第五章 特征值与特征向量

1987 ～ 2008 本章考题考点分布统计表

考点	考频	考题分布与分值	
特征值、特征向量的概念与计算	1	2002,一(5)题 3分	
相似与相似对角化	2	2003,十一题 10分	2004,23题 9分
实对称矩阵	2	2006,23题 9分	2007,24题 11分

本章导读

本章从2002年开始有考题.特征值和特征向量是线性代数的重要内容之一,也是考研的重点之一,它涉及行列式、矩阵,相关、无关,秩,基础解系……一系列问题,知识点多,综合性强,必须好好复习.

第一,要掌握求特征值、特征向量的各种方法;第二是相似,把握住和对角矩阵相似的充分必要条件,会求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$;第三(可能更重要),利用实对称矩阵的隐含信息处理求特征值、特征向量,用正交矩阵相似对角化等一系列问题.

真题分类练习

一阶题,相对容易,推荐先做　　二阶题,较综合,可在第二轮复习时做

一、特征值、特征向量的概念与计算

试题特点

常见的命题形式:

1.用定义 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 推理、分析、判断.

2.由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 和 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 求基础解系.

3.通过相似 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

(1)如 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$,则 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha})=\lambda(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha})$,

(2)如 $\boldsymbol{B\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$,则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P\alpha})=\lambda(\boldsymbol{P\alpha})$,

艾宾浩斯抗遗忘复习计划　臻选题号 □ □ □ □ □　再做时间 □一天 □四天 □七天 □一月 □考前

特别地，如 $r(\boldsymbol{A})=1$，有

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n-\sum a_{ii}\lambda^{n-1}$$

$$\lambda_1=\sum a_{ii},\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$$

通过下面的考题，请进一步体会考场上如何求特征值、特征向量.

1 (2002，一(5)题，3分) 矩阵 $\begin{bmatrix}0 & -2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ -2 & -2 & 2\end{bmatrix}$ 的非零特征值是________.

答题区

解题加速度

1. (1991，数四，4分) 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,k,1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量，试求常数 k 的值.

演算空间

2. (1992，数四，3分) 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ 的非零特征值是________.

演算空间

3.(1993,数四,3分)设 $\lambda=2$ 是非奇异矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,则矩阵 $\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}$ 有一个特征值等于

(A) $\frac{4}{3}$.　　(B) $\frac{3}{4}$.　　(C) $\frac{1}{2}$.　　(D) $\frac{1}{4}$.

演算空间

二、相似与相似对角化

试题特点

围绕相似定义 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$,相似的性质设计试题,或者考查判断是否和对角矩阵相似.

$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量

$\Leftrightarrow$ 如 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征值,则 λ 有 k 个线性无关的特征向量.

如 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值 $\Rightarrow\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$.

2 (2003,十一题,10分)若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{bmatrix}$ 相似于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,试确定常数 a 的值;并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

答题区

3 (2004,23 题,9 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & a & 5\end{bmatrix}$ 的特征方程有一个二重根,求 a 的值,并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

答题区

解题加速度

1.(1997,数四,9 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,且

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{bmatrix}.$$

(1) 求 a,b 的值.

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

演算空间

2.(1999,数四,7 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ -k & -1 & k\\ 4 & 2 & -3\end{bmatrix}$,问当 k 为何值时,存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵?并求出 $\boldsymbol{P}$ 和相应的对角矩阵.

演算空间

3.(2000,数四,9分)设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ x & 4 & y\\ -3 & -3 & 5\end{bmatrix}$,已知 A 有3个线性无关的特征向量,$\lambda=2$ 是 A 的二重特征值,试求可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵.

演算空间

三、实对称矩阵

试题特点

实对称矩阵有几个重要的定理,例如:实对称矩阵一定和对角矩阵相似(不管特征值有没有重根);实对称矩阵特征值不同时特征向量必相互正交(由此有内积为0,从而可构造齐次方程组求特征向量);实对称矩阵可以用正交矩阵来相似对角化.试题就是围绕这些定理来设计的.此部分是考研的重点,特别要复习好综合性强的解答题.

4 (2006,23题,9分)设3阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为3,向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $Ax=\mathbf{0}$ 的两个解.

(Ⅰ)求 A 的特征值与特征向量;

(Ⅱ)求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ,使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\Lambda$.

答题区

5 (2007,24题,11分)设三阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$,且 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量,记 $B=A^5-4A^3+E$,其中 E 为三阶单位矩阵.

(Ⅰ)验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 B 的特征向量,并求 B 的全部特征值与特征向量;

(Ⅱ)求矩阵 B.

答题区