高数基础班（13）

13	反常积分举例（敛散性；计算），定积分应用（几何；物理）	P104-P111

主讲 武忠祥 教授

还不关注，你就慢了

常考题型与典型例题

常考题型

1. 反常积分敛散性

2. 反常积分计算

（一）反常积分的敛散性

【例3】（2015年2）下列反常积分中收敛的是（ ） 定

①定义.
②比较法:
③p积分.

（A）$\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx.$ 发 ①定 ②p

（B）$\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx.$ 发 $d\ln$ $=\frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_2^{+\infty}=+\infty$

（C）$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx.$ 发 $=\ln\ln x\Big|_2^{+\infty}=+\infty$ 定

（D）$\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx.$ 收 ①定 ②比

$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$

【解】(A) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\Big|_2^{+\infty}=+\infty$ 发

$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$ $p=\frac{1}{2}\leq 1$ 发

(D) $\int_2^{+\infty}xe^{-x}dx=-\int_2^{+\infty}x\,de^{-x}=-xe^{-x}\Big|_2^{+\infty}+\int_2^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_2^{+\infty}$

$\frac{x}{e^x}\leq\frac{x}{x^3}=\frac{1}{x^2}$ 比: $e^x\geq x^3$ $\frac{x}{e^x}\to 0$ $(x\to+\infty)$

【例4】（2013年2）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<e,\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\geq e.\end{cases}$

若反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则

（A） $\alpha<-2$. （B） $\alpha>2$.

（C） $-2<\alpha<0$. （D） $0<\alpha<2$.

【解】 $\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^e\frac{dx}{(x-1)^{\alpha-1}}+\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^{\alpha+1}x}$

$d\ln x$ $\xlongequal{\ln x=t}\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{\alpha+1}}$ $p>1$

$\Rightarrow \alpha-1<1$

$\Rightarrow \alpha<2$

$\Rightarrow \alpha+1>1$

$\Rightarrow \alpha>0$

【例5】（2016年2）反常积分 $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx,\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ 的敛散性为（　）

（A）收敛，收敛.　　　　（B）收敛，发散.

（C）发散，收敛.　　　　（D）发散，发散.

$(-\infty,0]$

【解】

$x\to 0^-$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_{-\infty}^{0}=0+1=1 \quad \text{收}$$

"e^{∞}"

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_{0}^{+\infty}=-1+(+\infty)=\infty \quad \text{发}$$

$x\to 0^+$

$[0,+\infty)$

【例6】（2016年1）反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$ 收敛，则（　　）

（A） $a<1,b>1$.　　（B） $a>1,b>1$.

（C） $a<1,a+b>1$.　　（D） $a>1,a+b>1$.

$\int_0^1\frac{1}{x^p}dx$　　$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$　　$p>1$ 收敛.

【解】 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx=\int_0^1\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$

$a<1$

$\frac{1}{x^{a+b}},\ >1$

$\frac{1}{x^{a+b}(1+\frac{1}{x})^b}$

$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x^a(1+x)^b}}{\frac{1}{x^a}}=1$　　$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^a(1+x)^b}}{\frac{1}{x^{a+b}}}=1$

$\Rightarrow a<1$　　$\Rightarrow p=a+b>1$

（二）反常积分的计算

$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$

【例7】（2000年，2） $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}} =$ ________. $[\frac{\pi}{3}]$

① 换元

$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\sqrt{x}$ ② 分部

【解1】令 $\sqrt{x-2}=t$， $x-2=t^2$

原式 $= \int_0^{+\infty} \frac{2t}{t(t^2+9)}dt = 2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{9+t^2}$ $= \frac{\pi}{3}$

$= \frac{2}{3}\arctan\frac{t}{3}\Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{3}\left[\frac{\pi}{2}-0\right]$

$\boxed{\int\frac{dx}{a^2+x^2}}$ $= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

【解2】

原式 $= \int_2^{+\infty}\frac{2d\sqrt{x-2}}{9+(\sqrt{x-2})^2} = \frac{2}{3}\arctan\frac{\sqrt{x-2}}{3}\Big|_2^{+\infty} = \frac{2}{3}\left[\frac{\pi}{2}-0\right] = \frac{\pi}{3}$

【例8】（2000年4）计算 $I=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}$ ✓ $\left(\frac{\pi}{4\mathrm{e}}\right)$

【解】 $I \stackrel{*}{=} \int_1^{+\infty}\frac{e^x\,dx}{e^{2x}+e^2} = \int_1^{+\infty}\frac{de^x}{e^2+(e^x)^2}$

$= \frac{1}{e}\arctan\frac{e^x}{e}\Big|_1^{+\infty}$

$= \frac{1}{e}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{4e}$

【例9】（2013年，1，3）$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$ ________. (ln 2)

【解】

分部

$$\text{原式}=-\int_1^{+\infty}\ln x\, d\frac{1}{1+x}$$

$$=-\frac{\ln x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1+x-x}{x(1+x)}dx$$

$\ln x-\ln(1+x)$

$$=\ln\frac{x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}=0-\ln\frac{1}{2}$$

$$=\ln 2$$

第六章　定积分应用

本节内容要点

一. 考试内容概要

（一）几何应用

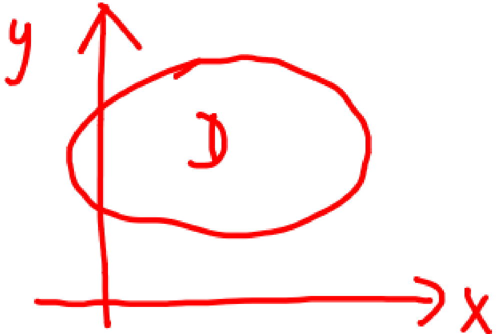
（二）物理应用

二. 常考题型与典型例题

题型一　几何应用

题型二　物理应用

（一）几何应用



$$\boxed{\iint_D 1\, d\sigma = S}$$

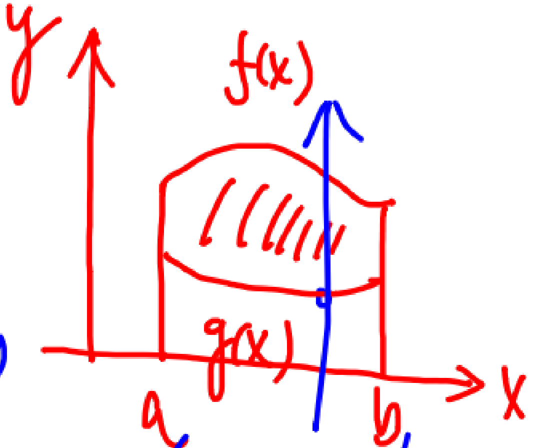
1. 平面图形的面积

（1）若平面域 D 由曲线 $y=f(x), y=g(x)(f(x)\geq g(x))$,

$x=a$，$x=b$ $(a<b)$ 所围成，则

$$\boxed{S=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx}$$

$$S=\iint_D 1\, d\sigma=\int_a^b dx\int_{g(x)}^{f(x)} dy$$



（2）若平面域 D 由曲线 $\rho=\rho(\theta), \theta=\alpha, \theta=\beta(\alpha<\beta)$

所围成，则

$$\boxed{S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta}$$

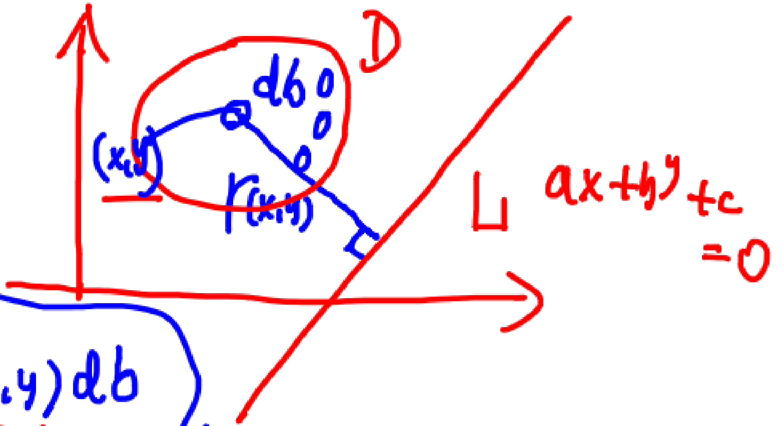
$$S=\iint_D d\sigma \qquad d\sigma=\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{\rho(\theta)}\rho\, d\rho$$

2. 旋转体体积

若平面域 D 由曲线 $y=f(x),(f(x)\ge 0)$,

$x=a, x=b\,(a<b)$ 所围成，则



$$dV = 2\pi r(x,y)\,d\sigma$$

$$\boxed{V = 2\pi \iint_D r(x,y)\,d\sigma}$$

$$r(x,y) = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

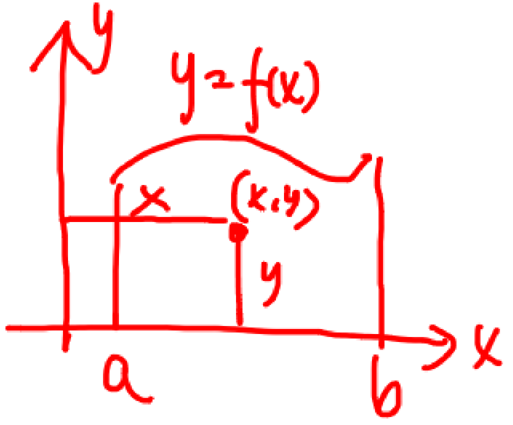
1）区域 D 绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体积为

$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$V_x = 2\pi\iint_D y\,d\sigma = 2\pi\int_a^b dx\int_0^{f(x)} y\,dy = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

2）区域 D 绕 y 轴旋转一周所得到的旋转体积为

$$V_y = 2\pi\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x$$



$$V_y = 2\pi\iint_D x\,d\sigma = 2\pi\int_a^b dx\int_0^{f(x)} x\,dy = 2\pi\int_a^b x f(x)\,dx$$

3. 曲线弧长（数三不要求）

ds

1) $C: y=y(x)$, $a \le x \le b$. $s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$

$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$

2) $C:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$. $s=\int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$

(dx)

3) $C: \rho=\rho(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$. $s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta$

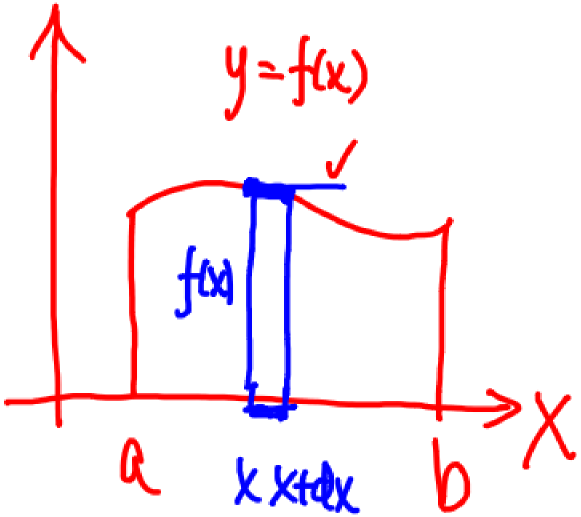
ds

4. 旋转体侧面积（数三不要求）

$y(t)\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

ds



（二）物理应用（数三不要求）

$2\pi\int_\alpha^\beta \rho \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta$

1. 压力； 2. 变力做功； 3. 引力。

重点

$2\pi f(x)$ dx ? ds

常考题型与典型例题

常考题型

1.几何应用

2.物理应用

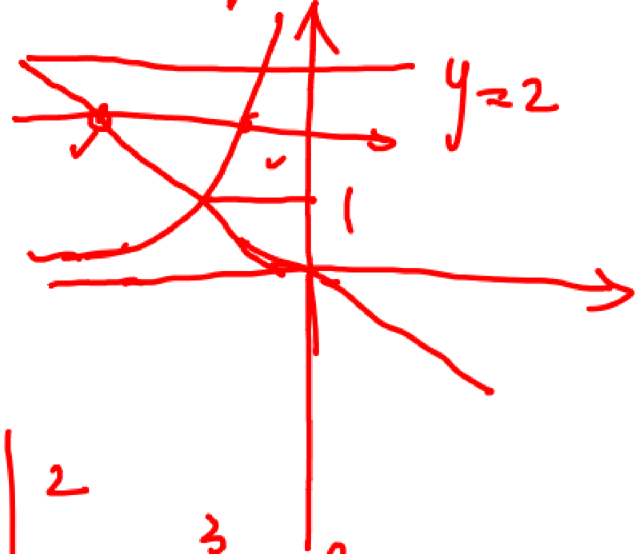
（一） 几何应用

$xy=-1$　　$-y^2=-1$　　$y^2=1$

【例1】（2014年, 3）设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域，则 D 的面积为 ____ $(\frac{3}{2}-\ln 2)$

$y=-x$

$y+x=0$



【解】 $S=\iint\limits_D 1\,d\sigma$

$$=\int_1^2 dy\int_{-y}^{-\frac{1}{y}} dx$$

$$=\int_1^2\left(y-\frac{1}{y}\right)dy=\left(\frac{1}{2}y^2-\ln y\right)\Big|_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2$$

【例2】(2013年, 2) 设封闭曲线 L 的极坐标方程为

$r=\cos 3\theta\,(-\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{6})$, 则 L 所围平面图形的面积是 ____.

【解1】 $S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\, d\theta=\underline{\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\, d\theta}$

$\overset{*}{=}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 6\theta)d\theta=\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{6}\sin 6\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$

$=\frac{\pi}{12}$

【解2】 $S=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\, d\theta$

$\xlongequal{3\theta=t}\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\, dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{12}$

$*$

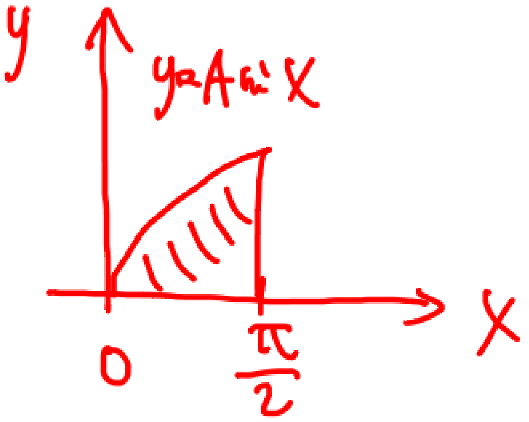
【例3】（2015年2, 3）设 $A>0, D$ 是由曲线段 $y=A\sin x\,(0\le x\le\frac{\pi}{2})$ 及直线 $y=0, x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域，V_1, V_2 分别表示 D 绕 x 轴与 y 轴旋转所成旋转体的体积. 若 $V_1=V_2$，求 A 的值. $[V_1=\frac{\pi^2}{4}A^2, V_2=2\pi A, A=\frac{8}{\pi}]$

【解】

$$V_1=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}A^2\sin^2 x\,dx=\pi A^2\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2A^2}{4}$$

$$V_2=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}xA\sin x\,dx=2\pi A\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\boxed{\sin x\,dx}$$

$$=2\pi A.$$



$V_1=V_2 \Rightarrow A=\frac{8}{\pi}$

【例4】(2012年，数二) 过点 $(0,1)$ 作曲线 $L: y=\ln x$ 的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 围成. 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积. $[S=2;V=\frac{2\pi}{3}(e^2-1)]$

$\frac{1}{x}$

【解1】设切点为 (x_0,y_0), 则切线方程为 $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$

$1-\ln x_0=-1 \quad 2=\ln x_0 \quad x_0=e^2 \quad y=\ln x$ ✓

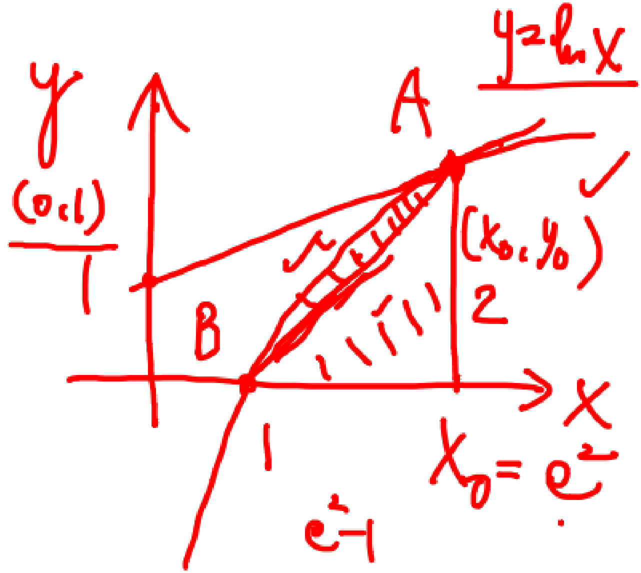
【解2】设过点 $(0,1)$ 的线方程为 $y-1=kx$, $\quad y=1+kx$ ✓

$$\begin{cases} \ln x = 1+kx \\ \frac{1}{x}=k \end{cases} \Rightarrow \ln x=2,\ x=e^2,\ k=e^{-2}$$

$$S=\int_1^{e^2}\ln x\,dx-\frac{1}{2}e^2\cdot 2 = 2$$

(e^2-1) ✓

$$V=\pi\int_1^{e^2}\ln^2 x\,dx-\frac{\pi}{3}\cdot 4\cdot(e^2-1) = \frac{2\pi}{3}(e^2-1)$$ ✓



【例5】（2011年1，2）曲线 $y=\int_0^x \tan t dt(0\le x\le \frac{\pi}{4})$ 的弧长

$s=$ ________.

$[\ln(1+\sqrt{2})]$

$y=y(x)$

【解】

$$s \overset{*}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2 x}\, dx \qquad y'=\tan x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x\, dx = \ln(\overset{\sqrt{2}}{\sec x}+\overset{1}{\tan x})\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \ln(1+\sqrt{2})$$

（二） 物理应用

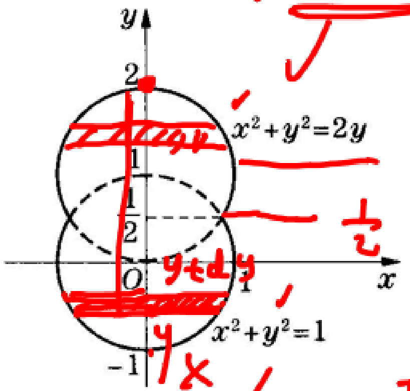
【例6】（2011年2）一容器的内侧是由图中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面，该曲线由 $x^2+y^2=2y\left(y\ge\frac{1}{2}\right)$ 与 $x^2+y^2=1\left(y\le\frac{1}{2}\right)$ 连接而成.

（I）求容器的容积；

（II）若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出，至少需要做多少功？

（长度单位：m，重力加速度为$g\,\mathrm{m/s^2}$，水的密度为$10^3\mathrm{kg/m^3}$）

$$\boxed{\text{位移}\cdot g\cdot\rho\cdot dV}$$



$\pi x^2 dy$

$\frac{1}{2}$

$=\pi(2y-y^2)dy$

$\pi x^2 dy=\pi(1-y^2)dy$

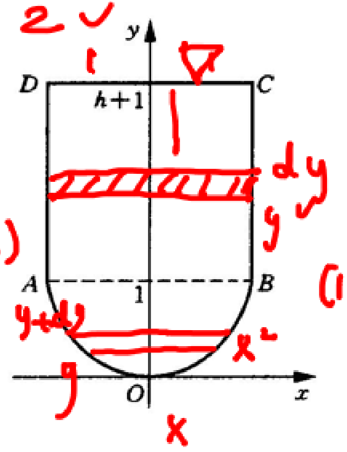
$2-y$

$g\cdot10^3\cdot\pi(1-y^2)dy$

【解】 $V=2\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}x^2\,\mathrm{d}y=2\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)\,\mathrm{d}y=\dfrac{9\pi}{4}.$

$$W=10^3\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\pi(1-y^2)(2-y)g\,\mathrm{d}y+10^3\int_{\frac{1}{2}}^{2}\pi[2y-y^2](2-y)g\,\mathrm{d}y=\frac{27}{8}\pi\rho g$$

【例7】（2002年2）某闸门的形状与大小如图所示，其中 y 轴为对称轴，闸门的上部为矩形 $ABCD$，DC=2m，下部由二次抛物线与线段 AB 所围成，当水面与闸门的上端相平时，欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为5：4，闸门矩形部分的高 h 应为多少



$A = 2x\,dy$

$= 2\sqrt{y}\,dy$

压力

$p = g\rho(h+1-y)$

$dP = g\rho(h+1-y)\cdot 2dy$

压强 $p = g\rho h$

压力 $P = p\cdot A$

$p = g\rho(h+1-y)$

$dP = g\rho(h+1-y)\cdot 2\sqrt{y}\,dy$

【解】 $$P_1 = 2\int_1^{h+1}\rho g(h+1-y)\,\mathrm{d}y = 2\rho g\left[(h+1)y - \frac{y^2}{2}\right]_1^{h+1} = \rho g h^2,$$

$$P_2 = 2\int_0^1 \rho g(h+1-y)\sqrt{y}\,\mathrm{d}y = 2\rho g\left[\frac{2}{3}(h+1)y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$

$$= 4\rho g\left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{15}\right).$$

$$\frac{h^2}{4\left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{15}\right)} = \frac{5}{4}.$$

$h = 2$ $\quad h = -\frac{1}{3}$