高数基础班（9）

主讲 武忠祥 教授

常考题型与典型例题

常考题型

基 1. 求函数的极值和最值，确定曲线的凹向和拐点；

2. 求渐近线；

较难 3. 方程的根；

4. 不等式的证明；

难 5. 中值定理证明题

(一)求函数的极值和最值及确定曲线的凹向和拐点

【例5】（2003年，1，2）设函数

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续， ✓

其导函数的图形右图所示，则

$f(x)$ 有

（A）一个极小值点和两个极大值点

（B）两个极小值点和一个极大值点

✓（C）两个极小值点和两个极大值点

（D）三个极小值点和一个极大值点

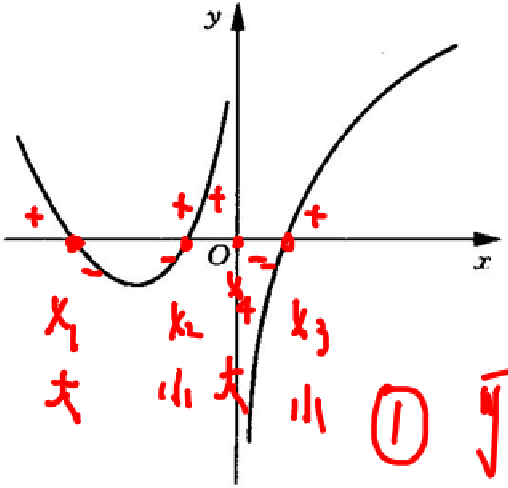


图 2—3

$f'(x)$ ✓

① 可能极值点 $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f'(x_0)\text{不存在} \end{cases}$

② 充分

【例6】(1990年1, 2) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且

$f(0)=0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$

$\neq 0$　　$\frac{1}{2}x^2$

(A) 不可导.　　(B) 可导，且 $f'(0)\neq 0$.

(C) 取得极大值.　　(D) 取得极小值.

【解1】直接法 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{1-\cos x}>0 \Rightarrow f(x)>0=f(0)$

①保号性
②极值定义

极小值,

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\neq 0$

【解2】排除法 令 $f(x)=x^2$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2}=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}\cdot x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$

【例】（2019年2,3）已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^{2x}, & x>0, \\ xe^{x}+1, & x\le 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的极值.

$e^{2x\ln x}\to e^{0}=1$

$f(0)=1$

$f'_-(0)=(xe^x+1)'\big|_{x=0}=(e^x+xe^x)\big|_{x=0}=1$

【解】 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{2x\ln x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x\ln x}{x}=\infty$

$f'(0)$不存在.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x^{2x}(\ln x+1), & x>0, \\ e^{x}(x+1), & x<0, \end{cases}$$

$x^{2x}=e^{2x\ln x}$

$(x^{2x})'=e^{2x\ln x}(2\ln x+2)$

令 $f'(x)=0$，则 $x=-1, x=\dfrac{1}{e}$.

$f(-1)=1-\dfrac{1}{e}$ $\quad f(\dfrac{1}{e})=e^{-\frac{2}{e}}$ $\quad$ 极小值

$f(0)=1$ $\quad$ ① f(x)在x=0连续. $\quad$ 极大值

② 定义

【例7】在半径为 R 的球中内接一直圆锥, 试求圆锥的最大体积. $(\frac{32}{81}\pi R^3)$

①目标函数 !!!

②

【解1】 $V=\frac{\pi}{3}x^2\left[R+\sqrt{R^2-x^2}\right]$ ✓

【解2】 $V=\frac{\pi h}{3}\left[R^2-(h-R)^2\right]$!!!

$=\frac{\pi}{3}h^2[2R-h]=\frac{\pi}{3}(2Rh^2-h^3)$

$\frac{dV}{dh}=\frac{\pi}{3}(4Rh-3h^2)=0$ $\quad h=\frac{4}{3}R$ 极大(唯一)

$=\frac{\pi}{3}h(4R-3h)$ $\Rightarrow$ 最大

$V_{max}=\frac{32}{81}\pi R^3$

【例8】（2018年2, 3）曲线 $y=x^2+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是 ____________.

① $f''(x)=0$

② $f''(x)$不存在

【解】 $y'=2x+\dfrac{2}{x},y''=2-\dfrac{2}{x^2}$,

$x=1$

令 $y''=0$ 得 $x=\pm 1,x=-1$（舍去），

拐点为 $(1,1)$, 又 $f'(1)=2+2=4$

$k=4$

则拐点处的切线方程是为 $y-1=4(x-1)$

即 $y=4x-3$

【例9】（2004年，2，3）设 $f(x)=|x(1-x)|$ ，则

（A）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（B）$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

√（C）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（B）$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

【解1】

$$f(x)=\begin{cases}-x(1-x), & x<0,\\ x(1-x), & x\geq 0.\end{cases}$$ 连续

$$f'(x)=\begin{cases}2x-1, & x<0,\\ 1-2x, & x>0.\end{cases}$$ √ $x=0$ 极小

$$f''(x)=\begin{cases}2, & x<0,\\ -2, & x>0.\end{cases}$$ 拐点

0

定义，$f(x)>0$ $f(0)=0$

【例9】（2004年, 2, 3）设 $f(x)=|x(1-x)|$ ，则

（A）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（B）$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

✓（C）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

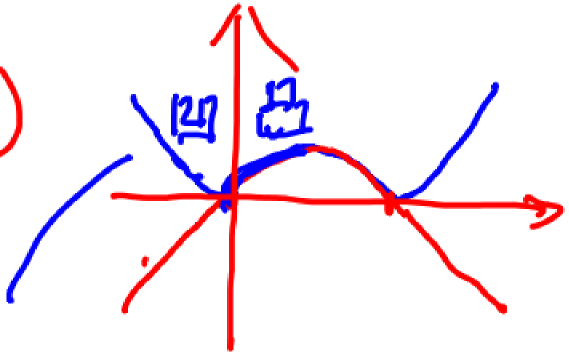
（B）$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

【解2】

几何意义 !!!

$y=x(1-x)$

$y=|x(1-x)|$



二．求渐近线

【例10】（2014年1，2）下列曲线中有渐近线的是（　）

（A）$y = x + \sin x$ 无　　（B）$y = x^2 + \sin x$

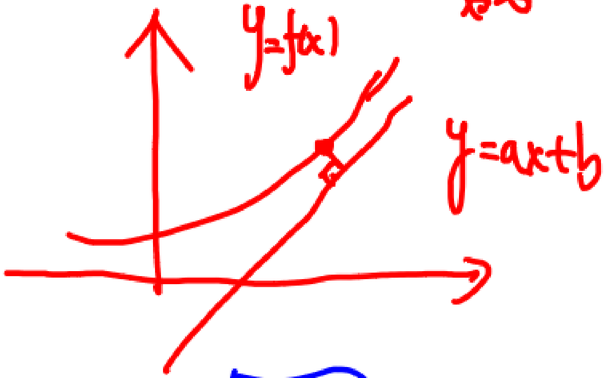
✓（C）$y = x + \sin\frac{1}{x}$　　（D）$y = x^2 + \sin\frac{1}{x}$

$\sin\frac{1}{x} \downarrow 0$

$y = x$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x} = 1 = a$

$\lim\limits_{x\to\infty}[y - x] = \lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在



$y = f(x) = \boxed{ax+b} + \alpha(x) \Rightarrow \boxed{y = ax+b}$

$\alpha(x) \to 0 \quad (x\to\infty)$

【例11】（2007年，1，2）曲线$y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$渐近线的条数为

（A）0.　（B）1.　（C）2.　（D）3.

$e^{\infty}\ne\infty$

[解] 1) 水平：$\lim\limits_{x\to-\infty} y=0$，至　$y=0$

$y=f(x)=ax+b+\alpha(x)$　$\alpha(x)\to 0$

垂直：$\lim\limits_{x\to 0} y=\infty$，　$x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\ln(1+e^{-x})}{x}=1$

斜：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{1}=1=a$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[y-ax]=\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(1+e^x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{1+e^x}{e^x}=0=b$　($\infty-\infty$)

$x+\ln(1+e^{-x})-x$

$y=x$

$*\ y=x+\ln(1+e^{-x})+\frac{1}{x}\longrightarrow 0$　$y=x$

【例12】（2017年2）曲线$y = x(1 + \arcsin\frac{2}{x})$ 的斜渐近线方程为

________________.

[$y = x + 2$]

[解1] $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\arcsin\frac{2}{x}\right) = 1 = a$

$\lim\limits_{x\to\infty}[y-ax] = \lim\limits_{x\to\infty} x\arcsin\frac{2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\frac{2}{x} = 2 = b$

$y = x + 2$

[解2] $y = \boxed{x+2} + \left[x\arcsin\frac{2}{x} - 2\right] \Rightarrow y = x+2$

$\downarrow$ 2 $\downarrow$ 0

【例】（2021年2）已知 $f(x)=\dfrac{x|x|}{1+x}$，求 $f(x)$的凹凸区间及渐近线.

$x=-1$ $\qquad$ -1

【解】当 $x>0$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}=x-1+\dfrac{1}{1+x}$，$f''(x)=\dfrac{2}{(1+x)^3}>0$， 凹

$-1+1$

当 $-1<x<0$ 时，$f(x)=\dfrac{-x^2}{1+x}=1-x-\dfrac{1}{1+x}$，$f''(x)=-\dfrac{2}{(1+x)^3}<0$， 凸

当 $x<-1$ 时，$f(x)=1-x-\dfrac{1}{1+x}$，$f''(x)=-\dfrac{2}{(1+x)^3}>0$， 凹

渐近线： $x=-1$. $\quad y=x-1, y=1-x,$

三．方程的根

$\boxed{f'(x)=}$ $f(x)=0$

【例13】（1992年5）求证：方程$x+p+q\cos x=0$ 恰有一个实根，其中 p,q 为常数，且 $0<q<1$.

$[a,b]$

一、存在性 $f(a)f(b)<0$

1) 零点定理

2) 罗尔定理

二、个数

单调性

[证] 令 $f(x)=x+p+q\cos x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

存在 $a<b$, $f(a)<0$, $f(b)>0$ $[a,b]$

$\Rightarrow$ 存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=0$

$f'(x)=1-q\sin x>0$, $f(x)\nearrow$.

$f(x)$ 有且仅一个零点.

【例14】设 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，求证：方程

$f(x)=$ $na_n x^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots 2a_2 x+a_1=0$

在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

$f(0)=a_1$

[证] $F(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+--+a_2x^2+a_1 x$

$[0,1]$ 连续，

$(0,1)$ 可导

$F(0)=0$ $\quad F(1)=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1=0$

$\Rightarrow$ 存在 $\xi\in(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$

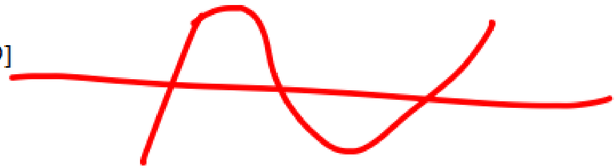
【例】(2019年3) 已知方程 $x^5-5x+k=0$ 有三个不同的实根，则 k 的取值范围是

A. $(-\infty,-4)$　　B. $(4,+\infty)$

C. $[-4,4]$　　D. $(-4,4)$

[D]

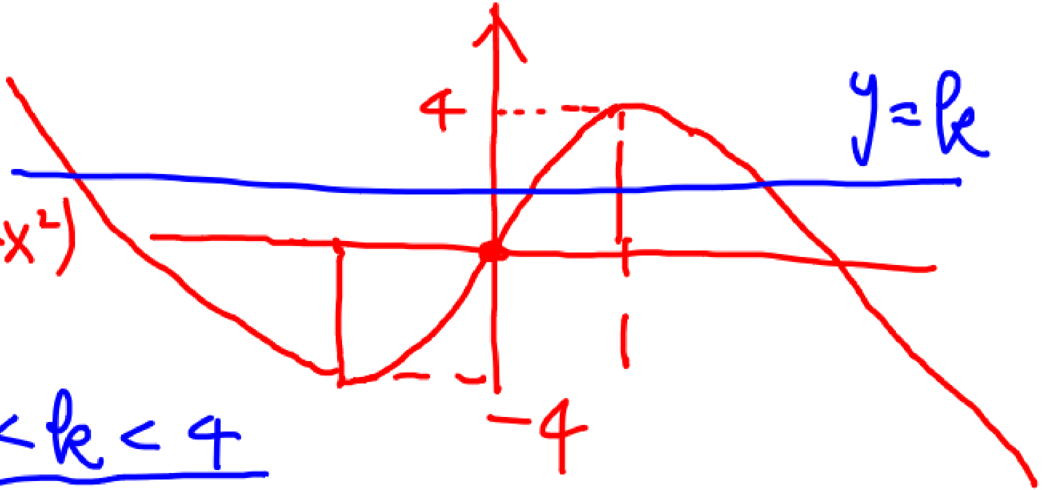
$y=k$



[解] $k=5x-x^5$

令 $f(x)=5x-x^5$. 奇.

$f'(x)=5-5x^4=5(1+x^2)(1-x^2)$



$-4<k<4$

四．不等式的证明

【例15】证明：$\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.(x>0)$

$f(x) = \ln x$

$\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) - \ln 1 = \dfrac{x}{\xi} < x$

$[1, 1+x]$

① 拉.

$f(b) - f(a)$

$|\sin b - \sin a| \leq |b-a|$

【例16】(1991年, 3) 利用导数证明：当 $x>1$ 时

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln x} > \frac{x}{1+x}.$$

$f(x) > 0$

$[a, b]$

$(x+1)\ln(1+x) > x\ln x$

$f(x+1)$ $f(x)$

$f(x)$ ↗

令 $f(x) = x\ln x.$

$f'(x) = \ln x + 1 > 0$

$f(a)=0$ $f(x)$ ↗

$f(b)=0$ $f(x)$ ↘

② 单

【例17】（2012年1, 2, 3）证明：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\dfrac{x^2}{2}\,(-1<x<1)$.

【证】令 $f(x)=x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-\dfrac{x^2}{2}-1\qquad(-1<x<1)$

对称美

显然 $f(x)$ 是偶函数，所以是要证 $f(x)\geq 0\ (0\leq x<1)$.

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x$$

$f(0)=0$

$$\geq 2x-\sin x-x\ =x-\sin x\geq 0$$

$\sin x<x<\tan x$

则 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调增，又 $f(0)=0$,

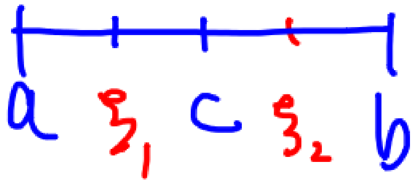
$x\in(0,\frac{\pi}{2})$

则 $f(x)\geq 0\ (0\leq x<1)$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

五．中值定理证明题

【例18】设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上二阶可导，且 $f(a)=f(b)=f(c)\,(a<c<b)$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)=0$.



[证] 由 $f(a)=f(b)=f(c)$，知

$\exists\,\xi_1\in(a,c)$，使 $f'(\xi_1)=0$

$\exists\,\xi_2\in(c,b)$，使 $f'(\xi_2)=0$

$f'(x)$

$\exists\,\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使 $f''(\xi)=0$

【例19】（1990年1, 2） 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)>0$.

拉.

$f(x)$　$f'(x)$

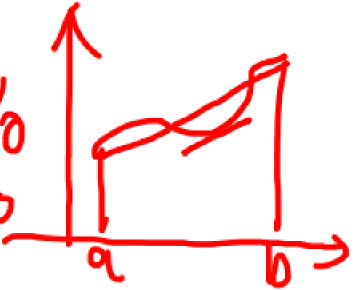
[证]. 存在 $c\in(a,b)$, $f(c)\neq f(a)$. 不妨设

$f(c)>f(a)$

$\exists\,\xi\in(a,c)$, 使 $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(\xi)>0$

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)>0$

<0



【例20】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$, 且存在 $c\in(a,b)$ 使 $f(c)<0$. 试证：$\exists\xi,\eta\in(a,b)$, $f'(\xi)<0, f''(\eta)>0$.

$f'(x)$

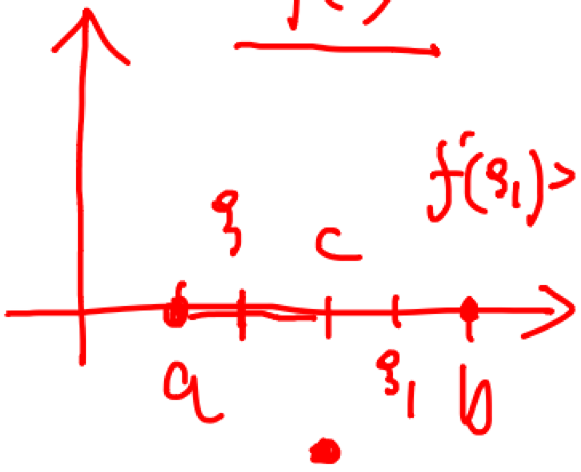
【证】 $\exists \xi\in(a,c)$；使

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(\xi)<0$$

$\exists \xi_1\in(c,b)$，使 $\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}=f'(\xi_1)>0$

$\exists \eta\in(\xi,\xi_1)$，使 $\dfrac{f'(\xi_1)-f'(\xi)}{\xi_1-\xi}=f''(\eta)>0$

$f'(\xi_1)>0$



【例21】（2013年3）设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $f(0)=0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$. 证明：

（1）存在 $a>0$，使得 $f(a)=1$；

（2）对(1)中的 a，存在 $\xi\in(0,a)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$. $= \dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}$

$f(0)<1<f(A)$

[证] (1) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$，则存在 $A>0$，$f(A)>1$，$[0,A]$

$\exists a\in(0,A)$，使 $f(a)=1$.

(2) $\dfrac{1}{a}=\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}=f'(\xi)$　　$\xi\in(0,a)$

$\exists \xi\in(0,a)$

$F'(\xi)=0$

$F(0)=f(0)=0$

$f'(\xi)-\dfrac{1}{a}=0$　　令 $F(x)=f(x)-\dfrac{x}{a}$，

$F(a)=f(a)-1=0$