高数基础班（14）

14	微分方程概念，一阶方程，可降阶方程，高阶线性方程，	P112-P121

主讲 武忠祥 教授

第七章　常微分方程

本章内容要点

一. 考试内容概要

（一）常微分方程的基本概念

（二）一阶微分方程

（三）可降阶的高阶方程（数三不要求）

（四）高阶线性微分方程

（五）差分方程（仅数三要求）

二. 常考题型与典型例题

题型一　微分方程求解

题型二　综合题

题型三　应用题

（一）常微分方程的基本概念

1. 微分方程
2. 微分方程的阶
3. 微分方程的解
4. 微分方程的通解
5. 微分方程的特解
6. 初始条件
7. 积分曲线

2

$y' = y + x$, $y'' + y^3 = x$, $y'' = e^x$ $y' = e^x + C_1$

$y = e^x$ 通解 $y = e^x + C_1 x + C_2$

$\boxed{y = e^x + C}$

（二）一阶微分方程

$y' = f(x,y)$

1）可分离变量的方程 $y' = f(x)g(y)$

$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$

【例1】（2006年1，2）微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是 ________ $(y = Cxe^{-x})$

[解] $\frac{dy}{dx} = \frac{y(1-x)}{x}$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1-x}{x} dx$

$\ln|y| = \ln|x| - x + C_1$

$|y| = e^{\ln|x| - x + C_1} = e^{C_1}|x|e^{-x}$

$y = \pm e^{C_1} x e^{-x} = Cxe^{-x}$

2）齐次方程 $\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})$　$\boxed{令\ \frac{y}{x}=u}$，$\Rightarrow y=xu$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

【例2】（1993年1，2）求微分方程 $x^2y'+xy=y^2$ 满足初始条件 $y(1)=1$ 的特解.

$u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)$　可分离，

【解】原方程为齐次方程 $y'=(\frac{y}{x})^2-\frac{y}{x}$，令 $u=\frac{y}{x}$，则

$\frac{1}{2}\int\frac{u-(u-2)}{u(u-2)}du$

$$xu'+u=u^2-u,\quad xu'=u^2-2u.$$

* $$\frac{du}{u^2-2u}=\frac{1}{x}dx\qquad \frac{1}{2}[\ln|u-2|-\ln|u|]=\ln|x|+C_1,\quad \frac{u-2}{u}=Cx^2$$

$$\frac{y-2x}{y}=Cx^2$$

由 $y(1)=1$，得 $C=-1$，即得所求的特解为

$$\frac{y-2x}{y}=-x^2,\quad 即\ y=\frac{2x}{1+x^2}$$

3）线性方程 $y' + P(x)y = Q(x)$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$

① 线性

② $x > 0$

$x > 0$

通解 $\boxed{y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right]}$

【例3】（2008年2, 4）微分方程 $(y + x^2e^{-x})dx - xdy = 0$

$\ln x$

dx

的通解是______ $y = x(C - e^{-x})$

[解] $y + x^2e^{-x} - x\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = xe^{-x}$ （*）

$y = e^{\int -\frac{1}{x}dx}\left[\int xe^{-x}e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx + C\right] = x\left[-e^{-x} + C\right] = x\left[C - e^{-x}\right]$

e^{-x}

4）伯努利方程（仅数学一要求）

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha} \quad (\alpha \neq 1) \qquad (y^{1-\alpha} = u) \longrightarrow \text{线性}$$

5）全微分方程（仅数学一要求）

$$dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \qquad F(x,y) = C$$

a) 判定: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

b) 解法:

1）偏积分　　2）凑微分　　3）线积分

（三）可降阶方程（数三不要求）

$y''=f(x,y,y')$

1） $y''=f(x)$ $y''=e^x$， $y'=e^x+C_1$ $y=e^x+C_1x+C_2$

2） $y''=f(x,y')$ $(\boxed{y'=P},y''=\frac{dP}{dx})$ $\boxed{\frac{dp}{dx}=f(x,p)}$

【例4】（2000年1）微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为 ________. $(y=C_1+\frac{C_2}{x^2})$

[解] 令 $\boxed{y'=p}$， $y''=\frac{dp}{dx}$， $x\frac{dp}{dx}+3p=0$

$\frac{dp}{p}=-\frac{3}{x}dx$

$\ln|p|=-3\ln|x|+C$

$|p|=e^{-3\ln|x|+C}=\frac{e^C}{|x|^3}$

$p=\pm e^C\frac{1}{x^3}=\frac{C_1}{x^3}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{C_1}{x^3}$

$y=\frac{C_2}{x^2}+C_1$

✓ 3) $y'' = f(y, y')$ $\left(y' = P, y'' = P\dfrac{dP}{dy}\right)$ ✓

$y' = p$, $y'' = \dfrac{dp}{dx}$, $\boxed{\dfrac{dp}{dx} = f(y, p)}$ ✓

$\boxed{y'' = \dfrac{dp}{dy} p}$

$p\dfrac{dp}{dy} = f(y, p)$

【例5】(2002年1, 2) 微分方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = \dfrac{1}{2}$ 的特解是 $y=\sqrt{x+1}$. $(y = \sqrt{x+1})$

[解] 令 $y' = p$, $y'' = \dfrac{dp}{dy}p$, $yp\dfrac{dp}{dy} + p^2 = 0$

$\dfrac{dp}{p} = -\dfrac{1}{y}dy$

$\ln|p| = -\ln|y| + c_1$

$|p| = e^{-\ln|y| + c_1} = e^{c_1} \cdot \dfrac{1}{|y|}$

$p = \pm e^{c_1}\dfrac{1}{y} = \boxed{\dfrac{c}{y}}$ $\dfrac{1}{2} = \dfrac{c}{1}$ ✓ *

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y}$

$2ydy = dx$

$y^2 = x + c_1 \Rightarrow y^2 = x + 1$ *

$y = \pm\sqrt{x+1}$

$\boxed{y = \sqrt{x+1}}$

（四）高阶线性微分方程

1) 线性微分方程的解的结构

齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ （1）

非齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ （2）

$\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ 非c 无关

定理1 如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次方程（1）的两个线性无关的特解，那么

$$\boxed{y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}$$

就是方程（1）的通解.

定理2 如果 y^* 是非齐次方程（2）的一个特解，$y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次方程（1）的两个线性无关的特解，则

$$\boxed{y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y^*(x)}$$

是非齐次微分方程（2）的通解.

齐通 + 非特 = 非通.

定理3 如果 $y_1^*(x)$，$y_2^*(x)$ 是非齐次方程（2）的两个特解，则

$$y(x)=y_2^*(x)-y_1^*(x)$$

是齐次微分方程（1）的解.

定理4 如果 $y_1^*(x)$，$y_2^*(x)$ 分别是方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$$

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$$

的特解，则

$$y_1^*(x)+y_2^*(x)$$

是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 的一个特解.

2) 常系数齐次线性微分方程

$$\boxed{y'' + py' + qy = 0} \checkmark\checkmark$$

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ ✓*

设 r_1, r_2 是特征方程两个根

1）不等实根： $r_1 \neq r_2$ 　　 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ 　　 $e^{r_1 x}$, $e^{r_2 x}$

2）相等实根： $r_1 = r_2 = r$ 　　 $y = e^{rx}(C_1 + C_2 x)$ 　　 e^{rx} ✓ 　 xe^{rx} ✓

3）共轭复根： $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ 　　 $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

$e^{\alpha x}\cos\beta x$. 　 $e^{\alpha x}\sin\beta x$

【例6】（2013年3）微分方程 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 的通解为 ________.　　$(y=e^{\frac{1}{2}x}(C_1+C_2x))$

【解】 $r^2-r+\frac{1}{4}=0$　　$(r-\frac{1}{2})^2=0$　　$\boxed{r_1=r_2=\frac{1}{2}}$

$y=e^{\frac{1}{2}x}(C_1+C_2x)$

【例7】（1996年3）微分方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解为

$y=$ ________.

$(y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x))$

【解】 $r^2+2r+5=0$

$$r=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}$$

$$=-1\pm 2i$$

$\alpha=-1,\ \beta=2$

$$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$$

【例8】（2010年2）3阶常系数线性齐次微分方程

$y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ 的通解为 $y =$ ______________.

$(y = C_1 e^{2x} + C_2\cos x + C_3 \sin x)$

【解】 $r^3 - 2r^2 + r - 2 = 0$

$(r-2)(r^2+1) = 0$

$r_1 = 2$ ✓ ✓

$r_{2,3} = \pm i$ ✓

$\alpha = 0,\ \beta = 1$

$y = C_1 e^{2x} + (C_2 \cos x + C_3 \sin x)$

3) 常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

λ

1. $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 令 $y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$

2. $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_l^{(1)}(x)\cos\beta x + P_n^{(2)}(x)\sin\beta x\right]$

令 $y^* = x^k e^{\alpha x}\left[R_m^{(1)}(x)\cos\beta x + R_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right]$. $m = \max\{l, n\}$

$\alpha + i\beta$

【例9】（1995年3）微分方程 $y'' + y = -2x$ 的通解为 $y =$ ________.

$(y = -2x + C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

① $y^* = -2x \quad e^{0x}(-2x)$

【解】 $r^2 + 1 = 0$，$r_{1,2} = \pm i$. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ 合通

② 令 $y^* = e^{0x}(ax+b) = ax+b$ $\lambda = 0$

$ax + b = -2x \Rightarrow a = -2,\ b = 0$

$y^* = -2x$

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x$

【例10】（2007年1，2）二阶常系数非齐次线性微分方程

$y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为 $y=$ ______________.

$(y=C_1e^{3x}+C_2e^{x}-2e^{2x})$

【解】① $r^2-4r+3=0$，　$(r-3)(r-1)=0 \Rightarrow r_1=3 \quad r_2=1$

齐通. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{x}$

② 令 $y^*=ae^{2x}$　　$\lambda=2$

$4a-8a+3a=2$　　　非通. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{x}-e^{2x}$

$-a=2 \Rightarrow a=-2,\ y^*=-e^{2x}$

4）欧拉方程 （仅数一要求）

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

令 $\boxed{x = e^t,}$ $\quad x^k y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y$

$D = \frac{d}{dt}$ $\quad Dy = \frac{dy}{dt}$

$D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$ $\quad D^2y = \frac{d^2y}{dt^2}$

【例11】（2004年1）欧拉方程 $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = 0(x>0)$ 的通解为 $y =$ ______.

$(y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2})$

【解】 $\boxed{x = e^t}$

$D(D-1)y + 4Dy + 2y = 0$

$(D^2 - D)y + 4Dy + 2y = 0$

$r(r-1) + 4r + 2 = 0$ *

$r^2 + 3r + 2 = 0$

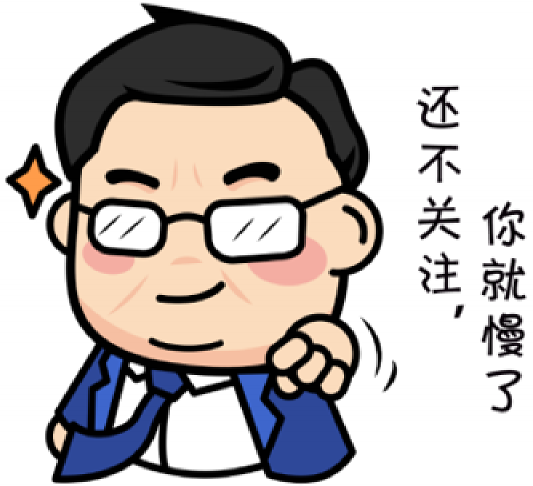
$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$

$r^2 + 3r + 2 = 0$

$(r+1)(r+2) = 0 \quad r_1 = -1,\ r_2 = -2$

$y = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$

$= \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2}$


还不关注，
你就慢了