高数基础班（12）

12	定积分举例（定积分概念；定积分计算；变上限积分；）反常积分	P91-P103

主讲 武忠祥 教授

还不关注，你就慢了

常考题型与典型例题

常考题型

1.定积分的概念、性质及几何意义

2.定积分计算 *

3.变上限积分 *

（一）定积分的概念、性质及几何意义

【例1】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=$ ________.

小　　大

① 夹

$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n^2} \le [\quad] \le \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+1^2}$

$\downarrow \frac{1}{4}$　　$\downarrow \frac{1}{2}$

【解】

【解】原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{\frac{2}{n}}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{\frac{n}{n}}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right]$

0　　1

$=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$

$=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$

② 定

【例2】（2012年2）$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=$ ________. $(\frac{\pi}{4})$

【解】原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{3}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right]$

$$=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

【例3】（2016年2, 3） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n}\right)=$ ________. $(\sin 1-\cos 1)$

【解】原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\boxed{\frac{1}{n}}\left[\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right]$

$$=\int_0^1 x\sin x\,dx=-\int_0^1 x\,d\cos x$$

$$=-x\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos x\,dx$$

$$=-\cos 1+\sin 1=\sin 1-\cos 1$$

【例4】(2017年1, 2, 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})=$ ________.   [$\frac{1}{4}$]

【解】原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\boxed{\frac{1}{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln(1+\frac{k}{n})$

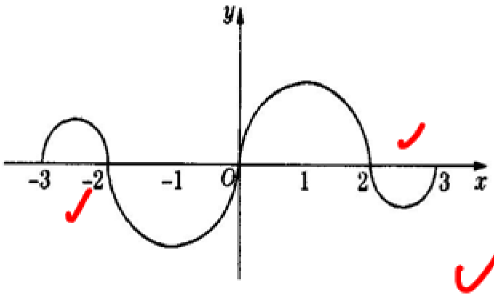
① 夹逼 ✓

② 定积分定义 ✓

$$=\int_0^1 x\ln(1+x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)dx^2$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx=\frac{1}{4}$$

【例5】（2007年1, 2, 3）如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$，$[2,3]$ 上的图形分别是直径为1的上、下半圆周，在区间 $[-2,0]$，$[0,2]$ 的图形分别是直径为2的下、上半圆周．设 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则下列结论正确的是（　　）．



(A) $F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$　　(B) $F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$

(C) $F(-3)=\dfrac{3}{4}F(2)$　　(D) $F(-3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$

几何意义

【解1】 $F(2)=\int_0^2 f(t)dt=\frac{\pi}{2}$，$F(3)=\int_0^3 f(t)dt=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{8}$

$F(-2)=\int_0^{-2} f(t)dt=-\frac{\pi}{2}$ X　　$\int_a^b$　　$a<b$!!

$F(-2)=-\int_{-2}^0 f(t)dt=\frac{\pi}{2}$，$F(-3)=\int_0^{-3}=-\int_{-3}^0=\frac{3\pi}{8}$

【解2】 $f(x)$ 奇．

$F(x)$ 偶．

$F(-2)=F(2)>0$

$\vee$

$F(-3)=F(3)>0$

C

【例6】（1997年1, 2）设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0, f'(x)<0,$ $f''(x)>0$. 令 $S_1=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ S_2=f(b)(b-a),$ $S_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$，则（　）. (B)

✓ (B) $S_2<S_1<S_3$

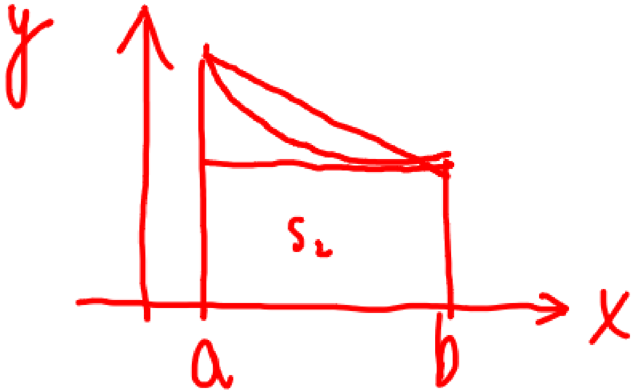
(A) $S_1<S_2<S_3$

(C) $S_3<S_1<S_2$

(D) $S_2<S_3<S_1$

【解】

$S_2<S_1<S_3$

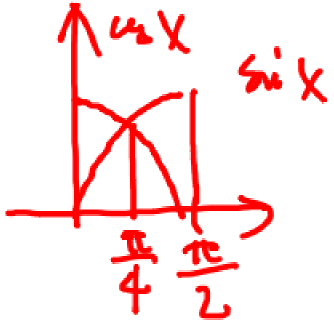


【例7】（2011年1, 2, 3）设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,\mathrm{d}x$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x$，则 I,J,K 的大小关系为（　）

（A）$I<J<K$　　　　（B）$I<K<J$

（C）$J<I<K$　　　　（D）$K<J<I$

【解】$0<x<\frac{\pi}{4}$，　$\sin x<\cos x<\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$



$I<K<J$

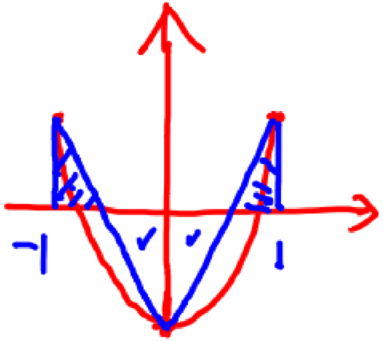
【例8】（2017年2）设二阶可导函数 $f(x)$ 满足

$f(1)=f(-1)=1, f(0)=-1$，且 $f''(x)>0$，则（　） (B)

$f(x)$

✗ (A) $\int_{-1}^{1} f(x)dx>0.$ ✓ ✓ (B) $\int_{-1}^{1} f(x)dx<0.$

✗ (C) $\int_{-1}^{0} f(x)dx>\int_{0}^{1} f(x)dx.$ ✗ (D) $\int_{-1}^{0} f(x)dx<\int_{0}^{1} f(x)dx.$



【解1】$-1\le x\le 1$, $f(x)\le g(x)$ $g(x)$ 几何.

$\int_{-1}^{1} f(x)dx<\int_{-1}^{1} g(x)dx=0$

$f(x)=2x^2-1$

【解2】令 $\boxed{f(x)=2x^2-1}$ ✓ 具体举例.

$\int_{-1}^{1}(2x^2-1)dx=2\int_{0}^{1}(2x^2-1)dx=2\left(\frac{2}{3}-1\right)<0$

【例9】(1991年1, 2) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，

且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = f(0)$，证明在 $(0,1)$ 内存在一点 c，使 $f'(c)=0$.

【解】

[证] $\exists\ \xi \in (\frac{2}{3}, 1)$,

$$3\cdot(1-\frac{2}{3})f(\xi) = f(0) \quad *$$

$$f(\xi) = f(0)$$

$\exists\ c \in (0,\xi)$, 使 $f'(c)=0$

（二）定积分的计算

【例10】（2001年2）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\overset{奇}{x^3}+\overset{偶}{\sin^2 x})\cos^2 x\mathrm{d}x=$ ______.　　$(\frac{\pi}{8})$

【解】原式 $= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\,dx$　　　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx$

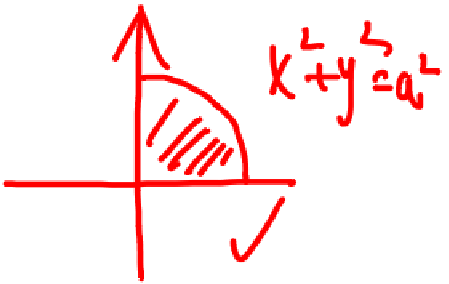
$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x(1-\sin^2 x)\,dx$

$= 2\left[\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right]$

$= 2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{8}$

【例11】（2017年3）$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2})\mathrm{d}x=$ ______. $[\frac{\pi^3}{2}]$

奇　偶.



【解】

原式 $\stackrel{*}{=} 2\int_0^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}\,dx$

$\stackrel{*}{=} 2\cdot\frac{\pi}{4}\pi^2$

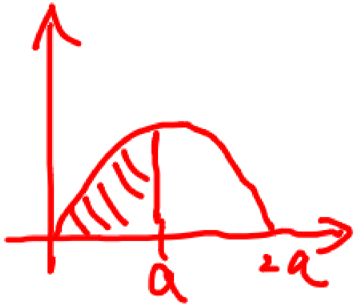
$=\frac{\pi^3}{2}$.

① $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi a^2}{4}$ $(a>0)$

② $\int_0^a\sqrt{2ax-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}a^2$

③ $\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}a^2$

$x^2+y^2=2ax$



【例12】（2000年, 1）$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}dx=$ ______. $(\frac{\pi}{4})$

【解1】原式 $=\int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}dx \xlongequal{x-1=\sin t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2 t\,dt$

$\int_0^a \sqrt{2ax-x^2}dx=\frac{\pi}{4}a^2$ $=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$

【解2】$a=1$

原式 $=\frac{\pi}{4}$ 几何

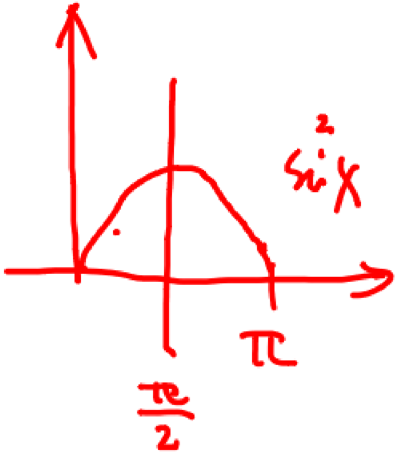
【例13】 $\int_0^{\pi} x\sin^2 x dx =$ ________________. $(\frac{\pi^2}{4})$

【解】 原式 $\stackrel{*}{=} \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$

$\stackrel{*}{=} \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$

$\stackrel{*}{=} \pi\cdot\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$

$\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$



【例14】（2005年2）计算 $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.　　$(\frac{\pi}{4})$

【解】 $\boxed{x=\sin t}$

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\cos t}{(2-\sin^2 t)\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\overset{-d\cos t}{\sin t}}{1+\cos^2 t}dt$$

$$=-\arctan(\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

【例15】（2010年1）$\int_0^{\pi^2} \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x =$ ____________. (-4π)

【解】 $\sqrt{x} = t$ $\quad x = t^2$

$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx$

原式 $= 2\int_0^{\pi} t^2 \cos t\, dt$

$= 2\int_0^{\pi} t^2\, d\sin t = 2t^2\sin t\Big|_0^{\pi} - 4\int_0^{\pi} t\sin t\, dt$

$= -4\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin t\, dt = -4\pi$

【例16】 计算 $\int_0^1 x\arcsin x\,dx.$ $(\frac{\pi}{8})$

【解1】 $\text{原式} \overset{*}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 \arcsin x\,dx^2 = \frac{1}{2}x^2\arcsin x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $-1+1$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[-\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\right]$ $\arcsin x\Big|_0^1$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{8}$

【解2】 $x = \sin t$

$\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$

$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,d\sin t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,d\sin^2 t = \frac{1}{2}t\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$

【例17】（1995年3）设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t}dt$，计算 $\int_0^\pi f(x)dx$.

$f(0)=0$

分部

【解1】原式 $= \underbrace{x f(x)\Big|_0^\pi}_{0,\ 0} - \int_0^\pi \frac{x\sin x}{\pi - x}dx$　　$d(x-\pi)$

$= \int_0^\pi \frac{\pi \sin x}{\pi - x}dx - \int_0^\pi \frac{x \sin x}{\pi - x}dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\sin x}{\pi - x}dx = \int_0^\pi \sin x\,dx$

$= 2$

【解2】原式 $\stackrel{*}{=} \int_0^\pi f(x)\,d(x-\pi) = (x-\pi)f(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{(x-\pi)\sin x}{\pi - x}dx$

$= \int_0^\pi \sin x\,dx = 2$

（三）变上限定积分

【例18】 设 $f(x)$ 连续，试求下列函数的导数 拆项.

(1) $\int_{e^x}^{x^2} f(t)dt$; 1

(2) $\int_0^x (x-t)f(t)dt$; $= x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt$

(3) $\int_0^x \cos(x-t)^2 dt$ 换元

(4) $\int_1^2 f(x+t)dt$. 换元

【解】 (1) $\left(\int_{e^x}^{x^2} f(t)dt\right)' = f(x^2)\cdot 2x - f(e^x)e^x$

(2) $\left(\int_0^x (x-t)f(t)dt\right)' = \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)dt$

(3) $\int_0^x \cos(x-t)^2 dt \xlongequal{x-t=u} \int_0^x \cos u^2 du$, $\left(\int_0^x \cos(x-t)^2 dt\right)' = \cos x^2$.

(4) $\int_1^2 f(x+t)dt \xlongequal{x+t=u} \int_{x+1}^{x+2} f(u)du$ $\left(\int_1^2 f(x+t)dt\right)' = f(x+2) - f(x+1)$

【例19】(2015年2, 3) 设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2} xf(t)dt$.

若 $\varphi(1)=1, \varphi'(1)=5$, 则 $f(1)=$ ___2___. (2)

【解】 $1=\varphi(1)=\int_0^1 f(t)dt$

$\varphi(x)=x\int_0^{x^2} f(t)dt$, $\varphi'(x)=\int_0^{x^2} f(t)dt + x f(x^2)\cdot 2x$

$\varphi'(1)=\int_0^1 f(t)dt + 2f(1) = 5$

$f(1)=2$

【例20】（1998年1）设 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt =$

(A) $xf(x^2)$ $=x$ (B) $-xf(x^2)$ $=-x$

(C) $2xf(x^2)$ $=2x$ (D) $-2xf(x^2)$ $=-2x$

$-2t\,dt = du$

【解1】直接法

$$\int_0^x t f(x^2-t^2)dt \overset{x^2-t^2=u}{=\!=\!=} -\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)du = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)du$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x t f(x^2-t^2)dt = \frac{1}{2}f(x^2)\cdot 2x = xf(x^2)$$

【解2】排除法. $f(x)\equiv 1$ $\dfrac{d}{dx}\int_0^x t\,dt = x$

【例21】（1993年3）已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x<1,\\ 1, & 1\le x\le 2,\end{cases}$ 设 $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt\ (0\le x\le 2)$，则 $F(x)$ 为（ ）. (D)

（A）$\begin{cases}\frac{1}{3}x^3, & 0\le x<1,\\ x, & 1\le x\le 2\end{cases}$ （B）$\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\le x<1,\\ x, & 1\le x\le 2\end{cases}$

（C）$\begin{cases}\frac{1}{3}x^3, & 0\le x<1,\\ x-1, & 1\le x\le 2\end{cases}$ （D）$\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\le x<1,\\ x-1, & 1\le x\le 2\end{cases}$

【解1】

$$F(x)=\begin{cases}\int_1^x t^2\,dt, & 0\le x<1\\ \int_1^x 1\,dt & 1\le x\le 2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3} & 0\le x<1\\ x-1 & 1\le x\le 2\end{cases}$$

【解2】

$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续.

$F(x)$ 在 $[0,2]$ 可导,

$F'(x)=f(x)$

在 $[0,1)$ 和 $(1,2]$ 上

$F'(x)=f(x)$

(A)(B)(C) $F(x)$ 在 $x=1$ 不连续.

$F'(1)$ 不存在，排除 A, B, C

【例22】(1988年3) 设 $x \geq -1$, 求 $\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}t$.

【解】
$$\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt \overset{*}{=} \begin{cases} \int_{-1}^{x}(1+t)dt, & -1 \leq x < 0 \\ \int_{-1}^{x}(1-t)dt & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{0}(1+t)dt + \int_{0}^{x}(1-t)dt, \quad x \geq 0$$

【例23】（2013年2）

不连续

设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x<\pi,\\ 2, & \pi\le x\le 2\pi,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则

（A） $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点；

（B） $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点；

（C） $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导；

（D） $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导.

【解】

$$F(x)=\begin{cases}\int_0^x \sin t\,dt, & 0\le x<\pi\\ \int_0^\pi \sin x\,dx+\int_\pi^x 2\,dt & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}=\begin{cases}1-\cos x & 0\le x\le\pi\\ 2+2(x-\pi). & \pi<x\le 2\pi\end{cases}$$

2　　2　　2

$F(x)$ 在 $x=\pi$ 连续，　$F'_+(\pi)=2\Big|_{x=\pi}=2$，　$F'_-(\pi)=\sin x\Big|_{x=\pi}=0$　$F'(\pi)$ 不存在

【例24】（1998年2）确定常数 a,b,c 的值，使

$$\lim_{x\to0}\frac{ax-\sin x \to 0}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\,dt \to 0}=c \neq 0 \quad (c\neq 0) .$$

$(a=1,b=0,c=\frac{1}{2})$

【解】

$$\int_b^0 \frac{\ln(1+t^3)}{t}\,dt \to 0 \Rightarrow b=0$$

∞

$$c=\lim_{x\to0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{a-\cos x}{x^2}$$

$a-1\neq0$ 矛盾.

0

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$a=1$

【例25】（2017年2, 3）求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x \sqrt{x-t}\,e^t dt}{\sqrt{x^3}}$. [$\frac{2}{3}$]

$\frac{0}{0}$

换

【解1】 $\int_0^x \sqrt{x-t}\,e^t dt \xlongequal{x-t=u} \int_0^x \sqrt{u}\,e^{x-u} du = e^x \int_0^x \sqrt{u}\,e^{-u} du$

$$原式 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{u}\,e^{-u} du}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\,e^{-x}}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}$$

积分中值

$x_1 \xi$ 之 5

【解2】
$$原式 = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\xi}\int_0^x \sqrt{x-t}\,dt}{\sqrt{x^3}}$$

$e^{\xi}\to 1$

$(x-t)^{\frac{1}{2}}$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{2}{3}(x-t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^3}} = \frac{2}{3}$$

【例26】（2010年3）设可导函数 $y=y(x)$ 由方程

$$\int_0^{x+y} e^{-t^2}\,dt=\int_0^x x\sin t^2\,dt$$ 确定，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ __________. [−1]

【解】

$$\int_0^y e^{-t^2}dt=0 \Rightarrow y=0 \qquad x=0$$

变上限求导

$$\int_0^{x+y} e^{-t^2}dt=x\int_0^x \sin t^2\,dt$$

x

$$e^{-(x+y)^2}(1+y')=\int_0^x \sin t^2\,dt+x\sin x^2$$

$$1+y'(0)=0 \Rightarrow y'(0)=-1$$

第二节　反常积分

本节内容要点

一. 考试内容概要

（一）无穷区间上的反常积分

（二）无界函数的反常积分

二. 常考题型与典型例题

题型一　反常积分的敛散性

题型二　反常积分的计算

$\int_a^b f(x)\,dx$

① $[a,b]$ 有限 ✓

② $f(x)$ 有界 ✓

（一）无穷区间上的反常积分

定义1 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$ 收敛.

定义2 $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx.$

定义3 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx$

收.

都收.

定理1(比较判别法)

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $0\le f(x)\le g(x)$ ，则

1）$\int_a^{+\infty}\overset{\text{大}}{g(x)}dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty}\overset{\text{小}}{f(x)}dx$ 收敛

2）$\int_a^{+\infty}\overset{\text{小}}{f(x)}dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty}\overset{\text{大}}{g(x)}dx$ 发散

定理2(比较判别法的极限形式)

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 非负连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lambda$，则

1）当 $\lambda>0$ 时，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 同敛散；

2）当 $\lambda=0$ 时，$\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛；

3）当 $\lambda=+\infty$时，$\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散.

常用结论： $\int_a^{+\infty}\dfrac{1}{x^P}dx \begin{cases} P>1 & \text{收敛} \\ P\le 1 & \text{发散} \end{cases} \quad (a>0)$

【例1】判别下列反常积分的敛散性

（1）$\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx.$ $\frac{1}{2}$ 发 $\frac{3}{2}$ 收 （2）$\int_1^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx.$ $x\geq 1$ 发 发

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ $p>1$ 收 $p\leq 1$ 发

【解1】

(1) 比较 $\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}<\frac{\sqrt{x}}{x^2}=\frac{1}{x^{3/2}}$

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ 收敛 $\rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ 收敛.

$\frac{3}{2}>1$

② ① $\int_1^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_1^{+\infty}$ 定义 $=+\infty$ 发

$\frac{x}{1+x^2}\leq\frac{1}{x}$. 发

【解2】极限

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}}{\frac{1}{x^{3/2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1$，同敛散

② 比较 $\frac{x}{1+x^2}\geq\frac{x}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{x}$

③ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{1+x^2}}{\frac{1}{x}}=1$ 发

（二）无界函数的反常积分

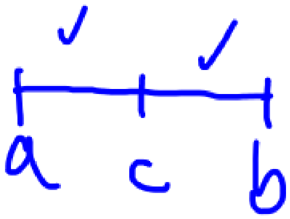
定义1 设点 a 为函数 $f(x)$ 的瑕点

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$$

收.

定义2 设点 b 为函数 $f(x)$ 的瑕点

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx.$$



定义3 设点 c 为函数 $f(x)$ 的瑕点 $(a<c<b)$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

都收

定理1 (比较判别法)

设 $f(x),g(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，且 $\underline{0\le f(x)\le g(x)}$，则

1）$\overset{\text{大}}{\int_a^b g(x)dx}$ 收敛 $\Rightarrow \overset{\text{小}}{\int_a^b f(x)dx}$ 收敛；

2）$\overset{\text{小}}{\int_a^b f(x)dx}$ 发散 $\Rightarrow \overset{\text{大}}{\int_a^b g(x)dx}$ 发散.

定理2 (比较判别法的极限形式)

设 $f(x),g(x)$ 在 $(a,b]$ 非负连续，$\lim\limits_{\underline{x\to a^+}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lambda$，则

1）当 $\underline{\lambda>0}$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ $\underline{\text{同敛散}}$；

2）当 $\lambda=0$ 时，$\int_a^b \overset{\text{大}}{g(x)}dx$ 收敛 $\Rightarrow \overset{\text{小}}{\int_a^b f(x)dx}$ 收敛；

3）当 $\lambda=+\infty$ 时，$\overset{\text{小}}{\int_a^b g(x)dx}$ 发散 $\Rightarrow \overset{\text{大}}{\int_a^b f(x)dx}$ 发散.

常用结论： $\int_a^b \dfrac{1}{(x-a)^P}dx,\int_a^b \dfrac{1}{(b-x)^P}dx$ $\begin{cases} P<1 & \text{收敛} \\ P\ge 1 & \text{发散} \end{cases}$

【例2】判别下列反常积分的敛散性

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$$

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^p}$

$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{(1-x)^p}$

$p<1$ 收敛，

$p\geq 1$ 发散，

【解】 $x=0$， $x=1$

收敛，　收敛，

[解] $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

收敛，

$\sqrt{x(1-x)}$　$\sqrt{x(1-x)}$　$\sqrt{1-x}$

极限

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}} = 1 \quad p=\frac{1}{2}<1$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}}{\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}} = 1 \quad p=\frac{1}{2}<1 \text{ 收敛}$$

关注「**公众号：武忠祥老师**」

你将获得

1、「考研数学真题」电子资料
2、全年每日一题
3、每个月的考研数学复习规划
4、不定期武老师公仔、周边抽奖