第九章　二重积分

大纲考试内容	大纲考试要求		
	数一	数二	数三
二重积分的概念	理解	理解	理解
二重积分的中值定理	了解	了解	了解
二重积分的计算方法(直角坐标、极坐标)	掌握	掌握	掌握
无界区域上较简单的反常二重积分			了解并会计算

考试内容概要

一、二重积分的概念及性质

1. 二重积分的概念

定义　设函数 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有定义，将区域 D 任意分成 n 个小闭区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n,$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小区域，也表示它的面积. 在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i, η_i)，作乘积 $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$，并求和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$. 记 λ 为 n 个小区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$ 中的最大直径，如果 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在，则称此极限值为函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的**二重积分**，记为

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

几何意义

二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 是一个数. 当 $f(x,y)\geqslant 0$ 时，其值等于以区域 D 为底，以曲面 $z=f(x,y)$ 为曲顶的曲顶柱体的体积；当 $f(x,y)\leqslant 0$ 时，二重积分的值为负值，其绝对值等于上述曲顶柱体的体积.

2. 二重积分的性质

性质 1（不等式性质）

(1) 若在 D 上 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

(2) 若在 D 上 $m \leqslant f(x,y) \leqslant M$,则

$$m\sigma \leqslant \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant M\sigma$$,其中 σ 为区域 D 的面积.

(3) $\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$

性质 2(中值定理)

设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续,σ 为区域 D 的面积,则在 D 上至少存在一点 (ξ,η),使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma.$$

二、二重积分的计算

1. 利用直角坐标计算

(1) 先 y 后 x　积分区域 D 可以用 $a \leqslant x \leqslant b, \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$ 表示,

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

(2) 先 x 后 y　积分区域 D 可以用 $c \leqslant y \leqslant d, \varphi_1(y) \leqslant x \leqslant \varphi_2(y)$ 表示,

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

2. 利用极坐标计算

先 r 后 θ　积分区域 D 可以用 $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, \varphi_1(\theta) \leqslant r \leqslant \varphi_2(\theta)$ 表示,

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

【注】 适合用极坐标计算的二重积分的特征:

(1) 适合用极坐标计算的被积函数:$f(\sqrt{x^2+y^2}), f\left(\frac{y}{x}\right), f\left(\frac{x}{y}\right)$;

(2) 适合用极坐标的积分域:

如 $x^2+y^2 \leqslant R^2$;$r^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant R^2$;$x^2+y^2 \leqslant 2ax$;$x^2+y^2 \leqslant 2by$.

3. 利用函数的奇偶性计算

(1) 若积分域 D 关于 y 轴对称,$f(x,y)$ 关于 x 有奇偶性,则:

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_{x\geqslant 0}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,y)\text{ 关于 } x \text{ 为偶函数}, \\ 0, & f(x,y)\text{ 关于 } x \text{ 为奇函数}. \end{cases}$$

(2) 若积分域 D 关于 x 轴对称,$f(x,y)$ 关于 y 有奇偶性,则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_{y\geqslant 0}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,y) \text{ 关于 } y \text{ 为偶函数}, \\ 0, & f(x,y) \text{ 关于 } y \text{ 为奇函数}. \end{cases}$$

4. 利用变量的轮换对称性计算

如果积分域 D 具有轮换对称性，也就是关于直线 $y=x$ 对称，即 D 的表达式中将 x 换作 y，y 换作 x 表达式不变，则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D} f(y,x)\mathrm{d}\sigma.$$

常考题型与典型例题

常考题型

1. 累次积分交换次序或计算
2. 二重积分计算

一、累次积分交换次序或计算

【例 1】 交换累次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$ 的次序.

解

首先画域，y 应介于 $y=x^2$ 与 $y=2-x$ 之间，x 介于 0 与 1 之间，如图 1，则

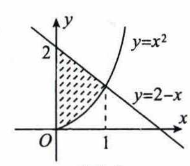

图 1

原式 $=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2 \mathrm{d}y\int_0^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x$.

【例 2】 (2009，数二) 设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_1^2 \mathrm{d}x\int_x^2 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2 \mathrm{d}y\int_y^{4-y} f(x,y)\mathrm{d}x=$

(A) $\int_1^2 \mathrm{d}x\int_1^{4-x} f(x,y)\mathrm{d}y$.　　(B) $\int_1^2 \mathrm{d}x\int_x^{4-x} f(x,y)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_1^2 \mathrm{d}y\int_1^{4-y} f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_1^2 \mathrm{d}y\int_y^2 f(x,y)\mathrm{d}x$.

【C】

【例 3】 (1996,数三) 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \mathrm{d}r$ 可以写成

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(B) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$.　　(D) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

解

首先画域,r 应介于 $r=0$ 与 $r=\cos\theta$(即 $x^2+y^2=x$) 之间,θ 应介于 0 与 $\frac{\pi}{2}$ 之间,如图 2. 则

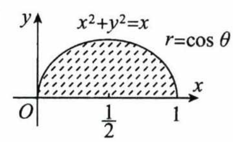

图 2

$$原式 = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

故应选(D).

【例 4】 (2017,数二) 积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x =$ ________.

【$-\ln\cos 1$】

【例 5】 积分 $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y =$ ________.

解

该累次积分在直角坐标下都不易计算,因此在极坐标下计算,其积分域如图 3. 则

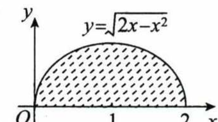

图 3

$$原式 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 \mathrm{d}r$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{8}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{9}.$$

二、二重积分计算

【例 6】 (2008,数三)设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,则$\iint\limits_D (x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

解

y 关于 y 为奇函数,积分域关于 x 轴上下对称,则$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

$$\text{原式}=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (\text{变量对称性})$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

【例 7】 (1991,数一、二)设 D 是 xOy 平面上以$(1,1)$,$(-1,1)$和$(-1,-1)$为顶点的三角形区域,D_1 是 D 在第一象限的部分,则$\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于

(A)$2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(B)$2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(C)$4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(D)0.

【A】

【例 8】 (2006,数三)计算二重积分$\iint\limits_D\sqrt{y^2-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由直线 $y=x$,$y=1$,$x=0$ 所围成的平面区域.(如图 4)

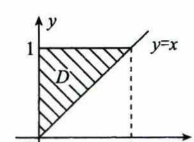

图 4

解

$$\text{原式}=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\sqrt{y^2-xy}\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{2}{3}\sqrt{y}\,(y-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^y\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\int_0^1 y^2\mathrm{d}y=\frac{2}{9}.$$

【例 9】 (2017,数二)已知平面域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2y\}$,计算二重积分

$$I=\iint\limits_D (x+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解

$$I=\iint\limits_D(x^2+2x+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于 D 关于 y 轴对称，且函数 $2x$ 是 x 的奇函数，所以 $\iint\limits_D 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_D(x^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3\cos^2\theta\mathrm{d}r+\pi\\&=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta+\pi=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta(1-\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta+\pi\\&=8\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\pi\\&=\frac{5}{4}\pi.\end{aligned}$$

【例 10】 （2005，数二、三）计算二重积分 $\iint\limits_D|x^2+y^2-1|\mathrm{d}\sigma$，其中

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$$

解

如图 5 所示，将 D 分成 D_1 与 D_2 两部分.

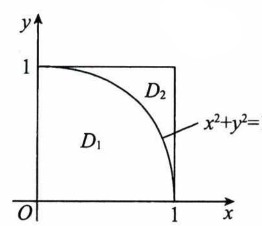

图 5

$$\begin{aligned}&\iint\limits_D|x^2+y^2-1|\mathrm{d}\sigma\\&=\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma\\&=\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma+\left[\iint\limits_D(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma\right]\\&=2\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_D(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

由于

$$\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{8},$$

$$\iint\limits_D(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x^2+y^2-1)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(x^2-\frac{2}{3}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3},$$

因此 $\iint\limits_D|x^2+y^2-1|\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$.

【例 11】 （2014，数二、三）设平面域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，计算

$$\iint\limits_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解

【方法 1】 由于积分域 D 关于直线 $y=x$ 对称，则

$$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\left[\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^2\sin(\pi r)r\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{1}{4}\int_1^2 r\mathrm{d}\cos(\pi r)=-\frac{3}{4}.$$

【方法 2】 $$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta\cdot\int_1^2 r\sin(\pi r)\mathrm{d}r.$$

由于

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4},$$

$$\int_1^2 r\sin(\pi r)\mathrm{d}r=\frac{1}{\pi}\left(-r\cos\pi r+\frac{1}{\pi}\sin\pi r\right)\Big|_1^2=-\frac{3}{\pi},$$

故 $$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{3}{4}.$$

【例 12】 (2013，数二、三) 设 D_k 是圆域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$ 在第 k 象限的部分，记 $I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (k=1,2,3,4)$，则

(A) $I_1>0$. (B) $I_2>0$.

(C) $I_3>0$. (D) $I_4>0$.

【B】