第二章　矩阵

1987 ～ 2008 本章考题考点分布统计表

考点	考频	考题分布与分值			
矩阵运算、初等变换	4	2003,一(5) 题 4 分	2004,13 题 4 分	2005,14 题 4 分	2006,14 题 4 分
伴随矩阵、可逆矩阵	3	1998,二(5) 题 3 分	2000,一(5) 题 3 分	2008,7 题 4 分	
矩阵的秩	2	1998,数三 3 分	2007,16 题 4 分		
矩阵方程	5	1997,三(6) 题 5 分 2002,十一题 6 分	1998,十二题 5 分	1999,十一题 6 分	2001,十一 题 6 分

本章导读

本章从 1997 年开始有考题. 矩阵是线性代数的核心内容,矩阵的概念、运算及理论贯穿线性代数的始终. 几乎年年都有单纯的矩阵知识的考题,而且其他考题也回避不了矩阵的知识,矩阵的重要性不言而喻.

二十多年来,矩阵的解答题考得很少,但复习时,对于填空与选择不要大意失荆州.

真题分类练习

一阶题,相对容易,推荐先做　　二阶题,较综合,可在第二轮复习时做

一、矩阵运算、初等变换

试题特点

试题简单、基本,但容易失误. 由于矩阵乘法没有交换律,没有消去律,有零因子,这和大家熟悉的算术运算有很大区别,试题往往就是考查这里的基本功,因此复习时对于矩阵的运算要正确,熟练,不要眼高手低,犯低级失误.

矩阵的初等行变换是左乘初等矩阵,矩阵的初等列变换是右乘初等矩阵,这里要分清左乘、右乘,记住初等矩阵的逆矩阵.

1 (2003,一(5)题,4分)设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为三维列向量,$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置,若 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$ ________.

答题区

2 (2004,13题,4分)设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第1列与第2列交换得 $\boldsymbol{B}$,再把 $\boldsymbol{B}$ 的第2列加到第3列得 $\boldsymbol{C}$,则满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为

(A) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

答题区

3 (2005,14题,4分)设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geqslant 2)$ 阶可逆矩阵,交换 $\boldsymbol{A}$ 的第1行与第2行得矩阵 $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A}^*$,$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵,则

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第1列与第2列得 $\boldsymbol{B}^*$. (B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第1行与第2行得 $\boldsymbol{B}^*$.

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第1列与第2列得 $-\boldsymbol{B}^*$. (D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第1行与第2行得 $-\boldsymbol{B}^*$.

答题区

4（2006，14 题，4 分）　设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 $\boldsymbol{C}$，记 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则

(A) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.　(B) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$.　(C) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.　(D) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$.

答题区

解题加速度

1.（2001，数三，3 分）设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{14}&a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{24}&a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{34}&a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{44}&a_{43}&a_{42}&a_{41}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 等于

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.　(B) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_2$.　(C) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$.　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1$.

演算空间

2.（2004，数三，4 分）设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则必有

(A) 当 $|\boldsymbol{A}|=a(a\neq 0)$ 时，$|\boldsymbol{B}|=a$.　(B) 当 $|\boldsymbol{A}|=a(a\neq 0)$ 时，$|\boldsymbol{B}|=-a$.

(C) 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$.　(D) 当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$.

演算空间

二、伴随矩阵、可逆矩阵

试题特点

伴随与可逆是矩阵中最重要的知识点，关键公式：$AA^* = A^*A = |A|E$，进而有

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* \text{ 或 } A^* = |A|A^{-1}$$

涉及伴随与可逆的试题非常多．要想到并灵活运用 $AA^* = A^*A = |A|E$ 这一核心公式．

定义法，单位矩阵恒等变形，可逆的充要条件都是重要的考点．

5 (1998，二(5)题，3分)设 A 是任一 $n(n \geqslant 3)$ 阶方阵，A^* 是其伴随矩阵，又 k 为常数，且 $k \neq 0, \pm 1$，则必有 $(kA)^* =$

(A) kA^*.　　(B) $k^{n-1}A^*$.　　(C) k^nA^*.　　(D) $k^{-1}A^*$.

答题区

6 (2008，7题，4分)设 A 为 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵．若 $A^3 = O$，则

(A) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 不可逆.　　(B) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 可逆.

(C) $E-A$ 可逆，$E+A$ 可逆.　　(D) $E-A$ 可逆，$E+A$ 不可逆.

答题区

7 (2000，一(5)题，3分)设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}$，$E$ 为四阶单位矩阵，且 $B = (E + A)^{-1}(E - A)$，则 $(E + B)^{-1} =$ ________.

答题区

 艾宾浩斯抗遗忘复习计划　臻选题号　再做时间　一天　四天　七天　一月　考前

解题加速度

1.(1993,数四,8分)已知三阶矩阵$\boldsymbol{A}$的逆矩阵为$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{bmatrix}$.试求伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$的逆矩阵.

演算空间

2.(2002,数四,3分)设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$分别为$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$对应的伴随矩阵,分块矩阵$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$,则$\boldsymbol{C}$的伴随矩阵$\boldsymbol{C}^*=$

(A)$\begin{bmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}$.　　(B)$\begin{bmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^*\end{bmatrix}$.

(C)$\begin{bmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{bmatrix}$.　　(D)$\begin{bmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}$.

演算空间

3.(1992,数四,3分)设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$均为$n$阶可逆矩阵,则$(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}$等于

(A)$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.　　(B)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.　　(C)$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$.　　(D)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

演算空间

4.(2002,数四,3分)设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$,则$\boldsymbol{B}^{-1}=$________.

演算空间

三、矩阵的秩

试题特点

矩阵的秩是重点也是难点,要正确理解矩阵秩的概念

$r(\boldsymbol{A})=r \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 中有 r 阶子式不为 0,每个 $r+1$ 阶子式(若还有)全为 0.

在这里要分清"有一个"与"每一个",当 $r(\boldsymbol{A})=r$ 时,$\boldsymbol{A}$ 中能否有 $r-1$ 阶子式为 0?能否有 $r+1$ 阶子式不为 0?

你用行列式来如何描述 $r(\boldsymbol{A})\geqslant r$?如何描述 $r(\boldsymbol{A})<r$?

要搞清矩阵的秩与向量组秩之间的关系,这种转换是重要的.在线性相关的判断与证明中往往是由矩阵的秩推导向量组的秩,而解方程组时往往由相关、无关推导矩阵的秩.

经初等变换矩阵的秩不变,这是求秩的最重要的方法,有时可以把定义法与初等变换法相结合来分析推导矩阵的秩.

要会用 ① $|\boldsymbol{A}|$ 是否为 0,② 相关、无关,③ 方程组的解;会用其中的两个信息夹逼求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

8 (1998,数三,3 分) 设 $n(n\geqslant 3)$ 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$,则 a 必为

(A) 1.　　(B) $\dfrac{1}{1-n}$.　　(C) -1.　　(D) $\dfrac{1}{n-1}$.

答题区

艾宾浩斯抗遗忘复习计划　错选题号　再做时间　一天　四天　七天　一月　考前

9 (2007,16 题,4 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^3$ 的秩为________.

答题区

解题加速度

1. (1994,数四,3 分) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶非零矩阵,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的秩

(A) 必有一个等于 0.　　(B) 都小于 n.

(C) 一个小于 n,一个等于 n.　　(D) 都等于 n.

演算空间

2. (1995,数四,3 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的秩为 $r(\boldsymbol{A})=m<n$,$\boldsymbol{E}_m$ 为 m 阶单位矩阵,下述结论中正确的是

(A) $\boldsymbol{A}$ 的任意 m 个列向量必线性无关.

(B) $\boldsymbol{A}$ 的任意一个 m 阶子式不等于零.

(C) $\boldsymbol{A}$ 通过初等行变换,必可以化为 $(\boldsymbol{E}_m,\boldsymbol{O})$ 形式.

(D) 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 一定有无穷多组解.

演算空间

3.(1996,3分)设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×3 矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$,而 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{bmatrix}$,则 $r(\boldsymbol{AB})=$ ________.

演算空间

四、矩阵方程

试题特点

解矩阵方程时,首先要根据矩阵的运算法则、性质把方程化简(特别要注意矩阵的乘法没有交换律),化简之后有三种形式:

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B};\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B};\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$$

对于前两个方程,若判断出 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则有

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B};\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}$$

对于第三个方程,若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆,则有 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}$.

那么,再通过求逆等运算就可求出 $\boldsymbol{X}$.

10 (1997,三(6)题,5分)已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$,且 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是三阶单位矩阵,求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

答题区

 艾宾浩斯抗遗忘复习计划 | 臻选题号 | 再做时间 一天 四天 七天 一月 考前

11 (1998,十二题,5 分) 设$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{-1}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 4 阶单位矩阵,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是四阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵,且

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

答题区

12 (1999,十一题,6 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$,其中 $\boldsymbol{A}^{*}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

答题区

13 (2001,十一题,6分)已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

且矩阵 X 满足

$$AXA+BXB=AXB+BXA+E$$

其中 E 是三阶单位阵,求 X.

答题区

14 (2002,十一题,6分)已知 A,B 为三阶矩阵,且满足 $2A^{-1}B=B-4E$,其中 E 是三阶单位矩阵.

(1) 证明:矩阵 $A-2E$ 可逆;

(2) 若 $B=\begin{bmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$,求矩阵 A.

答题区

艾宾浩斯抗遗忘复习计划 | 错选题号 | 再做时间 □一天 □四天 □七天 □一月 □考前