高数基础班（15）

15	差分方程；微分方程举例（方程求解；综合题；应用题）	P121-PP128

主讲 武忠祥 教授

（五）差分方程（仅数三要求）

1.一阶常系数线性齐次差分方程 $y_{t+1}+ay_t=0,$

通解为 $y_c(t)=C\cdot(-a)^t,$

2.一阶常系数线性非齐次差分方程 $y_{t+1}+ay_t=f(t),$

通解为 $y_t=y_c(t)+y_t^*.$

1） $f(t)=P_m(t),$

（1）若 $a\neq -1,$ 令 $y_t^*=Q_m(t);$

（2）若 $a=-1,$ 令 $y_t^*=tQ_m(t);$

2） $f(t)=d^t\cdot P_m(t)$ $(d\neq 0)$

（1）若 $a+d\neq 0,$ 令 $y_t^*=d^t\cdot Q_m(t);$

（2）若 $a+d=0,$ 令 $y_t^*=td^t\cdot Q_m(t);$

【例12】(1997) 差分方程 $y_{t+1}-y_t=t2^t$ 的通解为 ________.

【解】齐次方程通解为 $y_c(t)=C\cdot 1^t=C$

a=-1

d=2

令 $y_t^*=2^t(at+b)$

代入原方程得 $2^{t+1}[a(t+1)+b)-2^t(at+b)=t2^t$

解得 $a=1,b=-2,$

原方程通解为 $y_t=C+(t-2)2^t$

【例13】（1998）差分方程 $2y_{t+1}+10y_t-5t=0$ 的通解为 ______.

【解】 齐次差分方程为 $y_{t+1}+5y_t=0$ $\frac{5}{2}t$ ✓ $a=5$

其通解为 $y_c(t)=C(-5)^t$.

设原方程的特解为 $y_t^*=at+b$ ✓

代入原方程得 $2a(t+1)+2b+10at+10b=5t$

即 $12at+2a+12b=5t$

比较系数知 $a=\frac{5}{12},b=-\frac{5}{72}$

则 $y_t^*=\frac{5}{12}\left(t-\frac{1}{6}\right)$

原差分方程的通解为 $y_t=C(-5)^t+\frac{5}{12}\left(t-\frac{1}{6}\right)$.

【例14】（2001）某公司每年的工资总额在比上一年增加20%的基础上再追加2百万元，若以W_t 表示第 t 年的工资总额（单位：百万元），则 W_t 满足的差分方程是 ________.

【解】 $W_t = 1.2 \cdot W_{t-1} + 2$

【例15】（2017）差分方程 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的通解为 ________.

【解】齐次方程通解为 $y_c(t)=C\cdot 2^t$

$a=-2$

令 $y_t^*=at2^t$

$d=2$

$a+d=0$

代入原方程得 $a(t+1)2^{t+1}-2at2^t=2^t$

$at2^t$

$$a=\frac{1}{2},$$

原方程通解为 $y_t=C2^t+\frac{1}{2}t2^t$

常考题型与典型例题

常考题型

（一） 方程求解 ✓

（二） 综合题 ✓

（三） 应用题 ✓

（一） 方程求解

$\ln\frac{x}{y}$

【例16】（2014年1）微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足条件

$y(1)=e^3$ 的解为 $y=$ ________.

$x>0$

【解】由 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 得，$y'=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

$y=xu$

令 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式得 $u'=\frac{u(\ln u-1)}{x}$

$y'=u+xu'=u\ln u$

$d(\ln u-1)$

$$\frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x}$$

$$\ln|\ln u-1|=\ln x+C,$$

即 $\ln u-1=Cx$，$\ln\frac{y}{x}-1=Cx$，

由 $y(1)=e^3$ 得 $C=2$，则 $\ln\frac{y}{x}-1=2x$，$y=xe^{2x+1}$.

【例17】（2012年2）微分方程 $ydx+(x-3y^2)dy=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=1$ 的解为 $y=$______.

$(y=\sqrt{x})$

【解1】 $y\frac{dx}{dy}+x=3y^2$, $\frac{dx}{dy}+\frac{x}{y}=3y$ —线性

$x=e^{-\int\frac{1}{y}dy}\left[\int 3y e^{\int\frac{1}{y}dy}dy+C\right]=\frac{1}{y}\left[y^3+C\right]$

$x=y^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{x} \Rightarrow y=\sqrt{x}$

分组凑微分

【解2】 $*\ [ydx+xdy]-3y^2dy=d(xy)-dy^3=d\left[xy-y^3\right]=0$

$xy-y^3=C$ $xy=y^3$

【例18】(2017年1) 微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为

$y=$ ________.

$[e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)]$

$\alpha=-1,\ \beta=\sqrt{2}$

【解】 $r^2+2r+3=0.$

$$r_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2}=-1\pm\sqrt{2}i$$

$$y=e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$$

【例19】（2017年2）微分方程 $y''-4y'+8y=e^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可设为 $y^*=$（　）

$1e^{2x}$ ✓ ✓　　$e^{2x}\cos 2x$ ✓

（A）$Ae^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$,

（B）$Axe^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$,　$\lambda=2$

✓（C）$Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$,

（D）$Axe^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$,

[C]

$\alpha+i\beta=2+2i$

【解】$r^2-4r+8=0$

$r_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-32}}{2}=2\pm 2i$　$\alpha=2,\ \beta=2$

$y^*=Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

【例20】(2015年2, 3) 设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处取得极值 3，则 $y=y(x)=$ ________.

$[2e^{x}+e^{-2x}]$

【解】

$r^2+r-2=0 \qquad (r-1)(r+2)=0$

$r_1=1,\ r_2=-2$

$y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}$

$y(0)=3, \quad y'(0)=0$

$$\begin{cases} c_1+c_2=3 \\ c_1-2c_2=0 \end{cases}$$

$3c_2=3 \Rightarrow c_2=1$

$c_1=2$

$y=2e^{x}+e^{-2x}$

【例21】(2015年1) 设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+(x-\frac{1}{3})e^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 的一个特解，则（ ）

(A) $a=-3,b=2,c=-1.$ (B) $a=3,b=2,c=-1.$

(C) $a=-3,b=2,c=1.$ (D) $a=3,b=2,c=1.$

Ae^{2x} ce^{x}

$y=c_1y_1+c_2y_2+y^*$

$y=\frac{1}{2}e^{2x}+xe^{x}-\frac{1}{3}e^{x}$

齐 非 齐

$y_1=e^{2x}$

【解】由 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+(x-\frac{1}{3})e^{x}$ 是方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 的一个特解可知，$y_1=e^{2x},y_2=e^{x}$ 是齐次方程的两个线性无关的解，

$y^*=xe^{x}$ 是非齐次方程的一个解.

齐次方程的特征方程为 $(r-1)(r-2)=0$

即 $r^2-3r+2=0$ 则 $a=-3,b=2$

将 $y=xe^{x}$ 代入方程 $y''-3y'+2y=ce^{x}$

得 $c=-1$. 故应选（A）.

【例22】(2009年1) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $r=1$ 2重

$y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$，则非齐次方程

$y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2,y'(0)=0$ 的解为 ________.

【解】 由 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$ 知，$r=1$

是齐次方程的特征方程的二重根，则齐次方程的特征方程为

$(r-1)^2=0$, 即 $r^2-2r+1=0$. 则 $a=-2,b=1$ ，非齐次方程为

$$y''-2y'+y=x$$

xe^{0x} $\lambda=0$

$-2a+ax+b=x$

设非齐次方程的特解为 $y^*=ax+b$, 代入方程得 $a=1,b=2$.

则其通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x+x+2$

由 $y(0)=2,y'(0)=0$ 知 $C_1=0,C_2=-1$

故 $y=x(1-e^x)+2$

【例23】（2013年1, 2）已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^{x}-xe^{2x}$，

$y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的3个解，

则该方程的通解为 $y=$ ________________. $(y=C_1e^{3x}+C_2e^{x}-xe^{2x})$

$y_2-y_1=e^{x}-e^{3x}$

$\Downarrow$

$\bar{y}$

【解】 $y_1-y_3=e^{3x}$ $y_2-y_3=e^{x}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\bar{y}$ $\bar{y}$

$\dfrac{e^{3x}}{e^{x}}$ 非c 无关，无关

$y=c_1e^{3x}+c_2e^{x}-xe^{2x}$

$y=c_1e^{3x}+c_2(e^{x}-e^{3x})$
$+(-xe^{2x})$

（二）综合题

【例24】（1994年3）设 $y=f(x)$ 是微分方程 $y''-y'-e^{\sin x}=0$ 的解，且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在（ ）.

（A）x_0 的某个邻域内单调增加

（B）x_0 的某个邻域内单调减少

（C）x_0 处取得极小值

（D）x_0 处取得极大值

【解】

$f''(x)-f'(x)-e^{\sin x}=0$

$x=x_0$

$f''(x_0)-e^{\sin x_0}=0$

$f''(x_0)=e^{\sin x_0}>0$ 极小

【例25】（2002年2）设 $y=y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，则当 $x\to 0$ 时，函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限（ ）

（A）不存在；（B）等于1；（C）等于2；（D）等于3

【解】由 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 知 $y''(x)$ 连续且 $y''(0)=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{y(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{y'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{y''(x)}=\frac{2}{y''(0)}=2$$

故应选（C）.

$\to 0$

极限.

$\frac{0}{0}$

【例26】（2018年2, 3）设函数 $f(x)$ 满足

$$\underbrace{f(x+\Delta x)-f(x)}_{\Delta y}=\overbrace{2xf(x)}^{A}\Delta x+o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0),$$

且 $f(0)=2$，则 $f(1)=$ ___2e___.

$f(x)$ $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$

$dy=A\,dx$

【解】由 $f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0)$

[法2] 微分定义

知 $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=2xf(x)+\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}$ （$f'(x)$）

$dy=2xf(x)dx$

* $f'(x)=2xf(x)$ 导数定义.

$df=2xf\,dx$

$$f(x)=Ce^{x^2}$$

又 $f(0)=2$，则 $C=2$，$\boxed{f(x)=2e^{x^2}}$，$f(1)=2e$.

【例27】（1995年4）已知连续函数 $f(x)$ 满足条件

$$f(x)=\int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right)dt+e^{2x}, \text{求 } f(x).$$

$f(0)=1$

【解】等式 $f(x)=\int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right)dt+e^{2x}$ 两端对 x 求导数得

$f(x)$ 连续

$\Rightarrow \left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$

$$f'(x)=3f(x)+2e^{2x}$$

$$f'(x)-3f(x)=2e^{2x}.$$

$$f(x)=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]=e^{3x}\left[\int 2e^{2x}\cdot e^{-3x}dx+C\right]$$

$$=e^{3x}\left(2\int e^{-x}dx+C\right)=e^{3x}(C-2e^{-x})=Ce^{3x}-2e^{2x}.$$

由 $f(0)=1$，可得 $C=3$，于是

$$f(x)=3e^{3x}-2e^{2x}.$$

【例28】（2016年3）设函数 $f(x)$ 连续，且满足

$$\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x (x-t)f(t)dt+e^{-x}-1，$$ 求 $f(x)$ 的表达式.

【解】令 $u=x-t$，则 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x f(u)du$　　$du=-dt$

$$\int_0^x f(u)du=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt+e^{-x}-1$$

两端求导得 $f(x)=\int_0^x f(t)dt-e^{-x}$，且 $f(0)=-1.$　　$xf(x)-xf(x)$

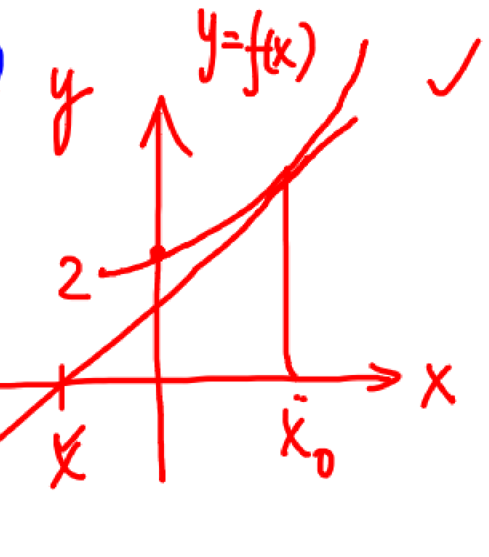
$$f'(x)-f(x)=e^{-x}$$

$$f(x)=e^{\int dx}[\int e^{-x}e^{-\int dx}dx+C]=Ce^x-\frac{e^{-x}}{2}$$

由 $f(0)=-1$，得 $C=-\frac{1}{2}$，所以 $f(x)=-\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$

（三）应用题

【例29】（2015年1, 3）设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零. 若对于任意的 $x_0 \in I$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4, 且 $f(0)=2$, 求 $f(x)$ 的表达式.



【解】曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$, 令 $y=0$ 得, $x=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

切线、直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围区域的面积

$$S=\frac{1}{2}\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|\cdot|f(x_0)|=4$$

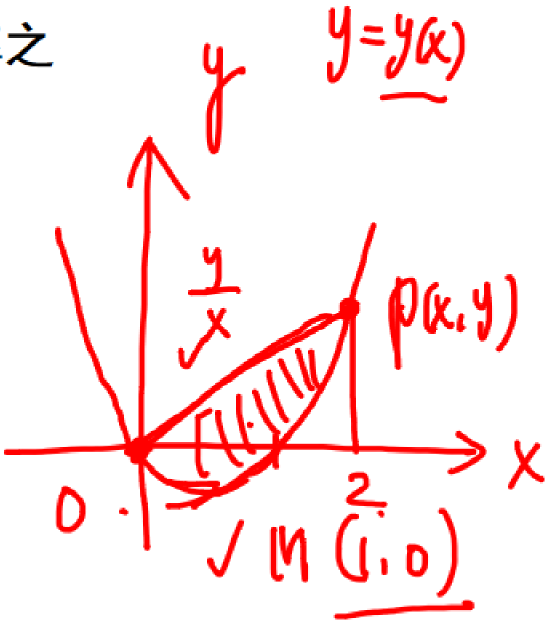
即 $\dfrac{1}{2}\dfrac{f^2(x_0)}{f'(x_0)}=4$, 记 $y=f(x_0)$, 则 $\dfrac{1}{2}y^2=4y'$

解方程得 $-\dfrac{8}{y}=x+C$ 由 $y(0)=2$ 知, $C=-4$, 则 $y=\dfrac{8}{4-x}$.

【例30】（2006年3） 在 xOy 坐标平面上，连续曲线 L 过点 $M(1,0)$，其上任意点 $P(x,y)(x \neq 0)$ 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax（常数 $a>0$）.

（I）求 L 的方程；

（II）当 L 与直线 $y=ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 时，确定 a 的值.



【解】（I）依题意得 $y' - \frac{1}{x}y = ax$，求得其通解为

$$y = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(\int axe^{-\int \frac{1}{x}dx}dx + C\right) = ax^2 + Cx.$$

将 $x=1, y=0$ 代入上式得 $C=-a$，从而 L 的方程为 $\boxed{y = ax^2 - ax}$

（II）L 与直线 $y=ax$ 的交点坐标为 $(0,0)$ 和 $(2,2a)$

$ax^2 - ax = ax$

$ax^2 = 2ax$

$x = 2$

$$S(a) = \int_0^2 (ax - ax^2 + ax)dx = \int_0^2 (2ax - ax^2)dx = \frac{4}{3}a \qquad a = 2$$

【例31】(2009年2) 设非负函数 $y=y(x)\ (x\geq 0)$ 满足微分方程 $xy''-y'+2=0$. 当曲线 $y=y(x)$ 过原点时，其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成的平面区域 D 的面积为2，求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

$y(x)\geq 0$

$y=y(x)=2x+3x^2$

【解】记 $y'=p$，则 $y''=p'$，代入微分方程得 $p'-\frac{1}{x}p=-\frac{2}{x}$

$$y'=p=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int-\frac{1}{x}e^{\int-\frac{1}{x}dx}dx+C_1\right)=x\left(\int-\frac{2}{x^2}dx+C_1\right)=2+C_1x.$$

$$y=2x+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2\qquad(x>0).$$

$V_y=2\pi\int_a^b xf(x)dx$

由已知 $y(0)=0$，有 $\lim\limits_{x\to0^+}y=0$，于是 $C_2=0, y=2x+\frac{1}{2}C_1x^2$

由于 $2=\int_0^1\left(2x+\frac{1}{2}C_1x^2\right)dx=1+\frac{1}{6}C_1$

所以 $C_1=6$，故 $y=2x+3x^2$.

故所求体积为

$$V = 2\pi\int_0^1 xy(x)dx = 2\pi\int_0^1 (2x^2 + 3x^3)dx = \frac{17\pi}{6}.$$

方程+定积，画图.