

第五章 二重积分

1987 ~ 2008 本章考题考点分布统计表

考点	考频	考题分布与分值		
二重积分的概念、性质与基本计算	2	2004, 12 题 4 分	2008, 6 题 4 分	
利用区域的对称性及函数的奇偶性计算积分	3	1991, 二(4) 题 3 分	2005, 10 题 4 分	2006, 17 题 10 分
分块函数积分的计算	3	2005, 21 题 9 分	2007, 22 题 11 分	2008, 18 题 11 分
交换积分次序及坐标系	2	2006, 11 题 4 分	2007, 8 题 4 分	


本章导读


本章考查的重点是二重积分的计算,除了掌握基本的计算方法,需注意对称性、拆分区域、拆分函数、交换积分次序、交换积分坐标系等的应用.

试题特点

从 2004 年起增加的二重积分的内容,是数学二重要的考试知识点,每年试题一般是一个大题、一个小题,分数约占总分的 9%,主要集中在二重积分计算的考查,往往在被积函数和积分区域设置障碍,因而要掌握一定的方法和技巧.另外,被积函数为抽象函数的二重积分也值得关注.

真题分类练习

 一阶题,相对容易,推荐先做

 二阶题,较综合,可在第二轮复习时做

一、二重积分的概念、性质与基本计算

1 (2004, 12 题, 4 分) 设函数 $f(u)$ 连续, 区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2y\}$, 则

$\iint_D f(xy) dx dy$ 等于

(A) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(xy) dy.$

(B) $2 \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(xy) dx.$

(C) $\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2 \sin\theta \cos\theta) dr.$

(D) $\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2 \sin\theta \cos\theta) r dr.$

答题区

2 (2008, 6 题, 4 分) 设 $f(x)$ 连续, 若 $F(u, v) = \iint_{D_w} \frac{f(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$, 其中区域 D_w 为图中

阴影部分, 则 $\frac{\partial F}{\partial u} =$

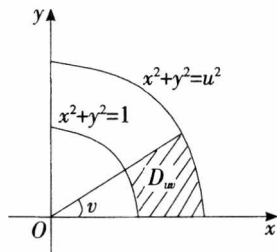
(A) $vf(u^2).$

(B) $\frac{v}{u} f(u^2).$

(C) $vf(u).$

(D) $\frac{v}{u} f(u).$

答题区



二、利用区域的对称性及函数的奇偶性计算积分



3 (1991, 二(4)题, 3分) 设 D 是 xOy 平面上以 $(1, 1)$, $(-1, 1)$ 和 $(-1, -1)$ 为顶点的三角形区域, D_1 是 D 的第一象限的部分, 则 $\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy$ 等于

(A) $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy.$

(B) $2 \iint_{D_1} xy dx dy.$

(C) $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy.$

(D) 0.

答题区



4 (2005, 10题, 4分) 设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数, a, b 为常数, 则 $\iint_D \frac{a \sqrt{f(x)} + b \sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma =$

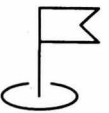
(A) $ab\pi.$

(B) $\frac{ab}{2}\pi.$

(C) $(a+b)\pi.$

(D) $\frac{a+b}{2}\pi.$

答题区

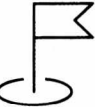


5 (2006, 17题, 10分) 设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, 计算二重积分 $\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy.$

答题区




三、分块函数积分的计算

 **6** (2005, 21 题, 9 分) 计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$, 其中

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

答题区

 **7** (2008, 18 题, 11 分) 计算 $\iint_D \max(xy, 1) dz dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

答题区



8 (2007, 22 题, 11 分) 设二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1, \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 < |x| + |y| \leq 2, \end{cases}$ 计算二

重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 2\}$.

答题区

四、交换积分次序及坐标系



9 (2006, 11 题, 4 分) 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 等于

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$

(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$

(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$

答题区



10 (2007, 8 题, 4 分) 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$ 等于

(A) $\int_0^1 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx.$

(B) $\int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx.$

(C) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx.$

(D) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx.$

答题区

