

最优化方法复习提纲

一、概念

最优化问题，凸集，凸函数，局部极小点，全局极小点，下降方向，最优步长，共轭方向，可行方向，积极约束，线性规划问题，
基本解。

二、计算

1. 黄金分割法。
2. 梯度法：迭代公式，计算。

3. 共轭梯度法：共轭方向概念、性质，搜索方向、搜索步长的公式推导。
4. 牛顿法：迭代公式，计算。
5. 最小二乘法：最小二乘问题；线性最小二乘问题的最优解计算。
6. 模式搜索法：计算。
7. 最优性条件：积极约束判断，K-T条件，K-T点判别。
8. 惩罚函数法：外点法惩罚函数的构造，内点法障碍函数的构造，外点法、内点法计算。

9. 线性规划： 建立线性规划模型，化标准型，基
本可行解的计算，单纯型表上的单纯型算法.

例1. 试用梯度法解下述问题

$$\min f(x) = x_1^2 + 4x_2^2$$

已知初始点 $x^1 = (1, 1)^T$, 求迭代点 x^2 。

解: $\because \nabla f(x) = [2x_1, 8x_2]^T$

$$\therefore d^1 = -\nabla f(x^1) = [-2, -8]^T$$

$$\therefore x = x^1 + \lambda d^1 = [1 - 2\lambda, 1 - 8\lambda]^T$$

记 $\varphi(\lambda) = f(x^1 + \lambda d^1) = (1 - 2\lambda)^2 + 4(1 - 8\lambda)^2$

令 $\varphi'(\lambda) = -4(1 - 2\lambda) - 64(1 - 8\lambda) = 0$

$$\therefore \lambda_1 = \frac{17}{130}$$

$$\therefore x^2 = x^1 + \lambda_1 d^1 = [\frac{48}{65}, \frac{-3}{65}]^T$$

例2. 试用牛顿法解下述问题

$$\min f(x) = x_1^2 + 4x_2^2$$

已知初始点 $x^1 = (1,1)^T$, 求迭代点 x^2 。

解: $\because \nabla f(x) = [2x_1, 8x_2]^T$

$$\therefore \nabla f(x^1) = [2, 8]^T$$

$$\therefore \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \therefore \nabla^2 f(x^1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x^2 = x^1 - \nabla^2 f(x^1)^{-1} \nabla f(x^1) = [0, 0]^T$$

例3 试写出下述问题的 $K-T$ 条件。

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = 3x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 - 2x_1 + 2x_2^2 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2^2 = 4x_2 + 2 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

解: $\nabla f(x) = [6x_1 - 3x_2, 4x_2 - 3x_1]^T$

$$\therefore g_1(x) = 3 - x_1^2 + 2x_1 - 2x_2^2 - x_2$$

$$\therefore \nabla g_1(x) = [2 - 2x_1, -4x_2 - 1]^T$$

$$\therefore g_2(x) = x_1 + 2x_2^2 - 4x_2 - 2$$

$$\therefore \nabla g_2(x) = [1, 4x_2 - 4]^T$$

$$\therefore g_3(x) = x_2$$

$$\therefore \nabla g_3(x) = [0, 1]^T$$

$\therefore K - T$ 条件为

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 6x_1 - 3x_2 \\ 4x_2 - 3x_1 \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 - 2x_1 \\ -4x_2 - 1 \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 4x_2 - 4 \end{bmatrix} - \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \\ \lambda_1(3 - x_1^2 + 2x_1 - 2x_2^2 - x_2) = 0 \\ \lambda_2 x_2 = 0 \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

例4 试分别写出下述问题的 惩罚函数及障碍函数。

$$\min f(x) = (x_1 - 2x_2)^2 + 2x_2$$

$$s.t. \quad 3x_1^2 \leq 2x_2 + 6$$

解： 惩罚函数

$$G(x, M) = (x_1 - 2x_2)^2 + 2x_2 + M[\min\{2x_2 + 6 - 3x_1^2, 0\}]^2$$

障碍函数

$$\varphi(x, \mu) = (x_1 - 2x_2)^2 + 2x_2 + \mu \frac{1}{2x_2 + 6 - 3x_1^2}$$

或

$$\varphi(x, \mu) = (x_1 - 2x_2)^2 + 2x_2 - \mu \ln(2x_2 + 6 - 3x_1^2)$$

例5 将下面的线性规划问题化为标准型。

$$\begin{array}{ll}\min & z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ s.t. & \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 4 \\ 2x_1 - x_3 \geq 2 \\ 2x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_3 \text{无约束} \end{array} \right.\end{array}$$

解：令 $x_3 = x_4 - x_5$.

$$\begin{array}{ll}\max & z = -2x_1 - x_2 + 3x_4 - 3x_5 \\ s.t. & \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_4 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ 2x_1 - x_4 + x_5 - x_7 = 2 \\ 2x_2 + x_4 - x_5 + x_8 = 5 \\ x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0 \end{array} \right.\end{array}$$

例6 设某线性规划问题用单纯型算法求解得到如下的单纯型表。

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \left[\begin{matrix} -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & -12 \end{matrix} \right] \end{array}$$

- 问：（1）确定当前单纯型表中的基变量，基本可行解，目标函数值。
（2）判断其是否为最优单纯型表，是则给出理由；不是，则继续求解该问题的最优解。

解：

(1) 基变量为 x_2, x_4, x_5 ，基本可行解为 $x^1 = (0, 4, 0, 2, 6)^T$ 。

目标函数值为12。

(2) 因为变量 x_1 的检验数 $\sigma_1 = 2 > 0$ ，所以不是最优单纯型表。

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & -16 \end{bmatrix}$$