高数基础班（6）

6	导数与微分的概念及几何意义，导数公式及求导法则（有理运算；隐函数、反函数、参数方程求导法；对数求导法）	P42-P51

主讲 武忠祥 教授

第二章　导数与微分

本章内容要点

一. 考试内容概要

（一）导数与微分的概念　难

（二）导数公式与求导法则　重

（三）高阶导数　难

二. 常考题型与典型例题

题型一　导数定义 难

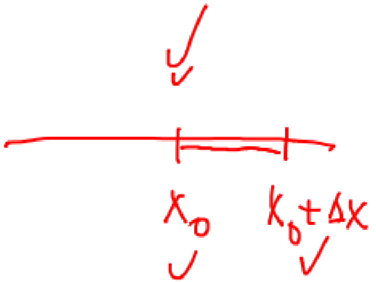
题型二　复合函数、隐函数、参数方程求导 重

题型三　高阶导数 难

题型四　导数应用

第二章 导数与微分

考试内容概要



(一) 导数与微分的概念

1. 导数的概念

定义1(导数) $$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\lim_{\Delta x\to 0}\boxed{\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$$

动 定

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 无关

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

① $f(x_0)$ 与 $f(x_0)$ 有关

定义2(左导数) $$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

定义3(右导数) $$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

定理1 可导 $\Leftrightarrow$ 左右导数都存在且相等

(a, b) f(x) ✓

$[a, b]$

定义4（区间上可导及导函数）

$x<1$

【例1】（1994年3）设 $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^3, & x\le 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的（ ）.

（A）左、右导数都存在

（B）左导数存在但右导数不存在 ✓

（C）左导数不存在但右导数存在

（D）左、右导数都不存在

$x\ge 1$ $f(1)$ ✓

[解1] $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^2}{1}=2$

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-\frac{2}{3}}{x-1}=\infty$，不存在

求导，代值.

[解2] $f'_-(1)=\left(\frac{2}{3}x^3\right)'\Big|_{x=1}=(2x^2)\Big|_{x=1}=2$

$f'_+(1)=(x^2)'\Big|_{x=1}=(2x)\Big|_{x=1}=2$ ✗

不连续 $\longrightarrow$ $f'_+(1)$不存在

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}x^2=1\neq f(1)=\frac{2}{3}$

【例2】(1990年4, 5) 设函数 $f(x)$ 对任意 x 均满足等式

$f(1+x)=af(x)$，且有 $f'(0)=b$，其中 a,b 为非零常数，则（ ）.

（A）$f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导;

（B）$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $f'(1)=a$;

（C）$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $f'(1)=b$;

（D）$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $f'(1)=ab$.

$f(1)=af(0)$

【解1】直接法

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{af(\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=a\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=af'(0)=ab$$

【解2】直接法

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f[1+(x-1)]-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{af(x-1)-af(0)}{x-1}=a\lim_{x\to 1}\frac{f(x-1)-f(0)}{x-1}=ab$$

【例2】(1990年4, 5) 设函数 $f(x)$ 对任意 x 均满足等式

$f(1+x)=af(x)$，且有 $f'(0)=b$，其中 a,b 为非零常数，则（ ）.

(A) $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导;

(B) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=a$;

(C) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=b$;

(D) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=ab$.

$f'(x)=Aa^x\ln a$

$f'(0)=A\ln a=b$

【解4】排除法 $\dfrac{f(1+x)}{f(x)}=a$，$f(x)=Aa^x$，$\boxed{f(x)=\dfrac{b}{\ln a}a^x}$

$f'(x)=\dfrac{b}{\ln a}a^x\ln a$

$f'(1)=ab$

【解4】排除法 取 $a=1$（$\neq 1$），$f(1+x)=f(x)$

$f'(1)=f'(0)=b$

2. 微分的概念

y'

x_0 $x_0+\Delta x$

定义5（微分） 如果 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0)$$

$dy \approx \Delta y$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微，称 $A\Delta x$ 为微分，记为

$$\mathrm{d}\,y = A\Delta x$$

① 线性 — 均匀变化

② 主部

定理2 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微的充分必要条件是

$f(x)$ 在点 x_0 处可导，且有

$$\mathrm{d}\,y = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)\,\mathrm{d}\,x.$$

【例3】(1988年1, 2, 3) 若函数 $y=f(x)$ 有 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则当 $\Delta x \to 0$ 时，该函数在 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是（　）

（A）与 Δx 等价的无穷小；

✓（B）与 Δx 同阶的无穷小；

（C）比 Δx 低阶的无穷小；

（D）比 Δx 高阶的无穷小.

$f'(x_0)\neq 0$ 同阶

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{dy}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0)\Delta x}{\Delta x}=f'(x_0)=\frac{1}{2}$$

$f'(x_0)=0$ 高阶

3. 导数与微分的几何意义

可导 $\longrightarrow$ 有切线

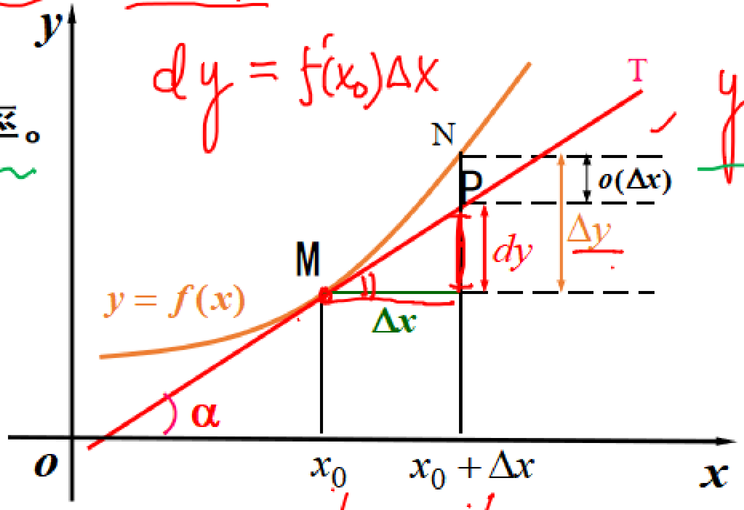
$\overset{\times}{\longleftarrow}$

1）导数的几何意义：导数 $\boxed{f'(x_0)}$ $= \tan\alpha$

在几何上表示曲线 $y = f(x)$

在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率。

$dy = f'(x_0)\Delta x$



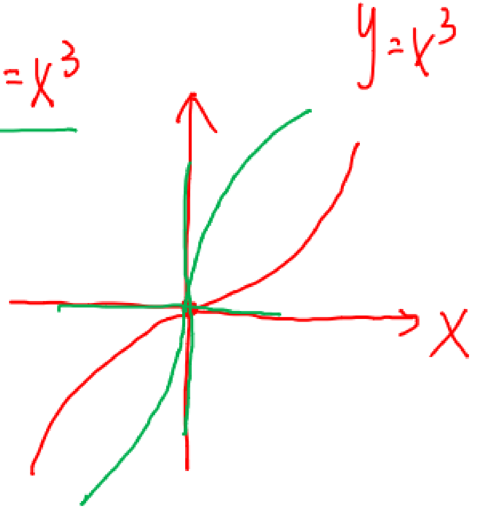
切线方程

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

法线方程

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

$y = x^3$



$\boxed{y = x^{\frac{1}{3}}}$

$y'|_{x=0} = \infty$

2）微分的几何意义：微分 $dy = f'(x_0)dx$ 在几何上表示

曲线 $y = f(x)$ 的切线上的增量。

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \qquad \Delta y \approx dy$$

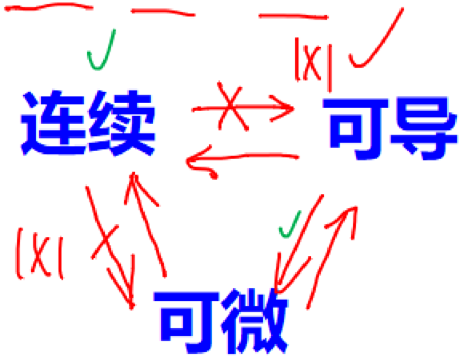
【例4】（2004年1）曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为 ______.　　$(y=x-1)$

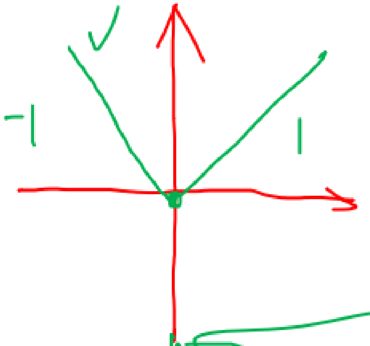
$y'=\frac{1}{x}=k_{切}=-\frac{1}{-1}=1$　　$k=-1$

$x=1$　　$y'(1)=1$

$y-0=1\cdot(x-1)$　　$y=x-1$

4. 连续,可导,可微之间的关系





$f(x)=A+\alpha$

$\alpha \Rightarrow f(x)=A \Leftarrow$

$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$\frac{\alpha\cdot\Delta x}{\Delta x}=\alpha$

$\Rightarrow \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$ $\to 0$

结论: $\boxed{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}=A\Delta x+o(\Delta x)$

$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\underbrace{\alpha\cdot\Delta x}_{=o(\Delta x)}$

$f(x)$在x_0可导 $\rightarrow$ $f(x)$在x_0连续

$\rightarrow$ $f'(x)$ ---- ✗

x_0

【例】证明：$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

处处可导，但 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 不存在.

一阶可导.

$f(x)$ 在 x_0 的某邻域可导 $\not\rightarrow$ $f'(x)$ 在 x_0 处连续

$f(x)$ 在 x_0 的某邻域可导 $\not\rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在

证 1) $x\neq 0$: $\exists$

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

不$\exists$ — $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ 不$\exists$

$x=0$: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=0$

2) $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$

【例33】设 $f(x)$ 二阶可导 $f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=2$

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$

【注】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-1}{2x}\neq\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{2}\neq\dfrac{f''(0)}{2}=1$ **经典的错误 标准的0分**

条件	使用洛必达法则最多可用到
1）$f(x)\,n$ 阶可导	$f^{(n-1)}(x)$
2）$f(x)\,n$ 阶连续可导	$f^{(n)}(x)$

【例33】设 $f(x)$ 二阶可导 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=2$ 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-1}{2x}$ （洛必达法则）

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}$$

$$=\frac{f''(0)}{2}$$ （导数定义）

$$=1$$

【例5】（2020年1）设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，则

$=f(0)$　　与 $f(0)$ 无关

（A）当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导；

与 $f(0)$ 无关

$f'(0)$ 与 $f(0)$ 有关

（B）当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导；

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

$\to$ 连续 $\to f(0)=0$

（C）当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$；

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，连续

（D）当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$.

$f'(0)$ 存在

$f(x)=x$　　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2}=\infty$

$$\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{|x|}}\to 0$$

（二）导数公式及求导法则

1. 基本初等函数的导数公式

1） $(C)'=0$

2） $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$

3） $(a^{x})'=a^{x}\ln a$

4） $(e^{x})'=e^{x}$

5） $(\log_{a}x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

6） $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$

7） $(\sin x)'=\cos x$

8） $(\cos x)'=-\sin x$

9） $(\tan x)'=\sec^{2}x$

10） $(\cot x)'=-\csc^{2}x$

11） $(\sec x)'=\sec x\tan x$

12） $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

13） $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

14） $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

15） $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^{2}}$

16） $(arc\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^{2}}$

基本初

$+\ -\ \times\ \div$

复合

初

2. 求导法则

（1）有理运算法则

u v 可导

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$　　2) $(uv)' = u'v + uv'$

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$

求导

（2）复合函数求导法：

设 $u = \varphi(x)$, $y = f(u)$ 可导，则 $y = f[\varphi(x)]$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u)\varphi'(x)$$

【例6】(1995年2) 设 $y = \cos(x^2)\sin^2\dfrac{1}{x}$，则 $y' =$ ________.

$$y' = -\sin(x^2)\,2x\sin^2\frac{1}{x} + \cos(x^2)\,2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

【例7】设函数 $f(x)$ 可导，试证

1）若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f'(x)$ 是偶函数；

2）若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f'(x)$ 是奇函数；

3）若 $f(x)$ 是周期函数，则 $f'(x)$ 也是周期函数.

$f'(x)$　　$f(x)+f(-x)$ 偶

[证] 1) $f(-x)=-f(x)$　　$-f'(-x)=-f'(x)$ → $f'(-x)=f'(x)$

$\cos x=$

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}-\cdots$

【例8】（2022年3）已知函数 $f(x)=e^{\sin x}+e^{-\sin x}$，则 $f'''(2\pi)=$______.

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2-\cdots$

周期，$f'''(2\pi)=f'''(0)$

偶 f，f' 奇，f'' 偶，f''' 奇　$f'''(0)=0$

（3）隐函数求导法：

$f(x,y)=0 \Rightarrow y=y(x)$

$$F(x,y)=0 \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$$

【例9】(1993年3) 函数 $y=y(x)$ 由方程

$\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$ 所确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ __________.

$$\left[\frac{y^2-e^x-2x\cos(x^2+y^2)}{2y\cos(x^2+y^2)-2xy}\right]$$

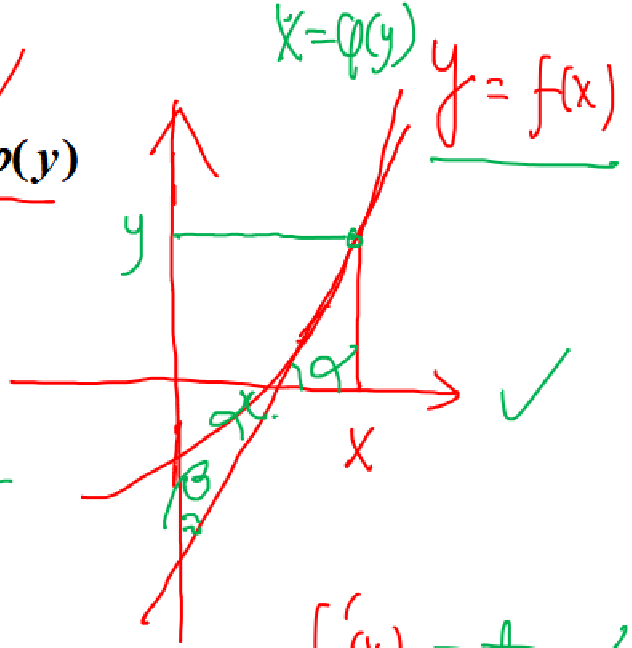
$$\cos(x^2+y^2)(2x+2y\,y')+e^x-(y^2+2xy\cdot y')=0$$

（4）反函数的导数；

若 $\boxed{y=f(x)\text{ 可导}}$，且 $\boxed{f'(x)\neq 0}$，则其反函数 $x=\varphi(y)$ 也可导，且

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)} \qquad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\varphi'(y)=\tan\beta=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{f'(x)}$$



$f'(x)=\tan\alpha$

【例10】 证明 $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

[证]. $y=\arcsin x$, $x=\sin y$, $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$

$$y'_x=(\arcsin x)'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

（5）参数方程求导法：

$\Rightarrow t = t(x)$

设 $y = y(x)$ 是由 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$，$(\alpha < t < \beta)$ 确定的函数，则

$\Rightarrow y = y(x)$

1）若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都可导，且 $\varphi'(t) \neq 0$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \psi'(t) \frac{1}{\varphi'(t)}$$

2）若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 二阶可导，且 $\varphi'(t) \neq 0$，则

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^3(t)}$$

【例11】(2020年1, 2) 设 $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1} \\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1}) \end{cases}$，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$ ________.　$(-\sqrt{2})$

【解1】 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}\overset{x}{=}\dfrac{1}{t}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\cancel{-\dfrac{1}{t^2}}$　$\cancel{\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-1}$

t

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx}=\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)\cdot\dfrac{1}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}$

$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$　　$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-\sqrt{2}$

【解2】 $x=\sqrt{t^2+1}\Rightarrow x^2=t^2+1$　$t=\sqrt{x^2-1}$　$t=1$，$\boxed{x=\sqrt{2}}$

$\boxed{y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})}$

$y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}=(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x$

（6）对数求导法：

$= e^{x\ln(1+\sin x)}$ ✓

【例12】（2005年2）设 $y=(1+\sin x)^{x}$，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=\pi}=$ ________. [$-\pi dx$]

$= (-\pi)dx = -\pi dx$

[解] $\ln y = x\ln(1+\sin x)$

$$\frac{y'}{y} = \ln(1+\sin x) + \frac{x\cos x}{1+\sin x}$$

$$y' = y\left[\ln(1+\sin x) + \frac{x\cos x}{1+\sin x}\right]$$

$y'(\pi)$

$= -\pi$

【例13】 设 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$，求 y'.

$\ln x$ $x>0$ $\boxed{(\ln|x|)'=\frac{1}{x}}$

【解】 $\ln y=\frac{1}{2}\left[\ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|\right]$

$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right]$

$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right]$

①门 指.

②连乘.除

乘方.开方

导数，微分

连续. 可导
可微.

1、概念 理论

(了解)

2) 方法 —— 求导.

重点

① + − × ÷

* ② 复合.

* ③ 隐.

* ④ 参 (抽三不要求)

⑤ 对.