高数基础班（5）

5	无穷小量阶的比较举例；函数连续性及常考题型举例	P33-P41

主讲 武忠祥 教授

三、无穷小量阶的比较

【例44】（2005年2）当 $x \to 0$ 时，$\alpha(x) = kx^2$ 与

$\beta(x) = \sqrt{1 + x\arcsin x} - \sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $k =$ ______.

【解1】
$$1 = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1 + x\arcsin x} - \sqrt{\cos x}}{kx^2}$$

$$= \frac{1}{k}\lim_{x\to 0}\frac{1 + x\arcsin x - \cos x}{x^2[\sqrt{1 + x\arcsin x} + \sqrt{\cos x}]} \qquad \text{（有理化）}$$

$$= \frac{1}{2k}\lim_{x\to 0}\frac{1 + x\arcsin x - \cos x}{x^2}$$

$\frac{1}{2}x^2$

$$= \frac{1}{2k}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x\arcsin x}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{x^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2k}\left[1 + \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4k} \qquad \text{则} \quad k = \frac{3}{4}.$$

【例44】（2005年2）当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与

$$\boxed{1-\cos^{\alpha} x \sim \frac{\alpha}{2}x^2}$$

$\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $k=$ ______.

【解2】 $1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^2}$

$f(x)=\sqrt{x}$

$$\boxed{(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x}$$

拉

$$=\frac{1}{k}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{\xi}}[1-\cos x+x\arcsin x]}{x^2}=\frac{1}{2k}\left[\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{x\arcsin x}{x^2}\right]=\frac{1}{2k}\left[\frac{1}{2}+1\right]$$

【解3】 $1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^2}$

$\alpha=\frac{1}{2}$

$k=\frac{3}{4}$

等

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x\arcsin x}-1)-(\sqrt{\cos x}-1)}{kx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{2}x^2)-(-\frac{1}{4}x^2)}{kx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{4}x^2}{kx^2}$$

【例45】(2001年2) 设当 $x \to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4

【解】

等价

$$(1-\cos x)\ln(1+x^2) \sim \frac{1}{2}x^2 \cdot x^2 = \frac{1}{2}x^4$$

$$x\sin x^n \sim x \cdot x^n = x^{n+1}$$

$$e^{x^2}-1 \sim x^2$$

$$2 < n+1 < 4$$

$$n+1 = 3$$

$$n=2$$

【例46】（2014年2）当 $x \to 0^+$ 时，若 $\ln^{\alpha}(1+2x), (1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$

均是比 x 高阶的无穷小，则 α 的取值范围是

（A）$(2,+\infty)$　　　　√（B）$(1,2)$

（C）$(\frac{1}{2},1)$　　　　（D）$(0,\frac{1}{2})$

等价

【解】

$\ln^{\alpha}(1+2x) \sim (2x)^{\alpha} = 2^{\alpha} x^{\alpha}$　　$\alpha > 1$ √

$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}} \sim \left(\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} x^{\frac{2}{\alpha}}$　　$\frac{2}{\alpha} > 1 \Rightarrow \alpha < 2$

$1 < \alpha < 2$

【例47】（2016年2）设

$$\alpha_1 = x(\cos\sqrt{x}-1), \alpha_2 = \sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x}), \alpha_3 = \sqrt[3]{x+1}-1.$$

当 $x \to 0^+$ 时，以上3个无穷小量从低阶到高阶的排序是

①排序
②最高（低）阶

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.　　　　（B）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$.

（C）$\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$.　　　　（D）$\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$.

①两两比
②求阶

【解】

$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$

$\alpha_1 = x(\cos\sqrt{x}-1) \sim -\frac{1}{2}x^2$　　2阶

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

$\alpha_2 = \sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x}) \sim \sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{6}}$　　$\frac{5}{6}$阶

$\alpha_3 = \sqrt[3]{1+x}-1 \sim \frac{1}{3}x$　　等价　　1阶

【例48】（2023年1，2）当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x)=ax+bx^2+\ln(1+x)$ 与 $g(x)=e^{x^2}-\cos x$ 是等价无穷小，则 $ab=$ ________.

【解1】由题设知 $1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax+bx^2+\ln(1+x)}{e^{x^2}-\cos x}$ $\boxed{\frac{0}{0}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax+bx^2+\left[x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right]}{\left[1+x^2+o(x^2)\right]-\left[1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right]}$$ 2阶

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\underbrace{a+1}_{=0})x+(\underbrace{b-\frac{1}{2}}_{=\frac{3}{2}})x^2+o(x^2)}{\dfrac{3}{2}x^2}$$

则 $a=-1, b=2$. 故 $ab=-2$.

【例48】（2023年1，2）当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x) = \overset{ax}{ax} + \boxed{bx^2} + \ln(1+\overset{x}{x})$　2阶

与 $g(x) = e^{x^2} - \cos x$ 是等价无穷小，则 $ab =$ ________.

$a \neq -1$

【解2】 $g(x) = e^{x^2} - \cos x = (e^{x^2} - 1) - (\cos x - 1) \sim (x^2) - (-\frac{1}{2}x^2) = \frac{3}{2}x^2$　2阶

$a = -1$

$b - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$bx^2 - \frac{1}{2}x^2 \sim \frac{3}{2}x^2$

$f(x) = bx^2 + [\ln(1+x) - x]$

$$b - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$b = 2$

$ab = -2$

第三节　函数的连续性

本节内容要点

一. 考试内容概要

（一）连续性的概念

（二）间断点及其分类

（三）连续性的运算与性质

（四）闭区间上连续函数的性质

二. 常考题型与典型例题

题型一 讨论函数连续性及间断点的类型

题型二 有关闭区间上连续函数性质的证明题

第三节 函数的连续性

考试内容概要

(a, b)

$[a, b]$

（一）连续性的概念

定义1 若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0.$

则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续.

定义2 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ 则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续.

定义3 若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ 则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ 则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

定理 $f(x)$ 连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 左连续且右连续

定义4 区间上的连续

【例1】（2017年1, 2, 3）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\le 0.\end{cases}$

左连续

在 $x=0$ 处连续，则（　）

（A）$ab=\dfrac{1}{2}$.　　（B）$ab=-\dfrac{1}{2}$.

（C）$ab=0$.　　（D）$ab=2$.

【解】

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x}{ax}=f(0)=b$$

$$=\frac{1}{2a}=b \Rightarrow ab=\frac{1}{2}$$

【例2】(1994年3) 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$

在 $(-\infty,+\infty)$ 处连续，则 $a=$ ________. [−2]

【解】

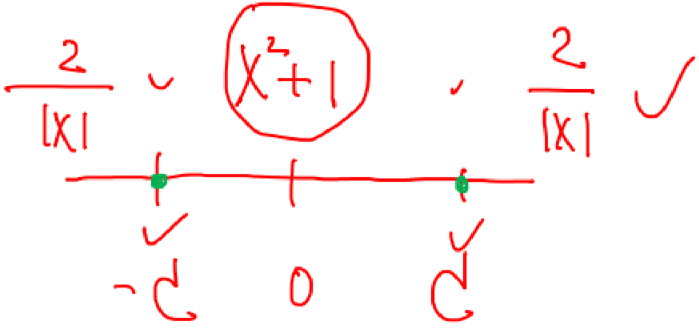
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{2ax}-1}{x}=2+2a=f(0)=a$$

$$a=-2$$

【例3】(2008年3) 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & |x|\le C, \\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>C \end{cases}$，在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $C=$ ___1___.

[1]

$\boxed{\text{对称美}}$ $\boxed{\text{偶}}$



【解】

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^-}(x^2+1) = c^2+1$$

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^+}\frac{2}{x} = \frac{2}{c}$$

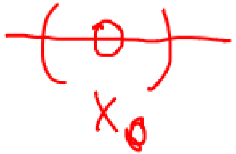
$$f(c) = c^2+1$$

$$2 = c^3+c \qquad c^3+c-2=0 \qquad \boxed{c=1}$$

$$c^3-1+(c-1)=0 \qquad (c-1)\underbrace{[c^2+c+2]}^{\neq 0}=0$$

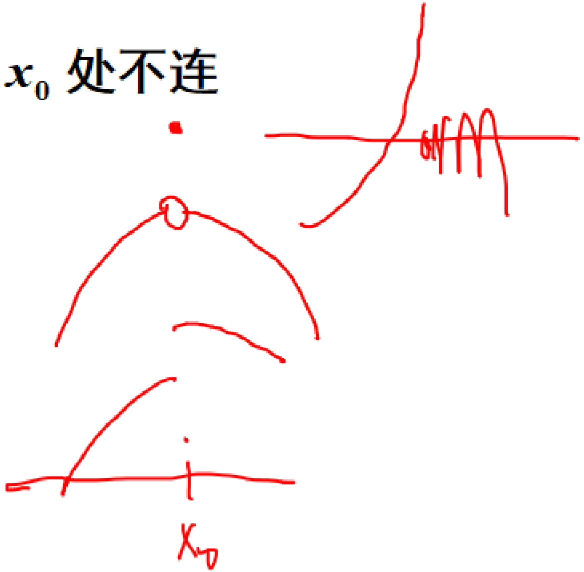
(二）间断点及其分类

1. 间断点的定义



$\ln x$

$\boxed{x=-1}$



定义5 若 $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域有定义，但在 x_0 处不连续，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**间断点**。

2. 间断点的分类

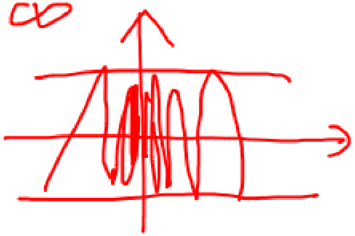
1）**第一类间断点**：左, 右极限均存在的间断点

可去间断点： 左极限 = 右极限

跳跃间断点： 左极限 ≠ 右极限

2）**第二类间断点**：左, 右极限中至少有一个不存在

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$



无穷间断点　　　　振荡间断点

$\frac{1}{x}$, $x=0$　　　　$\sin\frac{1}{x}$ $x=0$　　$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在

【例4】(2008年2) 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$ 有（ ）

(A) 1个可去间断点，1个跳跃间断点

(B) 1个可去间断点，1个无穷间断点

(C) 2个跳跃间断点　　　　(D) 2个无穷间断点

$(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

$x=1$　　$x=0$

【解】

$x=0$　$\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} x\ln|x| = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$，　$0\cdot\infty$　$\dfrac{\infty}{\infty}$

可去

$\ln x \sim x-1$　　$\ln[1+(x-1)]$

$x=1$，$\lim\limits_{x\to1} f(x) = \sin1\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{|x-1|} = \sin1\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{|x-1|}$　$\dfrac{0}{0}$

$= \begin{cases}\sin1, & x\to1^+\\ -\sin1, & x\to1^-\end{cases}$

跳跃

【例5】（2020年3）函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为（　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4　【C】

x

e^{∞}

【解】 $x=0$　$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=e^{-1}\cdot\frac{1}{-2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=-\frac{e^{-1}}{2}$　可去

$x=2$　$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$

$x=1$　$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\infty$

$x=-1$　$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\infty$

第二类

（三）连续性的运算与性质

定理1 连续函数的和、差、积、商（分母不为零）仍为连续函数；

$(0,1)$ $(1,+\infty)$

$\frac{1}{x}$ $x=0$

定理2 连续函数的复合仍为连续函数；

定理3 基本初等函数在其定义域内是连续；

定理4 初等函数在其定义区间内是连续；

$f(x)=\sqrt{\cos x-1}=0$ ≥ 0

（四）闭区间上连续函数的性质

定理5（有界性定理）

$m \leq f(x) \leq M$

-4π -2π 0 2π 4π

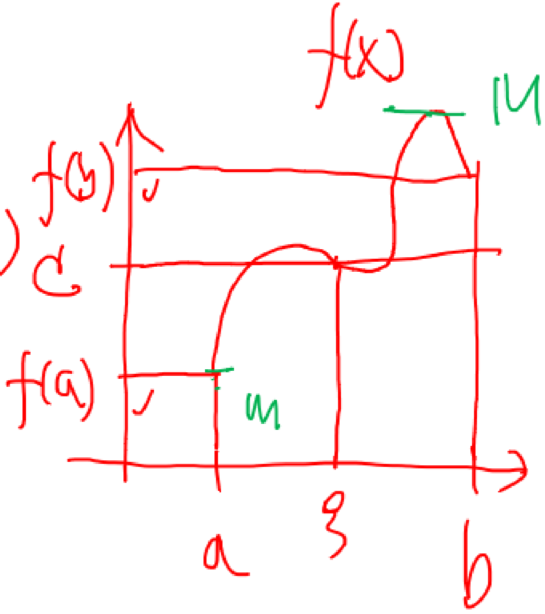
若 $f(x)$ 在 $[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$上有界。

定理6（最值定理）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$上必有最大值和最小值；

定理7（介值定理）

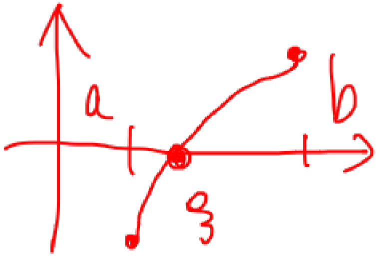
若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则对 $f(a)$与 $f(b)$ 之间任一数C，至少存在一个 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=C$.



推论： 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$在 $[a,b]$ 上可取到介于它在 $[a,b]$ 上最小值与最大值之间的一切值.

定理8（零点定理）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则必 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$.



常考题型与典型例题

1。讨论函数的连续性及间断点的类型；

2。有关闭区间上连续函数性质的证明题；

【例6】（1997年2）已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{1/x^2}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ $\underline{e^{-\frac{1}{2}}}$.

1^{∞}

【解】

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}=f(0)=a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

【例7】讨论 $f(x)=\dfrac{x}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的连续性并指出间断点类型.

① ②

$x=1$

$x=0$

【解】由于 $f(x)=\dfrac{x}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 是初等函数，则除 $x=0,x=1$ 外处处连续.

$e^{+\infty}$ $e^x-1\sim x$

$x=0$, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{-\frac{x}{1-x}}=-1$ 可去

$\boxed{e^{\infty}}$

$x=1$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=0$ 跳跃

【例8】函数 $f(x)=\dfrac{(x^2+x)(\ln|x|)\sin\frac{1}{x}}{x^2-1}$

的可去间断点的个数为（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

【解】$f(x)$ 有三个间断点，$x=0, x=\pm1$.

在 $x=0$ 处，$\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\lim\limits_{x\to0} x\ln|x|\sin\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to0} x\ln|x|=\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$$ （无穷小量）

则 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$，$x=0$ 为可去间断点.

在 $x=-1$ 处，$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x\ln|x|\sin\frac{1}{x}}{x-1}=0$　　则 $x=-1$ 为可去间断点.

$x(x+1)$ 2

【例8】函数 $f(x)=\dfrac{(x^2+x)(\ln|x|)\sin\dfrac{1}{x}}{x^2-1}$

$(x+1)(x-1)$

的可去间断点的个数为（　　）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【解】

在 $x=1$ 处,

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\overset{0}{x\ln|x|}\sin\frac{1}{x}}{x-1}\ \overset{0}{}=\sin1\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}$$

$$=\sin1\lim_{x\to1}\frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}$$

$$=\sin1\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x-1}=\sin1$$ 则 $x=1$ 为可去间断点.

【例9】（1998年3）设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数的间断点，其结论为

（A）不存在间断点　　　　（B）存在间断点 $x=1$

（C）存在间断点 $x=0$　　（D）存在间断点 $x=-1$

【解】

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & |x|<1\\ 0, & |x|>1\\ 1, & x=1\\ 0, & x=-1\end{cases}$$

① $\lim\limits_{n\to\infty} e^{nx}$

② $\lim\limits_{n\to\infty} x^{n}=\begin{cases}0, & |x|<1\\ \infty, & |x|>1\\ 1, & x=1\\ 不, & x=-1\end{cases}$

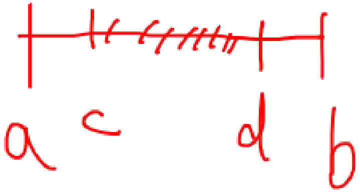
0　−1　1+x　1　0

0　0　1

连续　　2　0　不连续

【例10】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<c<d<b$. 试证对任意的正数 p,q，至少存在一个 $\xi\in[c,d]$，使

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$$



【解】设 $\boxed{\dfrac{pf(c)+qf(d)}{p+q}}=f(\xi)$

[证] 由题设知 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上连续，则存在最大值 M，最小值 m ①

$$m=\frac{pm+qm}{p+q}\le\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q}\le\frac{pM+qM}{p+q}=M$$

② 则，存在 $\xi\in[c,d]$，使 $f(\xi)=\dfrac{pf(c)+qf(d)}{p+q}$

第一章　函数 极限 连续

函数

题型一　复合函数

题型二　函数性态

三大运算:

① 求极限 *

② 求导数

③ 求积分

极限

题型一　极限的概念、性质及存在准则

√题型二 *求 极 限

√题型三　无穷小量阶的比较 ②

$\frac{0}{0}$

连续

√题型一　讨论连续性及间断点类型 ③

题型二　介值定理、最值定理及零点定理的证明题