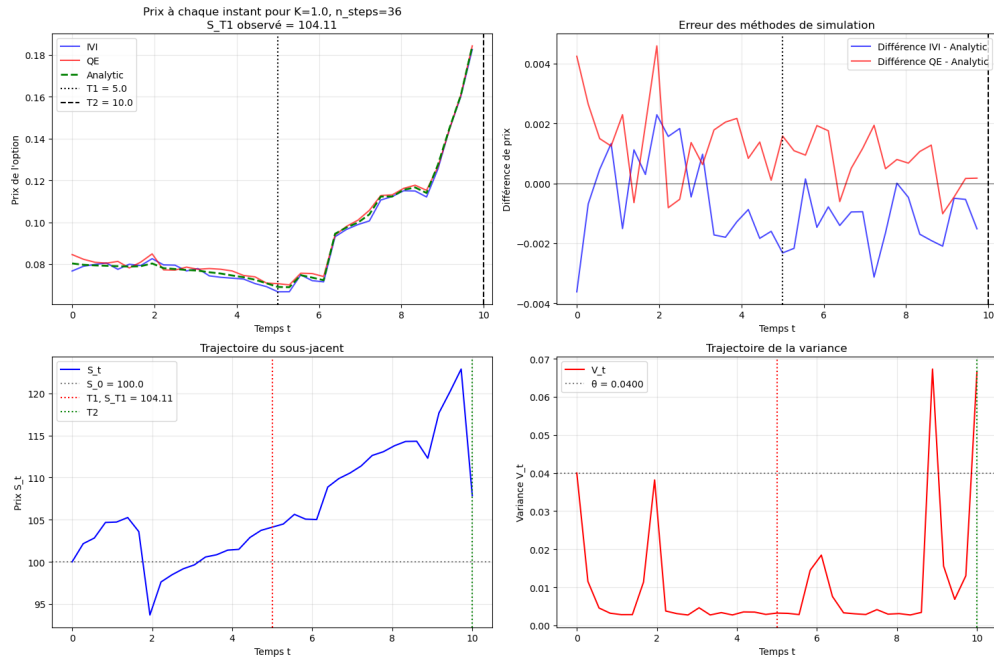


FIGURE 7 – Cas 3 : Trajectoires du prix à chaque instant obtenue par Fourier et les deux schémas,  $n_{steps} = 36$

## 9

## COUVERTURE QUADRATIQUE DU FORWARD-START DANS LE MODÈLE DE HESTON

### 9.1 CADRE GÉNÉRAL ET INCOMPLÉTUDE DU MARCHÉ

Pour nous simplifier la tâche, nous travaillerons par la suite dans le cas  $r = 0$ . En effet, on peut toujours se ramener à cette situation par changement de numéraire (en posant  $\tilde{S}_t = \frac{S_t}{\exp(rt)}$ ). Rappelons qu'alors, la dynamique sous la mesure risque-neutre du modèle de Heston est :

$$\begin{cases} dS_t = S_t \sqrt{V_t} dB_t, \\ dV_t = \kappa(\theta - V_t) dt + \gamma \sqrt{V_t} dW_t^1, \end{cases}$$

où  $B_t = \rho W_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^2$ , avec  $(W_t^1, W_t^2)$  deux mouvements browniens indépendants et  $\rho \in [-1, 1]$ .

Sous les hypothèses du modèle de Heston, le prix risque-neutre à l'instant  $t$  d'une option de payoff  $\xi = g(S_T)$ , noté  $P(t, S_t, V_t)$ , satisfait une EDS obtenue par application de la formule d'Itô. En notant  $P_t = P(t, S_t, V_t)$ ,  $\exp(-rt)P_t$  est une martingale et :

$$dP_t = rP_t dt + \partial_S P_t S_t \sqrt{V_t} dB_t + \partial_V P_t \gamma \sqrt{V_t} dW_t^2. \quad (25)$$

Cette équation fait apparaître deux sources de risque brownien indépendantes : l'une liée au sous-jacent ( $dB_t$ ), l'autre liée à la variance ( $dW_t^2$ ).

Pour éliminer complètement le risque, il faudrait compenser simultanément les deux termes stochastiques. Or, sous l'hypothèse  $|\rho| < 1$ , les deux mouvements browniens  $B_t$  et  $W_t^2$  ne sont pas parfaitement corrélés. Il est donc impossible de reproduire parfaitement la dynamique de  $P_t$  en utilisant uniquement le sous-jacent  $S_t$  : le marché est **incomplet** dès que  $|\rho| < 1$ . Par contre, quand  $\rho = \pm 1$ , les deux Browniens sont parfaitement corrélés et on peut théoriquement couvrir parfaitement l'option.

### 9.2 THÉORÈME DE COUVERTURE QUADRATIQUE

Soit  $\mathcal{H}$  l'ensemble des stratégies admissibles  $\alpha$  progressivement mesurables telles que  $\mathbb{E}[\int_0^T \alpha_s^2 ds] < \infty$ .

**Proposition 7** (Couverture quadratique). *Soit  $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$  le payoff à couvrir. Il existe deux processus progressivement mesurables  $Z_t$  et  $Z_t^\perp$  tels que :*

$$\mathbb{E}[\xi | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^t Z_s dW_s^1 + \int_0^t Z_s^\perp dW_s^2.$$

La stratégie optimale  $(X_0^*, \alpha^*)$  minimisant

$$J(X_0, \alpha) = \mathbb{E}[(X_T^\alpha - \xi)^2],$$



où  $dX_t^\alpha = \alpha_t dB_t$ , est donnée par :

$$X_0^* = \mathbb{E}[\xi], \quad \alpha_t^* = \rho Z_t + \sqrt{1 - \rho^2} Z_t^\perp.$$

En outre, l'erreur quadratique minimale vaut :

$$J(X_0^*, \alpha^*) = \mathbb{E} \left[ \int_0^T (Z_t^2 + (Z_t^\perp)^2) dt - \int_0^T \left( \rho Z_t + \sqrt{1 - \rho^2} Z_t^\perp \right)^2 dt \right].$$

*Démonstration.* 1. Comme  $\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_t]$  est une martingale de carré intégrable et que la filtration est engendrée par  $(W^1, W^2)$ , le théorème de représentation des martingales browniennes assure l'existence de deux processus  $Z_t, Z_t^\perp \in L^2([0, T] \times \Omega)$  tels que :

$$\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^t Z_s dW_s^1 + \int_0^t Z_s^\perp dW_s^2.$$

2. Pour une stratégie  $\alpha \in \mathcal{H}$ , on a :

$$X_T^\alpha = X_0 + \int_0^T \alpha_s dB_s = X_0 + \int_0^T \alpha_s \left( \rho dW_s^1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_s^2 \right).$$

Notons  $M_t = \mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_t]$ . Alors :

$$\begin{aligned} J(X_0, \alpha) &= \mathbb{E} \left[ (X_T^\alpha - \xi)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ (X_T^\alpha - M_T)^2 \right] \quad (\text{car } M_T = \xi). \end{aligned}$$

3. Posons  $N_t = X_t^\alpha - M_t$ . Alors :

$$\begin{aligned} dN_t &= \alpha_t \left( \rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^2 \right) - \left( Z_t dW_t^1 + Z_t^\perp dW_t^2 \right) \\ &= (\rho \alpha_t - Z_t) dW_t^1 + \left( \sqrt{1 - \rho^2} \alpha_t - Z_t^\perp \right) dW_t^2. \end{aligned}$$

Par la formule d'Itô pour le carré :

$$\begin{aligned} d(N_t^2) &= 2N_t dN_t + d\langle N \rangle_t \\ &= 2N_t dN_t + \left[ (\rho \alpha_t - Z_t)^2 + (\sqrt{1 - \rho^2} \alpha_t - Z_t^\perp)^2 \right] dt. \end{aligned}$$

En intégrant de 0 à T et en prenant l'espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_T^2] &= \mathbb{E}[N_0^2] + \mathbb{E} \left[ \int_0^T \left( (\rho \alpha_t - Z_t)^2 + (\sqrt{1 - \rho^2} \alpha_t - Z_t^\perp)^2 \right) dt \right] \\ &= (X_0 - \mathbb{E}[\xi])^2 + \mathbb{E} \left[ \int_0^T \left( (\rho \alpha_t - Z_t)^2 + (\sqrt{1 - \rho^2} \alpha_t - Z_t^\perp)^2 \right) dt \right]. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
 (\rho\alpha_t - Z_t)^2 + (\sqrt{1 - \rho^2}\alpha_t - Z_t^\perp)^2 &= \alpha_t^2 \underbrace{(\rho^2 + (1 - \rho^2))}_{=1} - 2\alpha_t(\rho Z_t + \sqrt{1 - \rho^2}Z_t^\perp) \\
 &\quad + (Z_t^2 + (Z_t^\perp)^2) \\
 &= \alpha_t^2 - 2\alpha_t(\rho Z_t + \sqrt{1 - \rho^2}Z_t^\perp) + (Z_t^2 + (Z_t^\perp)^2). \\
 &= \left( \alpha_t - (\rho Z_t + \sqrt{1 - \rho^2}Z_t^\perp) \right)^2 + (Z_t^2 + (Z_t^\perp)^2) - (\rho Z_t + \sqrt{1 - \rho^2}Z_t^\perp)^2.
 \end{aligned}$$

5. En substituant :

$$\begin{aligned}
 J(X_0, \alpha) &= (X_0 - \mathbb{E}[\xi])^2 \\
 &\quad + \mathbb{E} \left[ \int_0^T \left( \alpha_t - (\rho Z_t + \sqrt{1 - \rho^2}Z_t^\perp) \right)^2 dt \right] \\
 &\quad + \mathbb{E} \left[ \int_0^T \left( Z_t^2 + (Z_t^\perp)^2 - (\rho Z_t + \sqrt{1 - \rho^2}Z_t^\perp)^2 \right) dt \right].
 \end{aligned}$$

Le minimum est atteint pour :

$$X_0^* = \mathbb{E}[\xi], \quad \alpha_t^* = \rho Z_t + \sqrt{1 - \rho^2}Z_t^\perp,$$

et la valeur minimale est :

$$J(X_0^*, \alpha^*) = \mathbb{E} \left[ \int_0^T \left( Z_t^2 + (Z_t^\perp)^2 - (\rho Z_t + \sqrt{1 - \rho^2}Z_t^\perp)^2 \right) dt \right].$$

□

Ainsi, la couverture quadratique dans le cas particulier du forward-start se ramène au calcul des processus  $Z_t$  et  $Z_t^\perp$  à partir de la fonction caractéristique conditionnelle, puis à l'intégration dynamique de la stratégie  $\alpha_t^*$ .

### 9.3 APPLICATION AU FORWARD-START

Posons  $\tilde{u} = u - i/2$  et  $w(u) = \frac{k}{\pi} \frac{k^{-i\tilde{u}}}{u^2 + 1/4}$ . Soit  $M_t(\tilde{u}) = \Psi(\tilde{u}, t, T_1, T_2)$  la fonction caractéristique conditionnelle définie précédemment.

— **Cas**  $t \leq T_1$  :

$$\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_t] = 1 - \int_0^\infty \Re(w(u)M_t(\tilde{u})) du.$$

— **Cas**  $T_1 \leq t < T_2$  :

$$\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_t] = \frac{S_t}{S_{T_1}} - \int_0^\infty \Re(w(u)M_t(\tilde{u})) du.$$

## Calcul de $Z_t$ et $Z_t^\perp$

Appliquons la formule d'Itô à  $M_t(\tilde{u})$ .

**1. Si  $t \leq T_1$  :**

$$dE(\xi|\mathcal{F}_t) = - \int_0^\infty \operatorname{Re}(w(u) dM_t(\tilde{u})) du$$

et

$$M_t(\tilde{u}) = e^{\phi(T_2-T_1, \tilde{u})} \left( \frac{1}{1 - 2\psi(T_2 - T_1, \tilde{u})\bar{c}(T_1, t)} \right)^{\delta/2} \exp \left( \frac{\psi(T_2 - T_1, \tilde{u})\bar{c}(T_1, t)\bar{\kappa}(T_1, t)}{1 - 2\psi(T_2 - T_1, \tilde{u})\bar{c}(T_1, t)} \right),$$

avec  $\bar{c}(T_1, t) = \frac{\gamma^2}{4\kappa}(1 - e^{-\kappa(T_1-t)})$  et  $\bar{\kappa}(T_1, t) = \frac{4\kappa V_t e^{-\kappa(T_1-t)}}{\gamma^2(1 - e^{-\kappa(T_1-t)})}$ .

la partie martingale de  $dM_t(\tilde{u})$  est alors :

$$dM_t(\tilde{u})^* = C_{\text{deriv}} M_t(\tilde{u}) \gamma \sqrt{V_t} dW_t^1,$$

avec

$$C_{\text{deriv}} = \frac{4\kappa e^{-\kappa(T_1-t)}}{\gamma^2(1 - e^{-\kappa(T_1-t)})} \cdot \frac{\psi(T_2 - T_1, \tilde{u})\bar{c}(T_1, t)}{1 - 2\psi(T_2 - T_1, \tilde{u})\bar{c}(T_1, t)}.$$

On obtient :

$$Z_t = - \int_0^\infty \Re(w(u) C_{\text{deriv}} M_t(\tilde{u}) \gamma \sqrt{V_t}) du, \quad Z_t^\perp = 0.$$

**2. Si  $T_1 \leq t < T_2$  :**

$$dE(\xi|\mathcal{F}_t) = \frac{dS_t}{S_{T_1}} - \int_0^\infty \operatorname{Re}(w(u) dM_t(\tilde{u})) du$$

et

$$M_t(\tilde{u}) = e^{\phi(T_2-t, \tilde{u}) + \psi(T_2-t, \tilde{u})V_t + i\tilde{u} \ln(S_t/S_{T_1})}.$$

En appliquant Itô, la partie martingale est :

$$dM_t(\tilde{u})^* = M_t(\tilde{u})\sqrt{V_t} \left[ (\psi(T_2 - t, \tilde{u})\gamma + i\tilde{u}\rho) dW_t^1 + i\tilde{u}\sqrt{1 - \rho^2} dW_t^2 \right].$$

Alors :

$$Z_t = \frac{\rho S_t \sqrt{V_t}}{S_{T_1}} - \int_0^\infty \Re(w(u) M_t(\tilde{u}) \sqrt{V_t} (\psi(T_2 - t, \tilde{u})\gamma + i\tilde{u}\rho)) du,$$

$$Z_t^\perp = \frac{\sqrt{1 - \rho^2} S_t \sqrt{V_t}}{S_{T_1}} - \int_0^\infty \Re(w(u) i\tilde{u} \sqrt{V_t} M_t(\tilde{u}) \sqrt{1 - \rho^2}) du.$$

Finalement, la stratégie optimale de couverture quadratique du forward-start sous le modèle de Heston est :

$$\alpha_t^* = \rho Z_t + \sqrt{1 - \rho^2} Z_t^\perp.$$

La valeur du portefeuille optimal s'écrit :

$$X_t^* = X_0^* + \int_0^t \alpha_s^* dB_s,$$

avec  $X_0^* = \mathbb{E}[\xi]$  donné par :

$$X_0^* = 1 - \frac{k}{\pi} \int_0^\infty \Re \left( e^{-i(u-i/2) \log k} \frac{\Psi(u - i/2, 0, T_1, T_2)}{u^2 + 1/4} \right) du.$$

L'erreur quadratique minimale quant à lui s'écrit :

$$J(X_0^*, \alpha^*) = \mathbb{E} \left[ \int_0^T (Z_t^2 + (Z_t^\perp)^2) dt - \int_0^T (\alpha_t^*)^2 dt \right].$$

- Lorsque  $|\rho| = 1$ , on a  $Z_t^\perp = 0$  et  $\alpha_t^* = Z_t$  : le marché est complet, la couverture est parfaite.
- Pour  $|\rho| < 1$ , la stratégie fait intervenir à la fois  $Z_t$  et  $Z_t^\perp$ .

## 9.4 RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Les figures suivantes rassemblent l'évolution des prix simulés, des valeurs de portefeuille et des stratégies de couverture pour l'ensemble des cas étudiés, ainsi que les histogrammes des erreurs de réplication associées. Dans les configurations standards (cas 1–3), les schémas iV̂ et QE reproduisent fidèlement le prix analytique, tandis que la couverture demeure imparfaite comme attendu dans un marché incomplet, ce que confirment des distributions d'erreurs concentrées mais non nulles.

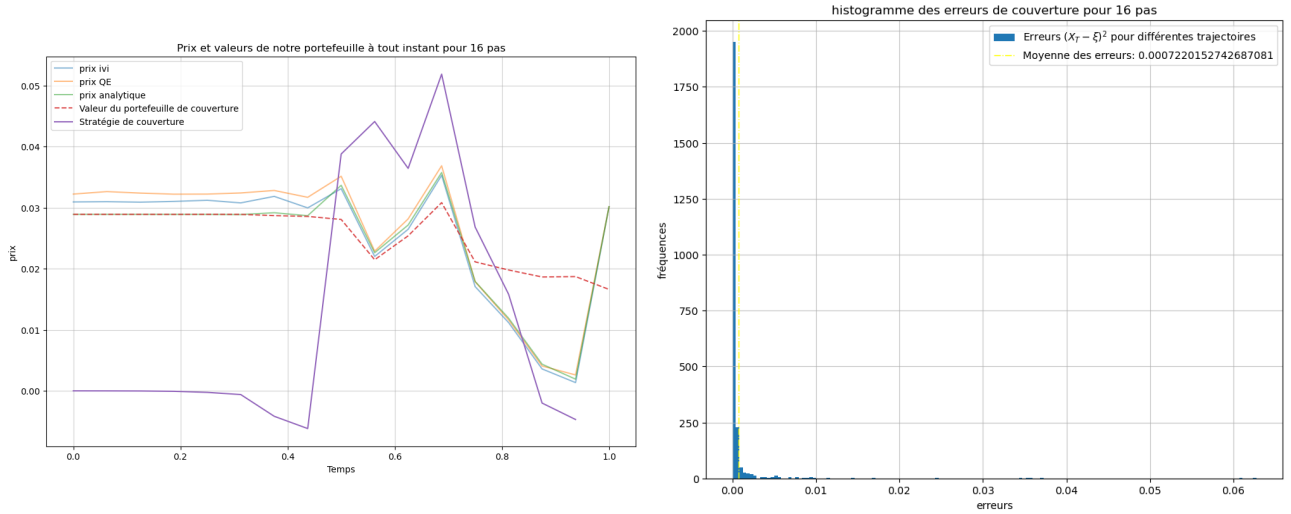


FIGURE 8 – Résultats de couverture et distributions des erreurs – Cas 1

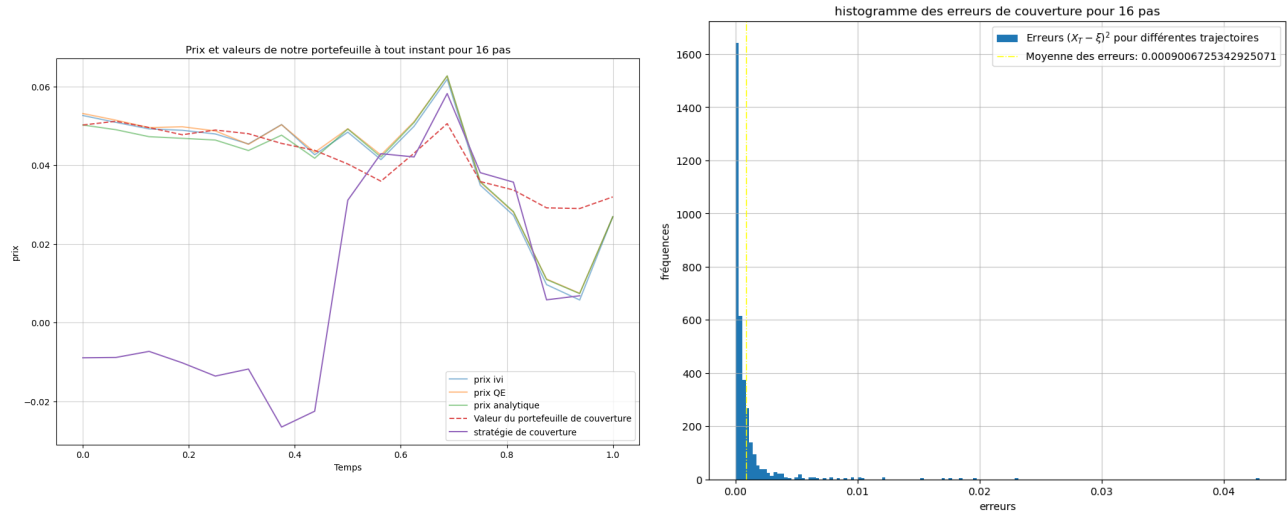


FIGURE 9 – Résultats de couverture et distributions des erreurs – Cas 2

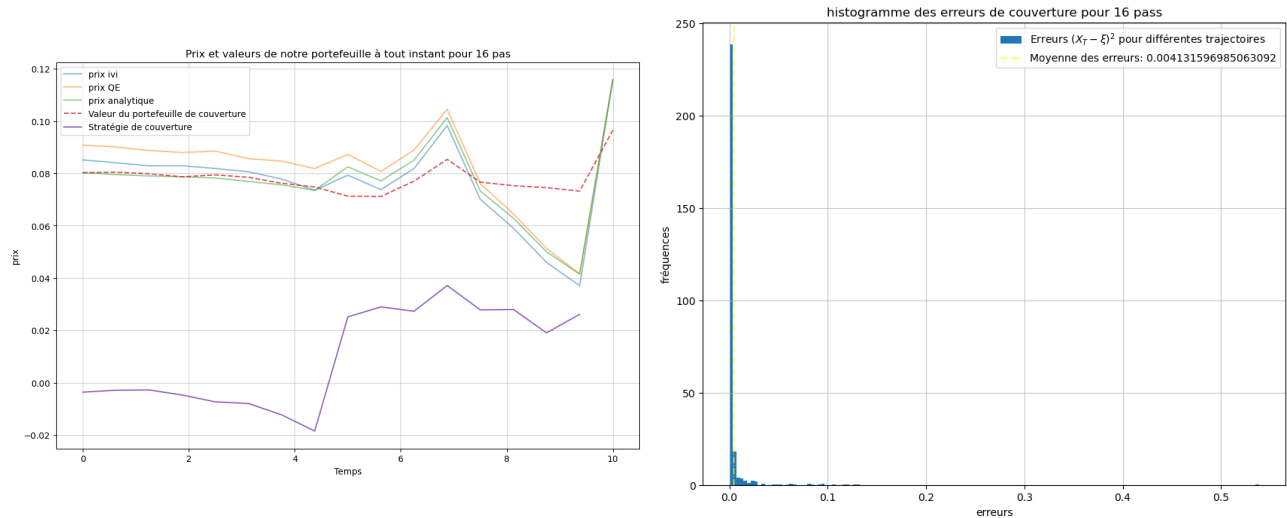


FIGURE 10 – Résultats de couverture et distributions des erreurs – Cas 3

Les cas 4 et 5, identiques au cas 1 mais avec  $\rho = -1$  et  $\rho = 1$ , illustrent la situation théorique de marché complet où les deux sources de risque sont parfaitement corrélées. Une réplcation exacte devrait alors être possible en temps continu. Les résultats numériques montrent effectivement une nette diminution des erreurs de couverture, celles-ci n'étant pas strictement nulles en raison de la discrétisation temporelle et des approximations propres aux schémas de simulation. L'ensemble des figures met ainsi en évidence, de manière cohérente, le rôle déterminant de la corrélation dans la qualité de la couverture sous le modèle de Heston.

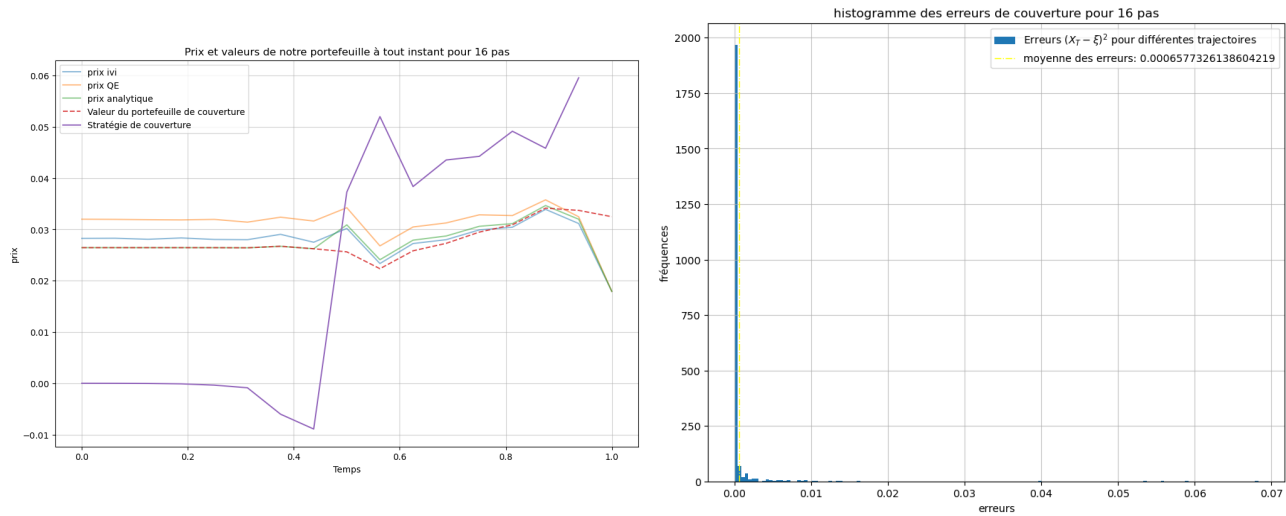


FIGURE 11 – Résultats de couverture et distributions des erreurs – Cas 4

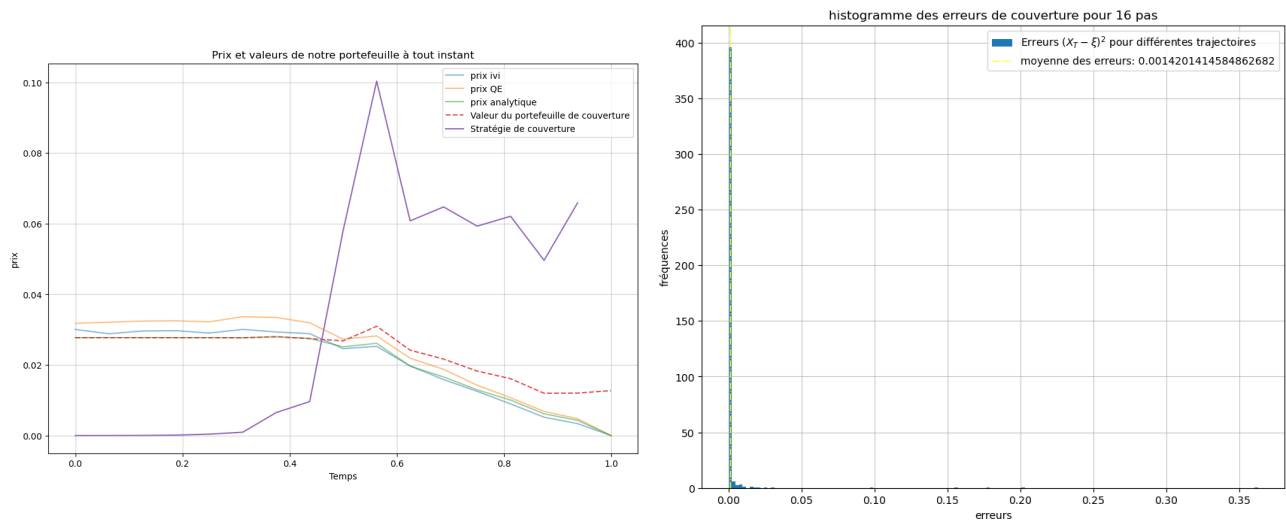


FIGURE 12 – Résultats de couverture et distributions des erreurs – Cas 5

## CONCLUSION

---

Nous avons étudié la valorisation et la couverture quadratique d'options forward-start dans le modèle de Heston. Une formule fermée du prix, obtenue via la fonction caractéristique conditionnelle et une inversion de Fourier, nous a permis de disposer d'une référence analytique indépendante de toute méthode de simulation.

La comparaison des schémas QE et iVi montre que le schéma iVi offre une précision nettement supérieure, en particulier dans les régimes extrêmes où la variance est très volatile : même avec très peu de pas de temps, il reproduit fidèlement les prix et la volatilité implicite issus de la méthode de Fourier.

L'application de la couverture quadratique met en évidence l'incomplétude structurelle du modèle lorsque  $|\rho| < 1$ . La stratégie optimale, exprimée en fonction des processus  $Z_t$  et  $Z_t^\perp$ , montre que la qualité de la réplication dépend fortement de la corrélation, devenant presque parfaite lorsque  $|\rho| = 1$ .

Ces résultats soulignent l'intérêt du schéma iVi pour les produits sensibles à la variance intégrée, ainsi que la pertinence de l'approche analytique et de la couverture quadratique pour comprendre la dynamique des options forward-start dans le modèle de Heston.

## RÉFÉRENCES

---

- [1] Eduardo Abi Jaber. *Simulation of square-root processes made simple : applications to the Heston model*. Ecole Polytechnique, CMAP, June 2025.
- [2] Henrik Sandler. *Forward start options in the Heston model*. Master's thesis, Lund University, August 2021.