高数基础班（3）

3	常考题型举例：1.极限概念、性质、存在准则，2.求极限方法举例（基本极限；等价代换；有理运算）	P16-P25

主讲 武忠祥 教授

还不关注，你就慢了

常考题型与典型例题

1）极限的概念、性质及存在准则

2）求极限

3）无穷小量阶的比较

（一）极限的概念、性质及存在准则

【例14】（1999年2）“对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|\le 2\varepsilon$”是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 为

$\varepsilon \to 0$，$2\varepsilon \to 0$ ✓

$\rightleftarrows$ $x_n \to a$

（A）充分条件但非必要条件；

（B）必要条件但非充分条件.

✓（C）充分必要条件.

（D）既非充分条件又非必要条件.

$\varepsilon.$ ✓ $\frac{\varepsilon}{3}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$：

$|x_n-a|<\varepsilon$ ✓ $\xrightarrow{\checkmark}$ $\xleftarrow[\checkmark\,?]{}$ $|x_n-a|\le 2\varepsilon$ ✓ $2\cdot\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon$

【例15】（2015年3） 设 $\{x_n\}$ 是数列，下列命题中不正确的是

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$. ✓

（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$， ✓

（C）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$. ✓

（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$， X ✓

x_{3n} : x_3 x_6 x_9 — —

x_{3n+1} x_4 x_7 x_{10} - -

x_{3n+2} x_5 x_8 x_{12}

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+2} = a$ ✓

【例16】(1993年3) 当 $x \to 0$ 时, 变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是（　）

∞　1　∞　0　-1

(A) 无穷小　　　　(B) 无穷大

(C) 有界的, 但不是无穷小;　(D) 无界的, 但不是无穷大

$\frac{1}{x} = 2n\pi$

【解】 由于对任意给定的 $M > 0$ 及 $\delta > 0$, 总存在

$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}},\ y_n = \frac{1}{2n\pi}, \to 0$$

$\frac{1}{x} = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

使得 $0 < x_n < \delta$, $0 < y_n < \delta$, 此时

无穷

$$\left|\frac{1}{x_n^2}\sin x_n\right| = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2 > M, \quad \frac{1}{y_n^2}\sin\frac{1}{y_n} = 0$$

(二) 求 极 限

常用的求极限方法（8种）

方法1　利用基本极限求极限

方法2　利用等价无穷小代换求极限

方法3　利用有理运算法则求极限

方法4　利用洛必达法则求极限

方法5　利用泰勒公式求极限

方法6　利用夹逼原理求极限

方法7　利用单调有界准则求极限

方法8　利用定积分定义求极限

方法1　利用基本极限求极限

1）常用的基本极限

∞^0 不存在　　$\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{1}{x})^x=e$ ✗　　∞^0 不存在　　$\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ ✗　　$[f(x)]^{g(x)}$　$\boxed{f(x)>0}$!! ✓

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1;\qquad \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e;\qquad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e;$$

1^∞ ✓　$f(x)=$多项式$+R_n(x)$　1^∞

$$\lim_{x\to0^+}(1+\frac{1}{x})^x \overset{✓}{=} \lim_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}=e^0=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,(a>0),$$

考试

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\boxed{a_nx^n}+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{\boxed{b_mx^m}+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}, & n=m, ✓\\ 0, & n<m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^5+\boxed{2x^4}}{x^5\boxed{-x^2}}=-2$$

$(-1)^n$　e^∞

$$\lim_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ \infty, & |x|>1,\\ 1, & x=1\\ \text{不存在}, & x=-1.\end{cases}\qquad \lim_{n\to\infty}e^{\boxed{nx}}=\begin{cases}0, & x<0,\\ +\infty, & x>0\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

$n\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$ ✓ ~

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ ✓

2)“1^{∞}”型极限常用结论

✓ ① 凑 e ✓

若 $\lim\alpha(x)=0,\ \lim\beta(x)=\infty$, 且 $\boxed{\lim\alpha(x)\beta(x)=A}$

② 改写 + 凑

则 $\underbrace{\lim(1+\alpha(x))^{\beta(x)}}_{\infty}=e^{A}$ ✓ ✓

$$(1+\alpha)^{\beta}=\left[\underline{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}\right]^{\alpha\beta}\to e^{A}$$

③

可以归纳为以下三步:

✓ **1)写标准形式** 原式 $=\lim[1+\alpha(x)]^{\beta(x)}$; ✓ ✓

✓ **2)求极限** $\lim\alpha(x)\beta(x)=A$;

✓ **3)写结果** 原式 $=e^{A}$.

【例17】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n}}\sin\frac{1}{n}$

【解】 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{n}}{(n+1)^{n}}n\sin\frac{1}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n}}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{e}$$

✓

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{p}}{(n+1)^{p}}=1 \quad ✓$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{p}=1^{p}=1$$

$$\cancel{\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n}}{(n+1)^{n}}=1}} \quad ?$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n}}=\frac{1}{e} \quad ✓$$

$$\boxed{1^{\infty}}=1 \quad ✗$$

【例18】 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x =$

1^∞

(*A*) 1　　　(*B*) e　　　(*C*) e^{a-b}　　　(*D*) e^{b-a}

a . b

【解1】 **直接法** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\underbrace{\left(\frac{x}{x-a}\right)}_{}^{x}\underbrace{\left(\frac{x}{x+b}\right)}_{}^{x}$

1^∞　1^∞

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-x}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{-x}$$

$$=e^a\cdot e^{-b}=\underline{e^{a-b}}$$

【例18】 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=$

✗ (*A*) 1　　✗ (*B*) e　　✓ (*C*) e^{a-b}　　✗ (*D*) e^{b-a}

e^{-b}　　e^{b}

a, b

【解2】排除法

$a=0$,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+b}\right)^x=e^{-b}$$ ✓ ✓

【例19】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$，其中 $a>0,b>0,c>0.$

1^{∞}

【解】 ① 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}-3}{3}\right]^n$ ✓

② $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}-3}{3}\right)n$ ✓ $\ln a$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{a}-1)+(\sqrt[n]{b}-1)+(\sqrt[n]{c}-1)}{\frac{1}{n}}$$ ✓

$$=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)$$

$$=\ln\sqrt[3]{abc}$$ ✓

③ 原式 $=e^{\ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}$

方法2 利用等价无穷小代换求极限

（1）代换原则：

a）乘除关系可以换

若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 则

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}$$

b）加减关系在一定条件下可以换

若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\boxed{\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq 1.}$ 则 $\alpha - \beta \sim \alpha_1 - \beta_1$.

若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq -1$. 则 $\alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$.

$-(-\beta)$

$$\lim \frac{\alpha-\beta}{\alpha_1-\beta_1} = \lim \frac{\beta\left[\overset{A-1}{\frac{\alpha}{\beta}-1}\right]}{\beta_1\left[\frac{\alpha_1}{\beta_1}-1\right]} = 1$$

$A-1 \neq 0$

$x \to 0$, $\sin 2x - \tan x$

$\sim 2x - x = x$

φ

$\frac{x}{x} \to A \neq -1$

$\sin x - \tan x$

$\cancel{\sim}\ x - x = 0$

$x \to 0$

$\sin x + \tan x$

$\sim x + x = 2x$

(2) 常用的等价无穷小：当 $\underline{x\to 0}$ 时

一阶

$$\boxed{x}\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^{x}-1;$$

$$a^{x}-1\sim x\ln a,\qquad (1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x,\qquad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2}$$

3阶

※

$$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^{3}\qquad \tan x-x\sim\frac{1}{3}x^{3}\qquad x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^{2}$$

$$\arcsin x-x\sim\frac{1}{6}x^{3}\qquad x-\arctan x\sim\frac{1}{3}x^{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\overset{\frac{1}{2}x^{2}}{1-\cos x}}{3x^{2}}=\frac{1}{6}$$

$\sin x = t$

$\arcsin t - t\sim\frac{1}{6}\arcsin^{3} t\sim\frac{1}{6}t^{3}.$

【例20】（2016年3） 已知函数 $f(x)$ 满足

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2,$$ 则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ ____6____.

$$\frac{\frac{1}{2}f(x)\boxed{\sin 2x}}{3x} \quad 2x$$

$$(1+x)^{\varphi}-1\sim\varphi x$$

$$x\to 0$$

【解】 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}(e^{3x}-1)=0$ 知，

→0

$e^{3x}-1\to 0$

$$\lim_{x\to 0}f(x)\sin 2x=0$$

则 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\cdot 2x}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}f(x)=2$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=6.$

【例21】（2015年, 1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$

$\dfrac{0}{0}$

$\boxed{x\to 1}$

$\ln 1=0$

$\ln(1+x)\sim x$

【解1】 原式 $\overset{*}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}$

$\boxed{\ln x}=\ln[1+(x-1)]$

$\sim x-1$

$$\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}\ ✓$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

（等价无穷小代换）

$\boxed{\ln\varphi(x)\sim\varphi(x)-1}$

$\varphi(x)\to 1$

【解2】 原式 $\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{2x}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\overset{等}{\tan x}}{x}=-\dfrac{1}{2}$

$f(x)=\ln x$ ✓

$f(b)-f(a)$

$=f'(\xi)(b-a)$

【解3】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x-\ln 1}{x^2}\overset{*}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\xi}(\cos x-1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$

【例22】（2009年. 3）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos x}}{\underline{\sqrt[3]{1+x^2}-1}}=$ ________.

$$\frac{0}{0}$$

【解1】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\boxed{e^{\cos x}}\underline{(e^{1-\cos x}-1)}}{\underline{\frac{1}{3}x^2}}$

$$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$$

$$e^x-1\sim x$$

$$=\boxed{e}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{3}x^2}=e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2}=\frac{3e}{2}$$

【解2】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\boxed{e^1}-e^{\boxed{\cos x}}}{\underline{\frac{1}{3}x^2}}\overset{*}{=}\underline{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\boxed{e^{\xi}}(1-\cos x)}{x^2}=3e\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{3e}{2}$

$f(x)=e^x$

【解3】 原式 $\overset{*}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos x}}{\frac{1}{3}\underline{x^2}}\overset{*}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\overset{e}{\underline{e^{\cos x}}}\boxed{\sin x}}{\frac{2}{3}\boxed{x}}=\frac{3e}{2}$

【例23】（2006年2） 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$

1^0 $\frac{0}{0}$

【解1】 原式 $\overset{*}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1\right]$

$[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^3}$ （等价无穷小代换）

$\boxed{e^x-1\sim x}$

$x\to0$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}$ ✓

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$ ✓ （等价无穷小代换）

$\ln(1+x)\sim x$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}$ ✓

【例23】（2006年2） 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$

【解2】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)^x-1\right]$

$$*=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x(\cos x-1)}{3}}{x^3}$$

【注】 当 $x\to0$ 时，$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$. 这个结论推广可得：

若 $\alpha(x)\to0,\alpha(x)\beta(x)\to0,$

则 $(1+\alpha(x))^{\beta(x)}-1\sim\alpha(x)\beta(x)$

$$(1+\alpha(x))^{\beta(x)}-1=e^{\beta(x)\ln(1+\alpha(x))}-1$$

$$\sim\beta(x)\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)\beta(x)$$

【例24】 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\overset{x}{\arcsin} x-\overset{x}{\sin} x}{\arctan x-\tan x}$. ✓ $\dfrac{0}{0}$ ✓ $[-\frac{1}{2}]$

$$\frac{1}{6}x^3-\left(-\frac{1}{6}x^3\right)=\frac{1}{3}x^3$$

[解] 原式 $\overset{*}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\arcsin x-x]-[\sin x-x]}{[\arctan x-x]-[\tan x-x]}=-\dfrac{1}{2}$

$$-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^3=-\frac{2}{3}x^3$$

【例25】（2009年2） 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$.

$\frac{0}{0}$

① 洛

② 等

③ 泰

10分

【解1】 原式 $\overset{*}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2[x-\ln(1+\tan x)]}{x^4}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{[x-\tan x]-[\ln(1+\tan x)-\tan x]}{x^2}$$

$$\overset{*}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{[-\frac{1}{3}x^3]-[-\frac{1}{2}\tan^2 x]}{x^2}$$

$x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2$

✓

$$=\frac{1}{2}(0+\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$$

【例25】（2009年2）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$. ✓

【解2】原式 $\overset{*}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}\underline{x^2}[x-\ln(1+\tan x)]}{\underline{x^4}}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{\underline{x^2}}$$

$$\overset{*}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{\sec^2 x}{\boxed{1+\tan x}}}{\underline{2x}} \quad ✓ \quad ✓$$

$$\boxed{\frac{1}{1+\tan x}}\to 1 \qquad \frac{0}{0}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{\tan x+(1-\sec^2 x)}{x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{\tan x\underline{-\tan^2 x}}{x} \quad ✓$$

$$=\frac{1}{4} \quad ✓$$

【例25】（2009年2） 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\underline{\sin^4 x}}$.

$$\frac{0}{0}$$

【解3】 原式 $\overset{*}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2[x-\ln(1+\tan x)]}{\underline{x^4}}$

等 ✓

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\underline{\ln(1+\tan x)}}{\underline{x^2}}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}-\ \ -$$

✓

$$\overset{*}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-[\underline{\tan x}-\frac{1}{2}\tan^2 x+o(\tan^2 x)]}{x^2}$$ ✓

泰 ✓

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2}+\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}x^3}{x^2}+\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=\frac{1}{4}$$

方法3 利用有理运算法则求极限

$x+|x|$　　$x=0$

存+不存

不存

有理运算法则

若 $\lim f(x) \overset{\exists}{=} A$,　$\lim g(x) \overset{\exists}{=} B$, 那么:

$$\lim\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim f(x)\pm\lim g(x)$$

$$\lim\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$$

$$\lim\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\quad(B\neq 0)$$

$\overset{\exists}{f(x)} + \overset{不\exists}{g(x)} = F(x)$　✓

若 f、$F(x)$ 存在.

$\overset{✓}{g(x)} = \overset{\exists}{F(x)} - \overset{\exists}{f(x)}$

① 极限.

② 连续, ✓. ✓

③ 导数. ✓

④ 级数, .

相同

【注】 1）存在 ± 不存在 = 不存在;　✓

2）不存在 ± 不存在 = 不一定.

3）存在 × ÷ 不存在 = 不一定;

4）不存在 × ÷ 不存在 = 不一定.

$n + n = 2n$　不∃

$n + (-n) = 0$　∃

$\frac{1}{n}\cdot n = 1$　∃

$\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot n = \sqrt{n}$　不∃

$n\cdot n = n^2$

$(-1)^n\cdot(-1)^n = 1$

常用的结论：

1） $\lim \underline{f(x)=A\neq 0} \Rightarrow \lim \overset{A}{\underline{f(x)}}g(x)=\boxed{A}\lim g(x)$; ✓

即：极限非零的因子的极限可先求出来.

2） $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$① 存在，② $\lim g(x)=0 \Rightarrow \boxed{\lim f(x)=0}$; ✓

$\to 0$

3） $\lim \frac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0, \lim f(x)=0 \Rightarrow \lim g(x)=0$; ✓

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1+x^2} \to 0$ ∃

① lim g(x) 存在

② lim g(x) 不存在

→ lim f(x)g(x) 不存在

$$\frac{f(x)g(x)}{f(x)} = g(x) \quad ∃$$

$$\frac{\overset{∃\ 0}{f(x)}}{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)_{∃}} = g(x) \to 0$$

A≠0 lim f(x) = A ≠ 0 ✓

x：∃

$$\frac{\overset{∃}{f(x)}}{\underline{g(x)}_{A}} \cdot \overset{∃}{g(x)}_{0} = \overset{∃}{f(x)}$$

【例26】(2010年3) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)\underset{\exists}{\underline{e^x}}\right]=\underline{1}$，则 a 等于（　）

$\infty - \infty$

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

【解】 应选（C）

$$\underset{\exists}{1}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right]\overset{*}{=}\underline{\lim_{x\to 0}\overset{\exists}{\left[\frac{1-e^x}{x}\right]}}+\underset{\exists}{\boxed{a\lim_{x\to 0}e^x}}\ ✓$$

$$=-1+a$$

则 $a=2$ 故应选（C）.

【例27】（2018年3） 已知实数 $\underline{a,b}$ 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(\underset{\infty}{\underline{ax}}+\boxed{b)e^{\frac{1}{x}}}-x]=2$,

$$\underset{\checkmark}{\infty}\qquad\exists\qquad\underset{\checkmark}{\infty}$$

求 a,b. ✓

【解】

$$\underline{2}\overset{\exists *}{=}\overset{\exists}{\underline{\lim_{x\to+\infty}be^{\frac{1}{x}}}}+\overset{\exists\,\cdot}{\underline{\lim_{x\to+\infty}(axe^{\frac{1}{x}}-x)}}$$

$$=b+\lim_{x\to+\infty}\overset{\infty}{x}(ae^{\frac{1}{x}}-1)\quad(a-1)=0$$

$$=b+\lim_{x\to+\infty}x(\underline{e^{\frac{1}{x}}-1})\qquad\boxed{(a=1)}\quad\checkmark$$

$$=b+\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{x}$$

$$=b+1$$

故 $a=b=1$. ✓

【例28】（2004年3） 若极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=\underline{5}$ ，则

$a=$____， $b=$____.

【解】 由于

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(\cos x-b)\xrightarrow{}0}{e^x-a\xrightarrow{}0}=\underline{5\neq0}$$

且 $\lim\limits_{x\to0}\sin x(\cos x-b)=0,$

$\lim\limits_{x\to0}(e^x-a)=0,$ 即 $a=1.$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\underline{e^x-a}}(\cos x-b)=\lim_{x\to0}\frac{\overset{x}{\sin x}}{\underset{x}{\underline{e^x-1}}}(\cos x-b)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}(\cos x-b)=1-b$$

由 $1-b=5$ 得， $b=-4.$

【例29】（1997年2） 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$ $\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}}$ ✓ ✓

2 −1 −0

$\sqrt{x^2}=|x|=-x$

【解1】 原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(-x)\left[\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}\right]}{(-x)\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}$

1

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=1$$

2 −1 −0 ✓

1

【解2】 原式 $\overset{*}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}}{\sqrt{x^2+\sin x}}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+\sin x}}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$ *

−1 + 0 = 1

$= 2-1+0=1$

2


还不关注，你就慢了