

第三章 向量

1987 ~ 2008 本章考题考点分布统计表


考点	考频	考题分布与分值			
向量的线性表出	2	1998, 十三题 6分	2005, 22题 9分		
向量组的线性相关和线性无关	7	2002, 二(5)题 3分 2006, 13题 4分	2003, 二(6)题 4分 2007, 9题 4分	2004, 14题 4分 2008, 23题 10分	2005, 13题 4分
向量组的极大线性无关组与秩	3	1997, 一(5)题 3分	1999, 十二题 8分	2000, 十三题 7分	


本章导读

本章从1997年开始有考题. 向量既是重点又是难点, 由于向量的抽象性及逻辑推理上有较高的要求, 同学们在复习时要迎难而上.

考研的重点首先是对线性相关、无关概念的理解与判断, 要清晰选择、填空、证明各类题型的解题思路 and 技巧; 其次, 要把握线性表出问题的处理; 最后, 要理解向量组的极大线性无关组和向量组秩的概念, 会推导和计算.

真题分类练习

 一阶题, 相对容易, 推荐先做

 二阶题, 较综合, 可在第二轮复习时做

一、向量的线性表出

试题特点

向量 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出.

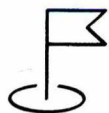
\Leftrightarrow 方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s = \beta$ 有解.

$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta)$.

☆ 如果已知向量的坐标, 那就通过判断方程组是否有解来回答向量能否线性表出的问题, 不仅要会一个向量 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 还要会分析、讨论一个向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 能否由

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出的问题.

☆ 如果向量 β 的坐标是未知的,那就要能用秩、用概念以及相关的定理来推理、分析.



1 (1998,十三题,6分) 已知 $\alpha_1 = (1, 4, 0, 2)^T, \alpha_2 = (2, 7, 1, 3)^T, \alpha_3 = (0, 1, -1, a)^T, \beta = (3, 10, b, 4)^T$, 问

(1) a, b 取何值时, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出?

(2) a, b 取何值时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出?并写出此表示式.

答题区



2 (2005,22题,9分) 确定常数 a , 使向量组 $\alpha_1 = (1, 1, a)^T, \alpha_2 = (1, a, 1)^T, \alpha_3 = (a, 1, 1)^T$ 可由向量组 $\beta_1 = (1, 1, a)^T, \beta_2 = (-2, a, 4)^T, \beta_3 = (-2, a, a)^T$ 线性表示, 但向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

答题区



解题加速度

1. (2000,数三、数四,8分) 设向量组 $\alpha_1 = (a, 2, 10)^T, \alpha_2 = (-2, 1, 5)^T, \alpha_3 = (-1, 1, 4)^T, \beta = (1, b, c)^T$. 试问: 当 a, b, c 满足什么条件时,

(1) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 且表示唯一?

(2) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出?

(3) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 但表示不唯一?并求出一般表达式.



演算空间

2. (1992, 数一, 7 分) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 问:

- (1) α_1 能否由 α_2, α_3 线性表出? 证明你的结论;
 (2) α_4 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? 证明你的结论.



二、向量组的线性相关和线性无关

试题特点

线性相关是难点之一, 也是历年考生在考试时丢分最多的一个考点.

如存在不全为 0 的数组 k_1, k_2, \dots, k_s , 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$ 成立, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关.

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 线性相关} \Leftrightarrow \text{齐次方程组 } (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ 有非零解}$$

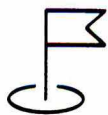
$$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$$

若使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$ 成立, 必有 $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_s = 0$, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 线性无关} \Leftrightarrow \text{齐次方程组 } (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ 只有零解}$$

$$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s.$$

☆ 证无关, 若用定义法就是设法证 $k_1 = 0, \dots, k_s = 0$; 若用秩, 就是设法证 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s$ (这里就是要通过用矩阵秩的定理、公式转换推导出向量组秩的信息).



3 (2002, 二(5)题, 3分) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 而向量 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则对于任意常数 k , 必有

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性无关.
- (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性相关.
- (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性无关.
- (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性相关.

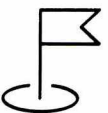
答题区



4 (2003, 二(6)题, 4分) 设向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 则

- (A) 当 $r < s$ 时, 向量组 II 必线性相关.
- (B) 当 $r > s$ 时, 向量组 II 必线性相关.
- (C) 当 $r < s$ 时, 向量组 I 必线性相关.
- (D) 当 $r > s$ 时, 向量组 I 必线性相关.

答题区



5 (2005, 13题, 4分) 设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为 α_1, α_2 , 则 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是

- (A) $\lambda_1 \neq 0$.
- (B) $\lambda_2 \neq 0$.
- (C) $\lambda_1 = 0$.
- (D) $\lambda_2 = 0$.

答题区

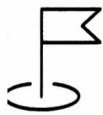
☐
☐
☐
☐
☐
☐ 一天

☐ 四天

☐ 七天

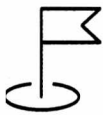
☐ 一月

☐ 考前



- 6 (2007, 9 题, 4 分) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是
- (A) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$. (B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$.
- (C) $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$. (D) $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$.

答题区



- 7 (2008, 23 题, 10 分) 设 A 为三阶矩阵, α_1, α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 向量 α_3 满足 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$.
- (I) 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;
- (II) 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 求 $P^{-1}AP$.

答题区



- 8 (2004, 14 题, 4 分) 设 A, B 为满足 $AB = O$ 的任意两个非零矩阵, 则必有
- (A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.
- (B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.
- (C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.
- (D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

答题区



9 (2006, 13 题, 4 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是

- (A) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关.
 (B) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关.
 (C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关.
 (D) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关.

答案区



解题加速度

1. (2002, 数四, 3 分) 设向量组 $\alpha_1 = (a, 0, c), \alpha_2 = (b, c, 0), \alpha_3 = (0, a, b)$ 线性无关, 则 a, b, c 必满足关系式_____.



演算空间

2. (1992, 数四, 3 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 均为 n 维列向量, 那么, 下列结论正确的是

- (A) 若 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关.
 (B) 若对任意一组不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_m , 都有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m \neq 0$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.
 (C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 则对任意一组不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_m , 都有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$.
 (D) 若 $0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \dots + 0\alpha_m = 0$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.



演算空间



三、向量组的极大线性无关组与秩



试题特点

向量组的极大无关组或向量组秩的考题虽不多,但是齐次方程组的基础解系实际上就是解向量的极大线性无关组,这在方程组求解和求特征向量时是回避不了的,所以复习时这里的概念、计算、证明仍然要认真对待.

10 (1997,一(5)题,3分) 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 1)$, $\alpha_2 = (2, 0, t, 0)$, $\alpha_3 = (0, -4, 5, -2)$ 的秩为 2, 则 $t =$ _____.

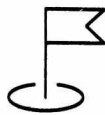
答题区

11 (1999,十二题,8分) 设向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 3)^T$, $\alpha_2 = (-1, -3, 5, 1)^T$, $\alpha_3 = (3, 2, -1, p+2)^T$, $\alpha_4 = (-2, -6, 10, p)^T$.

(1) p 为何值时,该向量组线性无关?并在此时将向量 $\alpha = (4, 1, 6, 10)^T$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出.

(2) p 为何值时,该向量组线性相关?并在此时求出它的秩和一个极大线性无关组.

答题区



12 (2000, 十三题, 7分) 已知向量组 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta_3 = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 与向量组 $\alpha_1 =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ 具有相同的秩, 且 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 求 a, b 的值.

答题区



解题加速度

1. (1990, 数一, 3分) 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\alpha_2 = (2, 3, 4, 5)$, $\alpha_3 = (3, 4, 5, 6)$, $\alpha_4 = (4, 5, 6, 7)$, 则该向量组的秩是_____.



演算空间

2. (1994, 数四, 3分) 设有向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4)$, $\alpha_2 = (0, 3, 1, 2)$, $\alpha_3 = (3, 0, 7, 14)$, $\alpha_4 = (1, -2, 2, 0)$, $\alpha_5 = (2, 1, 5, 10)$, 则该向量组的极大线性无关组是

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$.

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$.

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$.



演算空间