МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторних робіт
з дисципліни «Чисельні методи» для студентів
напряму підготовки 6.050103 «Програмна інженерія»

Ухвалено
Вченою радою ФПМ НТУУ «КПІ»

Київ
НТУУ «КПІ»
2013

Чисельні методи розв’язання математичних задач: методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Чисельні методи» для студентів напряму підготовки 6.050103 «Програмна інженерія» [Електронне видання] / І. А. Дичка, М. В. Онай. – К. : НТУУ «КПІ», 2013. – 119 с.

Навчально-методичне видання

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ
МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ З ДИСЦИПЛІНИ «ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ» ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ 6.050103 «ПРОГРАМНА ІНЖЕНЕРІЯ»

Методичні вказівки розроблено для ознайомлення студентів з теоретичними відомостями та практичними прийомами розв’язання математичних задач за допомогою комп’ютерних засобів, а також вимогами до виконання лабораторних робіт, зокрема правилами їх оформлення. Навчальне видання призначене для студентів, які навчаються за напрямом 6.050103 «Програмна інженерія» факультету прикладної математики НТУУ «КПІ».

Автори: *Дичка Іван Андрійович*, доктор техн. наук, проф.
Онай Микола Володимирович, асистент

Відповідальний за випуск *Сулема Євгенія Станіславівна*, канд. техн. наук, доц.

Рецензент *Романкевич Віталій Олексійович*, канд. техн. наук, доц.

ЗМІСТ

ВСТУП

Прості математичні задачі малої розмірності, що вивчаються в курсі математичного аналізу та лінійної алгебри, допускають можливість отримання аналітичних розв’язків. В той же час при моделюванні систем та процесів виникають складні математичні задачі великої розмірності, які можуть не мати аналітичних розв’язків та вимагати застосування чисельних методів, що вивчаються в рамках відповідної дисципліни. До того ж складні математичні задачі розв’язувати вручну майже неможливо, тому виникає необхідність у застосуванні комп’ютерних засобів у поєднанні з чисельними методами для розв’язання таких задач. Тому сфера застосувань чисельних методів є досить широкою.

У даних методичних вказівках розглядаються основні принципи та практичні прийоми побудови методів та алгоритмів розв’язання математичних задач на комп’ютері. Методичні вказівки складаються з 5 розділів, кожен з яких присвячений виконанню певної лабораторної роботи з дисципліни «Чисельні методи», яка входить до складу циклу “Дисципліни вільного вибору студентів. Професійна складова. Перший блок дисциплін” навчального плану підготовки бакалаврів за напрямом 6.050103 «Програмна інженерія».

В кожному розділі надаються короткі теоретичні відомості з певної теми, завдання на лабораторну роботу з цієї теми, вказівки щодо виконання завдання, а також наводяться вимоги до оформлення звіту з виконаної лабораторної роботи та контрольні питання для самоперевірки.

Лабораторні роботи з дисципліни «Чисельні методи» розраховані на 36 академічних годин аудиторних занять.

Загальні вимоги до оформлення звіту з лабораторних робіт

Лабораторна робота має бути подана в електронному та друкованому вигляді.

Електронна версія зберігається в банку даних кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем ФПМ НТУУ "КПІ". Файл з копією лабораторної роботи здається на кафедру разом з друкованим примірником безпосередньо під час захисту. Формат файлу *.docx або *.doc, або *.*rtf*, або *.*pdf*.

Звіт необхідно друкувати на одному боці аркуша білого паперу формату А4 (210х297 мм).

Основний текст звіту має бути набраний з дотриманням таких вимог:

- шрифт Times New Roman 14 пт;
- відступ першого рядка 12.5 мм ;
- міжрядковий інтервал 1.5;
- вирівнювання по ширині;
- поля: верхнє та нижнє – 20 мм; ліве – 30 мм; праве – 15 мм;
- від краю до верхнього/нижнього колонтитула 12.5 мм.

Текст в таблицях має бути набраний з дотриманням таких вимог (при необхідності дозволяється таблиці розміщувати в альбомному форматі):

- шрифт Times New Roman 12 пт;
- міжрядковий інтервал 1.0;
- інтервал перед 6 пт;
- інтервал після 6 пт.

Всі рисунки повинні мати під рисунковий напис. Підрисунковий напис вирівнюється по центру і починається зі скорочення “Рис.”, потім ставиться пробіл та порядковий номер рисунку. Після номера рисунка ставиться крапка, пробіл та пишеться назва рисунка.

На всі рисунки розміщені у звіті має бути посилання в тексті звіту. Посилання на рисунок у тексті виконується за його номером, розташованим після скорочення “рис.”.

Нумерацію сторінок виконують арабськими цифрами. Першою сторінкою звіту з лабораторної роботи є оформлений за зразком титульний аркуш, який включають до загальної нумерації, але номер сторінки на ньому не проставляють. На всіх наступних сторінках обов’язково проставляють у правому нижньому куті номер сторінки без крапки в кінці використовуючи шрифт Times New Roman 10 пт.

На кожній сторінці, окрім титульної, в правому верхньому куті має бути надруковано прізвище, ініціали студента та номер групи.

Лабораторна робота №1.1

тема: “Нелінійні рівняння з одним невідомим”

Мета роботи – опанувати методи наближеного розв’язання нелінійних рівнянь.

Короткі теоретичні відомості

Розглянемо задачу обчислення коренів рівняння виду

$$f(x)=0, \tag{1.1.1}$$

де $f: R_1 \to R_1$ – алгебраїчна або трансцендентна функція. Такі рівняння називають скалярними.

Процедура розв’язання нелінійних рівнянь складається з двох етапів: локалізація коренів і подальше уточнення коренів.

Впевнитись, що на певному відрізку $[a;b]$ дійсно є нуль неперервної функції $f(x)$, можна аналітичним способом використовуючи наведені нижче теореми або графічним способом.

Теорема 1.1.1 (Больцано-Коші). *Якщо неперервна на відрізку* $[a;b]$ *функція* $f(x)$ *на його кінцях приймає протилежні знаки, тобто*

$$f(a)f(b)<0, \tag{1.1.2}$$

то на проміжку $(a;b)$ *вона хоча б один раз обертається в нуль.*

Теорема 1.1.2. *Неперервна строго монотонна функція* $f(x)$ *має й до того ж єдиний нуль на відрізку* $[a;b]$ *тоді та тільки тоді, коли на його кінцях вона приймає значення різних знаків.*

Теорема 1.1.3. *Нехай* $f \in C^1[a;b]$. *Тоді, якщо* $f'(x)$ *не змінює знак на* $(a;b)$, *то умова (1.1.2) є необхідною та достатньою для того, щоб рівняння (1.1.1) мало й до того ж єдиний корінь на* $[a;b]$.

Нехай функція $f(x)$ визначена та неперервна при всіх $x \in [a;b]$ та на $[a;b]$ змінює знак. Візьмемо довільну точку $c \in (a;b)$. Якщо на відрізку $[a;b]$ існує єдиний корінь, то наступні ситуації є взаємовиключними:

- $f(a)f(c) < 0$ – корінь знаходиться на інтервалі $(a;c)$;
- $f(c)f(b) < 0$ – корінь знаходиться на інтервалі $(c;b)$;
- $f(c) = 0$ – точка c є шуканим коренем.

Далі ця процедура може бути застосована для відрізків $[a;c]$ або $[c;b]$ відповідно та повторюватись циклічно.

Метод поділу навпіл

Метод поділу навпіл реалізує найпростіший спосіб вибору пробної точки – поділ проміжку існування кореня навпіл. Якщо за *k*-те наближення цим методом до кореня ξ рівняння (1.1.1) візьмемо x_k, що є серединою отриманого на *k*-му кроці відрізку $[a_k;b_k]$ в результаті послідовного звуження даного відрізку $[a;b]$, приймаючи $a_1 = a$, $b_1 = b$, тоді прийдемо до нерівності

$$|\xi - x_k| < \frac{b-a}{2^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.1.3}$$

Нерівність (1.1.3) є апріорною оцінкою абсолютної похибки отриманого кореня та дає можливість обчислити кількість кроків (ітерацій) методу поділу навпіл, яка є достатньою для отримання кореня ξ з заданою точністю ε.

Метод хорд

Можливо досягти кращих результатів збіжності, якщо відрізок $[a;b]$ поділити точкою c на частини не навпіл, а пропорційно величинам ординат $f(b)$ та $f(a)$ графіка даної функції $f(x)$:

$$c = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}. \tag{1.1.4}$$

Метод Ньютона (метод дотичних)

Ітераційний процес метода Ньютона визначається наступною формулою

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \tag{1.1.5}$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots$ та вважається, що на елементах послідовності (x_k) перша похідна даної функції не дорівнює нулю.

Теорема 1.1.4. *Нехай на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ має першу (не дорівнює нулю) та другу похідні сталого знаку та нехай*

$$f(a)\,f(b) < 0.$$

Тоді якщо точка x_0 обрана на $[a;b]$ таким чином, що

$$f(x_0)\,f''(x_0) > 0, \tag{1.1.6}$$

то послідовність (x_k), що починається з x_0 та визначається методом Ньютона (1.1.5), монотонно збігається до кореня $\xi \in (a;b)$ рівняння (1.1.1).

Модифікації метода Ньютона

Найпростішим способом спрощення метода Ньютона є використання одного й того ж крокового множника $\dfrac{1}{f'(x_0)}$, тобто виконання обчислення за формулою

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}, \tag{1.1.7}$$

де $k \in \mathbb{N}_0$. Такий метод називають *спрощеним методом Ньютона*.

Якщо завчасно відомо, що число m – показник кратності кореня ξ, то для збільшення швидкості збіжності метода Ньютона в формулу (1.1.5) рекомендується ввести корегуючий параметр m:

$$x_{k+1} = x_k - m \cdot \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{1.1.8}$$

Таку модифікацію називають *методом Ньютона-Шрьодера*, також цей метод називають *методом Ньютона з параметром*.

Однією з модифікацій метода Ньютона (1.1.5), яка має надлінійну збіжність є *різницевий або дискретний метод Ньютона*, що визначається за наступною ітераційною формулою

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \cdot h_k}{f(x_k + h) - f(x_k)}, \tag{1.1.9}$$

де $k \in \mathbb{N}_0$, а h_k – малий параметр, котрим повинен розпоряджатися обчислювач.

Розглядаючи різноманітні способи задання параметра h_k можна отримати ітераційні формули *метода Стефенсена*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\left(f(x_k)\right)^2}{f\left(x_k + f(x_k)\right) - f(x_k)} \tag{1.1.10}$$

та ітераційні формули *метода січних*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f\left(x_k\right)\left(x_{k-1} - x_k\right)}{f\left(x_{k-1}\right) - f\left(x_k\right)}, \tag{1.1.11}$$

де $k \in \mathbb{N}$, а значення x_0 та x_1 задаються обчислювачем.

Доведено, що метод січних має порядок збіжності принаймні $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

Широковживаним класом методів розв’язання нелінійних рівнянь є гібридні методи. Одним з представників цього класу методів є метод хорд-дотичних. В цьому методі послідовно обчислюється $x_k^{хорд}$ та $x_k^{дот}$ за методом хорд та дотичних відповідно.

Метод простих ітерацій

Розглянемо рівняння

. (1.1.12)

Функцію будемо вважати неперервною в області осі *Ox*, що досліджується.

Знаходження коренів рівнянь виду (1.1.12) називається *задачею про нерухому точку*.

Визначення 1.1.1. *Неперервна функція називається стискальною (функцією стиснення) на відрізку , якщо*

1) ;

2) .

В тому випадку коли на деякому проміжку $\left[a, b\right]$ функція $\varphi\left(x\right)$ задовольняє умовам стиснення, що зафіксовані визначенням 1.1 рівняння $x = \varphi\left(x\right)$ має й при тому єдиний корінь $\xi \in \left[a, b\right]$.

Теорема 1.1.5. *Нехай функція* $\varphi(x)$ *визначена та диференційовна на відрізку* $[a,b]$. *Тоді якщо виконуються умови:*

1) $\varphi(x)\in[a,b]\quad \forall x\in[a,b]$,

2) $\exists\, q : |\varphi'(x)|\le q<1\quad \forall x\in(a,b)$,

то рівняння $x=\varphi(x)$ *має й притому єдиний на* $[a,b]$ *корінь* ξ*; до кореня* ξ *збігається визначена методом простих ітерацій* $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ *послідовність, починаючи з будь-якого* $x_0\in[a,b]$*; при цьому є справедливими оцінки похибки* $\forall k\in\mathbb{N}$*:*

$$|\xi-x_k|\le\frac{q}{1-q}|x_k-x_{k-1}|, \tag{1.1.13}$$

$$|\xi-x_k|\le\frac{q^k}{1-q}|x_1-x_0|. \tag{1.1.14}$$

Отриману апостеріорну оцінку (1.1.13) можна використовувати на практиці для отримання критерія завершення ітераційного процесу.

Апріорну оцінку (1.1.14) можна використовувати для обчислення необхідної кількості ітерацій, що є достатньою для отримання кореня з заданою точністю ξ.

В загальному випадку перехід від (1.1.1) до (1.1.12) здійснюється таким чином: множать ліву та праву частину рівняння (1.1.1) на відмінний від нуля параметр $-\lambda$ та до обох частин додають x; в результаті отримують рівнозначне (1.1.1) рівняння

$$x=x-\lambda f(x), \tag{1.1.15}$$

яке має вигляд (1.1.12), де $\varphi(x)=x-\lambda f(x)$. Далі параметр λ підбирається таким, щоб похідна $\varphi'(x)=1-\lambda f'(x)$ в потрібній області була малою за модулем, а якщо потрібно, то й мала певний сталий знак.

Конкретні рекомендації по фіксуванню λ в (1.1.15) можуть бути дані у випадку, коли, наприклад, відомі оцінки зверху та знизу для похідної початкової функції $f(x)$.

Методи розв’язання алгебраїчних рівнянь

Алгебраїчне рівняння є частковим випадком нелінійного рівняння, тому всі розглянуті нами методи для розв’язання нелінійних рівнянь є справедливими для алгебраїчних рівнянь. Окрім цього для розв’язання алгебраїчних рівняння існують методи, що не вимагають локалізації коренів, але вони дають більшу похибку ніж загальні методи розв’язання нелінійних рівнянь застосовані для алгебраїчного рівняння.

Розглянемо алгебраїчне рівняння

$$f(z)=\sum_{i=0}^{n} a_i z^i = 0, \tag{1.1.16}$$

де a_i – дійсні числа, z – комплексна змінна.

Всі корені рівняння (1.1.16) мають задовольняти нерівність

$$|z| < 1+\frac{A}{|a_n|}, \tag{1.1.17}$$

де $A=\max\{\,|a_0|,|a_1|,...,|a_{n-1}|\,\}$.

Виконаємо заміну $z=\dfrac{1}{y}$ в рівнянні (1.1.16), отримаємо

$$P(z)=\frac{1}{y^n}Q(y), \tag{1.1.18}$$

де $Q(y)=\sum_{i=0}^{n} a_i y^{n-i}$.

Корені $y_k = \frac{1}{z_k}$ $\left(k = \overline{1..n}\right)$ поліному $Q(y)$ мають задовольняти нерівність (1.1.17), тобто

$$|z_k| > \frac{1}{1+\frac{B}{|a_0|}}, \tag{1.1.19}$$

де $B = \max\left\{ \, |a_1|, |a_2|, ..., |a_n| \, \right\}$.

Ввівши позначення $R = 1 + \frac{A}{|a_n|}$ та $r = \frac{1}{1+\frac{B}{|a_0|}}$ можна стверджувати, що всі корені рівняння (1.1.16) розміщені в кільці

$$r < |z| < R. \tag{1.1.20}$$

Отже, числа r та R є відповідно нижньою та верхньою границями додатних коренів рівняння (1.1.16).

Припустимо, що всі коефіцієнти рівняння (1.1.16) дійсні і $a_n > 0$ та це рівняння має дійсні корені, тому замінимо змінну z на x.

Теорема 1.1.6 (теорема Лагранжа). *Нехай* $a_n > 0$ *та* $a_{n-k+1}\,(k>1)$ *перший зліва з від'ємних коефіцієнтів полінома* $P(x) = 0$. *Тоді за верхню границю додатних коренів рівняння* $P(x) = 0$ *може бути прийняте число*

$$R = 1 + \sqrt[k]{\frac{C}{a_n}}, \tag{1.1.21}$$

де C *– найбільша з абсолютних величин від'ємних коефіцієнтів поліному* $P(x)$.

Теорема 1.1.7 (теорема Вестерфільда). *Модулі всіх коренів приведеного многочлена* $P_n(x)$ *(тобто при* $a_n = 1$*) знаходяться в колі, радіус якого не перевищує суми двох найбільших з чисел* $\sqrt[t]{|a_{n-t}|}$, *де* $t = \overline{1..n}$.

Зрозуміло, що будь-який метод знаходження верхньої границі додатних коренів можна пристосувати для знаходження нижньої (лівої) границі від'ємних коренів.

Одним з найбільш ефективних методів знаходження *всіх або майже всіх* коренів алгебраїчного рівняння, як дійсних так і комплексних, є *метод Лобачевського*, запропонований в 1834 р. Цей метод називають також *методом Лобачевського-Греффе* або *методом Данлена* на честь швейцарського математика Греффе та французького математика Данлена, що були також причетні до однієї з перших версій цього методу.

Розглянемо випадок коли алгебраїчне рівняння має *різні за абсолютною величиною дійсні корені*.

Нехай дано рівняння

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0, \tag{1.1.22}$$

про корені якого відомо, що всі вони дійсні та задовольняють умову

$$|x_1| \gg |x_2| \gg \ldots \gg |x_n|. \tag{1.1.23}$$

Розглянемо процес кадрування коренів. Запишемо рівняння (1.1.22) у такому вигляді:

$$a_n \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x - x_i \right) = 0 \tag{1.1.24}$$

Рівняння, корені якого протилежні за знаком кореням рівняння (1.1.24) буде мати вигляд:

$$a_n \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x + x_i \right) = 0 \tag{1.1.25}$$

Перемножуючи ці два рівняння, отримаємо:

$$a_n^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x^2 - x_i^2 \right) = 0. \tag{1.1.26}$$

Позначимо коефіцієнти останнього рівняння, як b_k $\left(k=\overline{0..n}\right)$, тобто коефіцієнт b_k буде при x^{2k} та отримується з коефіцієнтів початкового рівняння наступним чином:

$$b_k = a_k^2 + 2\cdot\sum_{j=1}^{n-k}(-1)^j a_{k-j}a_{k+j}\,,\quad k=\overline{0..n}. \tag{1.1.27}$$

Нехай ми виконали p раз процес квадрування коренів та отримали рівняння

$$\sum_{i=0}^{n} b_i y^i = 0 \tag{1.1.28}$$

Коренями цього рівняння є числа $y_k = -x_k^{2^p}$ $\left(k=\overline{1..n}\right)$, звідки отримуємо:

$$x_k = \pm\sqrt[2^p]{-y_k} = \sqrt[2^p]{\frac{b_{n+k-2}}{b_{n+k-1}}}\quad \left(k=\overline{1..n}\right). \tag{1.1.29}$$

Виконаємо квадрування коренів рівняння (1.1.28), нехай після цього отримано рівняння:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i z^i = 0\,, \tag{1.1.30}$$

для якого виконуються співвідношення

$$c_k = b_k^2\,,\quad k=\overline{0..n}\,, \tag{1.1.31}$$

та є очевидним що:

$$|\,x_k\,| = \sqrt[2^{p+1}]{\frac{c_{n+k-2}}{c_{n+k-1}}} = \sqrt[2^p]{\frac{b_{n+k-2}}{b_{n+k-1}}}\,. \tag{1.1.32}$$

Таким чином, при виконанні умови (1.1.31) ми не можемо збільшити точність обчислення коренів.

Тому *процес квадрування продовжується поки подвійні добутки не перестануть впливати на перші головні члени коефіцієнтів перетвореного рівняння*.

Якщо корені потрібно знайти з більшою точністю, то після обчислення їх наближених значень за методом Лобачевського доцільно провести їх уточнення, використовуючи загальні методи розв’язання нелінійних рівнянь. Застосування цих методів для уточнення вимагає меншого об’єму обчислень та дозволяє уникнути труднощів роботи з дуже великими числами, з якими приходиться зустрічатися в методі Лобачевського.

Завдання на виконання лабораторної роботи

1. Розробити програму на мові програмування *C#* у середовищі розробки Visual Studio 2005 (або вище), яка буде працювати у віконному режимі та реалізовувати метод Лобачевського розв'язання алгебраїчних рівнянь і дозволяти уточнювати (точність та проміжок локалізації задаються користувачем з клавіатури) корені будь-яких нелінійних рівнянь методами, що задані за варіантом (*табл.* 1.1.1, *табл.* 1.1.4). Розроблена програма повинна виводити на екран всі проміжні результати.

2. За допомогою розробленої програми з п.1 розв'язати задані за варіантом рівняння (*табл.* 1.1.1, *табл.* 1.1.2) на заданому проміжку з точністю $\varepsilon \le 10^{-7}$.

3. При виконанні завдання з п.2 необхідно побудувати графіки залежності наближеного значення кореня рівняння від кількості ітерацій починаючи з початкового наближення. Якщо рівняння має більше двох коренів, то побудувати графіки для двох будь-яких коренів.

4. Знайти верхню та нижню границю додатних і від'ємних коренів заданого за варіантом алгебраїчного рівняння (*табл.* 1.1.3).

5. За допомогою розробленої програми з п.1, знайти корені, заданого за варіантом алгебраїчного рівняння (*табл.* 1.3), методом

Лобачевського та уточнити отримані корені будь-яким методом розв'язання нелінійних рівнянь.

6. Задані за варіантом, рівняння розв'язати у MatLab 7.0 (або вище) або у MathCAD 15.0 (або вище), або у Mathematica 7.0 (або вище). Задане за варіантом, алгебраїчного рівняння необхідно розв'язати, як мінімум двома функціями наявними у відповідному математичному пакеті. Наприклад, в математичному пакеті MatLab 7.0 наявна функція solve для розв'язання будь-якого нелінійного рівняння та функція roots для розв'язання алгебраїчного рівняння.

Примітка: програма розв'язання нелінійних рівнянь, написана в математичному паекті, має будувати графіки для локалізації коренів та знаходити корені на локалізованому проміжку. Якщо буде обрано математичний пакет *MatLab*, то програма має бути написана, як файл-функція, яку можна викликати з командного рядка. Вхідним параметрами даної функції має бути номер рівняння, а вихідним параметром масив коренів даного рівняння.

Вимоги до структури звіту

Звіт з лабораторної роботи №1.1 має складатися з таких структурних підрозділів:

1. Постановка задачі за варіантом.
2. Математичне підгрунття для виконання даної лабораторної роботи (перелік формул, що були використані при розробленні програми на мові програмування C#).
3. Основні етапи процесу локалізації коренів рівняння, що розв'язується.
4. Значення коренів, заданих за варіантом, рівнянь (*табл.* 1.1.1, *табл.* 1.1.2) отриманих кожним з методів:

Рівняння № ____

<table>
<tr><td>Метод</td><td>C#</td><td>MatLab або
MathCAD або
Mathematica</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

5. Графік залежності наближеного значення кореня рівняння від кількості ітерацій починаючи з початкового наближення.
6. Процес знаходження верхньої та нижньої границі додатних і від'ємних коренів, заданого за варіантом алгебраїчного рівняння (*табл.* 1.1.3).

7. Значення коренів, заданого за варіантом, алгебраїчного рівняння (*табл*. 1.1.3):

Алгебраїчне рівняння

Метод	C#	MatLab або MathCAD або Mathematica

8. Висновки.

Варіанти завдань

Номер варіанту визначається за наступною таблицею:

№ за списком викладача	Варіант №
1	4
2	19
3	15
4	7
5	14
6	2
7	22
8	24
9	20
10	9
11	25
12	8
13	17

№ за списком викладача	Варіант №
14	13
15	16
16	3
17	12
18	5
19	21
20	6
21	23
22	1
23	10
24	11
25	18

Таблиця 1.1.1. Розподіл рівнянь та методів за варіантами

Варіант №	Рівняння №	Методи
1	15	4
	27	0, 8
2	8	7
	35	1, 8
3	3	8, 1
	30	3
4	17	0
	21	3, 8
5	4	1
	19	2, 8
6	28	0
	13	5, 8
7	7	0
	26	7, 8
8	47	1
	43	5, 8
9	14	1
	33	4, 8
10	48	7
	45	8, 1
11	20	6, 8
	9	1
12	46	0
	41	8, 5
13	40	0
	49	3, 8
14	2	1
	22	7, 8
15	23	8
	12	0, 3
16	11	8
	29	1, 5

Продовження табл. 1.1.1

Варіант №	Рівняння №	Методи
17	5	6
	34	1, 8
18	25	7
	10	0, 8
19	24	1
	16	3, 8
20	44	3
	39	0, 8
21	42	8
	37	0, 6
22	36	1
	1	4, 8
23	6	7
	32	1, 8
24	18	3
	31	0, 8
25	50	5
	38	1, 8

Таблиця 1.1.2. Перелік нелінійних рівнянь

№	Рівняння	Проміжок
1	$e^x + \sin x = 10x - x^{10} - e^{\cos x}$	$(-\infty; \infty)$
2	$e^{x^5} + \sin x - 10x = x^9 - \sin(\cos x)$	$(-\infty; \infty)$
3	$tgx = 10x - \sin(e^x) - x^5 + e^{\cos x}$	$[-1.5; 1.5]$
4	$x^2 - \cos^2 x + \sin x = \sqrt{13 + x}$	$[-13; \infty)$
5	$\sqrt{1 + \cos x} = e^{\sqrt{\lvert x \rvert}} - \cos^2 x + x^3$	$(-\infty; \infty)$

Продовження табл. 1.1.2

№	Рівняння	Проміжок
6	$\ln\left(1+x^2\right)-\sin^3 x+x=\sqrt{1+\cos x^3}$	$(-\infty;\infty)$
7	$1+x^7-\ln\left(1+\pi\cos x^3\right)+x^{10}=tg^5 x-x$	$[-1.2;1.2]$
8	$5+x^7\cdot\sin x=x^{13}\cdot\cos(x)\cdot\sqrt{\pi-\cos x^3}$	$[-2.0;10.0]$
9	$x^{13}-ch^5 x+x+x^{30}+5=\ln\left(5+\pi\cdot shx^3\right)^2$	$[-3.0;3.0]$
10	$x^{13}\cdot chx+x^5\cdot shx+x^{15}\cdot\sin x=-13$	$[-4.0;4.0]$
11	$x\cdot chx+x^5\cdot\sin x=-13x-e^x$	$[-10.0;10.0]$
12	$13\sin x\cdot\left(\log_2\left(x\cdot e^x+32\right)+shx^2\right)=x^2$	$[-4.0;4.0]$
13	$e^{chx}+x^5+x^{15}\sin x=13$	$[-4.0;4.0]$
14	$chx+shx+x^2\cdot\log_{10}\lvert x\rvert=x^3+5$	$(-\infty;\infty)$
15	$\cos^3 x+x^2\cdot\log_2\left(shx+chx\right)=x^2-15$	$(-\infty;\infty)$
16	$\cos^3 x+x^3\cdot\left(\log_2\left(shx+chx\right)\right)^3-x^3=5$	$(-\infty;\infty)$
17	$\cos^3 x+x^3 shx-x^5=35$	$(-\infty;\infty)$
18	$\cos^3 x+x^3 e^x=x^6+35$	$(-\infty;\infty)$
19	$x^2+x^3+35=x^6$	$(-\infty;\infty)$
20	$x\sin x+x^5+35=x^3$	$(-\infty;\infty)$
21	$\sin^3 x+x^3=x^2-35$	$(-\infty;\infty)$
22	$\sin^2 x+x^4-x^2=\cos^2 x+13x+10$	$(-\infty;\infty)$

Продовження табл. 1.1.2

№	Рівняння	Проміжок
23	$\sqrt{\lvert\sin x\rvert}+x^3=\cos x+x+10$	$(-\infty;\infty)$
24	$x^3-\cos^2 x-5x=3$	$(-\infty;\infty)$
25	$x^4-\sin^2 x=7x+3$	$(-\infty;\infty)$
26	$\sqrt{\lvert x\rvert}-9x^2+23=\sin x$	$(-\infty;\infty)$
27	$x\sin x=-3\pi$	$[-20.0;20.0]$
28	$x^2\cos x+\log_2 e^x+\pi=9\pi x^3$	$(-\infty;\infty)$
29	$x^2\sin x+3\pi=0$	$[-20.0;20.0]$
30	$x^3\cos x+\pi=9\pi x$	$[-20.0;20.0]$
31	$x^3 chx+\pi-9\pi x=0$	$[-10.0;10.0]$
32	$x^3 shx+\pi=9\pi x$	$[-10.0;10.0]$
33	$x\sin(\pi x)+\pi=\log_2\left(13\pi\lvert x\rvert\right)$	$[-10.0;10.0]$
34	$x^2\cos x\sin x+\pi=x$	$[-10.0;10.0]$
35	$x^2+\pi\log_{10}(13\pi)=5\pi\sin x+2x$	$(-\infty;\infty)$
36	$x^2+\pi\log_2(5\pi)=7\pi\cos x+3x$	$(-\infty;\infty)$
37	$x^3-7\sin(\pi x)+\cos\left(\pi\log_2(5\pi)\right)=3x$	$[-10.0;10.0]$
38	$x^3\cos(x-\pi)+13x+9\cdot e^x\cdot\sin x=0$	$[-10.0;10.0]$
39	$x\sin 5x-5\cdot e^{x-3\pi}\cdot\cos x=0$	$[-2.0;2.0]$

Продовження табл. 1.1.2

№	Рівняння	Проміжок
40	$\operatorname{sh} x \cdot \sin 7x = 5e^x \cos x$	$[-3.0; 3.0]$
41	$\operatorname{ch} x \cdot \sin e^x = 5e^x \cos x$	$[4.0; 5.0]$
42	$\pi \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin(\pi x) + x^2 = 5 \cdot \operatorname{sh} x \cdot \cos x$	$[-5.0; 5.0]$
43	$\sqrt{5-x} \cdot \sin x + x\cos(\pi - x) = 0$	$[-15.0; 5.0)$
44	$\sqrt[3]{5-x}\cos x + x\sin(\pi - 2x) = 0$	$[-10.0; 5.0]$
45	$x \cdot \sin x \cdot \log_2(17-x) = 0.5 \cdot e \cdot x$	$[-15.0; 15.0]$
46	$x\sin e^x + 0.5x = 0$	$[-5.0; 3.0]$
47	$x \cdot \cos(\operatorname{ch}(x-\pi)) + 0.3x = 0$	$[-1.0; 5.0]$
48	$e^{\sin x} + 0.3x = 0$	$(-\infty; \infty)$
49	$e^{\sin x + \cos x + 1} = 3 \cdot \ln x$	$(0; 10)$
50	$3 \cdot \log_{10}(11 \cdot \pi \cdot x + 190) = 13 \cdot \sin(e^x) - 0.5 \cdot \operatorname{sh} x$	$(-\infty; \infty)$

Таблиця 1.1.3. Перелік алгебраїчних рівнянь

№	Коефіцієнти алгебраїчного рівняння $a_7x^7+a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0x=0$							
	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1	55	–336	297	869	–823	–561	63	23
2	–2	71	–171	–589	825	772	–638	–3
3	61	494	680	–636	–777	420	69	–16
4	50	717	675	–887	–791	165	96	–7
5	–74	–789	–840	907	730	–348	–50	19
6	17	268	472	–837	–744	414	124	–34
7	2	48	–67	–722	–141	988	–288	–14
8	–55	119	280	–634	–209	514	131	3
9	–66	73	763	179	–737	–406	–12	15
10	–29	121	363	–783	–924	728	386	5
11	–10	187	–199	–774	585	921	–295	–318
12	8	126	–478	111	936	–720	–78	64
13	150	249	–661	–905	885	917	–290	–256
14	1	–26	–84	555	499	–991	–838	32
15	–136	24	650	–124	–795	145	157	–1

Продовження табл. 1.1.3

№	Коефіцієнти алгебраїчного рівняння $a_7x^7+a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0x=0$							
	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
16	31	–210	–449	850	916	–809	–139	25
17	–42	251	856	–762	–960	628	173	–76
18	82	–251	–943	976	610	–383	–51	11
19	–46	–257	–146	831	819	–596	–568	78
20	33	–37	–432	159	971	–184	–73	14
21	–48	–29	724	–657	–772	726	–25	–12
22	–278	747	625	–966	–207	275	–4	–5
23	–24	219	–207	–963	997	952	–448	–131
24	18	84	–225	–811	565	842	–437	–62
25	12	0	–460	–742	572	742	4	–55

Таблиця 1.1.4. Перелік методів

№	Метод
0	Метод поділу навпіл
1	Метод хорд
2	Метод Ньютона
3	Спрощений метод Ньютона
4	Дискретний метод Ньютона
5	Метод Стефенсена
6	Метод січних
7	Комбінований метод (метод хорд-дотичних)
8	Метод простих ітерацій

Контрольні питання

1. Яким чином виконується локалізація коренів трансцендентного рівняння?
2. Теорема Больцано-Коші.
3. Як можна доповнити теорему Больцано-Коші, щоб функція мала єдиний нуль на заданому проміжку?
4. Який ітераційний процес називається лінійно збіжним?
5. Яку швидкість збіжності має лінійно збіжний ітераційний процес?
6. Коли ітераційний процес має порядок p збіжності?
7. Який ітераційний метод називають глобально збіжним? Наведіть приклади.
8. Який ітераційний метод називають локально збіжним? Наведіть приклади.
9. В чому полягає різниця між методом поділу навпіл та методом хорд?
10. Виходячи з яких міркувань отримують правила побудови ітераційного методу Ньютона?
11. Чому в методі Ньютона першу похідну обмежують знизу, а другу – зверху?
12. В чому полягають переваги та недоліки спрощеного методу Ньютона?
13. Коли доцільно використовувати метод Ньютона з параметром?
14. Як отримати ітераційні формули дискретного метода Ньютона та метода Стефенсена?
15. Виходячи з яких міркувань отримують правила побудови ітераційного методу січних?
16. Ідея та приклад побудови гібридних методів розв’язання нелінійних рівнянь

17. Як формулюється задача про нерухому точку?
18. Яка умова збіжності методу простих ітерацій для розв'язання нелінійного рівняння?
19. Який критерій зупинку ітераційного процесу методу простих ітерацій для розв'язання нелінійного рівняння?
20. В якому випадку є коректним спрощений критерій зупинки ітераційного процесу методу простих ітерацій?
21. Як звести будь-яке нелінійне рівняння до вигляду придатного для застосування методу простих ітерацій?
22. Сформулювати основну теорему алгебри.
23. На основі яких міркувань можна визначити нижню та верхню границю додатних/від'ємних коренів алгебраїчного рівняння?
24. Метод Лагранжа визначення нижньої та верхньої границі додатних/від'ємних коренів алгебраїчного рівняння.
25. Метод Вестерфільда визначення нижньої та верхньої границі додатних/від'ємних коренів алгебраїчного рівняння.
26. Як визначити кількість додатних коренів алгебраїчного рівняння?
27. Метод Лобачевського розв'язання алгебраїчних рівнянь.

Лабораторна робота №2.1

тема: “Системи нелінійних рівнянь”

Мета роботи – опанувати методи наближеного розв’язання систем нелінійних рівнянь.

Короткі теоретичні відомості

В задачах проектування та дослідження поведінки реальних об’єктів, процесів та систем математичні моделі повинні відображати реальні фізичні нелінійні процеси. При цьому ці процеси залежать, зазвичай, від багатьох змінних, тобто вони описуються системами нелінійних рівнянь (СНР) великої розмірності.

Введемо позначення:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \cdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1.1}$$

Тоді систему нелінійних рівнянь можна записати таким чином:

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{2.1.2}$$

відносно векторної функції F та векторного аргументу $\mathbf{x}$.

Геометричний зміст СНР полягає в знаходженні точки перетину n-мірних гіперповерхонь в n-мірному гіперпросторі.

У системи нелінійних рівнянь визначити кількість векторів-розв’язків завчасно неможливо. Система може взагалі не мати розв’язків, мати один розв’язок або безкінечну кількість розв’язків. У зв’язку з цим, методи чисельного розв’язання СНР вимагають, щоб початкове наближення було задане достатньо близько до шуканого розв’язку.

Таким чином розв’язання СНР, так само як і скалярних рівнянь, складається з двох етапів:

1. Локалізація коренів.
2. Уточнення коренів.

Оскільки СНР виникають внаслідок розгляду фізичних та хімічних процесів, то інколи виходячи зі змісту поставленої задачі можна накласти певні обмеження на розв’язок СНР та відповідно на початкове наближення, яке вибирається при уточненні коренів.

Метод простої ітерації (метод послідовних наближень)

Нехай СНР (2.1.2) перетворена до вигляду:

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x}), \tag{2.1.3}$$

де $\Phi(\mathbf{x}) = \left(\varphi_1(\mathbf{x}); \varphi_2(\mathbf{x}); \ldots; \varphi_n(\mathbf{x})\right)^T$.

Задача (2.1.3) є *задачею про нерухому точку* нелінійного відображення $\Phi : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$. Для цієї задачі можна записати рекурентну рівність:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \Phi\left(\mathbf{x}^{(k)}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.1.4}$$

яка визначає метод простої ітерації.

Теорема 2.1.1. *Нехай функція* $\Phi(\mathbf{x})$ *та замкнена множина* $M \subseteq D(\Phi) \subseteq \mathbb{R}_n$ *(* $D(\Phi)$ *це область визначення функції* $\Phi(\mathbf{x})$*) такі, що:*

1. $\Phi(\mathbf{x}) \in M \quad \forall \mathbf{x} \in M$ ***;***

2. $\exists\, q : \left\|\mathbf{J}\left(\Phi(\mathbf{x})\right)\right\| \le q < 1$ *та* $\left\|\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\tilde{\mathbf{x}})\right\| \le q \left\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\right\| \quad \forall \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \in M$.

Тоді $\Phi(\mathbf{x})$ *має в* M *єдину нерухому точку* $\mathbf{x}^*$*; послідовність* $\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$*, що визначається МПІ* (2.1.4)*, при будь-якому* $\mathbf{x}^{(0)} \in M$ *збігається до* $\mathbf{x}^*$ *та справедливі оцінки:*

$$\left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(k)}\right\| \le \frac{q}{1-q}\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\right\| \le \frac{q^k}{1-q}\left\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\right\| \quad \forall k \in \mathbb{N}. \qquad (2.1.5)$$

Одним із серйозних недоліків методу простої ітерації є складність вибору функції $\Phi(\mathbf{x})$, яка задовольняла достатню умову збіжності (п.2 теореми 2.1.1). Тому дуже часто для розв’язання СНР застосовують методи, які є частковим випадком методу простої ітерації.

Якщо $(\mathbf{A}_k)$ – деяка послідовність неособливих дійсних $n \times n$-матриць, то послідовність задач

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{A}_k F(\mathbf{x}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.1.6)$$

має ті самі розв’язки, що й початкове рівняння $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ та для знаходження їх наближеного розв’язку можна записати ітераційний процес

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{A}_k F\left(\mathbf{x}^{(k)}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (2.1.7)$$

що має вид методу простої ітерації (2.1.4) при $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_k(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{A}_k F(\mathbf{x})$.

Метод Ньютона та його модифікації

Припускаючи, що функція $F(\mathbf{x})$ достатню кількість разів неперервна диференційовна, розкладемо її в околі точки $\mathbf{x}^{(k)}$ в ряд Тейлора, залишивши тільки лінійні доданки та отримане розкладення підставимо у рівняння $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$:

$$F\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) + F'\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\right) = \mathbf{0}. \qquad (2.1.8)$$

Замінивши точку $\mathbf{x}$ на $\mathbf{x}^{(k+1)}$ в (2.1.8) отримаємо:

$$F'\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)\left(\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^{(k)}\right)=-F\left(\mathbf{x}^{(k)}\right). \tag{2.1.9}$$

Таким чином ми отримали *метод Ньютона розв'язання СНР в неявному вигляді*. Виразивши $\mathbf{x}^{(k+1)}$ через інші елементи рівності (2.1.9), отримаємо формулу, що визначає *явний метод Ньютона* розв'язання СНР:

$$\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}-\left[F'\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)\right]^{-1}F\left(\mathbf{x}^{(k)}\right). \tag{2.1.10}$$

Існує ряд теорем, що встановлюють швидкість збіжності методу Ньютона в загальному випадку та при тих чи інших припущеннях. Узагальнюючи результати цих теорем відмітимо, що при достатній гладкості $F(\mathbf{x})$ та достатньо гарному початковому наближенні $\mathbf{x}^{(0)}$ збіжність послідовності $\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$, що породжується методом Ньютона, до розв'язку СНР буде квадратичною так само, як і в одномірному випадку.

Якщо матрицю Якобі $F'(\mathbf{x})$ обчислити та знайти обернену до неї лише один раз – в початкові точці $\mathbf{x}^{(0)}$, то отримаємо *спрощений метод Ньютона*:

$$\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}-\left[F'\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\right]^{-1}F\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) \tag{2.1.11}$$

Явний метод Ньютона (2.1.10) можна модифікувати таким чином (цей метод дістав назву *двоступеневий методом Ньютона*):

$$\begin{cases}\mathbf{z}^{(k)}=\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{A}_kF\left(\mathbf{x}^{(k)}\right),\\ \mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{z}^{(k)}-\mathbf{A}_kF\left(\mathbf{z}^{(k)}\right),\end{cases} \tag{2.1.12}$$

де $\mathbf{A}_k=\left[F'\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)\right]^{-1}$.

Пошук оберненої матриці Якобі на кожному кроці явного метода Ньютона (2.1.10) можна виконувати не точно, а наближено. Для цього можна, наприклад, застосувати ітераційний процес Шульца, обмежившись лише одним кроком процесу другого порядку, в якому за початкову матрицю приймається матриця, отримана в результаті попереднього $(k-1)$ -го кроку. Така модифікація методу Ньютона має назву *апроксимаційний аналог №1 метода Ньютона*.

Застосування тієї ж послідовності апроксимацій обернених матриць до найпростішого двоступеневого методу Ньютона (2.1.12) визначає його *апроксимаційний аналог*:

$$\begin{cases} \mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{A}_k F\left(\mathbf{x}^{(k)}\right), \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{A}_k F\left(\mathbf{z}^{(k)}\right), \\ \mathbf{\Psi}_k = \mathbf{I} - F'\left(\mathbf{x}^{(k+1)}\right)\mathbf{A}_k \,, \\ \mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k + \mathbf{A}_k \mathbf{\Psi}_k \,. \end{cases} \tag{2.1.13}$$

Відмітимо, що збільшити швидкість збіжності апроксимаційних аналогів метода Ньютона можна шляхом підвищення порядку апроксимації обернених матриць, наприклад, за рахунок додавання ще одного доданку в формулі для підрахунку $\mathbf{A}_{k+1}$.

Такі методи будемо називати *апроксимаційними аналогами №2 метода Ньютона*.

Явний метод Ньютона можна модифікувати замінивши часткові похідні в матриці Якобі різницевими відношеннями, тобто в якості матриці $\mathbf{A}_k$ використовувати матрицю $\mathbf{V}$ елементи якої обчислюються таким чином:

$$v_{ij} = \frac{f_i\left(x_1, ..., x_j + h_j, ..., x_n\right) - f_i\left(x_1, ..., x_j, ..., x_n\right)}{h_j}, \quad i = 1..n, \; j = 1..n \,. \tag{2.1.14}$$

Шляхом такої дискретизації отримуємо різницевий (або дискретний) метод Ньютона:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{V}_k F\left(\mathbf{x}^{(k)}\right). \qquad (2.1.15)$$

При вдалому виборі послідовності малих векторів $\mathbf{h}^{(k)}$ (сталій або такої, що збігається до нуля) метод (2.1.15) має надлінійну швидкість збіжності.

Знаходження послідовності $\mathbf{h}^{(k)}$ можна зв’язати з деякої векторною послідовністю, що збігається до нуля, наприклад з послідовністю нев’язок $F\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$ або поправок $\mathbf{p}^{(k)}$. Реалізовуючи другий варіант маємо $h_j^{(k)} = x_j^{(k-1)} - x_j^{(k)}$, де $j = 1..n$, а $k = 1, 2, 3, \ldots$. В такому випадку отримуємо узагальнення скалярного *методу січних*:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{B}_k^{-1} F\left(\mathbf{x}^{(k)}\right), \qquad (2.1.16)$$

де елементи матриці $\mathbf{B}_k$ знаходяться за формулою

$$b_{i\,j}^{(k)} = \frac{f_i\left(x_1^{(k)}, \ldots, \overbrace{x_j^{(k)} + h_j^{(k)}}^{x_j^{(k-1)}}, \ldots, x_n^{(k)}\right) - f_i\left(x_1^{(k)}, \ldots, x_j^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right)}{x_j^{(k-1)} - x_j^{(k)}}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (2.1.17)$$

Так само як і для випадку $n = 1$ збіжність методу січних має порядок $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

До методу січних так само як і до методу Ньютона можна застосувати покрокову апроксимацію обернених матриць, на основі методу Шульца та отримати відповідні апроксимаційні аналоги методу січних.

Варто відмітити, що для функції n змінних відомо декілька різновидів метода січних. Запропонований метод січних (2.1.16) є представником сімейства метода січних, що базується на апроксимації матриць Якобі. Різні способи апроксимації матриць Якобі призводять до різних варіантів методу січних.

Метод січних Бройдена

Нагадаємо формулу ітераційного процесу для методу січних при $n=1$:

$$x_{k+1}=x_k-b_k^{-1}\cdot f\left(x_k\right), \tag{2.1.18}$$

де $b_k=\dfrac{f\left(x_{k-1}\right)-f\left(x_k\right)}{x_{k-1}-x_k}$.

Вираз для обчислення коефіцієнту b_k переписаний таким чином

$$b_k\left(x_{k-1}-x_k\right)=f\left(x_{k-1}\right)-f\left(x_k\right) \tag{2.1.19}$$

називається *співвідношенням січних* в $\mathbb{R}_1$. Воно легко узагальнюється на n-мірний випадок:

$$\mathbf{B}_k\left(\mathbf{x}^{(k-1)}-\mathbf{x}^{(k)}\right)=F\left(\mathbf{x}^{(k-1)}\right)-F\left(\mathbf{x}^{(k)}\right), \tag{2.1.20}$$

де $\mathbf{B}_k$ – деяка матриця лінійного перетворення в $\mathbb{R}_n$.

Введемо позначення $\mathbf{s}^{(k)}=\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k-1)}$ та $\mathbf{y}^{(k)}=F\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)-F\left(\mathbf{x}^{(k-1)}\right)$. Тоді співвідношення січних в $\mathbb{R}_n$ прийме вигляд:

$$\mathbf{B}_k\mathbf{s}^{(k)}=\mathbf{y}^{(k)}. \tag{2.1.21}$$

По аналогії з одномірним випадком ітераційна формула методу січних приймає наступний вигляд:

$$\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{B}_k^{-1}\cdot F\left(\mathbf{x}^{(k)}\right). \tag{2.1.22}$$

Для того, щоб ця ітераційна формула узагальнювала метод січних (2.1.18), неособливу $n\times n$-матриця $\mathbf{B}_k$ потрібно підбирати так, щоб вона задовольняла співвідношення січних (2.1.21), тобто матриця $\mathbf{B}_k$ має перетворювати заданий вектор $\mathbf{s}^{(k)}$ в інший заданий вектор $\mathbf{y}^{(k)}$. Не складно зрозуміти, що при $n>1$ ця вимога однозначно не визначає матрицю $\mathbf{B}_k$. Звідси можна зробити висновок, що можуть бути різні узагальнення одномірного методу січних.

Перепишемо рівність (2.1.22) замінивши $\mathbf{x}^{(k+1)}$ на $\mathbf{x}$:

$$F\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)+\mathbf{B}_k\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(k)}\right)=\mathbf{0}. \tag{2.1.23}$$

Позначимо результат виразу в лівій частині рівності (2.1.23), як вектор $\mathbf{q}_k$, тобто

$$\mathbf{q}_k=F\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)+\mathbf{B}_k\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(k)}\right). \tag{2.1.24}$$

При виборі матриці $\mathbf{B}_k$ Чарльз Джордж Бройден виходив з того, що зміни у виразі $\mathbf{q}_k$ порівняно з $\mathbf{q}_{k-1}$ мають бути мінімальними.

На основі цих міркувань можна побудувати алгоритм №1, що реалізує метод Бройдена:

1. Якщо $k=0$, то задати початковий вектор $\mathbf{x}^{(0)}$ та матрицю $\mathbf{B}_0$, інакше обчислити чергову матрицю $\mathbf{B}_{k+1}$ за формулою:

$$\mathbf{B}_{k+1}=\mathbf{B}_k+\frac{\left(\mathbf{y}^{(k+1)}-\mathbf{B}_k\mathbf{s}^{(k+1)}\right)\cdot\left(\mathbf{s}^{(k+1)}\right)^T}{\left(\mathbf{s}^{(k+1)}\right)^T\cdot\mathbf{s}^{(k+1)}}. \tag{2.1.25}$$

2. Розв’язати СЛАР:

$$\mathbf{B}_k\,\mathbf{s}^{(k+1)}=-F\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) \tag{2.1.26}$$

відносно вектора $\mathbf{s}^{(k+1)}$ (див. (2.1.22)).

3. Знайти вектори $\mathbf{x}^{(k+1)}$ та $\mathbf{y}^{(k+1)}$:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k+1)}; \tag{2.1.27}$$

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = F\left(\mathbf{x}^{(k+1)}\right) - F\left(\mathbf{x}^{(k)}\right). \tag{2.1.28}$$

4. Виконати перевірку критерію останови: наприклад, перевірити на малість величини $\left\|\mathbf{s}^{(k+1)}\right\|$ та/або $\left\|\mathbf{y}^{(k+1)}\right\|$. Якщо задана точність не досягнута, то збільшити значення k на одиницю та перейти до п.1.

В якості матриці $\mathbf{B}_0$ для запуску ітераційного процесу Бройдена беруть матрицю Якобі $F'\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$ або яку-небудь її апроксимацію.

Можна довести, що при достатній близькості $\mathbf{x}^{(0)}$ до $\mathbf{x}^*$ та $\mathbf{B}_0$ до $F'\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$ буде спостерігатися *лінійна збіжність* послідовності $\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$ до $\mathbf{x}^*$, а при деяких додаткових умовах послідовність наближень за методом Бройдена буде мати *надлінійну збіжність*.

Спростивши формулу перерахунку (2.1.25) отримаємо наступну формулу:

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k + \frac{F\left(\mathbf{x}^{(k+1)}\right)\cdot\left(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right)^T}{\left\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right\|_2^2}. \tag{2.1.29}$$

Відмітимо, що при використанні формули перерахунку (2.1.29) немає необхідності обчислювати вектор $\mathbf{y}^{(k+1)}$. Такий алгоритм реалізації методу Бройдена назвемо алгоритмом №2.

Метод Брауна

На відміну від покрокової лінеаризації векторної функції $F(\mathbf{x})$, що приводить до методу Ньютона (2.1.10), Кеннетом М. Брауном у 1966 році запропоновано проводити на кожному ітераційному кроці почергову лінеаризацію компонент вектор-функції $F(\mathbf{x})$ та послідовно розв'язувати отримані таким чином рівняння.

Нехай необхідно знайти розв'язок системи:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0\,; \\ g(x,y) = 0\,. \end{cases} \tag{2.1.30}$$

При реалізації метода Брауна розв'язання системи необхідно виконувати обчислення при $k = 0, 1, 2, \ldots$ за допомогою сукупності формул:

$$\begin{aligned} &\tilde{x}_k = x_k - \frac{f(x_k, y_k)}{f'_x(x_k, y_k)}\,, \\ &q_k = \frac{g(\tilde{x}_k, y_k)\cdot f'_x(x_k, y_k)}{f'_x(x_k, y_k)\,g'_y(\tilde{x}_k, y_k) - f'_y(x_k, y_k)\,g'_x(\tilde{x}_k, y_k)}\,, \\ &p_k = \frac{f(x_k, y_k) - q_k f'_y(x_k, y_k)}{f'_x(x_k, y_k)}\,, \\ &x_{k+1} = x_k - p_k\,, \\ &y_{k+1} = y_k - q_k\,. \end{aligned} \tag{2.1.31}$$

Обчислення за методом Брауна необхідно закінчувати, коли буде виконуватись нерівність $\max\{|p_{k-1}|, |q_{k-1}|\} < \varepsilon$. В процесі обчислень також необхідно контролювати малість знаменника в обчислювальних формулах та збіжність ітераційної послідовності.

Метод Брауна має квадратичну швидкість збіжності, але якщо часткові похідні замінити різницевими відношеннями, то можна сподіватися на більшу ефективність цього методу порівняно з методом Ньютона.

Завдання на виконання лабораторної роботи

Розробити програму на мові програмування *C#* у середовищі розробки Visual Studio 2005 (або вище), яка буде працювати у віконному режимі та дозволяти уточнювати (точність $\varepsilon \leq 10^{-7}$) корені системи нелінійних рівнянь, заданої за варіантом (*табл*. 2.1.1):

1. Методом, який задано в третьому стовпчику *табл*. 2.1.1, де

0	Явний метод Ньютона (обчислення оберненої матриці одним з прямих методів)
1	Неявний метод Ньютона (обґрунтувати вибір способу розв’язання СЛАР)
2	Спрощений метод Ньютона
3	Двоступеневий метод Ньютона (обчислення оберненої матриці прямими методами)
4	Апроксимаційний аналог №1 метода Ньютона
5	Апроксимаційний аналог №2 метода Ньютона
6	Апроксимаційний аналог №1 двоступеневого метода Ньютона
7	Апроксимаційний аналог №2 двоступеневого метода Ньютона

   та проводити замір часу роботи даного методу.

2. Дискретним аналогом метода з п.1 та проводити замір часу роботи даного методу.

3. Методом, який задано в четвертому стовпчику *табл*. 2.1.1, де

0	Явний метод січних (обчислення оберненої матриці прямими методами)
1	Неявний метод січних (обґрунтувати вибір способу розв'язання СЛАР)
2	Апроксимаційний аналог №1 метода січних
3	Апроксимаційний аналог №2 метода січних

   та проводити замір часу роботи даного методу.

4. Зейделевою модифікацією методів з п.1, п.2 та п.3 та проводити заміри часу роботи даних методів.

Розв'язати задану за варіантом систему нелінійних рівнянь (*табл*. 2.1.1) у математичному пакеті *MatLab* з точністю $\varepsilon \le 10^{-7}$.

Примітка: при розв'язанні у *MatLab* використати функцію *fsolve*, попередньо встановивши опції виводу результатів таким чином:

```
options=optimset('Display','iter');
```

Додаткове завдання

До розробленої програми додати можливість розв'язувати систему нелінійних рівнянь:

1. Алгоритмом, що реалізує метод січних Бройдена, який заданий за варіантом (номер варіанту студента по модулю 2), де

0	Алгоритм №1
1	Алгоритм №2

   та проводити замір часу роботи даного алгоритму.

2. Методом Брауна та проводити замір часу роботи даного методу.

Вимоги до оформлення звіту

Звіт з лабораторної роботи №2.1 має складатися з таких структурних підрозділів:

1. Постановка задачі за варіантом.
2. Математичне підгрунття для виконання даної лабораторної роботи (перелік формул, що були використані при розробленні програми на мові програмування C#).
3. Основні етапи процесу локалізації коренів системи нелінійних рівнянь, що розв'язується.
4. Значення коренів отримані методами заданими за варіантом, звести до таблиці (при необхідності дозволяється таблицю розміщувати в альбомному форматі):

Метод з п.1 (вказати назву методу)	Зейделева модифікація методу з п.1	Метод з п.2 (вказати назву методу)	Зейделева модифікація методу з п.2 (вказати назву методу)	Метод з п.3 (вказати назву методу)	Зейделева модифікація методу з п.3 (вказати назву методу)	*MatLab*

5. Кількість ітерацій необхідну для уточнення коренів методами заданими за варіантом до таблиці (при необхідності дозволяється таблицю розміщувати в альбомному форматі):

Метод з п.1 (вказати назву методу)	Зейделева модифікація методу з п.1	Метод з п.2 (вказати назву методу)	Зейделева модифікація методу з п.2 (вказати назву методу)	Метод з п.3 (вказати назву методу)	Зейделева модифікація методу з п.3 (вказати назву методу)	*MatLab*

6. Час роботи методів уточнення коренів заданих за варіантом звести до таблиці (при необхідності дозволяється таблицю розміщувати в альбомному форматі):

Метод з п.1 (вказати назву методу)	Зейделева модифікація методу з п.1	Метод з п.2 (вказати назву методу)	Зейделева модифікація методу з п.2 (вказати назву методу)	Метод з п.3 (вказати назву методу)	Зейделева модифікація методу з п.3 (вказати назву методу)	*MatLab*

7. Висновки.

Варіанти завдань

Номер варіанту визначається за наступною таблицею:

№ за списком викладача	Варіант №	№ за списком викладача	Варіант №
1	16	13	8
2	1	14	20
3	17	15	2
4	22	16	19
5	6	17	18
6	23	18	7
7	5	19	14
8	13	20	4
9	12	21	15
10	11	22	3
11	24	23	10
12	21	24	9

Таблиця 2.1.1. Перелік систем нелінійних рівнянь

№	Система нелінійних рівнянь	Метод з п.1	Метод з п.3
1	$\begin{cases} x^2+y^3=9; \\ x^5=\log_2\lvert 9-y\rvert. \end{cases}$	3	1
2	$\begin{cases} x^5+y^3+\sin y=x; \\ \left(x^3-y\right)^2=\log_{10}\lvert 9-y\rvert. \end{cases}$	4	0
3	$\begin{cases} y^3-\sin x=\log_2 x; \\ \left(x-y^3\right)^3=\ln\lvert 9-y\rvert. \end{cases}$	1	3
4	$\begin{cases} \sin\left(y^3\right)-x+6=\log_2 y; \\ \sin\left(x-y^2\right)=\ln\lvert 9-x\rvert. \end{cases}$	5	2
5	$\begin{cases} \sin x-y=\log\lvert y\rvert; \\ e^{\sin\left(x-y^2\right)}=\lvert 9-x\rvert. \end{cases}$	3	2
6	$\begin{cases} \sin\left(e^x\right)-\cos y=\log_{10}\left\lvert y^x\right\rvert+7; \\ e^{\sin(x-y)}-x+15=\lvert 9-x-y\rvert. \end{cases}$	7	3
7	$\begin{cases} \log_2 y=\log_{10}\left\lvert y^x\right\rvert+x; \\ e^{\cos(0.1x-3y)}-y+x=10-\lvert y\rvert. \end{cases}$	0	1
8	$\begin{cases} x^7+\pi\log_2 y=\sqrt{\lvert y\rvert}+x; \\ x^9-e^{3y}-\sqrt{y+x}=1-\lvert x\rvert. \end{cases}$	6	0
9	$\begin{cases} x^5+\log_2(\pi x)=\sqrt{\lvert y\rvert+x}; \\ e^{3xy}-\sqrt{y+x}=1-\lvert x\rvert. \end{cases}$	2	2

Продовження табл. 2.1.1

№	Система нелінійних рівнянь	Метод з п.1	Метод з п.3
10	$\begin{cases} x^9 + y \cdot \log_{10} x = x \cdot \lvert y \rvert; \\ e^{3xy} - x\sqrt{\lvert x \cdot y \rvert} = \lvert y \rvert. \end{cases}$	7	3
11	$\begin{cases} x^3 + y \cdot \log_2 x = x \cdot \lvert y \rvert; \\ \log_2 (3xy) - x\sqrt{x} = y - x; \\ x > 0. \end{cases}$	4	2
12	$\begin{cases} x + y = x^{\sin x} + 2\pi; \\ \operatorname{ch}(3y - \pi) - 3x\sqrt{y} = 8y - x + 18; \\ x \in (0; 30). \end{cases}$	6	0
13	$\begin{cases} e^y - x = 2^{x+7} - 5\pi \cdot x - 7; \\ \operatorname{sh}(3y) - x\sqrt{\lvert y \rvert} = 7y - x + 5. \end{cases}$	1	3
14	$\begin{cases} x = \cos^3 y + x^2 \log_2 (\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x) - x^2 + 15; \\ x + y = \cos^3 x + (x \cdot \log_2 (\operatorname{sh} y))^3 - x^3 - 5. \end{cases}$	2	1
15	$\begin{cases} \operatorname{sh}(y + 5) = \cos^3 x + x^3 \operatorname{sh} x - x^5 - 35; \\ \cos x = y^2 + x^3 - x^6 + 25. \end{cases}$	5	3
16	$\begin{cases} \operatorname{sh}(x + 5) = \cos^2 (x + y) + x^2 \cdot \operatorname{sh} y - x^2 + 15; \\ \cos y = x^2 + x^3 - y^6 + 205\pi. \end{cases}$	3	1
17	$\begin{cases} \operatorname{sh}(y + 5) = \sin^3 (x + y) + x^3 \operatorname{ch} y - x^3 + 15; \\ \sin y = y^2 + x^3 - y^5 + y^8 - 155\pi. \end{cases}$	0	2

Продовження табл. 2.1.1

№	Система нелінійних рівнянь	Метод з п.1	Метод з п.3
18	$\begin{cases} \operatorname{sh}(x+y+5)=\sin^3(x-5)+x^2\operatorname{sh} y+15; \\ \sin y = x^3-y^5+y^8-155\pi\cdot x-56\pi^4. \end{cases}$	7	0
19	$\begin{cases} 5\cdot\cos(3y+5)=\pi\sin^3(x-5)+5y^3\operatorname{ch}(x+y); \\ \operatorname{sh} x=\sqrt{y^3}-\log_2(x^5-y). \end{cases}$	6	1
20	$\begin{cases} \operatorname{ch}(3y+5)=\pi\sin^2(x-5)+y^2\operatorname{ch}(y); \\ \operatorname{sh} x=15\left(\sqrt{\lvert y+7\rvert}\right)^3-\log_{10}\lvert x^3+y\rvert. \end{cases}$	5	0
21	$\begin{cases} \sin y=\sin^2 x+x^4-x^2-\cos^2 x-13x-10; \\ \operatorname{ch} y=\sqrt{\lvert\sin x\rvert}+x^3-\cos^2 y-x+10. \end{cases}$	1	3
22	$\begin{cases} \sin(y+x)=\sin^2 y+x^4-y^2-\cos^2 x-13\pi x-10; \\ \cos y=\sqrt{\lvert\operatorname{sh} x\rvert}+x^3-\cos^3 y-x^2-55\pi. \end{cases}$	4	2
23	$\begin{cases} y+x=\sin y+y^3-\cos^2 y-13\pi y+10; \\ \operatorname{ch} y=\lvert\operatorname{sh}(y+x)\rvert+y^3-\cos^3 y-y^2-35\pi. \end{cases}$	2	0
24	$\begin{cases} \cos x=\sin(y-x)+y^2-\cos^3 x-3y+x-7; \\ \operatorname{sh} y=\lvert\cos(y+x)\rvert+y^5-\operatorname{ch} y+15\pi y^2. \end{cases}$	0	3

Контрольні питання

1. Запис системи нелінійних рівнянь у векторно-матричному вигляді.
2. Які методи розв’язання нелінійного рівняння не можна узагальнити на випадок системи нелінійних рівнянь? Чому?
3. Геометричний зміст системи нелінійних рівнянь.
4. Чи існують прямі методи розв’язання систем нелінійних рівнянь?
5. Яку кількість розв’язків може мати система нелінійних рівнянь?
6. З яких етапів складається процес розв’язання системи нелінійних рівнянь?
7. Які існують підходи для визначення початкового наближення до розв’язку системи нелінійних рівнянь?
8. Метод простої ітерації та задача про нерухому точку в контексті розв’язання системи нелінійних рівнянь.
9. Теорема про збіжність ітераційної послідовності, що генерується МПІ при розв’язанні системи нелінійних рівнянь.
10. Яка множина називається замкненою?
11. Часткові випадки достатніх умов збіжності послідовності, що генерується МПІ при розв’язанні системи нелінійних рівнянь.
12. Підходи до вибору матричного параметру в методі простої ітерації розв’язання системи нелінійних рівнянь.
13. Недоліки методу простої ітерації розв’язання системи нелінійних рівнянь.
14. Вивід ітераційної формули явного методу Ньютона для розв’язання системи нелінійних рівнянь.
15. Вивід ітераційної формули неявного методу Ньютона для розв’язання системи нелінійних рівнянь.

16. Чи виникає необхідність в розв’язанні СЛАР при використанні неявного методу Ньютона для розв’язання системи нелінійних рівнянь. Чому виникає така необхідність? Відповідь обґрунтувати.
17. Яким чином при розв’язанні системи нелінійних рівнянь ітераційними методами використовується матриця Якобі?
18. Як побудвати матрицю Якобі?
19. Спощений метод Ньютона для розв’язання системи нелінійних рівнянь та ідеї, що спонукали для його отримання.
20. Порівняння явного, неявного та спрощеного методу Ньютона для розв’язання системи нелінійних рівнянь.
21. Ітераційні формули та ідея двоступеневого методу Ньютона розв’язання системи нелінійних рівнянь.
22. Апроксимаційні аналоги метода Ньютона для розв’язання системи нелінійних рівнянь. Ідея та ітераційні формули.
23. Якщо не вдається обрати гарне початкове наближення, то яким чином виконувати уточнення коренів в такому випадку?
24. В чому полягає ідея дискретних аналогів різноманітних модифікацій метода Ньютона?
25. Порівняння дискретних модифікацій метода Ньютона з їх неперервними аналогами. Яким чином необхідно обирати крок дискретизації?
26. Метод січних розв’язання систем нелінійних рівнянь та його зв’язок з дискретними аналогами різноманітних модифікацій метода Ньютона.
27. Які методи розв’язання систем нелінійних рівнянь є однокроковими та двокроковими? Чому?
28. Співвідношення січних в загальному випадку.

29. Довести, що метод січних для розв'язання одного нелінійного рівняння має декілька узагальнень на многомірний випадок.
30. Виведення методу січних Бройдена розв'язання систем нелінійних рівнянь.
31. Алгоритми, що реалізують метод січних Бройдена розв'язання систем нелінійних рівнянь.
32. Виведення другого алгоритму на основі першого алгоритму, що реалізує метод січних Бройдена розв'язання систем нелінійних рівнянь.
33. Основна ідея метода Брауна розв'язання систем нелінійних рівнянь.
34. Виведення ітераційних формул метода Брауна для розв'язання систем двох нелінійних рівнянь. Який вигляд приймуть ці формули для системи трьох нелінійних рівнянь?
35. Ідея та ітераційні формули Зейделевої модифікації методів розв'язання систем нелінійних рівнянь.
36. Критерій зупинки ітераційних процесів в методах ров'язання систем нелінійних рівнянь.
37. Порядок збіжності методів розв'язання систем нелінійних рівнянь.
38. Які загальні недоліки можна виділити у методів розв'язання систем нелінійних рівнянь?
39. Показати зв'язок задачі розв'язання системи нелінійних рівнянь із задачею оптимізації.

Лабораторна робота №2.2

тема: “Апроксимація функцій”

Мета роботи – опанувати основні методи апроксимації нелінійних функцій.

Короткі теоретичні відомості

В основі багатьох методів математичного аналізу лежить заміна однієї функції $f(x)$ іншою функцією $\varphi(x)$, що є близькою до $f(x)$, але більш простою, що дозволяє досить просто виконувати над нею певні операції. Таку заміну функції будемо називати *апроксимацією* або просто наближенням функції $f(x)$ функцією $\varphi(x)$.

Якщо функція задана таблицею, то під *інтерполяцією* розуміють знаходження проміжних значень таблично-заданої функції строго в середині таблиці, а під *екстраполяцією* – знаходження її наближених значень за межами проміжку заданих точок, тобто вузлових точок.

Нехай в точках $x_0, x_1, ..., x_n$ таких, що $a \le x_0 < ... < x_n \le b$, відомі значення функції $y = f(x)$, тобто на відрізку $[a, b]$ задана таблична (сіткова) функція (табл. 2.2.1).

Таблиця 2.2.1. Таблично-задана функція $f(x)$

x	x_0	x_1	…	x_n
y	y_0	y_1	…	y_n

Задача поліноміальної інтерполяції для таблично-заданої функції $f(x)$ формулюється наступним чином: знайти многочлен $P_n(x)$ такий, що виконується сукупність умов інтерполяції

$$P_n(x_i) = y_i \quad \forall i \in \mathbb{N}_0. \tag{2.2.1}$$

Інтерполяційний многочлен Лагранжа

Будемо будувати многочлен n-го степеня $L_n(x)$ у вигляді лінійної комбінації $\sum_{i=0}^{n} c_i l_i(x)$ многочленів $l_i(x)$ степеня n $(i \in \mathbb{N}_0)$. Для того, щоб такий многочлен був інтерполяційним для функції $f(x)$, достатньо зафіксувати в якості коефіцієнтів c_i цієї лінійної комбінації задані таблицею 2.1.1 значення $y_i = f(x_i)$, а від базисних многочленів $l_i(x)$ вимагати виконання умови

$$l_i(x_j) = \delta_{i\,j} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } j \neq i \\ 1, \text{ якщо } j = i \end{cases} \Bigg| \quad \forall j, i \in \mathbb{N}_0 \tag{2.2.2}$$

На основі цих міркувань отримуємо інтерполяційний многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)} y_i \,. \tag{2.2.3}$$

Інтерполяційна схема Ейткена

Безпосереднє використання многочлена Лагранжа у формі (2.2.3) є не дуже зручним через його громіздкість, що є причиною великих обчислювальних витрат. Якщо функція задана таблично, то, зазвичай, завчасно невідомо якої степені многочлен потрібно використовувати для інтерполювання даної функції з заданою точністю, а поступове збільшення точності за рахунок повторних обчислень значень $L_n(x)$ кожного разу збільшуючи показник степеня n при прямому застосуванні формули (2.2.3) є неприйнятним, через погану перебудовуваність $L_{n-1}(x)$ в $L_n(x)$.

Можливо побудувати рекурентне задання послідовності інтерполяційних многочленів Лагранжа, яке називають *інтерполяційною схемою Ейткена*:

$$f(x) \approx P_{\overline{i,i+k}}(x) = \frac{1}{x_{i+k} - x_i} \begin{vmatrix} x - x_i & P_{\overline{i,i+k-1}}(x) \\ x - x_{i+k} & P_{\overline{i+1,i+k}}(x) \end{vmatrix}, \qquad (2.2.4)$$

де $k = 1, 2, ...$; $P_{\overline{i,i}}(x) = y_i$.

Організація обчислень за формулою (2.2.4) повинна бути такою, що коли завчасно не відома степінь інтерполяційного многочлена, який слід використати для обчислення $y(\tilde{x})$, та дана таблиця значень функції достатньо велика, то має виконуватись поступове підвищення степеня k інтерполюючих її многочленів за рахунок підключення нових, все більш віддалених від $\tilde{x}$ вузлів.

Скінченно-різницеві інтерполяційні формули

Скінченні різниці є аналогом похідних. Звідси є справедливими багато їх властивостей, які співпадають з властивостями похідних.

На основі цього можна зробити висновок: якщо скінченні різниці n-го порядку деякої функції $y = f(x)$ сталі в будь-якій точці x при різних фіксованих кроках h, то ця функція $f(x)$ є многочлен степеня n.

Для функції $y = f(x)$, що задана таблицею своїх значень $y_0, y_1, ..., y_n$ у вузлах $x_0, x_1, ..., x_n$, де $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, ..., n$, $h > 0$ – деяка стала величина, що називається кроком сітки (таблиці), скінченні різниці різних порядків зручно розміщувати в одній спільній таблиці (див. табл. 2.2.2) з вузлами та значеннями функції (останні можна інтерпретувати, як скінченні різниці нульового порядку). Цю таблицю називають таблицею скінченних різниць.

Таблиця 2.2.2. Діагональна таблиця скінченних різниць

<table>
<tr><th>x_i</th><th>y_i</th><th>Δy_i</th><th>$\Delta^2 y_i$</th><th>$\Delta^3 y_i$</th><th>$\Delta^4 y_i$</th><th>…</th></tr>
<tr><td rowspan="2">x_0</td><td rowspan="2">y_0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Δy_0</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">x_1</td><td rowspan="2">y_1</td><td rowspan="2">$\Delta^2 y_0$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Δy_1</td><td rowspan="2">$\Delta^3 y_0$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">x_2</td><td rowspan="2">y_2</td><td rowspan="2">$\Delta^2 y_1$</td><td rowspan="2">$\Delta^4 y_0$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Δy_2</td><td rowspan="2">$\Delta^3 y_1$</td><td rowspan="2">…</td></tr>
<tr><td rowspan="2">x_3</td><td rowspan="2">y_3</td><td rowspan="2">$\Delta^2 y_2$</td><td rowspan="2">$\Delta^4 y_1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Δy_3</td><td rowspan="2">$\Delta^3 y_2$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">x_4</td><td rowspan="2">y_4</td><td rowspan="2">$\Delta^2 y_3$</td><td>⋮</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Δy_4</td><td>⋮</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">x_5</td><td rowspan="2">y_5</td><td>⋮</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>⋮</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Якщо в інтерполяційному многочлені Лагранжа (2.2.3) всі доданки однотипні та відіграють однакову роль в утворенні результат, то хотілося б мати таке подання інтерполяційного многочлена, в якому доданки розміщувались в порядку спадання їх значущості. Така структура інтерполяційного многочлена дозволила б більш просто перебудовувати його степінь, додаючи або відкидаючи віддалені від початку його запису члени.

На основі цих міркувань отримується *перша інтерполяційна формула Ньютона*:

$$f(x) \approx P_n(x_0 + qh) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \\ + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \tag{2.2.5}$$

Дану формулу доцільніше за все використовувати при значеннях $|q| < 1$, а саме, для *інтерполювання вперед* (при $x \in (x_0, x_1)$, тобто при $q \in (0,1)$) та *екстраполювання назад* (при $x < x_0$, тобто при $q < 0$).

Можна легко дійти висновку, що за базовий вузол для формули (2.2.5) є сенс приймати найближчий до заданої фіксованої точки x, якщо за ним є достатня кількість вузлів для побудови необхідних для (2.2.5) скінченних різниць. Тобто ця формула є неприйнятною для інтерполювання в кінці таблиці.

Для інтерполювання вкінці відрізку використовується *друга інтерполяційна формула Ньютона*:

$$f(x) \approx P_n(x_n + qh) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \\ + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 . \tag{2.2.6}$$

Другу інтерполяційну формулу Ньютона доцільно використовувати при значеннях $|q| < 1$, тобто в околицях вузла x_n для інтерполювання назад (при $q \in (-1, 0)$) та екстраполювання вперед (при $q > 0$).

Таким чином, інтерполяційні формули Ньютона перш за все призначені для інтерполяції на початку або в кінці таблиці. Але здебільшого потрібно виконувати інтерполяцію всередині таблиці, коли відповідна таблиця є досить великою.

Будемо вважати, що вузол x_0 знаходиться в середині таблиці, та нумерація інших вузлів виконується відносно x_0, з використанням як додатних, так і від'ємних індексів, тобто $x_i = x_0 + ih$, де $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Тоді центральна частина таблиці скінченних різниць буде проіндексована так як показано в таблиці 2.2.3.

Всі скінченні різниці підкреслені в табл. 2.2.3, тобто скінченні різниці, що знаходяться в одному рядку з x_0 та y_0 та на пів рядка вище або нижче, називаються *центральними різницями*.

Таблиця 2.2.3. Центральні скінченні різниці

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$	$\dots$
$\dots$	$\dots$							
		$\dots$						
x_{-3}	y_{-3}		$\dots$					
		Δy_{-3}		$\dots$				
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\dots$			
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$		$\dots$		
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$		$\dots$	
		$\underline{\Delta y_{-1}}$		$\underline{\Delta^3 y_{-2}}$		$\underline{\Delta^5 y_{-3}}$		
x_0	y_0		$\underline{\Delta^2 y_{-1}}$		$\underline{\Delta^4 y_{-2}}$		$\underline{\Delta^6 y_{-3}}$	$\dots$
		$\underline{\Delta y_0}$		$\underline{\Delta^3 y_{-1}}$		$\underline{\Delta^5 y_{-2}}$		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$		$\dots$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		$\dots$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\dots$			
		Δy_2		$\dots$				
x_3	y_3		$\dots$					
		$\dots$						
$\dots$	$\dots$							

Однією з інтерполяційних формул, що оперує центральними скінченними різницями є *перша інтерполяційна формула Гаусса (для інтерполювання вперед)*:

$$f(x) \approx \overline{P}(x_0 + qh) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \\ + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \dots \tag{2.2.7}$$

Аналогічно, можна побудувати *другу інтерполяційну формулу Гаусса (для інтерполювання назад)*:

$$f(x) \approx P(x_0 + qh) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)q}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \\ + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \dots \tag{2.2.8}$$

Ми бачимо, що в інтерполяційних формулах Гаусса використовуються або тільки нижні центральні різниці або тільки верхні. Природним було б для більш кращої інтерполяції знайти формулу в якій би враховувались як нижні так і верхні центральні скінченні різниці. Таку формулу можна отримати, як напівсуму першої та другої інтерполяційної формули Гаусса:

$$f(x) \approx P_S(x_0 + qh) = y_0 + q\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \\ + \frac{q(q^2-1)}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{q^2(q^2-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \dots + \\ + \frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)\dots\left(q^2-(n+1)^2\right)}{(2n-1)!}\cdot\frac{\Delta^{2n-1}y_{-n} + \Delta^{2n-1}y_{-(n-1)}}{2} + \\ + \frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)\dots\left(q^2-(n+1)^2\right)}{(2n)!}\Delta^{2n}y_{-n}. \tag{2.2.9}$$

Інтерполяційна формула (2.2.9) називається *інтерполяційною формулою Стірлінга*.

Формула Стірлінга використовується для інтерполювання в середині таблиці при значеннях $|q|$ близьких до нуля, тобто коли значення x є близьким до одного з середніх вузлів, а саме коли $|q| < 0.25$.

Ще однією формулою, яка враховує як нижні центральні різниці так і верхні є *інтерполяційною формулою Бесселя*:

$$f(x) \approx P_B(x_0 + qh) = \frac{y_0 + y_1}{2} + \left(q - \frac{1}{2}\right)\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \cdot \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} +$$
$$+ \frac{\left(q - \frac{1}{2}\right) q(q-1)}{3!} \cdot \Delta^3 y_{-1} + \frac{q\left(q^2 - 1^2\right)(q-2)}{4!} \cdot \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \ldots +$$
$$+ \frac{q\left(q^2 - 1^2\right)\left(q^2 - 2^2\right)\ldots\left(q^2 - n^2\right)(q + n - 1)}{(2n)!} \cdot \frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-(n-1)}}{2} + \tag{2.2.10}$$
$$+ \frac{\left(q - \frac{1}{2}\right) q\left(q^2 - 1^2\right)\left(q^2 - 2^2\right)\ldots\left(q^2 - n^2\right)(q + n - 1)}{(2n+1)!} \cdot \Delta^{2n+1} y_{-n}.$$

Дана формула також використовується для інтерполювання в середині таблиці при значеннях x близьких до середини між двома вузлами, тобто при значеннях q близьких до 0.5, а саме коли $q \in [0.25; 0.75]$.

Інтерполяційні формули Ньютона для нерівновіддалених вузлів

Для побудови інтерполяційних формул, що мають ті ж переваги перед інтерполяційною формулою Лагранжа, що й скінченнорізницеві формули та застосовуються до нерівновіддалених вузлів замість скінченних різниць використовують розділені різниці або їх ще називають різницевими відношеннями.

Якщо визначені розділені різниці *k*-го порядку $f\left(x_i;x_{i+1};...;x_{i+k}\right)$, то $\left(k+1\right)$-і різницеві відношення визначаються через них таким чином:

$$f\left(x_{i-1};x_i;...;x_{i+k}\right)=\frac{f\left(x_i;x_{i+1};...;x_{i+k}\right)-f\left(x_{i-1};x_i;...;x_{i+k-1}\right)}{x_{i+k}-x_{i-1}}. \quad (2.2.11)$$

По аналогії зі скінченними різницями, аналізуючи таблицю розділених різниць (*табл*. 2.2.4) за порядком розділених різниць, які майже співпадають можна робити висновки про необхідну степінь многочлена для інтерполювання даної функції.

Таблиця 2.2.4. Таблиця розділених різниць

x_i	$f\left(x_i\right)$	$f\left(x_i;x_{i+1}\right)$	$f\left(x_i;x_{i+1};x_{i+2}\right)$	$f\left(x_i;x_{i+1};x_{i+2};x_{i+3}\right)$	$f\left(x_i;x_{i+1};x_{i+2};x_{i+3};x_{i+4}\right)$	…
x_0	$f\left(x_0\right)$					
		$f\left(x_0;x_1\right)$				
x_1	$f\left(x_1\right)$		$f\left(x_0;x_1;x_2\right)$			
		$f\left(x_1;x_2\right)$		$f\left(x_0;x_1;x_2;x_3\right)$		
x_2	$f\left(x_2\right)$		$f\left(x_1;x_2;x_3\right)$		$f\left(x_0;x_1;x_2;x_3;x_4\right)$	
		$f\left(x_2;x_3\right)$		$f\left(x_1;x_2;x_3;x_4\right)$		…
x_3	$f\left(x_3\right)$		$f\left(x_2;x_3;x_4\right)$		$f\left(x_1;x_2;x_3;x_4;x_5\right)$	
		$f\left(x_3;x_4\right)$		$f\left(x_2;x_3;x_4;x_5\right)$		…
x_4	$f\left(x_4\right)$		$f\left(x_3;x_4;x_5\right)$		$f\left(x_2;x_3;x_4;x_5;x_6\right)$	
		$f\left(x_4;x_5\right)$		$f\left(x_3;x_4;x_5;x_6\right)$		⋮
x_5	$f\left(x_5\right)$		$f\left(x_4;x_5;x_6\right)$		⋮	
		$f\left(x_5;x_6\right)$		⋮		
x_6	$f\left(x_6\right)$		⋮			
		⋮				
⋮	⋮					

На основі міркувань аналогічних до побудови скінченно-різницевих інтерполяційних формул отримуємо першу *інтерполяційну формулу Ньютона для нерівновіддалених вузлів*:

$$\begin{aligned} f(x) \approx P_n(x) = f(x_0) + f(x_0;x_1)(x-x_0) + \\ + f(x_0;x_1;x_2)(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + \\ + f(x_0;x_1;\ldots;x_n)(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}). \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

Так само можна отримати і другу інтерполяційну формулу Ньютона для нерівновіддалених вузлів.

Завдання на виконання лабораторної роботи

Розробити програму на мові програмування C# у середовищі розробки Visual Studio 2005 (або вище), яка буде працювати у віконному режимі та дозволяти виконувати наступне:

1. Будувати дві інтерполяційні формули, що задані за варіантом (*табл*. 2.2.5, *табл*. 2.2.8) для довільного набору вузлових точок (передбачити можливість введення вузлових точок з клавіатури).

2. Для кожної заданої за варіантом функції (*табл*. 2.2.6, *табл*. 2.2.7) будувати задану за варіантом інтерполяційну формулу (*табл*. 2.2.5, *табл*. 2.2.8) та обчислювати її значення в контрольних точках з точністю $\varepsilon \le 10^{-3}$.

Виконати інтерполяцію заданих за варіантом функцій у будь-якому математичному пакті та знайти їх значення в контрольних точках двома способами:

- шляхом пошуку коефіцієнтів інтерполяційного многочлена використовуючи матрицю Вандермонда;
- за допомогою однієї зі спеціальних функцій.

Вимоги до оформлення звіту

Звіт з лабораторної роботи №2.2 має складатися з таких структурних підрозділів:

1. Постановку задачі за варіантом.
2. Математичне підгрунття для виконання даної лабораторної роботи (перелік формул, що були використані при розробленні програми на мові програмування C#).
3. Обрану сітку для аналітично-заданої функції та її значення у вузлових точках.
4. Значення функцій, заданих за варіантом, у контрольних точках:

Функція № ____

<table>
<tr><td rowspan="2">x_i</td><td rowspan="2">Точне значення функції y_i (для аналітично заданої за варіантом функції)</td><td>C#</td><td colspan="2">Математичний пакет
(вказати назву)</td></tr>
<tr><td>Інтерполяційна формула задана за варіантом (вказати назву)</td><td>З використанням матриці Вандермонда</td><td>З використанням спеціальної функції (вказати назву)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

5. Висновки.

Варіанти завдань

Номер варіанту визначається за наступною таблицею:

№ за списком викладача	**Варіант №**
1	7
2	3
3	15
4	14
5	16
6	24
7	4
8	23
9	17
10	9
11	18
12	22
13	10

№ за списком викладача	**Варіант №**
14	11
15	21
16	2
17	13
18	5
19	12
20	25
21	20
22	6
23	8
24	19
25	1

Таблиця 2.2.5. Варіанти завдань

Варіант №	Функція №	Інтерполяційна формула
1	10	7
	36	2
2	27	1
	15	4
3	19	3
	42	7
4	13	8
	35	5
5	18	1
	50	2
6	20	0
	33	4
7	16	1
	34	6
8	43	3
	21	1
9	45	3
	17	7
10	2	0
	28	2
11	29	4
	11	1
12	23	8
	26	6
13	3	0
	32	2
14	12	0
	37	6
15	22	0
	49	5
16	41	3
	8	7
17	44	6
	14	0
18	1	8
	30	5
19	38	3
	25	7
20	4	4
	47	8
21	6	1
	48	2
22	7	0
	46	5
23	39	8
	24	6
24	40	5
	5	7
25	9	8
	31	4

Таблиця 2.2.6. Перелік таблично заданих функцій

№	*x*	*y*	*Контрольні точки*
1	-11.017 -10.866 -10.132 -9.622 -9.197 -8.960 -8.318 -7.169 -5.753 -4.801 -4.035 -3.221 1.287 1.694 2.191 2.573 2.740 2.994 3.183 4.158 5.322 7.853 10.580 10.623 11.134 11.558 12.412	-5.694 -5.454 -1.263 3.438 7.394 9.334 12.758 10.869 2.393 0.499 2.107 4.937 11.221 16.222 26.691 40.438 48.810 65.540 81.932 267.787 1090.737 20212.857 416416.307 436054.740 762499.282 1209350.605 3050130.945	-10.239 -7.800 -7.789 -6.943 -5.080 -1.637 1.101 1.246 2.649 3.606 6.579 7.766 8.668
2	-20.061 -18.460 -18.119 -17.455 -15.386 -13.808 -13.282 -11.270 -10.951 -10.280 -6.300 -4.606 -3.902 -3.656 -1.280 -0.228 -0.068 1.428 11.248 12.692 13.094 15.104 18.180 18.424 19.127 19.942 21.238	127.098 96.514 95.938 98.498 93.513 59.084 48.788 39.285 40.464 41.970 6.931 7.561 7.902 7.638 0.178 -0.205 -0.066 0.883 44.985 66.286 68.463 63.612 124.429 129.921 140.341 141.739 134.857	-18.935 -18.803 -18.643 -13.345 -12.055 -9.187 -8.333 -5.474 -4.726 -2.364 3.217 17.228 19.033

Продовження табл. 2.2.6

№	*x*	*y*	*Контрольні точки*
3	-16.983 -15.499 -14.721 -13.610 -12.345 -10.205 -9.862 -9.787 -8.853 -2.363 -0.696 0.102 1.439 1.763 5.428 5.563 6.633 7.057 8.696 9.000 9.446 9.963 10.319 12.886 12.906	-988.970 -758.238 -642.322 -494.333 -365.457 -221.545 -201.571 -197.252 -144.525 -3.782 0.572 -0.094 0.820 1.908 27.402 29.381 53.025 66.848 139.386 154.701 177.564 204.559 223.691 417.382 419.451	-15.545 -15.391 -12.491 -12.485 -10.506 -9.502 -2.526 -1.879 -0.648 0.799 2.686 3.531 6.775 8.474 10.146
4	-8.801 -7.511 -7.398 -7.327 -6.768 -6.577 -5.438 -4.368 -3.638 -3.033 -3.011 -2.814 -1.916 -1.421 -1.205 0.638 0.910 0.967 1.166 3.010 3.437 3.747 5.362 5.702 5.983 6.252 6.633 7.223 7.389 8.522 8.950	8.737 -1.450 -2.152 -2.556 -4.542 -4.701 -1.166 3.889 4.967 4.015 3.958 3.377 0.356 -0.849 -1.179 0.659 1.253 1.339 1.532 -1.750 -2.345 -2.329 4.126 5.956 7.208 8.052 8.466 7.047 6.207 -2.348 -5.309	-6.264 -1.765 -1.055 -0.642 1.022 1.841 2.327 2.721 3.337 3.343 4.181 4.322 5.111 7.309 8.414

Продовження табл. 2.2.6

№	*x*	*y*	*Контрольні точки*
5	-8.331 -8.244 -6.489 -5.929 -5.664 -4.047 -3.294 -2.763 -2.482 -1.042 -0.575 -0.501 -0.106 -0.061 0.341 0.357 2.811 2.868 3.214 4.833 5.247 5.462 5.468 6.243 6.964 8.498 8.686 9.006 9.076	-108.240 -104.418 -53.314 -43.739 -39.630 -16.441 -7.651 -3.198 -1.536 0.673 0.275 0.215 0.011 0.004 0.122 0.134 5.354 5.492 6.407 17.786 24.374 28.585 28.717 48.427 71.930 129.550 136.898 149.734 152.628	-5.168 -4.682 -3.607 -3.483 -3.007 -1.056 -0.690 -0.155 -0.063 0.941 1.119 2.989 3.000 5.847 8.322
6	-13.648 -13.009 -12.595 -12.292 -12.101 -11.504 -10.837 -9.512 -9.395 -8.964 -7.840 -7.454 -5.591 -5.550 -5.298 -4.840 -3.680 -2.657 -2.297 -2.058 0.957 1.220 1.433 2.633 2.934 3.025 3.200 4.691 4.898 5.180 7.920	-853.845 -745.547 -678.540 -630.918 -601.405 -513.132 -422.536 -277.368 -267.042 -232.072 -160.742 -140.959 -62.544 -61.094 -52.514 -38.421 -13.453 -3.901 -2.515 -1.943 0.843 1.024 1.178 3.783 5.549 6.226 7.726 34.297 40.064 48.661 165.059	-11.454 -10.239 -9.529 -8.832 -7.970 -5.455 -0.990 0.153 0.825 1.060 3.396 6.310 7.239

Продовження табл. 2.2.6

№	*x*	*y*	*Контрольні точки*
7	-14.942 -13.031 -11.994 -11.972 -11.682 -11.484 -9.345 -9.110 -7.849 -6.583 -6.537 -5.079 -0.940 -0.246 1.297 2.235 2.356 4.671 4.724 4.786 4.941 5.076 5.531 5.658 6.477 6.895 7.557 8.139 8.679 8.977 8.998	4.629 4.875 5.865 5.883 6.097 6.207 5.251 5.022 4.341 5.063 5.108 6.333 5.138 5.962 8.196 9.166 9.276 14.655 14.934 15.267 16.177 17.041 20.525 21.667 31.015 37.316 50.017 64.796 82.681 94.730 95.640	-12.146 -11.910 -11.122 -10.717 -6.701 -6.418 -3.593 -2.016 1.553 4.123 4.474 5.004 6.625
8	-12.520 -12.346 -11.449 -11.264 -10.168 -8.740 -6.088 -3.850 -3.188 -3.025 -2.451 -1.878 1.359 2.160 3.335 3.732 3.885 4.549 5.103 6.497 7.074 7.210 7.283 7.488 8.782 10.170 12.441 14.075 14.208	770274.489 708319.300 450392.411 408603.647 221096.314 89152.926 10199.865 666.821 225.266 168.338 58.077 23.146 17.559 36.446 290.353 554.870 702.109 1785.518 3545.063 15054.053 25077.165 28101.220 29853.353 35270.261 91780.084 221292.740 741698.313 1554839.076 1645386.017	-11.245 -9.976 -9.544 -4.614 -4.426 0.498 1.197 1.577 3.161 5.417 6.277 8.526 9.395 9.502 10.563 10.788 11.624

Продовження табл. 2.2.6

№	*x*	*y*	*Контрольні точки*
9	-14.630	-95715.604	-13.349
	-14.356	-87100.338	-8.241
	-12.839	-49825.856	-7.584
	-12.446	-42651.381	-7.284
	-12.125	-37434.580	-6.101
	-11.006	-23078.380	-5.380
	-10.093	-14961.202	-5.170
	-9.457	-10797.809	-4.676
	-7.890	-4353.541	-4.145
	-6.879	-2189.230	0.456
	-6.100	-1200.561	2.025
	-5.224	-553.074	2.349
	-2.472	-4.319	2.499
	-2.043	4.054	2.955
	-1.895	5.627	5.032
	-1.894	5.636	9.719
	-1.295	8.047	9.784
	-0.655	7.702	
	-0.592	7.641	
	1.392	9.438	
	3.540	85.411	
	4.614	301.508	
	5.536	746.454	
	5.993	1109.628	
	6.722	1971.170	
	7.680	3832.642	
	9.424	10624.034	
	10.522	18420.574	
	10.653	19594.451	
	11.108	24153.372	
	12.475	43161.597	
10	-3.707	20.690	-2.404
	-3.558	21.166	-0.972
	-2.468	24.278	-0.184
	-1.519	25.090	-0.121
	0.184	24.538	1.958
	1.317	25.047	2.285
	2.672	23.839	3.123
	3.434	21.572	3.234
	3.600	21.030	3.676
	4.047	19.721	4.378
	4.380	19.054	4.599
	4.490	18.921	5.844
	4.932	18.925	5.909
	5.050	19.087	6.362
	5.583	20.688	6.730
	5.854	21.993	9.868
	6.380	25.130	12.086
	6.937	28.534	
	8.564	29.365	
	9.840	18.639	
	12.310	21.367	
	12.331	21.618	
	12.684	26.002	

Продовження табл. 2.2.6

№	*x*	*y*	*Контрольні точки*
11	-13.008	41.133	-12.169
	-12.623	40.662	-9.528
	-11.241	51.561	-9.314
	-10.772	56.684	-8.325
	-9.683	62.938	-7.992
	-9.258	62.283	-6.598
	-8.425	57.035	-6.257
	-8.189	55.072	-6.164
	-7.828	52.116	-5.814
	-6.545	46.740	-5.119
	-5.916	48.157	-3.895
	-5.057	52.555	-3.009
	-4.721	54.279	-1.872
	-4.092	56.513	0.115
	-4.067	56.565	0.863
	-3.794	56.943	
	-3.511	56.956	
	-2.029	53.322	
	-1.526	52.254	
	-1.480	52.192	
	-1.381	52.079	
	-1.173	51.945	
	0.207	53.730	
	0.214	53.743	
	0.248	53.807	
	0.389	54.060	
	2.649	51.459	
12	-11.898	23.258	-9.967
	-11.600	24.472	-9.604
	-11.442	24.979	-9.016
	-11.328	25.280	-8.692
	-11.025	25.813	-6.692
	-10.144	25.150	-6.662
	-9.935	24.579	-4.445
	-9.432	22.775	-3.816
	-9.406	22.670	-3.142
	-8.482	18.960	-0.818
	-7.893	17.209	-0.000
	-7.336	16.343	0.471
	-7.112	16.211	3.267
	-7.016	16.187	3.312
	-4.724	16.339	5.503
	-4.075	14.873	
	-3.577	13.265	
	-3.437	12.777	
	-3.365	12.524	
	-1.997	9.019	
	-1.695	8.912	
	-1.644	8.926	
	-0.617	10.981	
	-0.501	11.387	
	-0.326	12.036	
	0.146	13.904	
	0.276	14.412	
	0.431	15.002	
	0.470	15.145	
	1.534	17.657	
	2.353	17.114	
	3.232	14.581	
	3.430	13.890	
	4.842	10.137	
	5.605	9.796	
	6.022	10.000	
	6.181	10.108	

Продовження табл. 2.2.6

№	*x*	*y*	*Контрольні точки*
13	-8.809 -8.769 -8.196 -7.413 -7.096 -6.885 -5.367 -4.861 -4.658 -4.249 -3.423 -2.784 -2.496 -2.244 -1.869 -1.523 -1.365 -0.978 -0.890 -0.539 0.110 0.190 0.570 1.822 2.204 2.363 2.776 3.529 4.209 4.384 4.548 4.755 4.992	7.932 8.380 11.151 7.019 8.005 9.779 7.788 8.883 10.469 12.471 6.439 6.117 8.239 9.550 8.754 5.628 4.188 2.699 2.907 5.280 8.165 7.858 5.011 8.412 9.637 9.075 6.169 7.388 12.465 12.180 11.283 9.694 8.059	-7.442 -6.452 -5.213 -3.075 -2.222 -2.027 -1.625 -1.215 -1.039 -0.449 1.597 3.650 4.282
14	2.211 2.228 2.306 3.686 4.054 4.200 4.489 5.039 5.637 5.700 6.394 7.350 11.072 11.565 11.787 12.144 12.452 13.182 14.168 14.389 15.763 15.831 16.034 17.760 21.303 22.334 23.865	3.755 3.745 3.701 4.977 6.513 7.291 9.069 13.085 17.571 18.000 21.538 21.533 30.782 37.868 40.788 44.721 47.097 48.077 40.447 38.106 31.050 31.333 32.618 62.628 52.033 51.658 86.156	3.322 4.376 5.630 9.011 11.485 12.175 12.428 13.922 15.205 15.260 19.718 21.245 22.015

Продовження табл. 2.2.6

№	*x*	*y*	*Контрольні точки*
15	2.607 3.351 4.432 5.015 6.159 6.888 6.965 7.014 7.577 7.611 8.152 8.486 8.673 8.990 9.062 9.235 9.781 10.303 10.563 10.583 10.935 11.535 11.941 12.007 12.814 13.884 14.726	3.576 4.095 8.695 12.903 20.628 22.279 22.247 22.207 20.738 20.601 18.031 16.453 15.720 14.911 14.823 14.781 16.458 20.777 23.796 24.048 28.812 37.460 42.617 43.345 48.427 43.319 34.753	3.532 3.998 5.437 6.296 7.480 7.700 8.484 8.660 8.663 9.933 10.160 10.477 11.601
16	2.109 2.510 3.105 3.472 3.801 4.310 4.530 5.762 5.855 6.448 6.755 6.771 6.987 7.261 7.443 8.006 9.166 9.260 10.676 10.748 11.164 12.091 12.849 13.115 13.683 13.874 14.379	34.498 47.674 84.673 126.054 183.089 332.235 430.991 1844.222 2056.552 4088.466 5815.929 5920.709 7581.716 10361.183 12733.556 24030.026 87712.581 97366.477 462254.684 500019.705 787729.455 2154222.335 4886724.521 6510612.811 11990136.653 14706106.102 25265827.982	2.736 4.483 5.351 5.913 7.953 8.438 8.901 9.145 9.175 10.065 11.016 11.391 13.073

Продовження табл. 2.2.6

№	*x*	*y*	*Контрольні точки*
17	-4.028 -2.958 -0.713 -0.620 0.078 0.107 1.863 1.973 2.935 3.665 3.673 5.166 5.566 6.074 8.794 9.259 9.432 10.309 10.488 10.915 11.650 12.243 13.082 13.911 14.291	27.796 28.075 24.432 24.483 25.484 25.546 36.780 38.739 77.701 165.218 166.834 933.128 1484.031 2670.490 58041.093 97274.709 117787.816 309287.140 376536.216 599972.987 1335726.588 2540680.150 6282048.006 15309358.576 23002391.250	-2.494 -1.821 -1.781 -1.597 -0.946 1.995 4.605 5.096 6.858 7.931 8.197 9.280 10.026
18	-5.377 -5.199 -4.164 -3.768 -2.618 -2.612 -1.089 -0.049 0.102 0.657 1.785 2.538 3.488 5.213 5.402 6.170 6.440 6.519 6.889 7.901 8.144 10.822 11.331 12.757 12.963 13.314 13.676 13.801 14.072	11.063 10.696 11.702 13.023 16.440 16.448 15.920 15.277 15.444 16.992 27.709 48.872 128.241 968.618 1210.135 2965.699 4049.704 4435.108 6782.583 21353.516 28056.714 542555.964 945062.349 4427884.826 5523941.931 8061056.431 11895793.517 13595838.004 18183546.817	-4.075 -2.166 -1.542 -1.226 -0.456 -0.324 3.533 4.663 5.057 5.535 6.981 8.516 9.417 10.079 10.204 11.590 11.609

Продовження табл. 2.2.6

№	*x*	*y*	*Контрольні точки*
19	-14.989 -13.791 -13.021 -12.542 -12.002 -11.753 -11.595 -10.826 -10.603 -7.992 -6.047 -4.110 -4.106 -3.683 -3.391 -3.251 -2.668 -2.179 -2.063 -1.524 -0.070 0.327 1.472 2.379 2.939 3.163 3.716 3.964 4.040 4.338 4.454 5.451 6.756 6.777 6.779	28.599 12.640 5.627 4.786 7.187 9.254 10.779 19.148 21.381 18.429 11.448 19.671 19.681 20.507 20.645 20.595 19.768 18.682 18.428 17.471 18.188 19.021 21.827 26.401 33.339 37.801 55.291 67.272 71.614 92.317 102.173 254.080 882.586 900.889 902.393	-11.915 -10.211 -10.159 -8.875 -5.828 -5.243 -4.305 -4.123 -3.361 -3.303 -2.755 -1.191 -0.052 3.226 3.661

Продовження табл. 2.2.6

№	*x*	*y*	*Контрольні точки*
20	-9.319 -9.166 -8.594 -8.536 -8.288 -7.784 -7.146 -6.384 -6.165 -5.506 -5.205 -2.021 -1.865 -1.011 -0.607 0.762 2.043 2.611 3.861 5.094 5.490 6.766 7.501 9.674 9.922 11.210 12.740 13.061 13.191 13.232 15.142 15.229 15.357 15.594 16.579	-206.546 -215.645 -236.654 -237.463 -238.011 -225.579 -190.626 -140.269 -127.277 -98.611 -88.650 -45.542 -41.825 -20.935 -11.589 18.470 49.288 61.210 74.742 86.898 97.992 168.031 215.333 185.939 167.380 119.081 302.542 362.367 386.040 393.205 448.805 434.680 411.636 363.198 146.413	-7.665 -7.274 -6.581 -6.494 -6.288 -3.923 -1.416 -1.393 -1.166 -0.551 2.536 3.765 6.893 10.139 15.964
21	-4.793 -4.031 -3.768 -3.383 -2.904 -2.817 -2.442 0.760 0.879 1.752 1.762 2.930 4.705 5.522 5.675 5.991 6.133 7.069 7.157 8.358 8.851 9.145 9.594 9.825 9.926 10.545 10.604 10.628 11.516 12.810 13.103	-140.383 -110.378 -99.286 -83.750 -66.756 -64.001 -53.224 16.335 18.861 36.956 37.174 67.260 137.312 158.385 159.940 160.521 159.687 144.009 142.427 152.025 183.542 210.834 261.688 290.253 302.876 373.699 379.278 381.480 418.441 302.551 262.426	-2.836 -2.829 -0.818 -0.812 1.898 1.919 1.945 2.267 5.810 7.281 8.749 9.044 10.354

Продовження табл. 2.2.6

№	*x*	*y*	*Контрольні точки*
22	-5.808 -4.072 -3.781 -3.645 -3.488 -3.407 -2.141 -1.001 0.327 0.596 1.518 1.734 2.330 2.410 5.672 5.970 6.746 6.840 6.845 7.456 8.503 8.603 9.988 10.657 12.313 12.515 13.542 13.976 14.545 15.232 17.259 17.607 18.022 18.102 18.531 22.880 23.862	-7.245 0.062 1.180 1.604 2.010 2.182 2.152 1.089 3.108 3.783 5.523 5.692 5.674 5.631 16.411 18.630 22.821 23.089 23.102 23.286 18.406 17.782 13.565 17.463 38.231 40.286 43.403 40.716 34.622 26.445 32.462 38.931 47.243 48.817 56.535 32.598 51.997	-3.091 -0.543 -0.422 -0.021 0.770 0.929 1.889 3.678 3.764 10.625 10.683 12.539 14.853 14.953 20.292 20.890 23.016

Продовження табл. 2.2.6

№	*x*	*y*	*Контрольні точки*
23	-2.987 -2.966 -2.259 -2.132 -1.808 -1.614 -1.597 -1.575 -1.251 -1.108 -0.793 -0.788 -0.564 -0.427 -0.399 -0.319 -0.024 0.604 0.760 0.902 0.939 1.036 1.249 1.294 1.827 1.951 2.238 2.989 4.064 4.851 5.334 6.011 6.394	-16.593 -16.449 -12.305 -11.656 -10.039 -9.053 -8.970 -8.854 -7.089 -6.250 -4.243 -4.209 -2.641 -1.626 -1.410 -0.800 1.556 6.821 8.109 9.257 9.553 10.320 11.929 12.261 15.796 16.524 18.097 21.863 28.948 37.111 43.209 51.996 56.453	-2.477 -1.195 -1.014 -0.905 -0.463 -0.449 0.165 0.533 3.376 3.616 4.374 5.355 5.529
24	-4.834 -4.577 -4.032 -3.433 -2.905 -2.487 -1.631 -0.635 -0.250 -0.114 0.903 1.676 2.336 2.464 2.656 3.528 3.575 4.049 4.232 4.793 4.902 5.629 5.974 6.414 6.429 6.673 6.805 7.230 7.710 7.946 7.961 9.232 10.410 11.086 11.515	176.068 155.109 116.562 88.770 66.289 47.133 20.321 5.292 2.297 1.955 7.431 22.427 44.347 48.556 54.695 90.726 93.467 124.942 137.476 171.571 177.749 230.282 264.946 310.191 311.548 333.599 344.616 380.098 431.980 463.637 465.688 622.091 804.699 904.851 963.700	-3.404 -2.953 -2.947 -1.685 -0.805 -0.416 0.592 1.865 3.516 4.508 4.880 6.405 6.797 8.109 8.845 9.650 10.838

Продовження табл. 2.2.6

№	*x*	*y*	*Контрольні точки*
25	-0.764 -0.508 -0.504 -0.089 0.108 0.270 0.616 0.790 1.203 1.262 1.322 1.411 2.279 2.476 2.931 3.075 3.333 3.366 3.612 3.889 4.368 4.481 4.777 4.940 5.074 5.240 5.333 5.393 6.156 6.621 7.030 7.414 7.572 7.841 7.842 8.173 8.636 8.810 8.995	4.178 2.766 2.747 1.683 1.669 1.841 2.884 3.776 6.912 7.477 8.086 9.035 21.939 25.762 35.917 39.512 46.417 47.329 54.545 63.279 80.024 84.300 96.027 102.841 108.634 116.040 120.327 123.123 161.645 187.680 212.150 236.493 246.913 265.083 265.197 288.452 322.566 335.846 350.278	0.055 0.565 0.997 1.092 1.198 1.384 1.965 2.567 2.575 3.119 3.255 3.296 3.307 5.044 5.077 6.271 6.477

Таблиця 2.2.7. Перелік аналітично заданих функцій

№	*Функція*	*Контрольні точки*
26	$f(x)=\sqrt{x^3}+\sin x$	2.556 3.594 4.725 4.866 5.199 7.192 7.382 8.735 9.406 9.449 9.714 9.995 11.514 12.213 13.027 13.038 14.015
27	$f(x)=\sqrt{x^3}+\cos 2x$	2.050 2.310 2.464 6.726 6.812 7.665 8.912 11.286 11.877 13.702 13.935 14.263 15.093 15.482 15.674 16.044 17.798
28	$f(x)=\ln x^3+\cos x+x$	8.420 8.677 10.250 11.213 11.288 11.942 12.288 12.463 12.834 12.913 14.207 16.404 16.639 16.942 18.683 18.795 19.071

Продовження табл. 2.2.7

№	*Функція*	*Контрольні точки*
29	$f(x)=\log_{10} x^4+\cos 3x+x^2$	9.711 10.031 10.048 10.873 12.080 12.120 12.158 13.418 14.973 19.321 20.525 20.890 22.416 23.730 24.195 26.906 29.050
30	$f(x)=e^{x^2}+x^3\cos 3x+x$	1.514 1.544 1.571 1.589 1.716 1.733 1.818 1.821 1.885 1.913 1.921 1.937 1.940 1.978 2.040 2.186 2.380
31	$f(x)=e^{x}+x^2\cos x+x^2$	-2.338 -0.541 0.143 0.162 0.281 0.501 0.583 1.286 1.623 1.789 1.993 2.081 2.517 3.087 3.162 3.305 3.794

Продовження табл. 2.2.7

№	*Функція*	*Контрольні точки*
32	$f(x) = e^x + x^2 \ln x + x$	4.977 4.979 5.869 6.306 8.452 8.821 9.257 9.832 10.082 10.240 11.620 11.635 11.778 11.808 12.495 13.904 14.234
33	$f(x) = e^x + x\log_{10} x + x$	5.269 5.561 6.462 6.787 9.220 9.421 9.747 9.783 9.808 12.425 12.604 13.512 14.224
34	$f(x) = \cos x + x\log_{10} x^3 + x^2$	4.522 5.469 6.963 7.038 7.408 7.955 8.409 8.414 9.316 9.769 13.064 13.101 14.454
35	$f(x) = \sin x + x\log_2 x + x^2$	1.999 2.604 3.862 4.174 4.383 6.263 6.566 8.023 8.453 9.109 9.291 9.405 9.631 10.685 11.276 11.510

Продовження табл. 2.2.7

№	*Функція*	*Контрольні точки*
		13.560
36	$f\left(x\right)=x^3\sin x+\log_{10}x+x$	3.258 3.480 4.534 4.956 5.363 7.112 8.472 8.709 9.049 10.119 10.323 11.326 11.872
37	$f\left(x\right)=x^3\cos x+e^x+x$	1.730 3.072 4.381 5.055 5.931 8.305 8.473 9.222 9.865 11.840 12.756 13.736 13.992
38	$f\left(x\right)=x^2\sin x+xe^x+x$	-2.100 -1.911 -1.672 -1.464 -1.235 -0.988 -0.890 -0.629 -0.448 -0.425 -0.125 -0.067 0.299
39	$f\left(x\right)=x^2\cos x+xe^x+\sqrt{x^3}$	1.772 1.905 2.673 2.746 3.110 3.249 3.271 3.451 4.401 4.477 4.714 5.140 5.557 5.562 5.760

Продовження табл. 2.2.7

№	*Функція*	*Контрольні точки*
40	$f(x) = x\sin x + e^x + x\sqrt{x^4}$	-1.532 -0.692 -0.587 -0.530 0.034 0.200 0.303 0.988 1.070 1.499 1.587 1.647 1.745 1.989 2.148
41	$f(x) = x\sin x + xe^x + x\sqrt{x^3}$	3.563 3.782 4.744 5.445 5.592 5.826 5.907 5.925 6.353 6.499 6.657 6.683 6.917 6.933 7.670
42	$f(x) = x\sin x + x^2e^x + \log_2 x^3$	3.821 3.828 3.833 4.012 4.080 4.516 4.837 4.841 4.903 5.221 5.494 6.978 7.205
43	$f(x) = x\sin x + x^2e^x + shx$	4.988 5.468 5.891 6.176 6.332 6.631 6.686 6.879 7.185 7.505 7.740 7.870 8.046

Продовження табл. 2.2.7

№	*Функція*	*Контрольні точки*
44	$f(x)=\sin\left(x^2\right)+e^x\ln x+\operatorname{ch}x$	0.280 1.257 1.409 2.048 2.050 3.439 4.507 4.913 4.986 5.517 5.815 6.330 7.762 7.789 7.885
45	$f(x)=\sin x+\cos x\cdot\ln x+\operatorname{ch}x$	-1.910 -1.907 -0.757 -0.527 -0.009 1.191 1.469 2.239 3.058 3.133 3.399 4.314 4.350
46	$f(x)=\log_2 x+\sin x\cdot\ln x+\operatorname{ch}\left(\log_{10}x\right)+x$	-4.166 -3.216 -2.818 -1.643 -1.436 -1.262 -1.118 -0.934 -0.221 0.075 0.445 0.595 0.615 2.619 2.749 3.266 3.900 4.619 5.232
47	$f(x)=x\ln x+e^x\cdot\log_{10}(x)+\operatorname{sh}\dfrac{x}{2}+x$	-3.091 -3.003 -2.637 -2.453 -2.445 -1.936 -1.819 0.091 0.098 0.120 0.575 0.867

Продовження табл. 2.2.7

№	*Функція*	*Контрольні точки*
		0.922 1.085 1.769 1.956 2.219
48	$f(x)=\sqrt{\lvert x\rvert}+\log_{10}\left(\frac{x}{5}\right)+e^{x}\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)+x$	-13.386 -11.300 -11.224 -10.779 -10.370 -9.970 -8.197 -8.137 -7.520 -5.441 -3.688 -3.647 -3.546 -3.115 -0.579 0.920 0.966 2.077 2.745
49	$f(x)=\sqrt[3]{x}+e^{x}\ln\frac{x}{3}+\cos\sqrt{\lvert x\rvert}+x\cdot\mathrm{sh}(2x)$	-15.588 -11.288 -9.757 -7.703 -7.402 -6.339 -3.509 -3.049 -1.033 1.733 2.492 3.790 6.053 9.435 9.548 10.451 11.066

Продовження табл. 2.2.7

№	*Функція*	*Контрольні точки*
50	$f(x)=\sqrt[5]{x}+e^{x}\cdot\log_{10}x^{2}+\cos x+x\cdot\mathrm{ch}\left(5\sqrt{\lvert x\rvert}\right)$	-13.533 -11.521 -8.718 -7.046 -6.166 -5.797 -4.147 -3.699 -2.883 -1.451 0.115 3.455 3.926 5.877 6.887 7.485 9.133 9.295 10.354

Таблиця 2.2.8. Перелік інтерполяційних формул

№	Метод
0	Інтерполяційний многочлен Лагранжа
1	Схема Ейткена
2	Перша інтерполяційна формула Ньютона
3	Друга інтерполяційна формула Ньютона
4	Перша інтерполяційна формула Гаусса
5	Друга інтерполяційна формула Гаусса
6	Інтерполяційна формула Стірлінга та інтерполяційна формула Бесселя
7	Перша інтерполяційна формула Ньютона для нерівновіддалених вузлів
8	Друга інтерполяційна формула Ньютона для нерівновіддалених вузлів

Контрольні питання

1. Дайте визначення термінів апроксимація, інтерполяція, екстраполяція.
2. Як будується визначник Вандермонда та яким чином його можна використовувати при інтерполяції?
3. В чому полягає ідея побудови інтерполяційного многочлена Лагранжа?
4. Еквівалентом якої інтерполяційної формули є схема Ейткена? Відповідь обґрунтувати.
5. Яка перевага схеми Ейткена порівняно з інтерполяційною формулою Лагранжа?
6. Чи можливо за таблично заданою функцією побудувати кілька різних інтерполяційних многочленів Лагранжа? Відповідь обґрунтувати.
7. Пояснити зміст термінів білінійна, біквадратична та бікубічна інтерполяція?
8. Дайте визначення скінченної різниці довільного порядку.
9. Які основні властивості скінченних різниць?
10. Який взаємозв’язок наявний між скінченними різницями та похідними?
11. Яка особливість скінченних різниць n-го порядку многочлена n-го степеня? Чому вони дорівнюють? Чому дорівнюють скінченні різниці порядку більше n для многочлена n-го степеня?
12. Як обрати оптимальну степінь інтерполяційного многочлена побудувавши таблицю скінченних різниць?
13. Які інтерполяційні формули слід обрати для знаходження значення таблично заданої функції в контрольній точці, яка знаходиться на початку, в середині або в кінці таблиці?

14. Яка перевага скінченно-різницевих інтерполяційних формул над інтерполяційною формулою Лагранжа?
15. Які інтерполяційні формули використовуються тільки для рівновіддалених вузлів? Відповідь обґрунтувати.
16. Дайте визначення центральних скінченних різниць.
17. На основі яких інтерполяційних формул та яким чином отримуються формули Стірлінга та Беселя?
18. Чи є формули Стірлінга та Беселя інтерполяційними в класичному розумінні цього терміну?
19. При яких значеннях q використовуються скінченно-різницеві інтерполяційні формули Ньютона, Гаусса, Бесселя та Стірлінга?
20. Які саме скінченні різниці використовуються в першій інтерполяційній формулі Гаусса?
21. Які саме скінченні різниці використовуються в другій інтерполяційній формулі Гаусса?
22. Яку кількість вузлових точок доцільно брати в формулах Стірлінга та Бесселя? Відповідь обґрунтувати.
23. Що спільного між скінченно-різницевими інтерполяційними многочленами та інтерполяційним многочленом Лагранжа?
24. Дайте визначення розділеної різниці довільного порядку.
25. Яка особливість розділених різниць n-го порядку многочлена n-го степеня?
26. Побудувати другу інтерполяційну формулу Ньютона для нерівновіддалених вузлів.
27. Які інтерполяційні формули використовуються для нерівновіддалених вузлів? Відповідь обґрунтувати.

Лабораторна робота №2.3

тема: “Чисельне інтегрування”

Мета роботи – опанувати алгоритми та методи обчислення визначених інтегралів за допомогою квадратурних формул.

Короткі теоретичні відомості

Розглянемо задачу чисельного інтегрування для випадку інтеграла Рімана. Нехай потрібно знайти значення I інтеграла Рімана $\int_a^b f(x)dx$ для деякої заданої на відрізку $[a, b]$ функції $f(x)$.

Відомо, що інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ існує, якщо $f(x)$ є кусково-неперервною функцією, тобто для функцій, які допускають на проміжку $[a, b]$ скінченну кількість точок розриву першого роду.

Квадратурні формули прямокутників

Зрозуміло, що прості квадратурні формули можна вивести безпосередньо з визначення інтеграла. Зафіксувавши деяке $n \geq 1$, маємо

$$I \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \qquad (2.3.1)$$

Наближену рівність (2.3.1) будемо називати загальною формулою прямокутників.

Домовимось надалі розглядати рівномірне розбиття відрізка $[a, b]$ на n частин точками x_i з кроком $h = \dfrac{b-a}{n}$:

$$x_0 = a\,, \quad x_i = x_{i-1} + h \quad (i = 1, 2, ..., n-1), \quad x_n = b\,. \tag{2.3.2}$$

При такому розбитті (кількість відрізків дорівнює n) формула (2.3.1) приймає вигляд

$$I \approx h\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]. \tag{2.3.3}$$

Тепер потрібно зафіксувати точки ξ_i на елементарних відрізках $[x_{i-1}, x_i]$.

Можливо розраховувати на більшу точність отримання значення інтеграла, якщо взяти точку ξ_i посередині між точками x_{i-1} та x_i. Зафіксуємо $\xi_i = \dfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = x_{i-1} + \dfrac{h}{2} = x_i - \dfrac{h}{2}$. В результаті маємо *квадратурну формулу середніх прямокутників*

$$I \approx I^{П} = h\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) = h\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i - \frac{h}{2}\right). \tag{2.3.4}$$

Можна показати, що залишковий член формули прямокутників має такий вигляд:

$$r^{П}(h) = \frac{b-a}{24} f''(\xi_{П})h^2, \quad \xi_{П} \in (a, b). \tag{2.3.5}$$

Як видно з формули (2.3.5), при збільшенні кількості n елементарних відрізків, на які розбивається проміжок інтегрування $[a, b]$, похибка чисельного інтегрування за формулою середньої точки (2.3.4) спадає пропорційно квадрату h.

Сімейство квадратурних формул Ньютона-Котеса

Підстановка в інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ замість функції $f(x)$ її інтерполяційного многочлена Лагранжа того чи іншого степеня n призводить до сімейства квадратурних формул, які називають формулами Ньютона-Котеса.

Якщо система вузлів інтерполювання $\{ x_i \}_{i=0}^{n}$ співпадає з точками розбиття (2.3.2) відрізка $[a,b]$ з кроком h, то заміна змінної $x = x_0 + qh$ трансформує многочлен Лагранжа таким чином:

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i - x_j} = \\ &= L_n(x_0+qh) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i} y_i}{i!(n-i)!} \cdot \frac{q(q-1)\cdots(q-n)}{q-i}. \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Таким чином, отримуємо

$$I \approx h \int_0^n \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i} y_i}{i!(n-i)!} \cdot \frac{q(q-1)\cdots(q-n)}{q-i} dq . \tag{2.3.7}$$

Ця рівність, переписана у вигляді

$$I \approx (b-a) \sum_{i=0}^{n} H_i y_i , \tag{2.3.8}$$

і є *квадратурна формула Ньютона-Котеса*, де

$$H_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \sum_{i=0}^{n} \frac{q(q-1)\cdots(q-n)}{q-i} dq \tag{2.3.9}$$

– *коефіцієнти Котеса*.

Формули (2.3.8) – (2.3.9) визначають сімейство квадратурних формул. Параметром цього сімейства є число n – степінь інтерполяційного многочлена, яким замінюється підінтегральна функція.

Складені квадратурні формули трапецій та Сімпсона

Застосування формул Ньютона-Котеса високих порядків може бути виправданим лише при достатньо високій гладкості підінтегральної функції $f(x)$. Більш вживаними є квадратурні формули, що отримуються шляхом подрібнення проміжку інтегрування на велику кількість дрібних частин, інтегрування на кожній з яких виконується за допомогою однотипних найпростіших формул невисокого порядку. Отримаємо дві такі формули – трапецій та Сімпсона.

Найпростіша формула трапецій з залишковим членом відповідно до інтегрування на відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ може бути записана у вигляді точної рівності

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{y_{i-1}+y_i}{2}h - \frac{f''(\xi_i)}{12}h^3, \qquad (2.3.10)$$

де ξ_i – деяка, взагалі, невідома точка інтервалу (x_{i-1}, x_i), а $y_i = f(x_i)$.

Виконавши розбиття (2.3.2) початкового проміжку інтегрування $[a, b]$ на n частин з кроком $h = \dfrac{b-a}{n}$ та застосовуючи до кожної з цих частин, на які за властивістю адитивності розкладається вихідний інтеграл, формулу (2.3.10), будемо мати

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_{i-1}+y_i) - \frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i). \qquad (2.3.11)$$

Звідки випливає, що шукане значення інтеграла можна наближено знайти за формулою

$$I \approx I^T = h\left(\frac{y_0+y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right), \qquad (2.3.12)$$

яку надалі будемо називати *формулою трапецій*, а похибку наближеної рівності (2.3.12) можна характеризувати залишковим членом r^T :

$$r^T = I - I^T = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi_T), \quad \xi_T \in (a,b). \tag{2.3.13}$$

Аналогічно рівності (2.3.10) на основі найпростішої формули Сімпсона та її залишкового члена запишемо рівність

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}\right) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_i), \tag{2.3.14}$$

де $\xi_i \in (x_{2i-2}, x_{2i})$.

Звідки отримується формула чисельного інтегрування

$$I \approx I^C = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_{2m} + 4\mu_1 + 2\mu_2\right), \tag{2.3.15}$$

де $\mu_1 = y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1}$, $\mu_2 = y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}$, яку будемо називати формулою Сімпсона.

За узагальненою теоремою про середнє значення неперервної функції на відрізку отримаємо залишковий член формули Сімпсона:

$$r^C = I - I^C = -\frac{h^4}{180}\sum_{i=1}^{m} 2hf^{(4)}(\xi_i) = -\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\xi_C) \tag{2.3.16}$$

де $\xi_C \in (a,b)$.

Принцип Рунге практичного оцінювання похибок

Нехай для наближеного обчислення значення I даного інтеграла застосовується деяка квадратурна формула p-го порядку точності I^p з сімейства складених формул Ньютона-Котеса. При умові неперервності p-ої похідної підінтегральної функції це означає існування такої константи C, що

$$I = I^p(h) + Ch^p. \tag{2.3.17}$$

При зменшенні вдвічі кроку h чисельного інтегрування за тією ж формулою p-го порядку можна записати таку ж рівність, але з іншою константою C_1:

$$I = I^p\left(\frac{h}{2}\right) + C_1\left(\frac{h}{2}\right)^p. \tag{2.3.18}$$

Вважаючи, що при малому h константи C та C_1 є близькими, з (2.3.17) та (2.3.18) маємо

$$I^p(h) + Ch^p = I^p\left(\frac{h}{2}\right) + C_1\left(\frac{h}{2}\right)^p \approx I^p\left(\frac{h}{2}\right) + C\left(\frac{h}{2}\right)^p$$

і, отже,

$$C \approx C_1 \approx \frac{I^p\left(\frac{h}{2}\right) - I^p(h)}{h^p - \left(\frac{h}{2}\right)^p}$$

Підставивши отримане значення C_1 в (2.3.18), приходимо до виразу

$$I \approx I^p\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{I^p\left(\frac{h}{2}\right) - I^p(h)}{2^p - 1}. \tag{2.3.19}$$

Якщо переписати останню рівність в такому вигляді

$$I - I^p\left(\frac{h}{2}\right) \approx \frac{I^p\left(\frac{h}{2}\right) - I^p(h)}{2^p - 1}, \qquad (2.3.20)$$

то отримуємо можливість контролювати точність чисельного інтегрування завдяки подвійному перерахунку (з кроком h та з кроком $\frac{h}{2}$). В цьому і полягає *принцип Рунге практичного оцінювання похибок*.

На основі вище сказаного можна легко сформулювати наступний алгоритм, який дістав назву *алгоритм прямокутників-трапецій* обчислення інтеграла I з заданою точністю ε:

1. Ініціалізація: $n = 1$, $H = b - a$, $I^T(H) = \frac{H}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$.
2. Обчислюємо: $h = \frac{H}{2}$;

   $x_1 = a + h$, $\quad x_i = x_{i-1} + H$ при $i = 2, 3, ..., n$;

   $y_i = f(x_i)$ при $i = 1, 2, ..., n$;

   $$I^\Pi(H) = H\sum_{i=1}^{n} y_i .$$
3. Обчислюємо: $I^T(h) = \frac{1}{2}\big(I^\Pi(H) + I^T(H)\big)$;

   $$R^T(h) = \frac{1}{3}\big(I^T(h) - I^T(H)\big).$$

4. Порівнюємо $\left|R^T(h)\right|$ с ε.

Якщо $\left|R^T(h)\right| > \varepsilon$, то $n = 2n$;

$H = h$;

$I^T(H) = I^T(h)$;

перехід до другого пункту алгоритму.

5. Обчислюємо $I^C(h) = I^T(h) + R^T(h)$ та приймаємо $I \approx I^C(h)$.

Для наочності подання результатів, проміжні результати роботи алгоритму подають у вигляді табл. 2.3.1.

Таблиця 2.3.1. Результати роботи алгоритму прямокутників-трапецій

n	$I^T(H)$	$I^П(H)$	$I^T(h)$	$R^T(h)$
1				
2				
3				
$\vdots$				
Остаточний результат: $I^C(h) = I^T(h) + R^T(h)$				

Якщо підінтегральна функція має достатньо високу степінь гладкості, то для обчислення інтеграла можна скористатися алгоритмом, який був запропонований математиком Ромбергом. Цей алгоритм базується на зв’язках між складеними квадратурними формулами Ньютона-Котеса парних порядків. Можна показати, що при $p = 4$ (нагадаємо, що $I^4(h) \equiv I^C(h)$) в рівності (2.3.19)

$$I \approx I^4\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{I^4\left(\frac{h}{2}\right) - I^4(h)}{15}$$

права частина співпадає зі значенням $I^{6}\left(\frac{h}{2}\right)$, яке може бути обчислене за відповідною (по чотирьом точкам) складеною формулою Ньютона-Котеса.

Таким чином, *алгоритм Ромберга* визначається наступною сукупністю формул:

$$h_0 = b - a, \quad I^{(0)}(h_0) = I^{T}(h_0);$$

$$h_i = \frac{h_{i-1}}{2}, \quad I^{(0)}(h_i) = I^{T}(h_i);$$

$$R^{(k-1)}(h_i) = \frac{I^{(k-1)}(h_i) - I^{(k-1)}(h_{i-1})}{2^{2k} - 1};$$

$$I^{(k)}(h_i) = I^{(k-1)}(h_i) + R^{(k-1)}(h_i),$$

де $i = 1, 2, ..., n$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, ..., i$.

Критерієм останови алгоритму Ромберга є $\left|R^{(k-1)}(h_i)\right| \le \varepsilon$. На вихід видається значення $I \approx I^{(k)}(h_i)$.

Проміжні результати роботи алгоритму подають у вигляді табл. 2.3.2.

Таблиця 2.3.2. Результати роботи алгоритму Ромберга

i	h_i	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$\ldots$
0	h_0	$I^{(0)}(h_0)$			
1	h_1	$I^{(0)}(h_1)$	$I^{(1)}(h_1)$		
2	h_2	$I^{(0)}(h_2)$	$I^{(1)}(h_2)$	$I^{(2)}(h_2)$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Завдання на виконання лабораторної роботи

Розробити програму на мові програмування C# у середовищі розробки Visual Studio 2005 (або вище), яка буде працювати у віконному режимі та дозволяти виконувати наступне:

1. Обчислити визначений інтеграл за допомогою однієї з квадратурних формул та одного з алгоритмів, що використовує різні квадратурні формули (*табл*. 2.3.3, *табл*. 2.3.4):
   - ✓ для випадку однієї квадратурної формули необхідно передбачити введення з клавіатури кількості проміжків на які розбивається проміжок інтегрування;
   - ✓ для випадку алгоритму, який використовує різні квадратурні формули забезпечити можливість введення з клавіатури точності для обчислення інтегралу та виведення на екран проміжних результатів у відповідності до таблиці 2.3.1 або 2.3.2.

2. Обчислити заданий за варіантом визначений інтеграл (*табл*. 2.3.3) з точністю $\varepsilon \le 10^{-9}$. Для випадку однієї квадратурної формули кількість проміжків на яку необхідно розбити проміжок інтегрування визначити аналітично. Для визначення кількості проміжків на яку необхідно розбити проміжок інтегрування дозволяється використовувати будь-які математичні пакети, але це має бути відображено у звіті.

Обчислити, заданий за варіантом, визначений інтеграл (*табл*. 2.3.3) у MatLab 6.0 (або вище), або у MathCAD 12.0 (або вище) за допомогою спеціальних функцій наявних в обраному математичному пакеті. Якщо буде обрано MatLab, то програма має бути написана у вигляді функції з назвою Lab_5_*p* (де *p* номер варіанту), яка має один вхідний (прапорець) та один вихідний параметр (якщо прапорець має нульове значення, то вихідний параметр є результатом взяття невизначеного інтеграла, якщо одиничне – визначеного). Написана функція має запускатися з командного рядка *MatLab*.

Обчислити, заданий за варіантом, визначений інтеграл (*табл*. 2.3.3) за допомогою *web*-сайту *http://www.wolframalpha.com/* . Наприклад, якщо необхідно обчислити інтеграл $\int_1^{\pi} x \cos x \, dx$, то вводимо у відповідну форму на екрані наступний вираз: *integrate x*cos x dx from x = 1 to pi*.

Вимоги до оформлення звіту

Звіт з лабораторної роботи №2.3 має складатися з таких структурних підрозділів:

1. Постановка задачі за варіантом.
2. Математичне підгрунття для виконання даної лабораторної роботи (перелік формул, що були використані при розробленні програми на мові програмування C#).
3. Значення інтегралів, заданих за варіантом:

<table>
<tr><td colspan="4">C#</td><td rowspan="3">MatLab або MathCAD</td><td rowspan="3">Wolframalpha</td></tr>
<tr><td colspan="2">Квадратична формула
(вказати назву)</td><td colspan="2">Алгоритм
(вказати назву)</td></tr>
<tr><td>Кількість проміжків</td><td>Значення інтеграла</td><td>Кількість проміжків</td><td>Значення інтеграла</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

4. *Screenshot* екрану результату роботи *wolframalpha*.
5. Висновки.

Варіанти завдань

Номер варіанту визначається за наступною таблицею:

№ за списком викладача	Варіант №
1	10
2	11
3	20
4	2
5	18
6	19
7	5
8	1
9	25
10	21
11	24
12	17
13	16

№ за списком викладача	Варіант №
14	9
15	12
16	3
17	22
18	23
19	4
20	13
21	8
22	7
23	6
24	15
25	14

Таблиця 2.3.3. Варіанти завдань

Варіант №	Інтеграл	Квадратурна формула та алгоритм
1	$\int_5^7 \left(x\cos x^2 + \ln x^3 \right) dx$	1, 3
2	$\int_3^{10} \left(\frac{\ln x^2}{x} + \cos x + x^3 \right) dx$	2, 3
3	$\int_7^{10} \frac{x^3}{x^2+1} dx$	0, 4
4	$\int_{15}^{73} \left(x^2 \cos(x+5) + e^{-x} \right) dx$	1, 4
5	$\int_{13}^{27} \left(x\sin x^2 + x^3 \ln x^2 \right) dx$	0, 3
6	$\int_3^5 \left(xchx - x^3 + x^2 \ln x \right) dx$	1, 4
7	$\int_{15}^{17} \frac{2x+3}{2x+2} dx$	2, 3
8	$\int_5^{37} \frac{arctg\,\frac{x}{2}}{4+x^2} dx$	0, 3
9	$\int_{0.5}^{1.0} \frac{dx}{\sin x \cos x}$	1, 4
10	$\int_1^3 \frac{dx}{2^x+3}$	2, 4
11	$\int_3^7 \left(\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}} + 4e^x \cos x \right) dx$	1, 3

Продовження табл. 2.3.3

Варіант №	**Інтеграл**	**Квадратурна формула та алгоритм**
12	$\int_{0.1}^{1.0}\left(x^3\sqrt[5]{5-x^2}\right)dx$	1, 4
13	$\int_{1}^{9}\frac{x^3}{x^8+5}dx$	2, 3
14	$\int_{50}^{78}\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx$	0, 3
15	$\int_{3}^{5}\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}$	1, 4
16	$\int_{0.5}^{1.0}\frac{1+\sqrt{ctgx}}{\sin^2 x}dx$	1, 3
17	$\int_{53}^{75}xarctg\left(2x+3\right)dx$	2, 4
18	$\int_{-13}^{-5}\frac{sh\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}dx$	1, 4
19	$\int_{-5}^{-1}\left(\mathrm{ch}\sqrt{1-x}-x^2\right)dx$	0, 3
20	$\int_{1}^{8}\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\mathrm{sh}\sqrt{x}}dx$	2, 3
21	$\int_{8}^{15}x^2e^{\sqrt{x}}\sin x\,dx$	0, 3
22	$\int_{-1}^{5}\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}dx$	2, 4
23	$\int_{4}^{7}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt[5]{1+x^2}}dx$	1, 4

Продовження табл. 2.3.3

Варіант №	**Інтеграл**	**Квадратурна формула та алгоритм**
24	$\int_{13}^{29} \frac{\sqrt[5]{x}+\sqrt{5e^x}}{\sqrt[5]{1+\operatorname{sh} x}}\,dx$	0, 4
25	$\int_{13}^{29} \left(x^2\sqrt{x} - \frac{\operatorname{sh} x}{e^x} \right) dx$	1, 3

Таблиця 2.3.4. Перелік квадратурних формул та алгоритмів

№	**Квадратурна формула / алгоритм**
0	Складена квадратурна формула прямокутників
1	Складена квадратурна формула трапецій
2	Складена квадратурна формула Сімпсона
3	Алгоритм прямокутників-трапецій
4	Алгоритм Ромберга

Контрольні питання

1. В яких випадках виникає необхідність у застосуванні формул чисельного інтегрування?
2. В яких випадках виникає необхідність у застосуванні формул чисельного диференціювання?
3. Дати визначення терміна сума Рімана. Зв’язок суми Рімана із задачею обчислення визначеного інтегралу.
4. Виходячи з яких міркувань отримують формулу прямокутників?
5. Які існують різновиди формули прямокутників?
6. Як формулюється узагальнена інтегральна теорема про середнє?
7. Виходячи з яких міркувань отримують сімейство квадратурних формул Ньютона-Котеса?
8. Який геометричний зміст найпростішої квадратурної формули трапецій?
9. Скільки вузлів необхідно для використання найпростішої квадратурної формули Сімпсона?
10. Який геометричний зміст найпростішої квадратурної формули Сімпсона?
11. Залишкові члени найпростіших квадратурних формул трапецій та Сімпсона.
12. В чому полягає відмінність найпростіших квадратурних формул трапецій і Сімпсона від складених?
13. Залишкові члени складених квадратурних формул прямокутників, трапецій та Сімпсона.
14. Чому не бажано використовувати формули Ньютона-Котеса великих порядків?

15. Який зв’язок між квадратурною формулою Сімпсона, трапецій та поправкою Річардсона для кроку інтегрування h?
16. Принцип Рунге практичного оцінювання похибок інтегрування.
17. Узагальнена поправка Річардсона.
18. Який критерій останова в алгоритмі прямокутників-трапецій?
19. В чому полягає головна ідея алгоритму Ромберга?
20. Якщо зафіксувати $k = 0$ в алгоритмі Ромберга, то яким чином будуть виконуватись обчислення?
21. Який критерій останова в алгоритмі Ромберга?

Лабораторна робота №2.4

тема: “Розв’язання задачі Коші”

Мета роботи – опанувати методи чисельного розв’язку задачі Коші.

Короткі теоретичні відомості

У зв’язку із широким застосуванням задачі Коші в багатьох галузях науки і техніки для її розв’язання розроблено велику кількість як аналітичних (де це можливо), так і наближених чисельних методів.

Надалі будемо розглядати ЗДР першого порядку

$$y' = f\left(x, y\right), \quad x \in \left[x_0, b\right] \tag{2.4.1}$$

з початковою умовою

$$y\left(x_0\right) = y_0, \tag{2.4.2}$$

де $f\left(x, y\right)$ – деяка задана, в загальному випадку, нелінійна функція двох змінних.

Метод Ейлера

Метод Ейлера в теорії чисельних методів розв’язання ЗДР займає ключову позицію, розглянемо його докладніше.

Обчислення будемо проводити з кроком $h = \dfrac{b - x_0}{n}$, тобто розрахунковими вузлами будуть слугувати точки $x_i = x_0 + ih \;\left(i = 0, 1, ..., n\right)$ проміжку $\left[x_0, b\right]$, а метою буде побудова табл. 2.4.1.

Таблиця 2.4.1. Наближені значення y_i розв'язку $y = y(x)$ задачі Коші в точках x_i

x	x_0	x_1	$\dots$	$x_n = b$
y	y_0	y_1	$\dots$	$y_n \approx y(b)$

Користуючись тим, що в точці x_0 відоме як значення розв'язку $y(x_0) = y_0$ так і значення його похідної $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, можливо записати рівняння дотичної до графіка шуканої функції $y = y(x)$ в точці (x_0, y_0):

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0). \qquad (2.4.3)$$

При достатньо малу кроку h ордината

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) \qquad (2.4.4)$$

цієї дотичної, отримана підстановкою в праву частину (2.4.3) значення $x_1 = x_0 + h$ повинна мало відрізнятися від ординати $y(x_1)$ розв'язку задачі Коші (2.4.1) – (2.4.2). Отже, точка перетину дотичної (2.4.3) з прямою $x = x_1$ може бути наближено прийнята за нову початкову точку.

Через цю точку знову проведемо пряму

$$y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1),$$

яка вже наближено відтворює поведінку дотичної до $y = y(x)$ в точці $(x_1, y(x_1))$, підставляючи в останній вираз $x = x_2 = x_1 + h$, отримаємо наближене до $y(x_2)$ значення

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1),$$

і т.д.

Таким чином отримуємо загальний вигляд *методу Ейлера*

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i, y_i\right), \quad i = 0, 1, ..., n. \tag{2.4.5}$$

Геометрично (рис. 2.4.1) метод Ейлера можна трактувати таким чином: графік розв’язку $y = y(x)$ задачі Коші (2.4.1) – (2.4.2) наближено представляється ламаною, що складена з відрізків наближених дотичних, звідки походить інша назва метода (2.4.5) – *метод ламаних*.

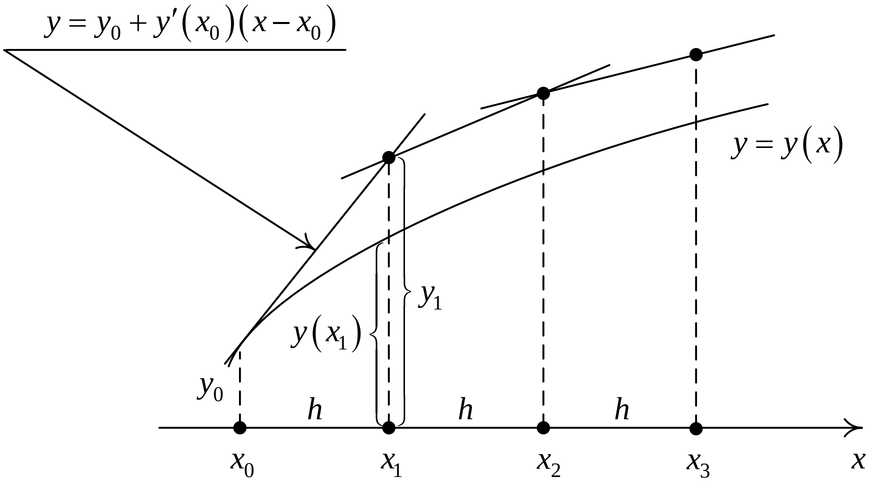

Рис. 2.4.1. Геометрична інтерпретація метода Ейлера

Модифікації метода Ейлера

Формулу (2.4.5) методу Ейлера також можна отримати чисельним інтегруванням за допомогою найпростішої формули лівих прямокутників в рівності

$$y\left(x_{i+1}\right) - y\left(x_i\right) = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(x, y(x)\right) dx \tag{2.4.6}$$

припускаючи що на кожному i-му кроці в ролі початкової точки $\left(x_0, y_0\right)$ виступає точка $\left(x_i, y_i\right)$.

Якщо в (2.4.6) використати найпростішу квадратурну формулу правих прямокутників, то отримаємо неявний метод Ейлера:

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.4.7}$$

Застосування до інтегралу найпростішої квадратурної формули трапецій (2.3.10) також призводить до неявного методу трапецій

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right)\right], \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.4.8}$$

Певний інтерес представляє спільне застосування явного метода Ейлера та неявного метода трапецій, такий підхід дає метод Хойна:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_i + h, y_i + hf\left(x_i, y_i\right)\right)\right], \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{2.4.9}$$

та метод Ейлера-Коші з ітераційною обробкою

$$y_{i+1}^{0} = y_i + hf\left(x_i, y_i\right),$$

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)}\right)\right], \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{2.4.10}$$

Ще однією модифікацією метода Ейлера є метод Мілна:

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf\left(x_i, y_i\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{2.4.11}$$

Запишемо розкладення $y_{i+1} \approx y\left(x_{i+1}\right)$ за формулою Тейлора p-го порядку, приймаючи за базову точку x_i (тобто за степенями $x - x_i$) та покладемо в цьому розкладенні $x = x_{i+1}$:

$$y\left(x_{i+1}\right) = y\left(x_i\right) + hy'\left(x_i\right) + \frac{1}{2!}h^2 y''\left(x_i\right) + \ldots + \frac{1}{p!}h^p y^{(p)}\left(x_i\right) + O\left(h^{p+1}\right). \tag{2.4.12}$$

При $p = 2$ з (2.4.12) випливає рівність

$$y\left(x_{i+1}\right) = y\left(x_i\right) + hy'\left(x_i\right) + \frac{h^2}{2} y''\left(x_i\right) + O\left(h^3\right). \tag{2.4.13}$$

Значення першої похідної в точці x_i наближено відоме з умови (2.4.1) – (2.4.2):

$$y'(x_i) = f\left(x_i, y(x_i)\right) \approx f\left(x_i, y_i\right). \tag{2.4.14}$$

Диференціюючи (2.4.1), за формулою повної похідної знаходиомо:

$$\begin{aligned} y''(x_i) &= f'_x\left(x_i, y(x_i)\right) + f'_y\left(x_i, y(x_i)\right) f\left(x_i, y(x_i)\right) \approx \\ &\approx f'_x\left(x_i, y_i\right) + f'_y\left(x_i, y_i\right) f\left(x_i, y_i\right). \end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Підставляючи наближені вирази $y(x_i)$, $y'(x_i)$ та $y''(x_i)$ в рівності (2.4.13), отримуємо наступну формулу для обчислення $y_{i+1} \approx y(x_{i+1})$ при $i = 0, 1, ..., n$:

$$y_{i+1} = y_i + h\left[f\left(x_i, y_i\right) + \frac{h}{2}\left(f'_x\left(x_i, y_i\right) + f'_н\left(x_i, y_i\right) f\left(x_i, y_i\right)\right)\right]. \tag{2.4.16}$$

Метод, що визначається формулою (2.4.16) будемо називати *удосконаленим методом Ейлера*.

Методи Рунге-Кутта

Недоліком удосконаленого метода Ейлера (2.4.16) та інших методів більш високих порядків, що засновані на покроковому поданні розв'язку $y(x)$ задачі (2.4.1) – (2.4.2) за формулою Тейлора та послідовному диференціюванні рівняння (2.4.1) для отримання тейлорових коефіцієнтів, є необхідність на кожному кроці обчислювати частинні похідні функції $f(x, y)$.

Ідея побудови явних *методів Рунге-Кутта* p-го порядку полягає в отриманні наближень до значень $f(x_{i+1})$ за формулою виду

$$y_{i+1} = y_i + h\varphi\left(x_i, y_i, h\right), \tag{2.4.17}$$

де $\varphi(x,y,h)$ – деяка функція, що наближує відрізок ряду Тейлора (2.4.12) до p-го порядку та не містить частинних похідних функції $f(x,y)$.

Для побудови методів Рунге-Кутта порядку, вище першого, функцію $\varphi(x,y,h)$ необхідно взяти багатопараметричною та підбирати її параметри порівнянням виразу (2.4.17) з многочленом Тейлора для $y(x)$, що відповідає бажаному порядку степеня.

Розкладемо функцію двох змінних $f(x+ah, y+bh\,f(x,y))$ в околі точки x за формулою Тейлора, обмежуючись лінійними членами:

$$f(x+ah, y+bh\,f(x,y)) =$$

$$= f(x,y) + f_x'(x,y)ah + f_y'(x,y)bhf(x,y) + O(h^2).$$

З останньої формули можемо записати

$$y_{i+1} = y_i + h\big[(c_1+c_2)\,f(x_i,y_i) +$$

$$+ h\big(c_2 a f_x'(x_i,y_i) + c_2 b\, f_y'(x_i,y_i)\, f(x_i,y_i)\big)\big] + O(h^3). \qquad (2.4.18)$$

Порівняння останнього виразу з тейлорівським квадратичним поданням розв’язку $y(x)$ (2.4.13) з точністю до $O(h^3)$ рівнозначне порівнянню його з виразом y_{i+1} за формулою (2.4.16), тобто з удосконаленим методом Ейлера, розв’язуючи отриману систему відносно параметрів отримуємо *однопараметричне сімейство методів Рунге-Кутта другого порядку*:

$$y_{i+1} = y_i + h\left[(1-\beta)\,f(x_i,y_i) + \beta f\left(x_i + \frac{h}{2\beta}, y_i + \frac{h}{2\beta}\,f(x_i,y_i)\right)\right]. \qquad (2.4.19)$$

Легко бачити, що будь-який метод з сімейства методів Рунге-Кутта другого порядку (2.4.19) реалізують за наступною схемою. На кожному кроці, тобто при $i = 0,1,2,\ldots$, обчислюють значення функції

$$k_1^i = f\left(x_i, y_i\right),$$
$$k_2^i = f\left(x_i + \frac{h}{2\beta}, y_i + \frac{h}{2\beta}k_1^i\right),$$

а потім знаходять крокову поправку

$$\Delta y_i = h\left[\left(1-\beta\right)k_1^i + \beta k_2^i\right],$$

додавання якої до результату попереднього кроку дає наближене значення розв'язку $y\left(x\right)$ в точці $x_{i+1} = x_i + h$:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i.$$

Метод такої структури називають двоетапним.

За аналогією з попереднім для сімейства методів Рунге-Кутта p-го порядку використовується запис, що складається з наступної сукупності формул:

$$\begin{cases} k_1^i = f\left(x_i, y_i\right), \\ k_m^i = f\left(x_i + a_m h, y_i + h\sum_{j=1}^{m-1} b_{mj}k_j^i\right), \\ y_{i+1} = y_i + h\sum_{m=1}^{p} c_m k_m^i, \end{cases} \tag{2.4.20}$$

де $m = 2,3,\ldots,p$ (для p-етапного метода).

Найбільш вживаним частковим випадком сімейства методів (2.4.20) є метод Рунге-Кутта четвертого порядку, що відноситься до чотирьохетапних та має вигляд:

$$\begin{cases} k_1^i = f\left(x_i, y_i\right), \\ k_2^i = f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{h}{2}k_1^i\right), \\ k_3^i = f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{h}{2}k_2^i\right), \\ k_4^i = f\left(x_i + h, y_i + hk_3^i\right), \\ \Delta y_i = \dfrac{h}{6}\left(k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i\right), \\ y_{i+1} = y_i + \Delta y_i. \end{cases} \tag{2.4.21}$$

Зрозуміло, що виведення надійних і, в той же час, простих та ефективних оцінок похибок, що гарантують отримання таблиці значень розв’язку $y = y(x)$ заданої точності, є справою малоперспективною, особливо для методів високих порядків. Тому головним способом відслідковування точності при реалізації чисельних процесів розв’язання задачі Коші залишається застосування різноманітних напівемпіричних правил, що засновані на принципі Рунге.

Ще одним часто вживаним методом є *метод Кутти-Мерсона* або, інакше, п’ятиетапний метод Рунге-Кутта четвертого порядку.

На i-ому кроці розв’язку задачі (2.4.1)–(2.4.2) послідовно обчислюють:

$$k_1^i = f\left(x_i, y_i\right),$$

$$k_2^i = f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{3}k_1^i\right),$$

$$k_3^i = f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{6}k_1^i + \frac{h}{6}k_2^i\right),$$

$$k_4^i = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{8}k_1^i + \frac{3h}{8}k_2^i\right),$$

$$k_5^i = f\left(x_i + h, y_i + \frac{h}{2}k_1^i - \frac{3h}{2}k_3^i + 2hk_4^i\right),$$

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(k_1^i - 3k_3^i + 4k_4^i\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left(k_1^i + 4k_4^i + k_5^i\right)$$

Після цього обчислюють величину

$$R = 0.2 \cdot \left|y_{i+1} - \tilde{y}_{i+1}\right|$$

та виконують порівняння. Якщо значення R є більше заданого допустимого рівня абсолютних похибок ε, то крок зменшують вдвічі $\left(h = \frac{h}{2}\right)$ та повертаються до початку другого етапу, тобто заново обчислюють k_2^i, k_3^i і т.д. Якщо $R \le \varepsilon$, то вважають $y\left(x_{i+1}\right) \approx y_{i+1}$ з точністю ε.

Існують й інші методи такого типу, окрім модифікації Мерсона метода Рунге-Кутта також часто використовують модифікації Фельберга та Інгленда.

Завдання на виконання лабораторної роботи

1. Розробити програму на мові програмування C# у середовищі розробки Visual Studio 2005 (або вище), яка буде працювати у віконному режимі та дозволяти розв'язувати задачу Коші, задану за варіантом, з точністю $\varepsilon \le 10^{-5}$ за допомогою двох методів заданих за варіантом (*табл.* 2.4.2, *табл.* 2.4.3).

2. Розв'язати задану за варіантом задачу Коші (*табл.* 2.4.2) у будь-якому математичному пакеті чисельним методом Рунге-Кутта другого та третього порядку, методом Рунге-Кутта четвертого та п'ятого порядку, а також знайти розв'язок в аналітичному вигляді, використовуючи спеціальні функції, що наявні в ньому. Якщо буде обрано *MatLab*, то програма має бути написана у вигляді функції з назвою Lab_6_*p* (де *p* номер варіанту). Дана функція повинна мати один вхідний та один вихідний параметр. В залежності від значення вхідного параметра функція має присвоювати вихідному параметру розв'язок, отриманий методом Рунге-Кутта другого та третього порядку, методом Рунге-Кутта четвертого та п'ятого порядку або аналітичний розв'язок. Дана функція має запускатися з командного рядка *MatLab*.

3. Побудувати графіки отриманих розв'язків:
    - ✓ на декартовій площині №1 побудувати графіки чисельного розв'язку, отриманого двома методами за допомогою програми, написаної на *C#*;

- ✓ на декартовій площині №2 побудувати графіки чисельного розв’язку, отриманого за допомогою спеціалізованого математичного пакета методом Рунге-Кутта другого та третього порядку і методом Рунге-Кутта четвертого та п’ятого порядку, а також графік функції, отриманої при аналітичному розв’язанні задачі Коші, причому графіки чисельних розв’язків мають бути побудовані у вигляді точок, які не з’єднані між собою.
- ✓ на декартовій площині №3 побудувати графіки чисельного розв’язку, отриманого методом №1 і №2 у *C#* та аналітичного розв’язку, який отримано у спеціалізованому математичному пакеті;
- ✓ на декартовій площині №4 побудувати

непарні варіанти	графіки чисельного розв’язку, отриманого методом №1 і №2 у *C#* та методом Рунге-Кутта другого та третього порядку у спеціалізованому математичному пакеті;
парні варіанти	графіки чисельного розв’язку, отриманого методом №1 і №2 у *C#* та методом Рунге-Кутта четвертого та п’ятого порядку у спеціалізованому математичному пакеті;

Вимоги до оформлення звіту

Звіт з лабораторної роботи №2.4 має складатися з таких структурних підрозділів:

1. Постановку задачі за варіантом.
2. Математичне підгрунття для виконання даної лабораторної роботи (перелік формул, що були використані при розробленні програми на мові програмування C#).
3. Чисельні розв'язки задачі Коші, згідно варіанту (при необхідності таблицю можна розміщувати в альбомному форматі):

C#						*Спеціалізований математичний пакет (вказати назву)*			
Метод №1 (вказати назву)			Метод №2 (вказати назву)			Метод Рунге-Кутта 2–3 порядку		Метод Рунге-Кутта 4–5 порядку	
x	*y*	*Крок*	*x*	*y*	*Крок*	*x*	*y*	*x*	*y*

4. Аналітичний розв'язок задачі Коші, отриманий одним зі спеціалізованих математичних пакетів.
5. Графіки з п.4 завдання.
6. Висновки.

Варіанти завдань

Номер варіанту визначається за наступною таблицею:

№ за списком викладача	Варіант №
1	17
2	1
3	16
4	25
5	8
6	15
7	4
8	21
9	20
10	24
11	6
12	23
13	22

№ за списком викладача	Варіант №
14	19
15	9
16	2
17	11
18	7
19	10
20	5
21	12
22	13
23	14
24	18
25	3

Таблиця 2.4.2. Варіанти завдань

Варіант №	Рівняння	Початкова умова	Сітка результатів: Інтервал	Сітка результатів: Кількість точок	Методи
1	$y' = y - \frac{2x}{y}$	$(x_0; y_0) = (0; 1)$	$[x_0; 5.0]$	33	3, 7
2	$y' = y \cdot \cos x + xy$	$(x_0; y_0) = (3; 1)$	$[x_0; 5.0]$	26	5, 6
3	$y' = xy \cdot \cos\frac{x}{3} + 0.25y$	$(x_0; y_0) = (5; 7)$	$[x_0; 8.9]$	31	2, 7
4	$y' = y + x^2$	$(x_0; y_0) = (0; 1)$	$[x_0; 3.0]$	25	1, 7
5	$y' = yx + x$	$(x_0; y_0) = (6; 3)$	$[x_0; 7.0]$	26	4, 7
6	$y' = yx + x^3$	$(x_0; y_0) = (16; 7)$	$[x_0; 16.5]$	17	5, 6
7	$y' = 2^x + y + x$	$(x_0; y_0) = (1; 7)$	$[x_0; 3.0]$	33	3, 7
8	$y' = e^x + y$	$(x_0; y_0) = (3; 1)$	$[x_0; 5.5]$	26	1, 7
9	$y' = \cos x + y$	$(x_0; y_0) = (5; 3)$	$[x_0; 7.0]$	21	0, 6
10	$y' = \frac{y^3 + y}{x}$	$(x_0; y_0) = (2; 1)$	$[x_0; 3.7]$	26	1, 7
11	$y' = \frac{e^x}{y\left(1 + e^x\right)}$	$(x_0; y_0) = (0; 1)$	$[x_0; 3.0]$	17	0, 6
12	$y' = \frac{y \cdot \ln y}{\sin x}$	$(x_0; y_0) = (1; 2)$	$[x_0; 2.5]$	26	4, 7
13	$y' = y \cdot tgx + \frac{1}{\cos x}$	$(x_0; y_0) = (0; 0)$	$[x_0; 7.0]$	29	4, 6
14	$y' = \frac{\cos x - y^2}{y}$	$(x_0; y_0) = (1; 1)$	$[x_0; 2.0]$	21	3, 7

Продовження табл. 2.4.2

Варіант №	Рівняння	Початкова умова	Сітка результатів		Методи
			Інтервал	Кількість точок	
15	$y' = 2y - x^2$	$(x_0; y_0) = (0;1)$	$[x_0; 2.0]$	26	0, 7
16	$y' = \dfrac{2-y}{ctgx}$	$(x_0; y_0) = (0; 0)$	$[x_0; 3.0]$	31	5, 6
17	$y' = y \cdot ctgx + \dfrac{5}{\cos x}$	$(x_0; y_0) = (2;1)$	$[x_0; 5.0]$	26	3, 7
18	$y' = y \cdot tgx + \dfrac{x}{\cos x}$	$(x_0; y_0) = (2;1)$	$[x_0; 9.0]$	21	2, 7
19	$y' = \sin x + \dfrac{y}{\sin x}$	$(x_0; y_0) = (5;1)$	$[x_0; 7.0]$	26	1, 6
20	$y' = (y + \sin y) \cdot \cos x$	$(x_0; y_0) = (2;1)$	$[x_0; 5.0]$	31	2, 7
21	$y' = x \cdot (\log y + \cos y)$	$(x_0; y_0) = (12; 7)$	$[x_0; 15.0]$	26	4, 6
22	$y' = y \cdot \ln x$	$(x_0; y_0) = (13; 9)$	$[x_0; 17.0]$	33	0, 6
23	$y' = x + \operatorname{tg} x$	$(x_0; y_0) = (9; 15)$	$[x_0; 11.0]$	17	3, 6
24	$y' = xy \cdot \cos x$	$(x_0; y_0) = (1; 5)$	$[x_0; 7.0]$	33	5, 7
25	$y' = x \cdot \ln y + y$	$(x_0; y_0) = (9;1)$	$[x_0; 11.0]$	21	1, 7

Таблиця 2.4.3. Перелік методів

№	Метод
0	Явний метод Ейлера
1	Метод Хойна
2	Метод Мілна другого порядку
3	Метод середньої точки
4	Удосконалений метод Ейлера
5	Метод Ейлера-Коші
6	Метод Рунге-Кутта четвертого порядку
7	Метод Кутта-Мерсона

Контрольні питання

1. Дайте визначення звичайному диференціальному рівнянню.
2. Що називають порядком звичайного диференціального рівняння?
3. Які диференціальні рівняння називають лінійними/нелінійними?
4. Яку задачу називають задачею Коші?
5. Яка формула явного методу Ейлера?
6. Які існують підходи до виводу явного методу Ейлера?
7. Вивести явний метод Ейлера.
8. Геометричний зміст явного методу Ейлера.
9. Який метод називають неяним методом Ейлера? Яким чином його застосовують?
10. Яким чином отримується метод Хойна?
11. Яка відмінність методу Ейлера-Коші від методу Хойна?
12. Яким чином отримується метод Мілна другого порядку? Які особливості цього методу?
13. Виходячи з яких ідей отримується удосконалений метод Ейлера?
14. В чому полягає головна ідея побудови сімейства явних методів Рунге-Кутта?
15. Що означають терміни двоетапний та двокроковий метод?
16. Яким чином можна контролювати точність розв’язання задачі Коші?
17. В чому полягає особливість метода Кутти-Мерсона? Які характеристики має цей метод?

Список використаної та рекомендованої літератури

1. *Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н.* MatLab 7. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 1104 с.: ил.
2. *Бахвалов Н.С.* Численные методы – М.: "Наука", 1978.
3. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Том первый. Издание второе, стереотипное. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 464 с.
4. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Том второй. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 620 с.
5. *Бут Э.Д.* Численные методы / Под ред. В.М. Курочкина. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 240 с.
6. *Вержбицкий В.М.* Основы численных методов: Учебник для вузов. В.М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.: ил.
7. *Воеводин В.В.* Вычислительные основы линейной алгебры. – М.: "Наука", 1977.
8. *Демидович Б.П., Марон А.И.* Основы вычислительной математики. – М.: "Наука", Главная редакция физико-математической литературы, 1966. – 664 с.: ил.
9. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. – М.: "Наука", 1978.
10. *Кетков Ю.Л., Кетков А.Ю., Шульц М.М.* MatLab 7: программирование, численные методы. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.: ил.
11. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. – 432 с.
12. *Фадеев Д.К., Фадеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. – 656 с.
13. *Хаусхолдер А.С.* Основы численного анализа. – М.: Издательство Иностранной литературы, 1956. – 320 с.
14. *Хемминг Р.В.* Численные методы для научных работников и инженеров / Главная редакция физико-математической литературы – М.: Наука, 1972. – 400 с.