第二部分 线性代数

第一章 行列式

1987 ～ 2008 本章考题考点分布统计表

考点	考频	考题分布与分值			
数字型行列式的计算	2	1999,二(5)题 3分	2008,22题 6分		
抽象型行列式的计算	5	2003,一(6)题 4分 2008,14题 4分	2004,6题 4分	2005,6题 4分	2006,6题 4分

本章导读

本章从1999年开始有考题.历年来单纯考行列式的考题不多.分值也不高,相对重要的是抽象型行列式的计算.另一方面大家要注意如何通过行列式的计算来帮助回答矩阵、向量、方程组、特征值、二次型等问题,即行列式的应用.

真题分类练习

一阶题,相对容易,推荐先做　　二阶题,较综合,可在第二轮复习时做

说明:数学二是1997年开始考线性代数的,大纲称其为“线性代数初步”,涉及行列式、矩阵、向量、方程组四章,试题3～4题,约16分.2003年增加特征值,试题5个约30分.2007年大纲把“线性代数初步”取消,内容上又增加了二次型,试题5个约34分.2020年大纲线代部分改为4个小题,每题5分,1个大题,约12分,5个试题约32分.

目前,数学一、数学二、数学三线性代数大纲要求基本一样.考题几乎完全相同.数学二由1997～2008年的线代考题组成,题目数量明显不够,数学二同学一定要认真做练习题,搞清考研的题型、方法和技巧.

一、数字型行列式的计算

试题特点

对于数字型行列式的计算主要是用按行、按列展开公式，但在展开之前往往先运用行列式性质对其作恒等变形，以期某行或某列有较多的零元素，这时再展开可减轻计算量. 同时，也要注意一些特殊公式，如上(下)三角、范德蒙行列式、拉普拉斯展开式的运用.

计算行列式时，一些常用的技巧有：把第一行的 k_i 倍加至第 i 行，把每行都加到第一行，逐行相加……

1 (1999，二(5)题，3分) 记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)4.

答题区

2 (2008，22题，6分)(局部)　设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{bmatrix}_{n\times n},\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$.

答题区

解题加速度

1.(2001,数四,3 分) 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$,则第 4 行各元素余子式之和的值为 ______.

演算空间

2.(1991,数四,3 分) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$.

演算空间

二、抽象型行列式的计算

试题特点

对于抽象型行列式的计算,有可能考查行列式性质的理解、运用,有可能涉及矩阵的运算,也可能用特征值、相似等处理.这一类题目往往综合性强,涉及知识点多.因此,考生复习时要注意知识的衔接与转换,如果内在联系把握得好,解题时的思路就灵活.这一类题目计算量一般不会太大.

3 (2003,一(6)题,4分)设三阶方阵 A,B 满足 $A^2B-A-B=E$,其中 E 为3阶单位矩阵,若 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$,则 $|B|=$ ________.

答题区

4 (2004,6题,4分)设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$,其中 A^* 为 A 的伴随矩阵,E 是单位矩阵,则 $|B|=$ ________.

答题区

5 (2005,6题,4分)设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为三维列向量,记矩阵

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$$

如果 $|A|=1$,那么 $|B|=$ ________.

答题区

6 (2006,6题,4分)设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}$,$E$ 为二阶单位矩阵,矩阵 B 满足 $BA=B+2E$,则 $|B|=$ ________.

答题区

7 (2008,14 题,4 分) 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,3,\lambda$. 若行列式 $|2\boldsymbol{A}|=-48$,则 $\lambda=$ ________.

答题区

解题加速度

1. (1992,数三,3 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵,且 $|\boldsymbol{A}|=a$,$|\boldsymbol{B}|=b$,$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$,则 $|\boldsymbol{C}|=$ ________.

演算空间

2. (2000,数四,3 分) 已知四阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,3,4,5$,$\boldsymbol{E}$ 为四阶单位矩阵,则 $|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}|=$ ________.

演算空间