线性规划

1. 线性规划模型

2. 标准型

3. 图解法

4. 解的概念和性质

5. 单纯形算法

一. 线性规划模型

例 1 生产计划问题

某工厂利用某种原材料 生产*A*、*B*、*C*三种产品，它们的单位产品所需材料的数量和 耗费的加工时间各不相 同，如下表。*A*、*B*、*C*单位产品的利润为 4、5、7千元。问：该厂应如何 安排生产计划，才能使所获 利润最大？

资源 \ 产品	*A*	*B*	*C*	资源总量
原材料	2	1.5	3	100
工时	1	2	2	150

解：1. 确定决策变量

设 A、B、C 的产量分别为 x_1、x_2、x_3。

2. 确定目标函数

设总利润为 S，则

$$S = 4x_1 + 5x_2 + 7x_3$$

3. 确定约束条件

$$2x_1 + 1.5x_2 + 3x_3 \le 100$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 150$$
$$x_i \ge 0, i = 1,2,3$$

4. 数学模型 $\max \quad S = 4x_1 + 5x_2 + 7x_3$

$$s.t. \begin{cases} 2x_1 + 1.5x_2 + 3x_3 \le 100 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 150 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

线性规划模型：

(1)一组决策变量；

(2)一个线性目标函数；

(3)一组线性的约束条件。

线性规划模型 (LP)的一般形式：

$$\min(\max)\ \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$s.t.\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq (=,\leq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq (=,\leq) b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq (=,\leq) b_m \\ x_i \geq (\leq) 0, i = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

二. 标准型

1. 标准型

$$\max \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$s.t. \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

记 $c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T, b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T, x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $A = (a_{ij})_{m\times n}$。则线性规划标准型可 记为

$$\max \quad c^T x$$

$$s.t. \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

2. 化标准型

(1) 目标函数:

原问题目标函数: $\min \quad c^T x \quad \Rightarrow \max \quad -c^T x$

(2) 约束条件:

(i) 原问题条件: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i \\ x_{n+i} \ge 0 \end{cases}$$

x_{n+i} 称为松弛变量。

(ii) 原问题条件: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \ge b_i$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i \\ x_{n+i} \ge 0 \end{cases}$$

x_{n+i} 称为剩余变量。

(iii) 原问题: x_i无非负约束，则令 $\begin{cases} x_i = u_i - v_i \\ u_i, v_i \ge 0 \end{cases}$。

例1 将下述线性规划模型化 为标准型。

$$\min \quad 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 7 \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 \leq 6 \\ x_1, x_3, x_4 \geq 0, x_2\text{无约束} \end{cases}$$

解： 令$x_2 = u_2 - v_2$,则

$$\max \quad -2x_1 + 3u_2 - 3v_2 - x_3 - 3x_4$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 - u_2 + v_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2u_2 - 2v_2 + 2x_4 = 7 \\ -x_1 + 4u_2 - 4v_2 - 3x_3 - x_4 + x_7 = 6 \\ x_1, x_3, x_4, x_5, x_7, u_2, v_2 \geq 0 \end{cases}$$

三.图解法

例 2 求解线性规划 $\max \quad z = 4x_1 + 3x_2$

$$s.t. \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

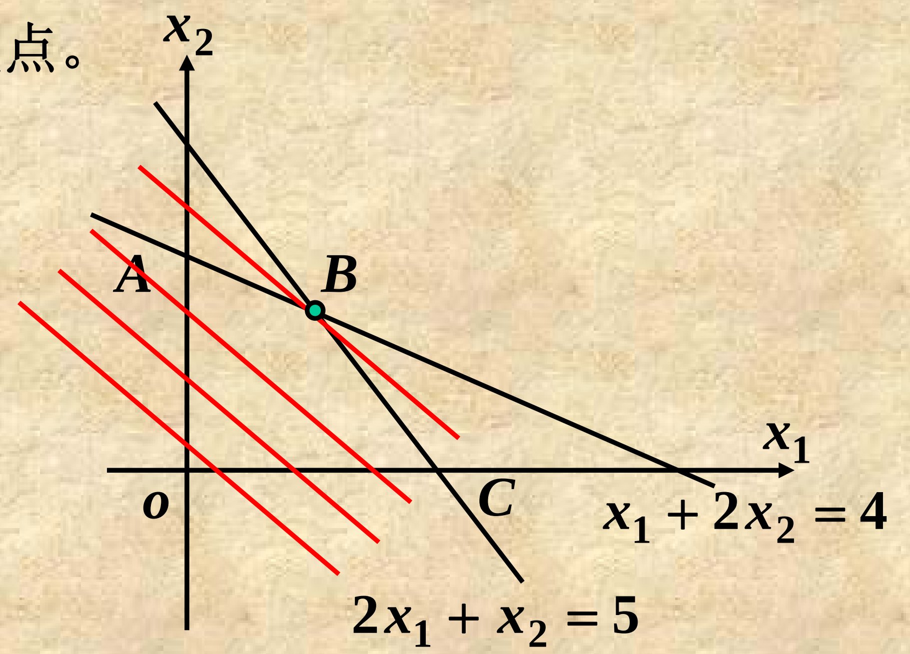
解: (1) 画出可行解的范围   。

(2) 利用等值线平移的方法 求极值点。

以 z 为参数，则方程 $4x_1 + 3x_2 = z$

表示一族等值平行线。

$\therefore$ 极大值点为顶点 B。

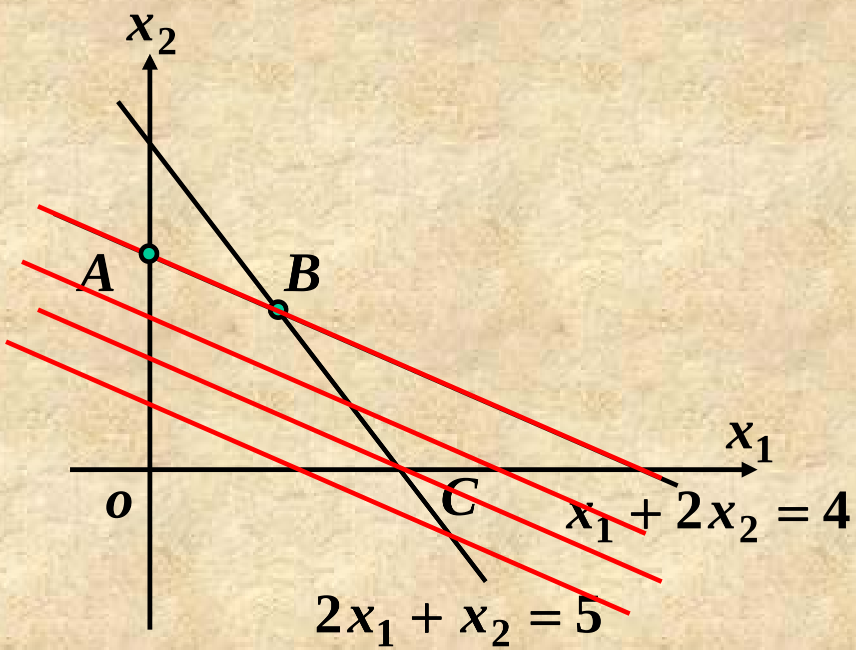


例 3 将例 2中的目标函数改为 $z = x_1 + 2x_2$。

解：分析同例 2。

等值线：$x_1 + 2x_2 = z$。

$\therefore$极大值点为线段 $\overline{AB}$ 上的任一点。

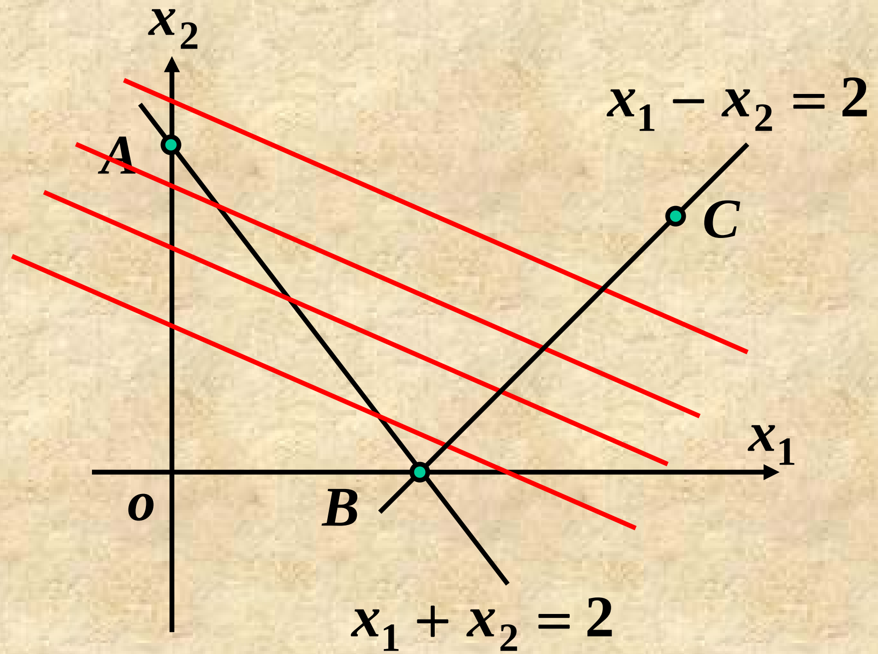


例 4 求解线性规划 $\max \quad z = 4x_1 + 3x_2$

$$s.t. \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解：分析同例 2。

等值线：$4x_1 + 3x_2 = z$。



$\therefore$ 不存在最大值。

结果：

$$\text{线性规划问题的解} \Rightarrow \begin{cases} \text{有最优解} \Rightarrow \begin{cases} \text{在顶点取到唯一最优解} \\ \text{有无穷多最优解} \end{cases} \\ \text{无最优解} \Rightarrow \begin{cases} \text{解无界} \\ \text{可行域为空集} \end{cases} \end{cases}$$

对一般的线性规划问题，是否在顶点中存在最优解？

四. 线性规划解的概念和性　质

1. 线性规划解的概念

$$(LP) \qquad \max \quad z = c^T x \qquad (1)$$

$$s.t. \begin{cases} Ax = b & (2) \\ x \geq 0 & (3) \end{cases}$$

可行解：满足（2）、（3）式的解 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 称为 (LP)的可行解。

可行域：$D = \{ x | Ax = b, x \geq 0 \}$。

定理　线性规划问题的可行域 D是凸集。

证明：　任取 $x_1, x_2 \in D, 0 \leq \lambda \leq 1$。

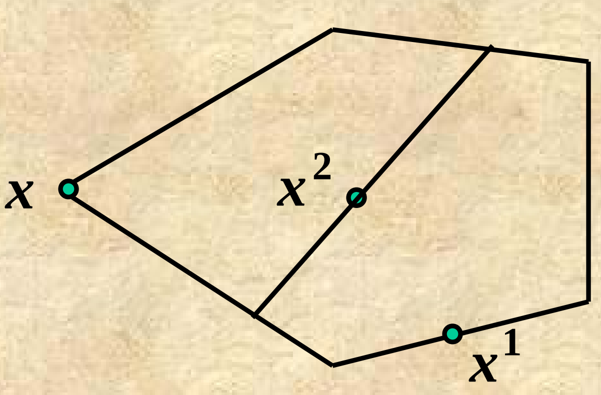
$$A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda A x_1 + (1-\lambda)A x_2$$

$$= \lambda b + (1-\lambda)b$$

$$= b$$

所以$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in D$。即$D$是凸集。

顶点:设S为凸集，$x \in S$。如果不存在$x^{(1)} \neq x^{(2)} \in S$,及$0 < \lambda < 1$。使$x = \lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}$,则称$x$为$S$的一个顶点。



基：设 A 为 $m\times n$ 的系数矩阵，秩为 m。若 B 为 A 中 $m\times m$ 阶的非退化子阵，则称 B 为 A 的(或 (LP) 问题)一个基。

设基 $B=(P_{i1},P_{i2},\cdots,P_{im})$，称 $P_{ij}\ (j=1,\cdots,m)$ 为基向量，称 P_{ij} 对应的变量 $x_j\ (j=1,\cdots,m)$ 为基变量，不是基变量 的变量称为非基变量。

已知 $r(A_{m\times n})=m$，不妨设 A 的前 m 列向量线性无关，则可 取 $B=(P_1,P_2,\cdots,P_m)$ 为基，则 $x_1,\cdots,x_m$ 为基变量。

因为 $$Ax=b$$

即 $$P_1x_1+\cdots+P_mx_m+P_{m+1}x_m+\cdots+P_nx_n=b$$

所以 $$P_1x_1+\cdots+P_mx_m=b-P_{m+1}x_m-\cdots-P_nx_n$$

令非基变量 $x_{m+1}=\cdots=x_n=0$,解得

$$(x_1,\cdots,x_m)^T=B^{-1}b$$

基本解:取定线性规划问题的基 B，令非基变量取零，求 得基变量的取值 $B^{-1}b$,称解 $(B^{-1}b,0)^T$ 为对应于基 B的基本解。

基本可行解：满足条件 (3)的基本解称为基本可行 解。

例 给定 (LP)问题

$$\max \quad z=x_1+2x_2-x_3+2x_4$$

$$s.t.\quad \begin{cases} x_1-2x_2-x_3+4x_4=8 \\ 2x_1+2x_2-2x_3-x_4=2 \\ x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0 \end{cases}$$

求此问题的一个基本解 和一个基本可行解。

解： 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 4\\ 2 & 2 & -2 & -1\end{pmatrix}$。

取 $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$，则令非基变量 $x_3=x_4=0$，得

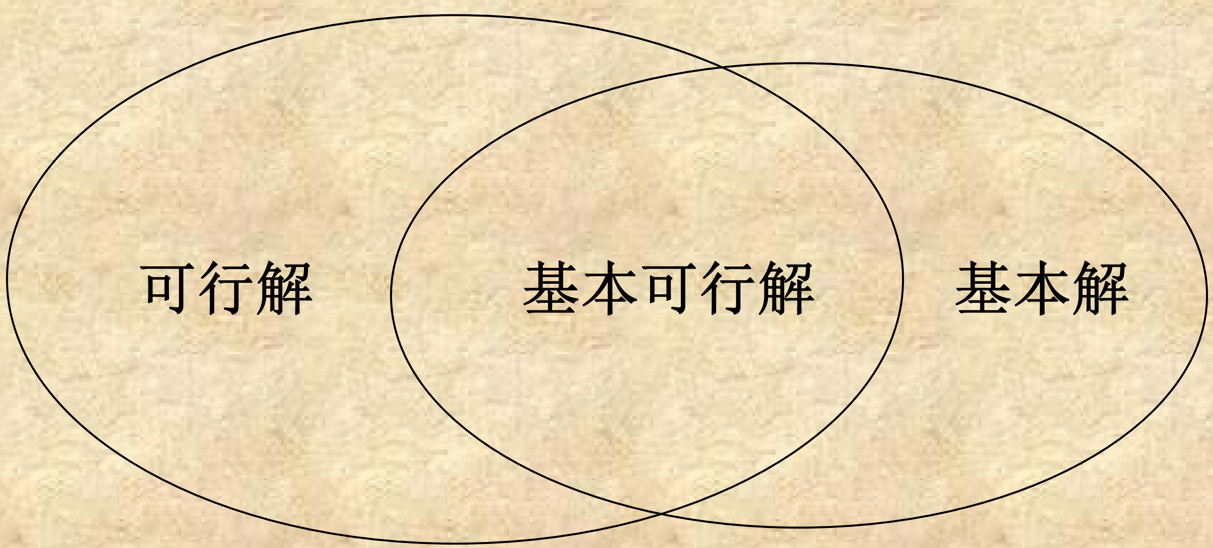
$$\begin{cases}x_1-2x_2=8\\ 2x_1+2x_2=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=\dfrac{10}{3}\\ x_2=-\dfrac{7}{3}\end{cases}$$

$\therefore x^{(1)}=(\dfrac{10}{3},\dfrac{-7}{3},0,0)^T$ 是基本解，但不是基本 可行解。

取 $B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}$，则令非基变量 $x_2=x_3=0$，得

$$\begin{cases}x_1+4x_4=8\\ 2x_1-x_4=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=\dfrac{16}{9}\\ x_4=\dfrac{14}{9}\end{cases}$$

$\therefore x^{(2)}=(\dfrac{16}{9},0,0,\dfrac{14}{9})^T$ 是基本可行解。



基本解数量 $\leq C_n^m$

是否在基本可行解中一定存在最优解？

2. 线性规划解的性质

定理 线性规划问题 (LP)的解 x 是基本可行解的充分必 要条件是 x 是可行域 D 的顶点。

定理 线性规划问题 (LP) 如果有可行解，则必有 基本可行解。

定理 线性规划问题 (LP) 如果有最优解，则必有 最优的基本可行解。

五. 单纯形算法

1. 算法思路**:** 从一个基本可行解开始 ，判断其是否为最优解 。是则算法结束。不是， 则转换到另一个更好的 基本可行解，直到找到最优解，或者 判断出不存在最优解。

问题**:**

(1) 如何得到第一个基本可 行解？

(2) 最优解的判定法则？

(3) 如何从一个基本可行解 变换到另一个基本可行 解？

2. 单纯形算法分析

例1 求解线性规划问题 (LP) $\max \quad Z=4x_1+3x_2$

$$s.t. \quad \begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4 \\ 2x_1+x_2+x_4=5 \\ x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0 \end{cases}$$

解： 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

令基 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,则基变量为 x_3和 x_4 ,非基变量为 x_1和 x_2 。

$$\therefore \begin{cases} x_3=4-x_1-2x_2 \\ x_4=5-2x_1-x_2 \end{cases}$$

代入目标函数得 $\quad z=0+4x_1+3x_2$

令 $x_1 = x_2 = 0$,则 $\begin{cases} x_3 = 4 \\ x_4 = 5 \end{cases}$

$\therefore$ 基本可行解 $x^{(1)} = (0,0,4,5)^T$。目标函数值 $z^{(1)} = 0$。

是否为最优解？ 利用目标函数分析。

$$\because \quad z = 0 + 4x_1 + 3x_2$$

目标函数中非基变量 x_1 和 x_2 的系数为正数，因此若 x_1 和 x_2 的取值可以增大为正数， 则目标函数值就可以增 大。

固定 x_2 不变，考察 x_1 是否可以增大?

$$\because \quad \begin{cases} x_3 = 4 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 5 - 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 4 - x_1 \\ x_4 = 5 - 2x_1 \end{cases}$$

$$\because \begin{cases} x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq 4 \\ x_1 \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad x_1 \leq \frac{5}{2}$$

且$x_1 = \frac{5}{2}$时，$x_4 = 0$。即x_1变为基变量，x_4变为非基变量。

$$\begin{cases} x_3 = 4 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 5 - 2x_1 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

$$\therefore \ z = 10 + x_2 - 2x_4$$

令$x_2 = x_4 = 0$,则$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} \\ x_3 = \frac{3}{2} \end{cases}$

$\therefore$ 基本可行解 $x^{(2)}=(\frac{5}{2},0,\frac{3}{2},0)^T$。目标函数值 $z^{(2)}=10$。

$$\because \quad z=10+x_2-2x_4$$

因为x_2的系数为正，考察能否 增大 x_2。固定 x_4，则

$$\begin{cases} x_3=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_4 \\ x_1=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x_2 \\ x_1=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}x_2 \end{cases} \Rightarrow x_2\le 1$$

且 $x_2=1$时，$x_3=0$。即 x_2变为基变量， x_3变为非基变量。

$$\therefore \begin{cases} x_2=1-\frac{2}{3}x_3+\frac{1}{3}x_4 \\ x_1=2+\frac{1}{3}x_3-\frac{2}{3}x_4 \end{cases} \Rightarrow \quad z=11-\frac{2}{3}x_3-\frac{5}{3}x_4$$

令 $x_3 = x_4 = 0$,则 $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

$\therefore$ 基本可行解 $x^{(3)} = (2,1,0,0)^T$。目标函数值 $z^{(3)} = 11$。

因为目标函数 $z = 11 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4$,其中 x_3 和 x_4 的系数皆为负数,所以目标函数值不能再 增大,所以最优解为

$x^* = x^{(3)} = (2,1,0,0)^T$, 最优的目标函数值为 $z^* = z^{(3)} = 11$。

(1) 最优解的判定条件

$$(LP) \quad \max \quad z=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \\ x_i\geq 0, i=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

设经过迭代后有

$$\begin{cases} x_1=b_1'-\sum_{j=m+1}^{n} a_{1j}' x_j \\ \vdots \\ x_m=b_m'-\sum_{j=m+1}^{n} a_{mj}' x_j \end{cases} \qquad (1)$$

则 $x_1,\cdots,x_m$ 为基变量，$x_{m+1},\cdots,x_n$ 为非基变量。

代入目标函数得

$$\max \quad z=\sum_{i=1}^{m}c_i(b_i^{'}-\sum_{j=m+1}^{n}a_{ij}^{'}x_j)+\sum_{i=m+1}^{n}c_ix_i$$

$$=\sum_{i=1}^{m}c_ib_i^{'}-\sum_{i=1}^{m}c_i(\sum_{j=m+1}^{n}a_{ij}^{'}x_j)+\sum_{j=m+1}^{n}c_jx_j$$

$$=\sum_{i=1}^{m}c_ib_i^{'}-\sum_{j=m+1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}^{'})x_j+\sum_{j=m+1}^{n}c_jx_j$$

$$=\sum_{i=1}^{m}c_ib_i^{'}+\sum_{j=m+1}^{n}(c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}^{'})x_j$$

令 $z_0=\sum_{i=1}^{m}c_ib_i^{'}$, $\sigma_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}^{'}$。则有

$$z=z_0+\sum_{j=m+1}^{n}\sigma_jx_j \qquad (2)$$

称 $\sigma_j\,(j=m+1,\cdots,n)$ 为检验数。

定理 若 $x^* = (b_1^*, \cdots, b_m^*, 0, \cdots, 0)^T$ 是对应于基 B 的一个基本可行解。且对任意的 $m+1 \le j \le n$，有 $\sigma_j \le 0$，则 x^* 是最优解。

证明：由（2）式 $z = z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} \sigma_j x_j$ 分析可证。

定理 设 $x^* = (b_1^*, \cdots, b_m^*, 0, \cdots, 0)^T$ 是对应于基 B 的一个基本可行解。如果对任意的 $m+1 \le j \le n$，有 $\sigma_j \le 0$，且存在 $\sigma_{m+k} = 0 (k \ge 0)$，则线性规划问题有无穷多 最优解。

定理 设 $x^* = (b_1^*, \cdots, b_m^*, 0, \cdots, 0)^T$ 是对应于基 B 的一个基本可行解。如果存在 $\sigma_{m+k} > 0 (1 \le k \le n-m)$，且对任意的 $i = 1, \cdots, m$，（1）式中 $a'_{i,m+k} \le 0$，则原线性规划问题的解 无界。

证明：由（1）式
$$\begin{cases} x_1 = b_1' - \sum\limits_{j=m+1}^{n} a_{1j}' x_j \\ \quad\vdots \\ x_m = b_m' - \sum\limits_{j=m+1}^{n} a_{mj}' x_j \end{cases}$$

对任意的$m+1 \le j \le n$且$j \ne m+k$,固定$x_j = 0$，则有

$$\begin{cases} x_1 = b_1' - a_{1,m+k}' x_{m+k} \\ \quad\vdots \\ x_m = b_m' - a_{m,m+k}' x_{m+k} \end{cases}$$

因为$a_{i,m+k}' \le 0 (i = 1, \cdots, m)$,所以令$\overline{x_{m+k}} = M$,则

$$\overline{x_i} = b_i' - a_{i,m+k}' \overline{x_{m+k}} \ge 0 \ (i = 1, \cdots, m)$$

所以$\overline{x} = (\overline{x_1}, \cdots, \overline{x_m}, 0, \cdots, M, 0, \cdots, 0)^T$ 仍为可行解。

所以 $z(\overline{x}) = z_0 + M\sigma_{m+k}$。

因为$\sigma_{m+k} > 0$,所以

$$z(\overline{x}) = z_0 + M\sigma_{m+k} \to +\infty \ (M \to +\infty)$$

即线性规划的解无界。

(2) 基变换

入基变量：可选取最大的 σ_j 对应的变量，即若

$\max\limits_j \{\sigma_j \mid \sigma_j > 0\} = \sigma_k$,则选取 x_k 为入基变量。

也可任选 $\sigma_j > 0$ 对应的 x_j 为入基变量。

离基变量: 设入基变量为 x_k ,则由（1）式计算

$$\theta = \min\{\frac{b_i'}{a_{i,k}'} \mid a_{i,k}' > 0\} \triangleq \frac{b_l'}{a_{l,k}'}$$

选取 x_l 为离基变量。

3.单纯形表和单纯形算法

给定线性规划问题（ LP），不妨设 $x_1,\cdots,x_m$ 为基变量，且其约束条件已改写为如下 形式:

$$(LP)\quad \max \quad z = z_0 + \sum_{i=m+1}^{n} \sigma_i x_i$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_i \geq 0, i = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

单纯形表：

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} x_1 & x_2 & & x_m & x_{m+1} & & x_n & b \end{matrix} \\
\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ \\ \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_{m+1} & \cdots & \sigma_n & -z_0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

单纯形表的结构：

（1）包含一个单位子矩阵 作为基矩阵，它所对应 的变量为基变量；

（2）最后一行称为检验数 行，其中基变量的检验 数为零；

（3）最后一列的元素对应 当前基变量的取值；

（4）第 $m+1$ 行、$n+1$ 列的元素表示当前基本 可行解对应的目标函数值的相反数。

单纯形算法步骤:

(1) 确定初始基本可行解， 建立初始单纯形表。

(2) 检验各非基变量的检验 数。如果 $\sigma_j \le 0 (j = m+1, \cdots, n)$，则当前的基本可行解就 是最优解，算法结束； 否则转（3）。

（3）如果存在 $\sigma_k > 0$ 使得其对应的变量 x_k 的系数列向量 $P_k \le 0$，则线性规划问题的解无 界，算法结束；否则转 （4）。

(4) 设 $\max(\sigma_j > 0) = \sigma_k$，选取 x_k 为入基变量。计算

$$\theta = \min\{\frac{b_i}{a_{ik}} \mid a_{ik} > 0\} \triangleq \frac{b_l}{a_{lk}}$$

选取 x_l 为离基变量。转（ 5）。

（5）以 a_{lk} 为主元旋转。即利用行 变换将第 k 个系数列向量变换为 $a_{lk} = 1$，其它元素为 0的列。

例2 求解线性规划问题（LP）

$$\max \quad Z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

$$s.t. \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \le 6 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \le 8 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解：化标准型：

$$\max \quad Z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

$$s.t. \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

第一次迭代：

初始单纯形表：

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_4 \\ x_5 \\ \\ \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & \boxed{1} & 0 & 1 & 8 \\ \underline{2} & -1 & \underline{1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\therefore$ 基变量 x_4, x_5。

基本可行解 $x^{(1)} = (0,0,0,6,8)^T$，

目标函数值 $z^{(1)} = 0$。

$\because \sigma_1$、$\sigma_3 > 0$

$\therefore x^{(1)}$不是最优解。

取 x_3 为入基变量，则 $\theta = \dfrac{8}{1} = 8$。

$\therefore$ 取 x_5 为离基变量。

以 a_{23} 为主元进行旋转。

第二次迭代：

单纯形表：

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\
\hline
x_4 & 5 & 1 & 0 & 1 & 1 & 14 \\
x_3 & 4 & -2 & \boxed{1} & 0 & 1 & 8 \\
 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -8
\end{array}
$$

$\therefore$ 基变量 x_3, x_4。

基本可行解 $x^{(2)} = (0,0,8,14,0)^T$，

目标函数值 $z^{(2)} = 8$。

$\because \sigma_2 > 0$

$\therefore x^{(2)}$不是最优解。

取 x_2 为入基变量，则 $\theta = \dfrac{14}{1} = 14$。

$\therefore$ 取 x_4 为离基变量。

以 a_{12} 为主元进行旋转。

第三次迭代：

单纯形表：

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\ \begin{array}{c} x_2 \\ x_3 \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 1 & 1 & 14 \\ 14 & 0 & 1 & 2 & 3 & 36 \\ -7 & 0 & 0 & -1 & -2 & -22 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\therefore$ 基变量 x_2, x_3。

基本可行解 $x^{(3)} = (0, 14, 36, 0, 0)^T$，

目标函数值 $z^{(3)} = 22$。

$\because \sigma_i \leq 0, i = 1, \cdots, 5$。

$\therefore x^{(3)}$ 即为最优解。最优目标 函数值为 $z^{(3)} = 22$。

例3 已知某线性规划问题在用单纯型算法计算过程中所得的单纯型表如下:

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}
0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\
1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 8 \\
0 & 8 & 0 & 4 & 1 & 16 \\
0 & 4 & 0 & 5 & 0 & -28
\end{bmatrix}
$$

（1） 确定当前的基变量，基本可行解，并判断其是否为最优解？

（2）如果不是最优解，请继续求解得到最优解。

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\
1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 8 \\
0 & 8 & 0 & 4 & 1 & 16 \\
0 & 4 & 0 & 5 & 0 & -28
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

解：　（1）

基变量：x_1, x_3, x_5 。

基本可行解：$x = (8,0,2,0,16)^T$ 。

因为检验数 $\sigma_2 = 4 > 0, \sigma_4 = 5 > 0$ ，所以 x 不是最优解。

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 & 4 & 1 & 16 \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 0 & -28 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & -6 & -5 & 0 & 0 & -38 \end{bmatrix}$$

(2)

选择 x_4 为入基变量，则因为 $\min\{\frac{2}{1},\frac{8}{2},\frac{16}{4}\}=\frac{2}{1}$ ，

所以 x_3 为离基变量。

以 a_{14} 为主元旋转。

因为所有检验数均非正，所以得最优基本可行解

$$x^* = (4,0,0,2,8)^T$$

4. 初始基本可行解的计算

大 M 法

$$(LP)\quad \max\quad z=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i$$

$$s.t.\ \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\\ x_i\ge 0, i=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

对每个约束条件增加一个人工变量，得新线性规划问题

$$(LP')\quad \max\quad z=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i-Mx_{n+1}-\cdots-Mx_{n+m}$$

$$s.t.\ \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2\\ \cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m\\ x_i\ge 0, i=1,2,\cdots,n+m \end{cases}$$

其中 M 为充分大的正数。

则在（LP'）问题中可以取 $x_{n+1},\cdots,x_{n+m}$ 为初始的基变量。

结论：如果（ LP'）问题存在最优解，则 最优的基本可行解的基变量中必不包含人工 变量，则此最优解也是 原（LP）问题的最优解。

例 3 求解线性规划问题 (LP)

$$
\max \quad Z = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3
$$

$$
s.t. \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 4x_2 - x_3 = 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}
$$

解：（LP'） $\max\quad Z=2x_1+3x_2-2x_3-Mx_4$

$$s.t.\quad\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=4\\4x_2-x_3+x_4=2\\x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0\end{cases}$$

第一次迭代：

初始单纯形表：

$$\begin{array}{ccccc}x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b\end{array}$$
$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 0 & 4\\0 & 4 & -1 & 1 & 2\\2 & 3 & -2 & -M & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc}x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b\end{array}\\ \begin{array}{c}x_1\\x_4\\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 0 & 4\\0 & 4 & -1 & 1 & 2\\0 & 4M-1 & -6-M & 0 & 2M-8\end{bmatrix}\end{array}$$

$\therefore$基变量x_1,x_4。

基本可行解 $x^{(1)}=(4,0,0,2)^T$,目标函数值 $z^{(1)}=8-2M$。

$\because \sigma_2 > 0 \quad \therefore x^{(1)}$不是最优解。

取 x_2 为入基变量，则 $\theta = \min\{\frac{4}{2}, \frac{2}{4}\} = \frac{1}{2}$。

$\therefore$ 取 x_4 为离基变量。

以a_{22}为主元进行旋转。

第二次迭代:

$$
\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} & 3 \\
0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & \frac{-25}{4} & \frac{1}{4} - M & -\frac{15}{2}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$\therefore$ 基变量 x_1, x_2。

基本可行解 $x^{(2)} = (3, \frac{1}{2}, 0, 0)^T$，

目标函数值 $z^{(2)} = \frac{15}{2}$。

$\because \sigma_i \le 0, i = 1, \cdots, 4$。

$\therefore x^{(2)}$即为最优解。最优目标　函数值为 $z^{(2)} = \frac{15}{2}$。