最优化方法复习提纲

一、概念

凸集，凸函数，局部极小点，全局极小点，下降方向，最优步长，共轭方向，可行方向，积极约束，基，基本解。

二、计算

1. 黄金分割法；抛物线插值法。

2. 梯度法：迭代公式，计算 。

3. 共轭梯度法：共轭方向判断，迭代公式的构造 .

4. 牛顿法：迭代公式，计算 .

5. 最小二乘法: 最小二乘问题; 线性最小二乘问题的最优解.

6. 模式搜索法：计算。

7. 最优性条件： 积极约束判断，K-T条件，K-T点判断.

8. 惩罚函数法： 外点法惩罚函数的构造，内点法障碍函数的构造，外点法计算。

9. 线性规划：建立线性规划模型，化标准型，基本可行解的计算，单纯型算法计算.

例1. 试用梯度法解下述问题

$$\min \quad f(x) = x_1^2 + 4x_2^2$$

已知初始点 $x^1 = (1,1)^T$,求迭代点 x^2。

解: $\because \ \nabla f(x) = [2x_1, 8x_2]^T$

$$\therefore \ d^1 = -\nabla f(x^1) = [-2, -8]^T$$

$$\therefore \ x = x^1 + \lambda d^1 = [1-2\lambda, 1-8\lambda]^T$$

记 $\varphi(\lambda) = f(x^1 + \lambda d^1) = (1-2\lambda)^2 + 4(1-8\lambda)^2$

令 $\varphi'(\lambda) = -4(1-2\lambda) - 64(1-8\lambda) = 0$

$$\therefore \ \lambda_1 = \frac{17}{130}$$

$$\therefore \ x^2 = x^1 + \lambda_1 d^1 = [\frac{48}{65}, \frac{-3}{65}]^T$$

例 2. 试用牛顿法解下述问题

$$\min \quad f(x) = x_1^2 + 4x_2^2$$

已知初始点 $x^1 = (1,1)^T$，求迭代点 x^2。

解：$\because \ \nabla f(x) = [2x_1, 8x_2]^T$

$\therefore \ \nabla f(x^1) = [2,8]^T$

$\because \ \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad \therefore \ \nabla^2 f(x^1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{bmatrix}$

$\therefore x^2 = x^1 - \nabla^2 f(x^1)^{-1} \nabla f(x^1) = [0,0]^T$

例3 试写出下述问题的 $K-T$条件。

$$\min \quad f(x)=3x_1^2-3x_1x_2+2x_2^2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1^2-2x_1+2x_2^2+x_2\le 3 \\ x_1+2x_2^2=4x_2+2 \\ x_2\ge 0 \end{cases}$$

解： $\nabla f(x)=[6x_1-3x_2,4x_2-3x_1]^T$

$\because \ g_1(x)=3-x_1^2+2x_1-2x_2^2-x_2$

$\therefore \ \nabla g_1(x)=[2-2x_1,-4x_2-1]^T$

$\because \ g_2(x)=x_1+2x_2^2-4x_2-2$

$\therefore \ \nabla g_2(x)=[1,4x_2-4]^T$

$\because \quad g_3(x) = x_2$

$\therefore \quad \nabla g_3(x) = [0,1]^T$

$\therefore$ $K-T$ 条件为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 6x_1 - 3x_2 \\ 4x_2 - 3x_1 \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 - 2x_1 \\ -4x_2 - 1 \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 4x_2 - 4 \end{bmatrix} - \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \\ \lambda_1 (3 - x_1^2 + 2x_1 - 2x_2^2 - x_2) = 0 \\ \lambda_2 x_2 = 0 \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

例4 试分别写出下述问题的 惩罚函数及障碍函数。

$$\min \quad f(x)=(x_1-2x_2)^2+2x_2$$
$$s.t. \quad 3x_1^2\le 2x_2+6$$

解： 惩罚函数

$$G(x,M)=(x_1-2x_2)^2+2x_2+M[\min\{2x_2+6-3x_1^2,0\}]^2$$

障碍函数

$$\varphi(x,\mu)=(x_1-2x_2)^2+2x_2+u\frac{1}{2x_2+6-3x_1^2}$$

或

$$\varphi(x,\mu)=(x_1-2x_2)^2+2x_2-u\ln(2x_2+6-3x_1^2)$$

例5 将下面的线性规划问题化为标准型。

$$\min \quad z = 2x_1 + x_2 - 3x_3$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \le 4 \\ 2x_1 - x_3 \ge 2 \\ 2x_2 + x_3 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

解： 令 $x_3 = x_4 - x_5$.

$$\max \quad z = -2x_1 - x_2 + 3x_4 - 3x_5$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ 2x_1 - x_4 + x_5 - x_7 = 2 \\ 2x_2 + x_4 - x_5 + x_8 = 5 \\ x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \ge 0 \end{cases}$$

例6　设某线性规划问题用单纯型算法求解得到如下的单纯型表。

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}
-2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\
2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 6 \\
2 & 0 & -2 & 0 & 0 & -12
\end{bmatrix}
$$

问：（1）确定当前单纯型表中的基变量，基本可行解，目标函数值。

（2）判断其是否为最优单纯型表，是则给出理由；不是，则继续求解该问题的最优解。

解：

（1）基变量为 x_2, x_4, x_5 ，基本可行解为 $x^1 = (0,4,0,2,6)^T$ 。

目标函数值为12。

（2）因为变量 x_1 的检验数 $\sigma_1 = 2 > 0$ ，所以不是最优单纯型表。

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & -16 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}$$