

# 约束极值问题的最优性条件

一.约束极值问题

二.最优性条件

## 一.约束极值问题

$$\min f(x)$$

$$s.t. \quad \begin{cases} h_i(x) = 0 & i = 1, 2, \dots, m \\ g_j(x) \geq 0 & j = 1, 2, \dots, l \end{cases}$$

$$\text{记 } h(x) = (h_1(x), h_2(x), \dots, h_m(x))^T,$$

$$g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_l(x))^T,$$

$$\text{则约束极值问题可记为 } \min f(x)$$

$$s.t. \quad \begin{cases} h(x) = 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

令  $Q = \{x | h(x) = 0, g(x) \geq 0\}$ , 称  $Q$  为此约束极值问题的可行域。

$$\because h_i(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h_i(x) \geq 0 \\ -h_i(x) \geq 0 \end{cases}$$

$\therefore$  约束极值问题也可记为

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & g(x) \geq 0 \end{array}$$

## 二.最优性条件

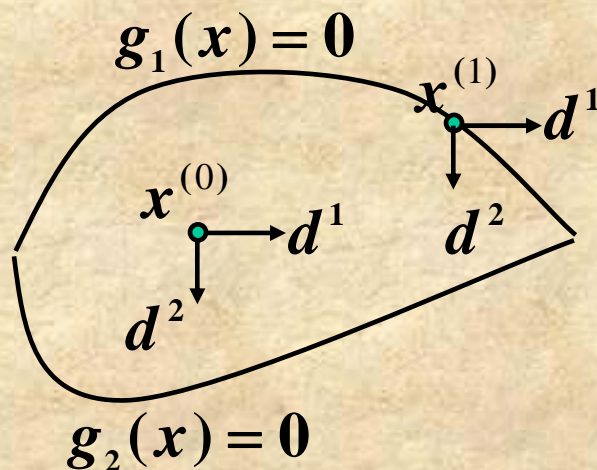
$$\min f(x) \quad (1)$$

$$s.t. \quad g(x) \geq 0$$

可行域为  $Q = \{x | g(x) \geq 0\}$ 。

### 1.可行方向和积极约束

可行方向：设  $x^{(0)} \in Q$ ,  $d$  为一个向量。如果存在 实数  $\bar{\lambda} > 0$ , 使得对任意的  $\lambda \in [0, \bar{\lambda}]$  有  $x^{(0)} + \lambda d \in Q$ , 则称  $d$  为  $x^{(0)}$  处的一个可行方向。



积极约束: 设点  $\bar{x} \in Q$ , 对于不等式约束  $g_i(x) \geq 0$ , 如果  $g_i(\bar{x}) = 0$ , 则称  $g_i(x) \geq 0$  是点  $\bar{x}$  处的积极约束。

记  $I(\bar{x}) = \{i | g_i(\bar{x}) = 0, 1 \leq i \leq l\}$ , 称  $I(\bar{x})$  为点  $\bar{x}$  处的积极约束指标集。

例1 设  $g_1(x) = x_2 - \sqrt{2}x_1^2 \geq 0, g_2(x) = 1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0,$

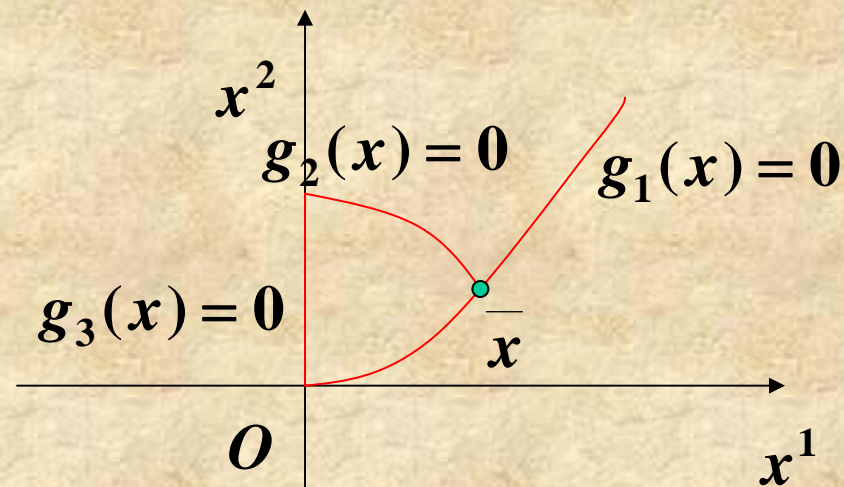
$g_3(x) = x_1 \geq 0$ 。令  $\bar{x} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$ , 求点  $\bar{x}$  的积极约束指标集。

解:  $\because g_1(\bar{x}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 0,$

$$g_2(\bar{x}) = 1 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 0,$$

$$g_3(\bar{x}) = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0。$$

$$\therefore I(\bar{x}) = \{1, 2\}。$$



如何判断一个向量是否 是可行方向?

定理1 给定点  $\bar{x} \in Q$ , 记点  $\bar{x}$  的积极约束指标集为  $I(\bar{x})$ 。给定向量  $d$ , 如果对任意的  $i \in I(\bar{x})$  有  $\nabla g_i(\bar{x})^T d > 0$ , 则  $d$  是点  $\bar{x}$  的可行方向。

证明：令  $x' = \bar{x} + td, t > 0$ 。则对任意的  $i \in I(\bar{x})$ , 有

$$g_i(x') = g_i(\bar{x}) + t \nabla g_i(\bar{x})^T d + o(\|td\|^2)$$

$$= t \nabla g_i(\bar{x})^T d + o(\|td\|^2)$$

$$> 0$$

$\therefore x' \in Q$ , 即  $d$  为可行方向。

可行下降方向：设点  $\bar{x} \in Q$ , 给定向量  $d$ , 如果  $d$  既是点  $\bar{x}$  处的可行方向, 又是该点的下降方向, 则称  $d$  为点  $\bar{x}$  处的可行下降方向。

定理 2 给定点  $\bar{x} \in Q$ , 记点  $\bar{x}$  的积极约束指标集为  $I(\bar{x})$ 。给定向量  $d$ , 如果  $d$  满足

$$\begin{cases} \nabla g_i(\bar{x})^T d > 0 & i \in I(\bar{x}) \\ \nabla f(\bar{x})^T d < 0 \end{cases}$$

则向量  $d$  是点  $\bar{x}$  处的可行下降方向。

极值点的必要条件:

定理 3 设  $x^* \in Q, I(x^*)$  是其积极约束指标集。  $f(x)$  和  $g_i(x)$  ( $i \in I(x^*)$ ) 在点  $x^*$  处可微,  $g_i(x)$  ( $i \notin I(x^*)$ ) 在点  $x^*$  处连续。如果  $x^*$  是约束极值问题 (1) 的局部极小点, 则在点  $x^*$  处没有可行下降方向。

## 2. $K-T$ 条件（库恩－塔克条件）

设点  $x^*$  是约束极值问题 (1) 的局部极小点， $I(x^*)$  是其积极约束指标集。

则由定理 2 可知，不存在向量  $d$ ，使下式成立

$$\begin{cases} \nabla g_i(x^*)^T d > 0 & i \in I(x^*) \\ \nabla f(x^*)^T d < 0 \end{cases}。$$

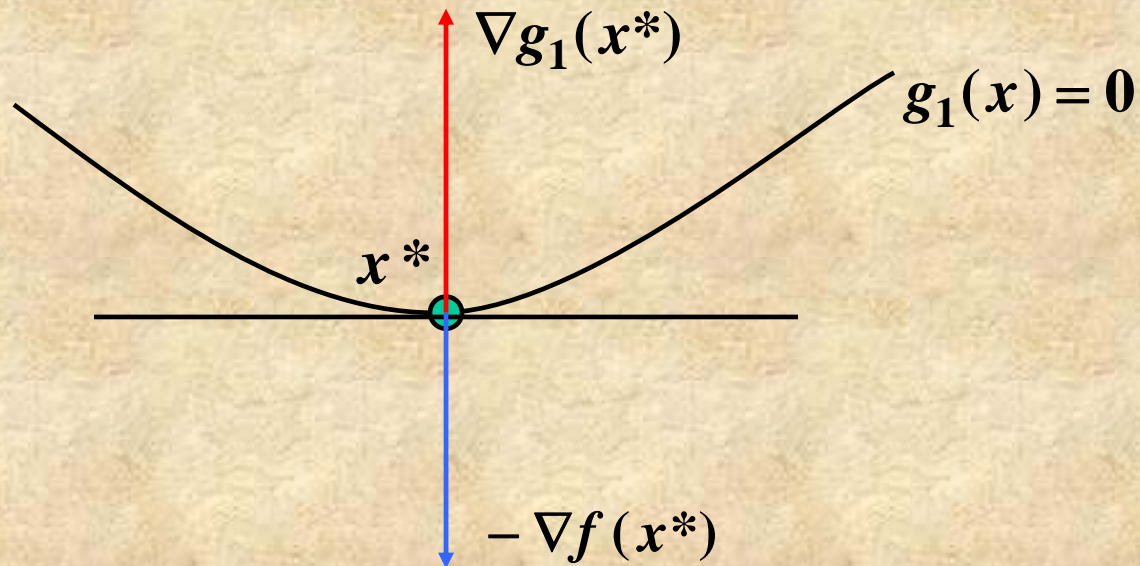
分析：

(1) 如果  $I(x^*)$  中只有一个指标，不妨设  $g_1(x)$  为积极约束。

则不存在向量  $d$  使得

$$\begin{cases} \nabla f(x^*)^T d < 0 \\ \nabla g_1(x^*)^T d > 0 \end{cases}$$

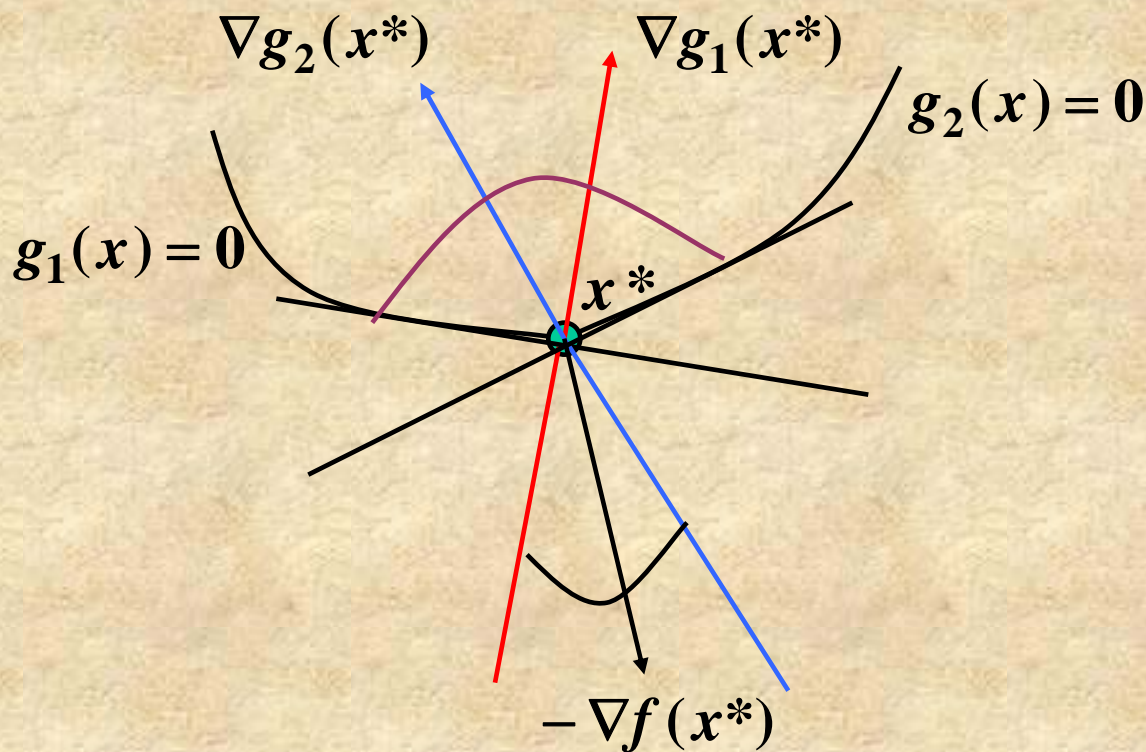
成立。



则有  $\nabla f(x^*) = \lambda \nabla g_1(x^*), \lambda \geq 0$ 。

即  $\nabla f(x^*) - \lambda \nabla g_1(x^*) = 0$ 。

(2) 如果  $I(x^*)$  中有两个指标, 不妨设  $g_1(x)$  和  $g_2(x)$  为积极约束。  
并设  $\nabla g_1(x^*)$  和  $\nabla g_2(x^*)$  线性无关。



$\therefore$  存在  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ , 使得  $\nabla f(x^*) = \lambda_1 \nabla g_1(x^*) + \lambda_2 \nabla g_2(x^*)$ 。

$$\therefore \nabla f(x^*) - \lambda_1 \nabla g_1(x^*) - \lambda_2 \nabla g_2(x^*) = 0。$$

(3) 一般情况：设 $\{\nabla g_i(x^*) | i \in I(x^*)\}$ 线性无关。

则存在非负实数  $\lambda_i (i \in I(x^*))$ , 使得

$$\nabla f(x^*) - \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0 \quad (2)$$

(2)式可改写为

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0 \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0, i = 1, 2, \dots, l \\ \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, l \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \lambda_i g_i(x^*) = 0, i = 1, 2, \dots, l \\ \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, l \end{cases}$$



$$\begin{cases} \lambda_i = 0, & g_i(x^*) > 0; \\ \lambda_i \geq 0, & g_i(x^*) = 0; \end{cases}$$

定理 4(**K-T**条件) 设  $x^* \in Q$ ,  $f(x)$  和  $g_i(x) (i \in I(x^*))$  在点  $x^*$  处可微,  $g_i(x) (i \notin I(x^*))$  在点  $x^*$  处连续,  $\{\nabla g_i(x^*) | i \in I(x^*)\}$  线性无关。若  $x^*$  是约束极值问题 (1) 的局部极小点, 则存在 一组实数  $\lambda_i$  使其满足

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0 \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0, i = 1, 2, \dots, l \\ \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, l \end{cases} \quad (*)$$

(\*)式称为**K-T**条件 (库恩-塔克条件), 满足(\*)式的点称为**K-T**点。

(4) 对于有等式约束的极值 问题

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) \\ \text{s.t.} & \begin{cases} h(x) = 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}\end{array}$$

$K - T$ 条件可写为

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^m u_j \nabla h_j(x^*) - \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0 \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0, i = 1, 2, \dots, l \\ \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, l \end{array} \right. \quad (**)$$

例2 试写出下述问题的  $K-T$  条件。

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = x_1^2 + x_1x_2 - 2x_2^2 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1 \leq 8 + 3x_2 \\ x_1^3 + 2x_1x_2 = 4x_2^2 - 2x_1 + 1 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

解:  $\nabla f(x) = [2x_1 + x_2, x_1 - 4x_2 - 2]^T$

$$\because g_1(x) = 3x_2 + 8 - 3x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1$$

$$\therefore \nabla g_1(x) = [-6x_1 - 2, 3 + 4x_2]^T$$

$$\because g_2(x) = x_1^3 + 2x_1x_2 - 4x_2^2 + 2x_1 - 1$$

$$\therefore \nabla g_2(x) = [3x_1^2 + 2x_2 + 2, 2x_1 - 8x_2]^T$$

$$\because g_3(x) = x_1 - 1 \quad \therefore \nabla g_3(x) = [1, 0]^T$$

$\therefore K-T$  条件为

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - 4x_2 - 2 \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} -6x_1 - 2 \\ 3 + 4x_2 \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} 3x_1^2 + 2x_2 + 2 \\ 2x_1 - 8x_2 \end{bmatrix} - \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \lambda_1(3x_2 + 8 - 3x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1) = 0 \\ \lambda_2(x_1 - 1) = 0 \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

## 例 给定非线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + x_2^2 \\ s.t. \quad & g_1(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2 \geq 0 \\ & g_2(x_1, x_2) = x_2 - x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

检验下列两点  $x^{(1)} = (0, 0)^T$  和  $x^{(2)} = (1, 1)^T$  是否为**K-T**点。

**解：**  $\nabla f = [2(x_1 - 2), 2x_2]^T$ ,  $\nabla g_1 = [1, -2x_2]^T$ ,  $\nabla g_2 = [-1, 1]^T$ 。

(1) 检验点  $x^{(1)}$  :

$$\nabla f(x^{(1)}) = [-4, 0]^T, \nabla g_1(x^{(1)}) = [1, 0]^T, \nabla g_2(x^{(1)}) = [-1, 1]^T$$

所以**K-T**条件为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \lambda_1(0 - 0^2) = 0 \\ \lambda_2(0 - 0) = 0 \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

解方程可得：  $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 0$ .

因为  $\lambda_1 = -4 < 0$ , 所以  $\mathbf{x}^{(1)}$  不是 **K—T** 点。

(2) 检验点  $\mathbf{x}^{(2)}$  :

$$\nabla f(\mathbf{x}^{(2)}) = [-2, 2]^T, \nabla g_1(\mathbf{x}^{(2)}) = [1, -2]^T, \nabla g_2(\mathbf{x}^{(2)}) = [-1, 1]^T$$

所以**K-T**条件为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \lambda_1(1-1^2) = 0 \\ \lambda_2(1-1) = 0 \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

解方程可得:  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$ .

因为  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ , 所以  $\mathbf{x}^{(2)}$  是**K—T**点。

### 3. $K-T$ 点的计算

例 求约束极值问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 6x_2 + 8 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

的  $K-T$  点。

解:  $\nabla f(x) = 2[x_1 - 3, x_2 - 3]^T$ 。

$$\because g_1(x) = 4 - x_1 - x_2 \quad \therefore \nabla g_1(x) = [-1, -1]^T$$

$$g_2(x) = x_1, \quad \nabla g_2(x) = [1, 0]^T。$$

$$g_3(x) = x_2, \quad \nabla g_3(x) = [0, 1]^T。$$

由  $K - T$  条件得

$$\begin{bmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 3 \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

由  $K - T$  条件及约束条件得

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 3 \\ x_2 + \lambda_1 - \lambda_3 = 3 \\ \lambda_1(4 - x_1 - x_2) = 0 \\ \lambda_2 x_1 = 0 \\ \lambda_3 x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

以下分情况讨论：

(1) 若  $x_1 = x_2 = 0$ :

由  $\lambda_1(4 - x_1 - x_2) = 0$  可得  $\lambda_1 = 0$ 。

$$\therefore \lambda_1 - \lambda_2 = 3 \quad \Rightarrow \lambda_2 = -3$$

这与  $\lambda_2 \geq 0$  矛盾。

(2) 若  $x_1 = 0, x_2 \neq 0$ :

$$\therefore \lambda_3 = 0$$

$$\therefore \begin{cases} x_2 + \lambda_1 = 3 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow x_2 + \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_2 = -x_2 < 0$$

这与  $\lambda_2 \geq 0$  矛盾。

(3) 若  $x_1 \neq 0, x_2 = 0$ :

$$\therefore \lambda_2 = 0$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 + \lambda_1 = 3 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = -x_1 < 0$$

这与  $\lambda_3 \geq 0$  矛盾。

(4) 若  $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ :

$$\therefore \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 + \lambda_1 = 3 \\ x_2 + \lambda_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\text{若 } x_1 + x_2 < 4 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 3$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = 6 > 4 \Rightarrow \text{矛盾。}$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 4 \Rightarrow x_1 = x_2 = 2 \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

$\therefore [2, 2]^T$  为  $K-T$  点。

## 4. 其它最优性条件

定理 5 (*Fritz John* 条件) 设  $x^* \in Q$ ,  $f(x)$  和  $g_i(x) (i \in I(x^*))$  在点  $x^*$  处可微,  $g_i(x) (i \notin I(x^*))$  在点  $x^*$  处连续。若  $x^*$  是约束极值问题 (1) 的局部极小点, 则存在一组不全为零的非负实数  $\lambda_i$ , 使得

$$\lambda_0 \nabla f(x^*) - \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0$$