

# 最优化方法复习提纲

## 一、概念

最优化问题，凸集，凸函数，局部极小点，全局极小点，下降方向，最优步长，共轭方向，可行方向，积极约束，线性规划问题，基本解。

## 二、计算

1. 黄金分割法。
2. 梯度法：迭代公式，计算。



3. 共轭梯度法：共轭方向概念、性质，搜索方向、搜索步长的公式推导。
4. 牛顿法：迭代公式，计算。
5. 最小二乘法：最小二乘问题；线性最小二乘问题的最优解计算。
6. 模式搜索法：计算。
7. 最优性条件：积极约束判断，**K-T**条件，**K-T**点判别。
8. 惩罚函数法：外点法惩罚函数的构造，内点法障碍函数的构造，外点法、内点法计算。



**9. 线性规划： 建立线性规划模型，化标准型，基本可行解的计算，单纯型表上的单纯型算法.**

例1. 试用梯度法解下述问题

$$\min f(x) = x_1^2 + 4x_2^2$$

已知初始点  $x^1 = (1, 1)^T$ , 求迭代点  $x^2$ 。

解:  $\because \nabla f(x) = [2x_1, 8x_2]^T$

$$\therefore d^1 = -\nabla f(x^1) = [-2, -8]^T$$

$$\therefore x = x^1 + \lambda d^1 = [1 - 2\lambda, 1 - 8\lambda]^T$$

记  $\varphi(\lambda) = f(x^1 + \lambda d^1) = (1 - 2\lambda)^2 + 4(1 - 8\lambda)^2$

令  $\varphi'(\lambda) = -4(1 - 2\lambda) - 64(1 - 8\lambda) = 0$

$$\therefore \lambda_1 = \frac{17}{130}$$

$$\therefore x^2 = x^1 + \lambda_1 d^1 = \left[ \frac{48}{65}, \frac{-3}{65} \right]^T$$



例2. 试用牛顿法解下述问题

$$\min f(x) = x_1^2 + 4x_2^2$$

已知初始点  $x^1 = (1, 1)^T$ , 求迭代点  $x^2$ 。

解:  $\because \nabla f(x) = [2x_1, 8x_2]^T$

$$\therefore \nabla f(x^1) = [2, 8]^T$$

$$\because \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \therefore \nabla^2 f(x^1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x^2 = x^1 - \nabla^2 f(x^1)^{-1} \nabla f(x^1) = [0, 0]^T$$

例3 试写出下述问题的  $K-T$  条件。

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = 3x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1^2 - 2x_1 + 2x_2^2 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2^2 = 4x_2 + 2 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

解:  $\nabla f(x) = [6x_1 - 3x_2, 4x_2 - 3x_1]^T$

$$\because g_1(x) = 3 - x_1^2 + 2x_1 - 2x_2^2 - x_2$$

$$\therefore \nabla g_1(x) = [2 - 2x_1, -4x_2 - 1]^T$$

$$\because g_2(x) = x_1 + 2x_2^2 - 4x_2 - 2$$

$$\therefore \nabla g_2(x) = [1, 4x_2 - 4]^T$$



$$\because g_3(x) = x_2$$

$$\therefore \nabla g_3(x) = [0, 1]^T$$

$\therefore K - T$  条件为

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 6x_1 - 3x_2 \\ 4x_2 - 3x_1 \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 - 2x_1 \\ -4x_2 - 1 \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 4x_2 - 4 \end{bmatrix} - \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \\ \lambda_1(3 - x_1^2 + 2x_1 - 2x_2^2 - x_2) = 0 \\ \lambda_2 x_2 = 0 \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

例4 试分别写出下述问题的 惩罚函数及障碍函数。

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = (x_1 - 2x_2)^2 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1^2 \leq 2x_2 + 6 \end{aligned}$$

解： 惩罚函数

$$G(x, M) = (x_1 - 2x_2)^2 + 2x_2 + M[\min\{2x_2 + 6 - 3x_1^2, 0\}]^2$$

障碍函数

$$\varphi(x, \mu) = (x_1 - 2x_2)^2 + 2x_2 + u \frac{1}{2x_2 + 6 - 3x_1^2}$$

或

$$\varphi(x, \mu) = (x_1 - 2x_2)^2 + 2x_2 - u \ln(2x_2 + 6 - 3x_1^2)$$



**例5** 将下面的线性规划问题化为标准型。

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 4 \\ 2x_1 - x_3 \geq 2 \\ 2x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_3 \text{无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

**解：** 令  $x_3 = x_4 - x_5$ 。

$$\begin{aligned} \max \quad & z = -2x_1 - x_2 + 3x_4 - 3x_5 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ 2x_1 - x_4 + x_5 - x_7 = 2 \\ 2x_2 + x_4 - x_5 + x_8 = 5 \\ x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



**例6** 设某线性规划问题用单纯型算法求解得到如下的单纯型表。

$$\begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad b \\ \left[ \begin{array}{cccccc} -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & -12 \end{array} \right] \end{array}$$

问：（1）确定当前单纯型表中的基变量，基本可行解，目标函数值。

（2）判断其是否为最优单纯型表，是则给出理由；不是，则继续求解该问题的最优解。



解:

(1) 基变量为  $x_2, x_4, x_5$  , 基本可行解为  $x^1 = (0, 4, 0, 2, 6)^T$  。

目标函数值为12。

(2) 因为变量  $x_1$  的检验数  $\sigma_1 = 2 > 0$  , 所以不是最优单纯型表。

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\quad} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & -16 \end{bmatrix} \end{array} \end{array} \end{array}$$