La géométrie Hessienne du gaz parfait

Jérémie Pierard de Maujouy
UCLouvain

arXiv:2404.09035 [math-ph]

Statistique mécanique de Souriau

G-variété Hamiltonienne

Variété symplectique (M, ω).

Groupe de Lie $G \subset \mathrm{Diff}(M)$ préservant ω, algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

G-variété Hamiltonienne

Variété symplectique (M, ω).

Groupe de Lie $G \subset \mathrm{Diff}(M)$ préservant ω, algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Application moment

$J : M \to \mathfrak{g}^*$ telle que $\forall \xi \in \mathfrak{g}$ on ait

$$\mathrm{d} \langle J, \xi \rangle = \omega(\,\cdot\, , \xi)$$

Particule libre

$M = T^*\mathbb{R}^3$, $\omega = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i$, paramètre $m \in \mathbb{R}_+^*$.

Particule libre

$M = T^*\mathbb{R}^3$, $\omega = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i$, paramètre $m \in \mathbb{R}_+^*$.

Groupe de Galilée

$\mathrm{Gal} := (\mathbb{R} \times \mathrm{SO}(3)) \ltimes (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ avec le produit matriciel suivant

$$(T, R, U, V) \mapsto \begin{pmatrix} R & V & U \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Moments galiléens d'une particule libre

Action symplectique de Gal sur $T^*\mathbb{R}^3$ admet un moment :

Moments galiléens

On utilise des coordonnées (τ, r, u, v) pour $\mathfrak{gal}$.

$$J(q, p) = \langle p, \, \mathrm{d}r \cdot q \rangle - \frac{1}{2m} p^2 \mathrm{d}\tau + \langle p, \, \mathrm{d}u \rangle - \langle q, \, m\mathrm{d}v \rangle$$

États statistiques

États statistiques : **mesures de probabilités** sur M.

États statistiques

États statistiques : **mesures de probabilités** sur M.

États d'équilibre : **entropie maximale**.

Distributions de Gibbs

Distributions de probabilité sur M d'entropie maximale à $\mathbb{E}[J]$ fixe.

Distributions de Gibbs

Distributions de probabilité sur M d'entropie maximale à $\mathbb{E}[J]$ fixe.

On définit la **fonction de partition** :

$$Z : \xi \in \mathfrak{g} \mapsto \int_M e^{-\langle J, \xi \rangle} \lambda \in]0, \infty]$$

Distributions de Gibbs

Distributions de probabilité sur M d'entropie maximale à $\mathbb{E}[J]$ fixe.

On définit la **fonction de partition** :

$$Z : \xi \in \mathfrak{g} \mapsto \int_M e^{-\langle J, \xi \rangle} \lambda \in]0, \infty]$$

Température généralisée

L'*ensemble de Gibbs* associé à (M, J) est un ouvert de $\mathfrak{g}$:

$$\Omega := \operatorname{int}\left(\{\xi \in \mathfrak{g} \,|\, Z(\xi) < \infty\}\right)$$

Distributions de Gibbs

Distributions de probabilité sur M d'entropie maximale à $\mathbb{E}[J]$ fixe.

On définit la **fonction de partition** :

$$Z : \xi \in \mathfrak{g} \mapsto \int_M e^{-\langle J, \xi \rangle} \lambda \in]0, \infty]$$

Température généralisée

L'*ensemble de Gibbs* associé à (M, J) est un ouvert de $\mathfrak{g}$:

$$\Omega := \operatorname{int}\left(\{\xi \in \mathfrak{g} \,|\, Z(\xi) < \infty\}\right)$$

$\xi \in \Omega$ est appelé **température généralisée**.

Ensemble de Gibbs

Ω paramètre naturellement une famille exponentielle de probabilités sur M :

$$\xi \in \Omega \mapsto P_\xi = \frac{e^{-\langle J, \xi \rangle} \lambda}{Z(\xi)}$$

Ensemble de Gibbs

Ω paramètre naturellement une famille exponentielle de probabilités sur M :

$$\xi \in \Omega \mapsto P_\xi = \frac{e^{-\langle J, \xi \rangle}\lambda}{Z(\xi)}$$

On notera $\mathbb{E}_\xi[f] := \int_M f\, P_\xi$.

Ω est une partie convexe de $\mathfrak{g}$ stable sous l'action adjointe de G. Z est G-invariant*.

Propriétés de l'ensemble de Gibbs

On pose $z = \ln(Z) : \Omega \to \mathbb{R}$. « Potentiel thermodynamique ».

Propriétés de l'ensemble de Gibbs

On pose $z = \ln(Z) : \Omega \to \mathbb{R}$. « Potentiel thermodynamique ».

1. z est strictement convexe,

Propriétés de l’ensemble de Gibbs

On pose $z = \ln(Z) : \Omega \to \mathbb{R}$. « Potentiel thermodynamique ».

1. z est strictement convexe,
2. $Q(\xi) := -\mathrm{d}z|_{\xi} = \mathbb{E}_{\xi}[J] \in \mathfrak{g}^*$

Propriétés de l'ensemble de Gibbs

On pose $z = \ln(Z) : \Omega \to \mathbb{R}$. ≪ Potentiel thermodynamique ≫.

1. z est strictement convexe,
2. $Q(\xi) := -\mathrm{d}z|_{\xi} = \mathbb{E}_{\xi}[J] \in \mathfrak{g}^*$ définit un difféomorphisme G-équivariant* vers un ouvert $\Omega \xrightarrow{\sim} \Omega^* \subset \mathfrak{g}^*$,

Propriétés de l'ensemble de Gibbs

On pose $z = \ln(Z) : \Omega \to \mathbb{R}$. « Potentiel thermodynamique ».

1. z est strictement convexe,
2. $Q(\xi) := -\mathrm{d}z|_\xi = \mathbb{E}_\xi[J] \in \mathfrak{g}^*$ définit un difféomorphisme G-équivariant* vers un ouvert $\Omega \xrightarrow{\sim} \Omega^* \subset \mathfrak{g}^*$,

$\Longrightarrow$ structure de Poisson sur Ω

Propriétés de l'ensemble de Gibbs

On pose $z = \ln(Z) : \Omega \to \mathbb{R}$. « Potentiel thermodynamique ».

1. z est strictement convexe,
2. $Q(\xi) := -\mathrm{d}z|_\xi = \mathbb{E}_\xi[J] \in \mathfrak{g}^*$ définit un difféomorphisme G-équivariant* vers un ouvert $\Omega \xrightarrow{\sim} \Omega^* \subset \mathfrak{g}^*$,

$\Longrightarrow$ structure de Poisson sur Ω, G-invariante.

Propriétés de l'ensemble de Gibbs

On pose $z = \ln(Z) : \Omega \to \mathbb{R}$. « Potentiel thermodynamique ».

1. z est strictement convexe,
2. $Q(\xi) := -\mathrm{d}z|_\xi = \mathbb{E}_\xi[J] \in \mathfrak{g}^*$ définit un difféomorphisme G-équivariant* vers un ouvert $\Omega \xrightarrow{\sim} \Omega^* \subset \mathfrak{g}^*$,

$\implies$ structure de Poisson sur Ω, G-invariante. Action de G est Hamiltonienne !

Propriétés de l'ensemble de Gibbs

On pose $z = \ln(Z) : \Omega \to \mathbb{R}$. « Potentiel thermodynamique ».

1. z est strictement convexe,
2. $Q(\xi) := -\mathrm{d}z|_\xi = \mathbb{E}_\xi[J] \in \mathfrak{g}^*$ définit un difféomorphisme G-équivariant* vers un ouvert $\Omega \xrightarrow{\sim} \Omega^* \subset \mathfrak{g}^*$,

   $\implies$ structure de Poisson sur Ω, G-invariante. Action de G est Hamiltonienne !
3. L'entropie de P_ξ est $s(\xi) = z(\xi) + \langle \xi, Q(\xi) \rangle$,

Propriétés de l'ensemble de Gibbs

On pose $z = \ln(Z) : \Omega \to \mathbb{R}$. « Potentiel thermodynamique ».

4. $g = \mathrm{Hess}^{\nabla}(z)$ définit une métrique Riemannienne G-invariante sur Ω, avec ∇ la dérivée covariante affine de $\mathfrak{g}$,

Propriétés de l'ensemble de Gibbs

On pose $z = \ln(Z) : \Omega \to \mathbb{R}$. « Potentiel thermodynamique ».

4. $g = \mathrm{Hess}^{\nabla}(z)$ définit une métrique Riemannienne G-invariante sur Ω, avec ∇ la dérivée covariante affine de $\mathfrak{g}$,
5. La connexion ∇^*, g-adjointe à ∇, correspond sous Q à la dérivée covariante affine de $\mathfrak{g}^*$ $\Big(X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla^*_X Z)\Big)$.

Mécanique statistique du gaz parfait

Gaz parfait de particules ponctuelles

$M = T^*\mathbb{R}^3$, $m > 0$.

Gaz parfait de particules ponctuelles

$M = T^*\mathbb{R}^3$, $m > 0$.

Ensemble de Gibbs

$$\Omega = \varnothing$$

Gaz parfait de particules ponctuelles

$M = T^*\mathbb{R}^3$, $m > 0$.

Ensemble de Gibbs

$$\Omega = \varnothing$$

C'est en fait le cas de manière générique pour les groupes de Galilée et de Poincaré.

Gaz parfait confiné

Idée : confiner les particules dans une région de volume fini.

Gaz parfait confiné

Idée : confiner les particules dans une région de volume fini.

$\implies$ Groupe de symétrie moindre $G \subset \mathrm{Gal}$.

Gaz parfait confiné

Idée : confiner les particules dans une région de volume fini.

$\implies$ Groupe de symétrie moindre $G \subset \mathrm{Gal}$.

Souriau : enceinte cylindrique d'une centrifugeuse :

$$G \simeq \mathbb{R} \times \mathrm{SO}(2).$$

Gaz parfait confiné

Idée : confiner les particules dans une région de volume fini.

$\implies$ Groupe de symétrie moindre $G \subset \mathrm{Gal}$.

Souriau : enceinte cylindrique d'une centrifugeuse :

$$G \simeq \mathbb{R} \times \mathrm{SO}(2).$$

On choisit plutôt une enceinte **sphérique** :

$$G \simeq \mathbb{R} \times \mathrm{SO}(3).$$

Particule libre confinée dans une sphère

$M = T^*B(O, R)$ espace cotangent d'une boule de rayon $R > 0$.

Particule libre confinée dans une sphère

$M = T^*B(O, R)$ espace cotangent d'une boule de rayon $R > 0$.

Stable par rotations $SO(3)$ mais instable sous l'écoulement du temps $\mathbb{R}$: les particules *quittent la boule*.

Particule libre confinée dans une sphère

$M = T^*B(O, R)$ espace cotangent d'une boule de rayon $R > 0$.

Stable par rotations $SO(3)$ mais instable sous l'écoulement du temps $\mathbb{R}$: les particules *quittent la boule*.

Actions Hamiltoniennes du *groupe* SO(3) et de l'*algèbre de Lie* $\underline{\mathbb{R}}$.

Moments sphériques d'une particule

Coordonnées $(-\beta, r) \in \underbrace{\underline{\mathbb{R}}}_{\text{temps}} \times \mathfrak{so}(3)$.

$$J(q,p) = \frac{p^2}{2m}\mathrm{d}\beta + \underbrace{\langle p,\ \mathrm{d}r \cdot q\rangle}_{\text{“}\langle \mathrm{d}r,\, q\times p\rangle\text{”}} \in (\underline{\mathbb{R}} \times \mathfrak{so}(3))^*$$

Moments sphériques d'une particule

Coordonnées $(-\beta, r) \in \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{temps}} \times \mathfrak{so}(3)$.

$$J(q,p) = \frac{p^2}{2m}\mathrm{d}\beta + \underbrace{\langle p,\, \mathrm{d}r \cdot q \rangle}_{\text{“}\langle \mathrm{d}r,\, q \times p \rangle\text{”}} \in (\mathbb{R} \times \mathfrak{so}(3))^*$$

Pour $\beta \neq 0$ on pose $\omega = -\frac{r}{\beta} \in \mathfrak{so}(3)$.

Moments sphériques d'une particule

Coordonnées $(-\beta, r) \in \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{temps}} \times \mathfrak{so}(3)$.

$$J(q,p) = \frac{p^2}{2m}\mathrm{d}\beta + \underbrace{\langle p,\, \mathrm{d}r \cdot q\rangle}_{\text{“}\langle \mathrm{d}r,\, q\times p\rangle\text{”}} \in (\mathbb{R} \times \mathfrak{so}(3))^*$$

Pour $\beta \neq 0$ on pose $\omega = -\frac{r}{\beta} \in \mathfrak{so}(3)$. « vitesse d'entraînement » $\omega \cdot q$.

$$\langle J(q,p),\, (-\beta, r)\rangle = \beta \left(\frac{1}{2m}(p - m\omega \cdot q)^2 - \frac{1}{2}m(\omega \cdot q)^2 \right)$$

Coordonnées $(-\beta, r) \in \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{temps}} \times \mathfrak{so}(3)$.

$$J(q,p) = \frac{p^2}{2m}\mathrm{d}\beta + \underbrace{\langle p,\, \mathrm{d}r \cdot q\rangle}_{\text{“}\langle \mathrm{d}r,\, q \times p\rangle\text{”}} \in (\mathbb{R} \times \mathfrak{so}(3))^*$$

Pour $\beta \neq 0$ on pose $\omega = -\frac{r}{\beta} \in \mathfrak{so}(3)$. « vitesse d'entraînement » $\omega \cdot q$.

$$\langle J(q,p),\, (-\beta, r)\rangle = \beta\left(\frac{1}{2m}(p - m\omega \cdot q)^2 - \frac{1}{2}m(\omega \cdot q)^2\right)$$

$\implies P_\xi = \frac{e^{-\langle J,\, \xi\rangle}\lambda}{Z(\xi)}$: « Distribution gaussienne de sign. $(+++--0)$ »

Ensemble de Gibbs

On trouve

$$\Omega = \{(-\beta, r) \,|\, \beta > 0\} = \mathbb{R}_+^* \times \mathfrak{so}(3)$$

Ensemble de Gibbs

On trouve

$$\Omega = \{(-\beta, r) \mid \beta > 0\} = \mathbb{R}_+^* \times \mathfrak{so}(3)$$

« Équilibre thermodynamique dans le référentiel mobile en rotation générée par ω » $\implies$ **centrifuge**.

Ensemble de Gibbs

On trouve

$$\Omega = \{(-\beta, r) \mid \beta > 0\} = \mathbb{R}_+^* \times \mathfrak{so}(3)$$

« Équilibre thermodynamique dans le référentiel mobile en rotation générée par ω » $\implies$ **centrifuge**.

$$Z(\beta, r) = \mathrm{Z}_{\mathrm{int}}(\beta)\,\mathrm{Z}_{\mathrm{rot}}(\beta\omega^2)$$

avec

$$\mathrm{Z}_{\mathrm{int}}(\beta) = \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}$$
$$\mathrm{Z}_{\mathrm{rot}}(\beta\omega^2) = \int_{B(O,R)} e^{\beta m \frac{1}{2}(\omega\cdot q)^2}\,\mathrm{d}^3 q$$

Mesures de Gibbs

On a

$$\Omega = \{(-\beta, r) \mid \beta > 0\} = \mathbb{R}_+^* \times \mathfrak{so}_3$$

Mesures de Gibbs

$$P_{\beta,r} = \frac{e^{-\frac{\beta}{2m}(p - m\omega\cdot q)^2} \mathrm{d}^3 p}{Z_{\mathrm{int}}(\beta)} \otimes \frac{e^{\beta \frac{m}{2}(\omega\cdot q)^2} \mathrm{d}^3 q}{Z_{\mathrm{rot}}(\beta\omega^2)}$$

Mesures de Gibbs

On a

$$\Omega = \{(-\beta, r) \mid \beta > 0\} = \mathbb{R}_+^* \times \mathfrak{so}_3$$

Mesures de Gibbs

$$P_{\beta,r} = \frac{e^{-\frac{\beta}{2m}(p - m\omega\cdot q)^2} \mathrm{d}^3 p}{Z_{\mathrm{int}}(\beta)} \otimes \frac{e^{\beta \frac{m}{2}(\omega\cdot q)^2} \mathrm{d}^3 q}{Z_{\mathrm{rot}}(\beta\omega^2)}$$

- Mesure $\frac{e^{-\frac{\beta}{2m}(p - m\omega\cdot q)^2} \mathrm{d}^3 p}{Z_{\mathrm{int}}(\beta)}$ sur $T_q^* B(O, R)$,
- Mesure $\frac{e^{\beta \frac{m}{2}(\omega\cdot q)^2} \mathrm{d}^3 q}{Z_{\mathrm{rot}}(\beta\omega^2)}$ sur $B(O, R)$.

Potentiel thermodynamique

On a

$$\Omega = \{(-\beta, r) \mid \beta > 0\} = \mathbb{R}_+^* \times \mathfrak{so}_3$$

$$z = \mathsf{z}_{\mathrm{int}}(\beta) + \mathsf{z}_{\mathrm{rot}}(\beta\omega^2)$$

Potentiel thermodynamique

On a

$$\Omega = \{(-\beta, r) \mid \beta > 0\} = \mathbb{R}_+^* \times \mathfrak{so}_3$$

$$z = z_{\mathrm{int}}(\beta) + z_{\mathrm{rot}}(\beta\omega^2)$$

avec

$$z_{\mathrm{int}} = -\frac{3}{2}\ln\beta + \mathrm{cst}$$

$$z_{\mathrm{rot}} = \ln\left(\int_{B(O,R)} e^{\frac{\beta m}{2}(\omega\cdot q)^2}\,\mathrm{d}^3 q\right) + \mathrm{cst}$$

Potentiel thermodynamique

On a

$$\Omega = \{(-\beta, r) \mid \beta > 0\} = \mathbb{R}_+^* \times \mathfrak{so}_3$$

$$z = \mathrm{z_{int}}(\beta) + \mathrm{z_{rot}}(\beta\omega^2)$$

avec

$$\mathrm{z_{int}} = -\frac{3}{2} \ln \beta + \mathrm{cst}$$

$$\mathrm{z_{rot}} = \ln\left(\int_{B(O,R)} e^{\frac{\beta m}{2}(\omega \cdot q)^2} \mathrm{d}^3 q\right) + \mathrm{cst}$$

Rappel : $\mathrm{d}z = -\mathbb{E}_\xi[J]$.

Moments

Ici : $\mathrm{d}z = -E\mathrm{d}\beta - \langle M, \mathrm{d}r \rangle$ à savoir

$$E := \mathbb{E}[\langle J, \partial_t \rangle] = \mathrm{U}_{\mathrm{int}}(\beta) + \mathrm{E}_{\mathrm{rot}}(\beta, \omega) \in \underline{\mathbb{R}}^* \simeq \mathbb{R}$$

Moments

Ici : $\mathrm{d}z = -E\mathrm{d}\beta - \langle M, \mathrm{d}r\rangle$ à savoir

$$E := \mathbb{E}[\langle J, \partial_t\rangle] = \mathrm{U}_{\mathrm{int}}(\beta) + \mathrm{E}_{\mathrm{rot}}(\beta, \omega) \in \underline{\mathbb{R}}^* \simeq \mathbb{R}$$

$$\mathrm{U}_{\mathrm{int}}(\beta) = \frac{3}{2\beta}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{rot}}(\beta, \omega) = \frac{1}{2} I(\beta\omega^2)\omega^2$$

Moments

Ici : $\mathrm{d}z = -E\mathrm{d}\beta - \langle M, \mathrm{d}r \rangle$ à savoir

$$E := \mathbb{E}[\langle J, \partial_t \rangle] = \mathrm{U_{int}}(\beta) + \mathrm{E_{rot}}(\beta, \omega) \in \underline{\mathbb{R}}^* \simeq \mathbb{R}$$

$$\mathrm{U_{int}}(\beta) = \frac{3}{2\beta}$$

$$\mathrm{E_{rot}}(\beta, \omega) = \frac{1}{2} I(\beta\omega^2)\omega^2$$

$$M := \mathbb{E}[\langle J, \partial_r \rangle] = I(\beta\omega^2) \langle \omega, \ \cdot \ \rangle \in \mathfrak{so}_3^*$$

Moments

Ici : $dz = -E d\beta - \langle M, dr \rangle$ à savoir

$$E := \mathbb{E}[\langle J, \partial_t \rangle] = \mathrm{U}_{\mathrm{int}}(\beta) + \mathrm{E}_{\mathrm{rot}}(\beta, \omega) \in \underline{\mathbb{R}}^* \simeq \mathbb{R}$$

$$\mathrm{U}_{\mathrm{int}}(\beta) = \frac{3}{2\beta}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{rot}}(\beta, \omega) = \frac{1}{2} I(\beta\omega^2)\omega^2$$

$$M := \mathbb{E}[\langle J, \partial_r \rangle] = I(\beta\omega^2) \langle \omega, \ \cdot \ \rangle \in \mathfrak{so}_3^*$$

$$I(\beta\omega^2) = \frac{\partial\, \mathrm{z}_{\mathrm{rot}}}{\partial \frac{1}{2}\beta\omega^2} = \frac{4\pi}{\beta m \omega^2 R} \int_0^1 \left(e^{\frac{\beta m \omega^2 R^2}{2}(1-z^2)} - 1 \right) dz$$

Structure de Poisson

Proposition

Soient ω_1, ω_2 deux structures symplectiques sur $\mathbb{S}^2$ qui sont SO_3-invariantes. Alors

$$\omega_2 = \frac{\int_{\mathbb{S}^2} \omega_2}{\int_{\mathbb{S}^2} \omega_1} \omega_1$$

Structure de Poisson

Proposition

Soient ω_1, ω_2 deux structures symplectiques sur $\mathbb{S}^2$ qui sont SO_3-invariantes. Alors

$$\omega_2 = \frac{\int_{\mathbb{S}^2} \omega_2}{\int_{\mathbb{S}^2} \omega_1} \omega_1$$

$\Longrightarrow$ proportionnalité des structures de Poisson SO_3-invariantes !

Structure de Poisson

Plongement $\Omega \xrightarrow{\sim} \Omega^* \overset{(E,M)}{\hookrightarrow} \underline{\mathbb{R}}^* \times \mathfrak{so}_3^*$ induit un bivecteur de Poisson Λ.

Structure de Poisson

Plongement $\Omega \xrightarrow{\sim} \Omega^* \overset{(E,M)}{\hookrightarrow} \underline{\mathbb{R}}^* \times \mathfrak{so}_3^*$ induit un bivecteur de Poisson Λ.

Feuilles symplectiques de $\underline{\mathbb{R}}^* \times \mathfrak{so}_3^*$

Sphères $\{M^2 = \rho^2\}$, E fixé, de surface $4\pi\rho$.

Structure de Poisson

Plongement $\Omega \xrightarrow{\sim} \Omega^* \overset{(E,M)}{\hookrightarrow} \underline{\mathbb{R}}^* \times \mathfrak{so}_3^*$ induit un bivecteur de Poisson Λ.

Feuilles symplectiques de $\underline{\mathbb{R}}^* \times \mathfrak{so}_3^*$

Sphères $\{M^2 = \rho^2\}$, E fixé, de surface $4\pi\rho$.

On note Λ_0 le bivecteur de Poisson « de référence » sur $\mathfrak{so}_3$ tel que la feuille $\{\omega^2 = \sigma^2\}$ a surface $4\pi\sigma$.

Feuilles symplectiques de Ω

Sphères $\{\omega^2 = \sigma^2\}$, β fixé, de surface $4\pi\|M\| = 4\pi I(\beta\omega^2)\sigma$.

Structure de Poisson

Plongement $\Omega \xrightarrow{\sim} \Omega^* \overset{(E,M)}{\hookrightarrow} \underline{\mathbb{R}}^* \times \mathfrak{so}_3^*$ induit un bivecteur de Poisson Λ.

Feuilles symplectiques de $\underline{\mathbb{R}}^* \times \mathfrak{so}_3^*$

Sphères $\{M^2 = \rho^2\}$, E fixé, de surface $4\pi\rho$.

On note Λ_0 le bivecteur de Poisson « de référence » sur $\mathfrak{so}_3$ tel que la feuille $\{\omega^2 = \sigma^2\}$ a surface $4\pi\sigma$.

Feuilles symplectiques de Ω

Sphères $\{\omega^2 = \sigma^2\}$, β fixé, de surface $4\pi\|M\| = 4\pi I(\beta\omega^2)\sigma$.

Donc :

$$\Lambda = \frac{1}{I(\beta\omega^2)}\Lambda_0$$

Métrique Hessienne pour le gaz parfait

$$g = \nabla^2 z$$

Métrique Hessienne pour le gaz parfait

$$g = \nabla^2 z$$

$$g = \frac{3}{2\beta^2}\mathrm{d}\beta \otimes \mathrm{d}\beta + \beta \boldsymbol{I} \left\langle \mathrm{d}\omega \otimes \mathrm{d}\omega \right\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{I} \otimes \mathrm{d}(\beta\omega^2)$$

Métrique Hessienne pour le gaz parfait

$$g = \nabla^2 z$$

$$g = \frac{3}{2\beta^2} \mathrm{d}\beta \otimes \mathrm{d}\beta + \beta I \left\langle \mathrm{d}\omega \otimes \mathrm{d}\omega \right\rangle + \frac{1}{2} \mathrm{d}I \otimes \mathrm{d}(\beta\omega^2)$$

Dans les coordonnées $(\mathrm{d}\beta, \mathrm{d}M)$ la métrique prend la forme

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{3}{2} + \frac{\beta\omega^2 I \beta\omega^2 I'}{I + 2\beta\omega^2 I'}\right) & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{I + 2\beta\omega^2 I'} \mathbb{I}_3 \end{bmatrix}$$

Le corps rigide

Géométrie Hessienne pour le corps rigide

Changement de modèle : on suppose que I est une constante.

Changement de modèle : on suppose que I est une constante. Corps rigide à symétrie sphérique.

Géométrie Hessienne pour le corps rigide

Changement de modèle : on suppose que I est une constante. Corps rigide à symétrie sphérique.

On garde : $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathfrak{so}_3$ avec

$$E := \mathrm{U}_{\mathrm{int}}(\beta) + \mathrm{E}_{\mathrm{rot}}(\beta, \omega) \in \mathbb{R} \simeq \underline{\mathbb{R}}^*$$
$$M := I \langle \omega, \ \cdot \ \rangle \in \mathfrak{so}_3^*$$
$$\mathrm{E}_{\mathrm{rot}}(\beta, \omega) = \frac{1}{2} I \omega^2$$
$$\mathrm{U}_{\mathrm{int}}(\beta) = \frac{C}{\beta}$$

Géométrie Hessienne pour le corps rigide

Changement de modèle : on suppose que I est une constante. Corps rigide à symétrie sphérique.

On garde : $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathfrak{so}_3$ avec

$$E := \mathrm{U_{int}}(\beta) + \mathrm{E_{rot}}(\beta, \omega) \in \mathbb{R} \simeq \underline{\mathbb{R}}^*$$
$$M := I \langle \omega, \ \cdot \ \rangle \in \mathfrak{so}_3^*$$
$$\mathrm{E_{rot}}(\beta, \omega) = \frac{1}{2} I \omega^2$$
$$\mathrm{U_{int}}(\beta) = \frac{C}{\beta}$$

Correspondent à un potentiel $z(\beta, r) = -C \ln \beta + \frac{1}{2\beta} I \omega^2$.

Métrique Hessienne pour le corps rigide

La métrique Hessienne prend la forme suivante :

$$g = C\frac{\mathrm{d}\beta \otimes \mathrm{d}\beta}{\beta^2} + \beta I \left\langle \mathrm{d}\omega \otimes \mathrm{d}\omega \right\rangle$$

Métrique Hessienne pour le corps rigide

La métrique Hessienne prend la forme suivante :

$$g = C\frac{\mathrm{d}\beta \otimes \mathrm{d}\beta}{\beta^2} + \beta I \left\langle \mathrm{d}\omega \ \otimes \ \mathrm{d}\omega \right\rangle = \frac{4C}{\tilde{u}^2}\left(\mathrm{d}\tilde{u} \otimes \mathrm{d}\tilde{u} + \left\langle \mathrm{d}\tilde{m} \ \otimes \ \mathrm{d}\tilde{m} \right\rangle\right)$$

avec $\tilde{u} = 2\sqrt{\mathrm{U}_{\mathrm{int}}(\beta)}$ et $\tilde{m} = I^{\frac{1}{2}} \left\langle \omega, \ \cdot \ \right\rangle$

Métrique Hessienne pour le corps rigide

La métrique Hessienne prend la forme suivante :

$$g = C\frac{\mathrm{d}\beta \otimes \mathrm{d}\beta}{\beta^2} + \beta I \left\langle \mathrm{d}\omega \otimes \mathrm{d}\omega \right\rangle = \frac{4C}{\tilde{u}^2}\left(\mathrm{d}\tilde{u} \otimes \mathrm{d}\tilde{u} + \left\langle \mathrm{d}\tilde{m} \otimes \mathrm{d}\tilde{m} \right\rangle\right)$$

avec $\tilde{u} = 2\sqrt{\mathrm{U}_{\mathrm{int}}(\beta)}$ et $\tilde{m} = I^{\frac{1}{2}} \left\langle \omega, \ \cdot \ \right\rangle$

Isométrique à l'espace hyperbolique de courbure sectionnelle $-\frac{1}{4C}$!

Métrique Hessienne pour le corps rigide

La métrique Hessienne prend la forme suivante :

$$g = C\frac{\mathrm{d}\beta \otimes \mathrm{d}\beta}{\beta^2} + \beta I \left\langle \mathrm{d}\omega \ \otimes \ \mathrm{d}\omega \right\rangle = \frac{4C}{\tilde{u}^2}\left(\mathrm{d}\tilde{u} \otimes \mathrm{d}\tilde{u} + \left\langle \mathrm{d}\tilde{m} \ \otimes \ \mathrm{d}\tilde{m} \right\rangle\right)$$

avec $\tilde{u} = 2\sqrt{\mathrm{U}_{\mathrm{int}}(\beta)}$ et $\tilde{m} = I^{\frac{1}{2}} \left\langle \omega, \ \cdot \ \right\rangle$

Isométrique à l'espace hyperbolique de courbure sectionnelle $-\frac{1}{4C}$!

Gardons pour référence la forme suivante, avec $u = 2/\sqrt{\beta}$:

$$g = \beta \left(C \mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u + I \left\langle \mathrm{d}\omega \ \otimes \ \mathrm{d}\omega \right\rangle \right)$$

Moments supérieurs pour le corps rigide

Ordre 3

$$D^3 z = Dg = \beta^{3/2}\left(2C\mathrm{d}u^{\otimes 3} + \mathrm{d}u \cdot I \left\langle \mathrm{d}\omega \otimes \mathrm{d}\omega \right\rangle\right)$$

Moments supérieurs pour le corps rigide

Ordre 3

$$D^3 z = Dg = \beta^{3/2}\left(2C\mathrm{d}u^{\otimes 3} + \mathrm{d}u \cdot I\left\langle \mathrm{d}\omega \otimes \mathrm{d}\omega \right\rangle\right)$$

Ordre 4

$$D^4 z = D^2 g = \beta^2\left(6C\mathrm{d}u^{\otimes 4} + \mathrm{d}u \cdot \mathrm{d}u \cdot I\left\langle \mathrm{d}\omega \otimes \mathrm{d}\omega \right\rangle\right)$$

Géométrie asymptotique de l'ensemble de Gibbs du gaz parfait

Limite de haute vitesse

A-t-on I « constant dans la limite $\omega^2 \to \infty$ » ?

Limite de haute vitesse

A-t-on I « constant dans la limite $\omega^2 \to \infty$ » ?

$I(\beta\omega^2)$

Limite de haute vitesse

A-t-on I « constant dans la limite $\omega^2 \to \infty$ » ?

$I(\beta\omega^2) \implies$ limite $\beta\omega^2 \to \infty$.

Limite de haute vitesse

Mesures de Gibbs

$$P_{\beta,r} = \frac{e^{-\frac{\beta}{2m}(p-m\omega\cdot q)^2}\mathrm{d}^3p}{Z_{\mathrm{int}}(\beta)} \otimes \underbrace{\frac{e^{\beta\frac{m}{2}(\omega\cdot q)^2}\mathrm{d}^3q}{Z_{\mathrm{rot}}(\beta\omega^2)}}_{\nu_{\beta,r}}$$

Limite de haute vitesse

Mesures de Gibbs

$$P_{\beta,r} = \frac{e^{-\frac{\beta}{2m}(p - m\omega\cdot q)^2} \mathrm{d}^3 p}{Z_{\mathrm{int}}(\beta)} \otimes \underbrace{\frac{e^{\beta\frac{m}{2}(\omega\cdot q)^2} \mathrm{d}^3 q}{Z_{\mathrm{rot}}(\beta\omega^2)}}_{\nu_{\beta,r}}$$

$\nu_{\beta,r}$ ne dépend que de $\sqrt{\beta}\omega = -\frac{r}{\beta^{1/2}} \in \mathfrak{so}_3$!

Limite de haute vitesse

Mesures de Gibbs

$$P_{\beta,r} = \frac{e^{-\frac{\beta}{2m}(p-m\omega\cdot q)^2} \mathrm{d}^3 p}{Z_{\mathrm{int}}(\beta)} \otimes \underbrace{\frac{e^{\beta\frac{m}{2}(\omega\cdot q)^2} \mathrm{d}^3 q}{Z_{\mathrm{rot}}(\beta\omega^2)}}_{\nu_{\beta,r}}$$

$\nu_{\beta,r}$ ne dépend que de $\sqrt{\beta}\omega = -\frac{r}{\beta^{1/2}} \in \mathfrak{so}_3$!

Fibration $\mathbb{R}_+^*$-principale de modèles statistiques :

$$\begin{aligned} P_{\beta,r} &\mapsto \nu_{\beta,r} \\ (\beta, r) &\mapsto -\frac{r}{\beta^{1/2}} \end{aligned}$$

Limite de haute vitesse

Théorème

Soit $f : \overline{B(O,R)} \to \mathbb{R}$ *continue. Alors*

$$\int_{B(O,R)} f \nu_{\beta,r} \xrightarrow[\beta\omega^2 \to \infty]{\mathbb{R}\omega \text{ fixe}} \int_{\acute{E}quateur_\omega} f \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$$

Limite de haute vitesse

Théorème

Soit $f : \overline{B(O,R)} \to \mathbb{R}$ *continue. Alors*

$$\int_{B(O,R)} f\nu_{\beta,r} \xrightarrow[\beta\omega^2 \to \infty]{\mathbb{R}\omega \text{ fixe}} \int_{\text{Équateur}_\omega} f \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$$

Permet d'estimer $D^n z_{\mathrm{rot}}$ lorsque $\beta\omega^2 \to \infty$!

Différentielles du potentiel z

D : dérivation covariante plate dans l'algèbre de Lie $\mathbb{R} \times \mathfrak{so}(3)$.

Différentielles du potentiel z

D : dérivation covariante plate dans l'algèbre de Lie $\mathbb{R} \times \mathfrak{so}(3)$.

$D^2 z = g$: métrique de Fisher-Rao.

$D^3 z = Dg$: tenseur d'Amari-Chentsov.

$D^4 z = D^2 g$: intervient dans la « courbure Hessienne ».

Contribution interne

$z(\beta,\omega) = \mathsf{z}_{\mathrm{int}}(\beta) + \mathsf{z}_{\mathrm{rot}}(\beta\omega^2)$. Posons $u = 2/\sqrt{\beta}$.

Théorème

$$
\begin{aligned}
D^2\,\mathsf{z}_{\mathrm{int}} &= \frac{3}{2}\beta \mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u \\
D^3\,\mathsf{z}_{\mathrm{int}} &= 3\beta^{3/2}\mathrm{d}u^{\otimes 3} \\
D^4\,\mathsf{z}_{\mathrm{int}} &= 9\beta^{2}\mathrm{d}u^{\otimes 4} \\
D^n\,\mathsf{z}_{\mathrm{int}} &= (n-1)!\beta^{n/2}\frac{3}{2}\mathrm{d}u^{\otimes n}
\end{aligned}
$$

Potentiel rotationnel

Posons $I_\infty := \lim_{\beta\omega^2\to\infty} I = mR^2$ ainsi que les coordonnées $(u = \frac{2}{\sqrt{\beta}}, \omega = -\frac{r}{\beta})$.

Théorème

$$D^2 z_{\mathrm{rot}} \underset{\beta\omega^2\to\infty}{=} \beta\left(\frac{3}{2}\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}u + I_\infty\left\langle \mathrm{d}\omega \otimes \mathrm{d}\omega\right\rangle\right) + o(1)$$

$$D^3 z_{\mathrm{rot}} \underset{\beta\omega^2\to\infty}{=} \beta^{3/2}\left(3\mathrm{d}u^{\otimes 3} + I_\infty \mathrm{d}u\cdot\left\langle \mathrm{d}\omega \otimes \mathrm{d}\omega\right\rangle\right) + o(1)$$

$$D^4 z_{\mathrm{rot}} \underset{\beta\omega^2\to\infty}{=} \beta^{2}\left(9\mathrm{d}u^{\otimes 4} + I_\infty \mathrm{d}u\cdot\mathrm{d}u\cdot\left\langle \mathrm{d}\omega \otimes \mathrm{d}\omega\right\rangle\right) + o(1)$$

$$D^n z_{\mathrm{rot}} \underset{\beta\omega^2\to\infty}{=} \beta^{\frac{n}{2}}\left(\frac{3}{2}(n-1)!\mathrm{d}u^{\otimes n} + I_\infty \mathrm{d}u^{\cdot n-2}\cdot\left\langle \mathrm{d}\omega \otimes \mathrm{d}\omega\right\rangle\right) + o(1)$$

Différentielles du potentiel total

$D^n z$

$$
\begin{aligned}
g = D^2 z &\underset{\beta\omega^2\to\infty}{=} \beta\left(3\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u + I_\infty \langle \mathrm{d}\omega \otimes \mathrm{d}\omega \rangle\right) + o(1) \\
D^3 z &\underset{\beta\omega^2\to\infty}{=} \beta^{3/2}\left(6\mathrm{d}u^{\otimes 3} + I_\infty \mathrm{d}u \cdot \langle \mathrm{d}\omega \otimes \mathrm{d}\omega \rangle\right) + o(1) \\
D^4 z &\underset{\beta\omega^2\to\infty}{=} \beta^{2}\left(18\mathrm{d}u^{\otimes 4} + I_\infty \mathrm{d}u \cdot \mathrm{d}u \cdot \langle \mathrm{d}\omega \otimes \mathrm{d}\omega \rangle\right) + o(1) \\
D^n z &\underset{\beta\omega^2\to\infty}{=} \beta^{\frac{n}{2}}\left(3(n-1)!\mathrm{d}u^{\otimes n} + I_\infty \mathrm{d}u^{\cdot n-2} \cdot \langle \mathrm{d}\omega \otimes \mathrm{d}\omega \rangle\right) + o(1)
\end{aligned}
$$

Différentielles du potentiel total

$D^n z$

$$g = D^2 z \underset{\beta\omega^2\to\infty}{=} \beta \left(3\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u + I_\infty \langle \mathrm{d}\omega \otimes \mathrm{d}\omega\rangle\right) + o(1)$$

$$D^3 z \underset{\beta\omega^2\to\infty}{=} \beta^{3/2} \left(6\mathrm{d}u^{\otimes 3} + I_\infty \mathrm{d}u \cdot \langle \mathrm{d}\omega \otimes \mathrm{d}\omega\rangle\right) + o(1)$$

$$D^4 z \underset{\beta\omega^2\to\infty}{=} \beta^2 \left(18\mathrm{d}u^{\otimes 4} + I_\infty \mathrm{d}u \cdot \mathrm{d}u \cdot \langle \mathrm{d}\omega \otimes \mathrm{d}\omega\rangle\right) + o(1)$$

$$D^n z \underset{\beta\omega^2\to\infty}{=} \beta^{\frac{n}{2}} \left(3(n-1)!\mathrm{d}u^{\otimes n} + I_\infty \mathrm{d}u^{\cdot n-2} \cdot \langle \mathrm{d}\omega \otimes \mathrm{d}\omega\rangle\right) + o(1)$$

Corps rigide sphérique

$$g_{\text{rigide}} = \beta \left(C\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u + I \langle \mathrm{d}\omega \otimes \mathrm{d}\omega\rangle\right)$$

Rigidité asymptotique

Théorème

Lorsque $\beta\omega^2 \to \infty$, $D^n z$ *se comporte à l'ordre dominant comme pour un corps rigide sphérique avec*

$$I = I_\infty \langle \cdot \,, \ \cdot \rangle = mR^2 \langle \cdot \,, \ \cdot \rangle$$
$$C = 3$$

Rigidité asymptotique

Théorème

Lorsque $\beta\omega^2 \to \infty$, $D^n z$ se comporte à l'ordre dominant comme pour un corps rigide sphérique avec

$$\begin{aligned} I &= I_\infty \langle \cdot\,, \ \cdot \rangle = mR^2 \langle \cdot\,, \ \cdot \rangle \\ C &= 3 \end{aligned}$$

Capacité calorifique limite $C = 3$:
gaz parfait inerte $C = 3/2 \bigoplus$ degrés de liberté de position : $3/2$.

Géométrie asymptotique de l'ensemble de Gibbs

Théorème

Riem *: tenseur de courbure Riemannienne de* $(\Omega, g = D^2 z)$.

$$\mathrm{Riem} \underset{\beta\omega^2 \to \infty}{=} -\frac{1}{12} \frac{g \owedge g}{2} + o(1)$$

Pour l'espace hyperbolique de courbure sectionnelle $-k$ on a

$$\mathrm{Riem} = -k \frac{g \owedge g}{2}$$

Conclusion

Thermodynamique de Souriau

G-variété Hamiltonienne $\implies$ Ensemble de Gibbs : G-variété Hessienne et Poisson Hamiltonienne.

Conclusion

Thermodynamique de Souriau

G-variété Hamiltonienne $\implies$ Ensemble de Gibbs : G-variété Hessienne et Poisson Hamiltonienne.

Ensembles de Gibbs

- Corps rigide $\implies$ géométrie hyperbolique,

Conclusion

Thermodynamique de Souriau

G-variété Hamiltonienne $\implies$ Ensemble de Gibbs : G-variété Hessienne et Poisson Hamiltonienne.

Ensembles de Gibbs

- Corps rigide $\implies$ géométrie hyperbolique,
- Gaz parfait dans une sphère :
  - structure de Poisson,

Conclusion

Thermodynamique de Souriau

G-variété Hamiltonienne $\implies$ Ensemble de Gibbs : G-variété Hessienne et Poisson Hamiltonienne.

Ensembles de Gibbs

- Corps rigide $\implies$ géométrie hyperbolique,
- Gaz parfait dans une sphère :
    - structure de Poisson,
    - géométrie Hessienne difficile

Conclusion

Thermodynamique de Souriau

G-variété Hamiltonienne $\implies$ Ensemble de Gibbs : G-variété Hessienne et Poisson Hamiltonienne.

Ensembles de Gibbs

- Corps rigide $\implies$ géométrie hyperbolique,
- Gaz parfait dans une sphère :
  - structure de Poisson,
  - géométrie Hessienne difficile, « **asymptotiquement rigide** ».

Conclusion

Thermodynamique de Souriau

G-variété Hamiltonienne $\Longrightarrow$ Ensemble de Gibbs : G-variété Hessienne et Poisson Hamiltonienne.

Ensembles de Gibbs

- Corps rigide $\Longrightarrow$ géométrie hyperbolique,
- Gaz parfait dans une sphère :
  - structure de Poisson,
  - géométrie Hessienne difficile, « **asymptotiquement rigide** ».

Remarques

- $\mathfrak{g}$-variétés hamiltoniennes,

Conclusion

Thermodynamique de Souriau

G-variété Hamiltonienne $\Longrightarrow$ Ensemble de Gibbs : G-variété Hessienne et Poisson Hamiltonienne.

Ensembles de Gibbs

- Corps rigide $\Longrightarrow$ géométrie hyperbolique,
- Gaz parfait dans une sphère :
    - structure de Poisson,
    - géométrie Hessienne difficile, ≪ **asymptotiquement rigide** ≫.

Remarques

- $\mathfrak{g}$-variétés hamiltoniennes,
- fibration principales de familles exponentielles.

Bibliographie

- BARBARESCO, Frédéric (2022). « Chapter 4 - Symplectic theory of heat and information geometry ». In : *Geometry and Statistics*. Sous la dir. de Frank NIELSEN, Arni S.R. SRINIVASA RAO et C.R. RAO. T. 46. Handbook of Statistics. Elsevier, p. 107-143.
- MARLE, Charles-Michel (28 oct. 2016). *Les travaux de Jean-Marie Souriau en mécanique statistique et en thermodynamique*. URL : https://marle.perso.math.cnrs.fr/diaporamas/SeminaireHelein2016handout.pdf.
- — (2020). « On Gibbs States of Mechanical Systems with Symmetries ». In : *Journal of Geometry and Symmetry in Physics* 57, p. 45-85.
- NEUTTIENS, Guillaume (2022). *États de Gibbs d'une action hamiltonienne*.
- SHIMA, Hirohiko (2007). *The Geometry of Hessian Structures*. WORLD SCIENTIFIC. DOI : 10.1142/6241.
- SOURIAU, Jean-Marie (1970). *Structure des systèmes dynamiques*.