

第四章 线性方程组

1987 ~ 2008 本章考题考点分布统计表

考点	考频	考题分布与分值			
齐次方程组、基础解系	3	2001, 十二题 6分	2004, 22题 9分	2005, 23题 9分	
非齐次方程组的求解	7	1997, 四题 8分 2003, 十二题 8分	2000, 十二题 6分 2006, 22题 9分	2001, 一(5)题 3分 2008, 22题 12分	2002, 十二题 6分
公共解与同解	1	2007, 23题 11分			

本章导读

本章从1997年开始有考题. 线性方程组是否有解? 若有解, 那么一共有多少解? 有解时怎样求出其所有的解? 如何求齐次方程组的基础解系?

当给出具体的方程组时, 如何加减消元化简(注意只用行变换)? 如何求出所有的解(可能还涉及对一些参数的讨论)?

没有具体的方程组时, 如何利用解的结构(注意对矩阵秩的推断)分析、推导出通解?

面对两个方程组, 如何处理公共解或同解问题?

这一切都是大家在复习方程组时要认真对待的. 方程组历年来都是考试的重点, 其比重大, 分值高, 解答题多, 大家一定要好好复习.

真题分类练习



一阶题, 相对容易, 推荐先做



二阶题, 较综合, 可在第二轮复习时做

一、齐次方程组、基础解系

试题特点

考查的主要定理是:

(1) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 齐次方程组 $Ax = 0$ 有非零解 \Leftrightarrow 秩 $r(A) < n$;

(2) 齐次方程组 $Ax = 0$ 如有非零解, 则必有无穷多解, 而线性无关的解向量个数为 $n - r(A)$.

其实造斯抗造
忘复习计划

臻透
题号

☐
☐
☐
☐
☐

再做
时间

☐一天

☐四天

☐七天

☐一月

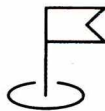
☐考前

求基础解系是重点.

$n-r(A)$ 既表示 $Ax=0$ 线性无关解向量的个数,也表示方程组中自由变量的个数,如何确定自由变量?如何给自由变量赋值并求解,是这一章的基本功.

不论是 $Ax=0$, 还是 $Ax=b$ 都要涉及求 $Ax=0$ 的基础解系,这里的计算一定要过关(正确、熟练).

线性无关的证明题的另一种出题方法就是证基础解系.



1 (2001, 十二题, 6分) 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系, 若 $\beta_1 = \alpha_1 + t\alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + t\alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + t\alpha_4, \beta_4 = \alpha_4 + t\alpha_1$, 讨论实数 t 满足什么关系时, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 也是 $Ax=0$ 的一个基础解系.

答题区



2 (2005, 23题, 9分) 已知三阶矩阵 A 的第1行是 (a, b, c) , a, b, c 不全为零, 矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix} \quad (k \text{ 为常数})$$

且 $AB=O$, 求线性方程组 $Ax=0$ 的通解.

答题区

3 (2004, 22 题, 9 分) 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 & + 2x_3 & + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 & + 3x_2 + (3+a)x_3 & + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 & + 4x_2 & + 4x_3 + (4+a)x_4 = 0. \end{cases}$$

试问 a 取何值时, 该方程组有非零解? 并求出其通解.

答题区

解题加速度

1. (1989, 数四, 3 分) 设 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的系数矩阵 A 的秩为 r , 则 $Ax = 0$ 有非零解的充分必要条件是

(A) $r = n$.

(B) $r \geq n$.

(C) $r < n$.

(D) $r > n$.



2. (1994, 数四, 8 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系. 证明 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 也是该方程组的一个基础解系.



3. (1992, 数三, 3分) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 仅有零解的充分条件是
- (A) A 的列向量线性无关. (B) A 的列向量线性相关.
- (C) A 的行向量线性无关. (D) A 的行向量线性相关.



二、非齐次方程组的求解

试题特点

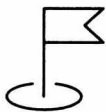
记住解的结构

$$\alpha + k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \cdots + k_{n-r} \eta_{n-r}$$

其中 α 是 $Ax = b$ 的特解, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系.

往届考生在加减消元时计算错误较多(一定要多动手做;认真);讨论参数时不能丢三落四,要严谨.

求 A 的秩、求特解、求基础解系、讨论参数是复习时要注意的知识点.



4 (1997, 四题, 8分) λ 取何值时, 方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$$

无解, 有唯一解或有无穷多解? 并在有无穷多解时写出方程组的通解.

答题区


☐
☐
☐
☐
☐
☐ 一天

☐ 四天

☐ 七天


☐ 一月

☐ 考前


 **5** (2000, 十二题, 6分) 设 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$, $A = \alpha\beta^T$, $B = \beta^T\alpha$, 其中 β^T 是 β 的

转置, 求解方程 $2B^2A^2x = A^4x + B^4x + \gamma$.

答题区

 **6** (2001, 一(5)题, 3分) 设方程 $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ 有无穷多个解, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

答题区

 **7** (2003, 十二题, 8分) 已知平面上三条不同直线的方程分别为

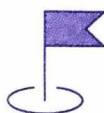
$$l_1: ax + 2by + 3c = 0$$

$$l_2: bx + 2cy + 3a = 0$$

$$l_3: cx + 2ay + 3b = 0$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a + b + c = 0$.

答题区



8 (2006, 22 题, 9 分) 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1, \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1. \end{cases}$$

有 3 个线性无关的解.

(I) 证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$;

(II) 求 a, b 的值及方程组的通解.

答题区



9 (2002, 十二题, 6 分) 已知四阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为四维列向量, 其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$. 如果 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

答题区

☐
☐
☐
☐
☐
☐ 一天

☐ 四天

☐ 七天

☐ 一月

☐ 考前

10 (2008, 22 题, 12 分) 设 n 元线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{bmatrix}_{n \times n}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- (I) 证明行列式 $|A| = (n+1)a^n$;
 (II) 当 a 为何值时, 该方程组有唯一解? 并求 x_1 ;
 (III) 当 a 为何值时, 该方程组有无穷多解? 并求通解.

答题区

解题加速度

1. (1991, 数四, 3 分) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, $Ax = 0$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 所对应的齐次线性方程组, 则下列结论正确的是

- (A) 若 $Ax = 0$ 仅有零解, 则 $Ax = b$ 有唯一解.
 (B) 若 $Ax = 0$ 有非零解, 则 $Ax = b$ 有无穷多个解.
 (C) 若 $Ax = b$ 有无穷多个解, 则 $Ax = 0$ 仅有零解.
 (D) 若 $Ax = b$ 有无穷多个解, 则 $Ax = 0$ 有非零解.



演算空间

2. (2000, 数三, 数四, 3分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是四元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的三个解向量, 且秩 $(A) = 3, \alpha_1 = (1, 2, 3, 4)^T, \alpha_2 + \alpha_3 = (0, 1, 2, 3)^T, c$ 表示任意常数, 则线性方程组 $Ax = b$ 的通解 $x =$

(A) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$



三、公共解与同解

试题特点

如果已知两个方程组 (I) 和 (II), 那么将其联立 $\begin{cases} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{cases}$, 其联立方程组的解就是 (I) 与 (II) 的公共解.

如果已知 (I) 与 (II) 的基础解系分别是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 β_1, β_2 , 则可设公共解为 γ , 那么

$$\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = l_1\beta_1 + l_2\beta_2$$

由此得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 - l_1\beta_1 - l_2\beta_2 = 0$, 解出 k_1, k_2, k_3, l_1, l_2 可求出公共解 γ .

以上这两种常见的出题方法应当把握.

而处理同解的方法, 往往是代入来处理, 即把 (I) 的解代入 (II), 把 (II) 的解代入 (I).



11 (2007, 23 题, 11 分) 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{①}$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \quad \text{②}$$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

答题区

☐ 一天

☐ 四天

☐ 七天

☐ 一月

☐ 考前

解题加速度

1. (2000, 数三, 3 分) 设 A 为 n 阶实矩阵, A^T 是 A 的转置矩阵, 则对于线性方程组 (I): $Ax = 0$ 和 (II): $A^T Ax = 0$, 必有 公众号: 旗胜考研

- (A) (II) 的解是 (I) 的解, (I) 的解也是 (II) 的解.
 (B) (II) 的解是 (I) 的解, 但 (I) 的解不是 (II) 的解.
 (C) (I) 的解不是 (II) 的解, (II) 的解也不是 (I) 的解.
 (D) (I) 的解是 (II) 的解, 但 (II) 的解不是 (I) 的解.



演算空间

2. (2002, 数四, 8 分) 设 4 元齐次线性方程组 (I) 为

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

而已知另一 4 元齐次线性方程组 (II) 的一个基础解系为

$$\alpha_1 = (2, -1, a+2, 1)^T, \alpha_2 = (-1, 2, 4, a+8)^T$$

(1) 求方程组 (I) 的一个基础解系;

(2) 当 a 为何值时, 方程组 (I) 与 (II) 有非零公共解? 在有非零公共解时, 求出全部非零公共解.



演算空间