高数基础班（10）

主讲 武忠祥 教授

第四章　不定积分

本节内容要点

一. 考试内容概要

（一）不定积分的概念与性质

（二）不定积分基本公式

（三）三种主要积分法

（四）三类常见可积函数的积分

二. 常考题型与典型例题

求不定积分（换元、分部）

第四章 不定积分

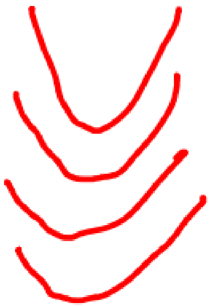
考试内容概要

（一）不定积分的概念与性质

1. 原函数 $F'(x)=f(x)$

2. 不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$

3. 不定积分几何意义



$\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+C$

$f(x)=x^2$ $F(x)=\frac{1}{3}x^3+1$

$F(x)+C$

$G'(x)=f(x)$

$G(x)-F(x)=C$

$G(x)=F(x)+C$

4. 原函数存在定理

定理1 若 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则 $f(x)$ 在区间 I 上一定存在原函数.

连续 $\Rightarrow$ 存在原函数

定理2 若 $f(x)$ 在区间 I 上有第一类间断点, 则 $f(x)$ 在区间 I 上没有原函数.

$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$

【例1】 下列函数在给定区间上是否有原函数?

1) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 连续

$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$

有

2） $g(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & x>0.\end{cases}$

$\checkmark$

$x=0$ 跳跃（第一类）

$$F(x)=\begin{cases}-x+C_1, & x<0 \\ x+C_2 & x>0\end{cases}$$

$$F'(x)\equiv g(x)$$

$$=\begin{cases}-x+C, & x<0 \\ x+C & x\geq 0\end{cases}$$

$x=0$?

$$=|x|+C$$

$x=0$ 不可导，

3） $h(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ 不存在

$x=0$ 第二类.

【解】 3）易验证 $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 是 $h(x)$ 的原函数. 即

$F'(x)=h(x).$

$x\neq 0$ $F'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

$x=0$ $F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=0$

5. 不定积分的性质

$\int f(x)dx = F(x)+C$

1) $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$　　　　$\underline{\mathrm{d}}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$

2) $\int \underline{f'(x)}\mathrm{d}x = f(x)+C$　　　　$\int \mathrm{d}f(x) = f(x)+C.$

3) $\int [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$　　　　分项积分

4) $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$

（二）不定积分的基本公式

1） $\int 0dx = C$

2） $\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$

$\int f(x)dx = F(x)+C$

3） $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C$

4） $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a}+C$

5） $\int e^{x}dx = e^{x}+C$

6） $\int \sin xdx = -\cos x+C$

7） $\int \cos xdx = \sin x+C$

8） $\int \sec^{2}xdx = \tan x+C$

9） $\int \csc^{2}xdx = -\cot x+C$

10） $\int \sec x\tan xdx = \sec x+C$

11） $\int \csc x\cot xdx = -\csc x+C$

12） $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx = \arcsin x+C$

13） $\int \frac{dx}{1+x^{2}} = \arctan x+C$

14） $\int \frac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}} = \arcsin\frac{x}{a}+C$

15） $\int \frac{dx}{a^{2}+x^{2}} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

16） $\int \frac{dx}{x^{2}-a^{2}} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$

17） $\int \frac{dx}{\sqrt{x^{2}+a^{2}}} = \ln(x+\sqrt{x^{2}+a^{2}})+C$

18） $\int \frac{dx}{\sqrt{x^{2}-a^{2}}} = \ln|x+\sqrt{x^{2}-a^{2}}|+C$

19） $\int \sec x \, \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C.$ ✓

20） $\int \csc x \, \mathrm{d}x = -\ln|\csc x + \cot x| + C.$ ✓

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{d(\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x}$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + C$$

【例2】求下列不定积分

1） $\int \frac{(x+1)^3}{x^2}dx;$　　　2） $\int \frac{x^4-x^2}{1+x^2}dx;$

3） $\int \frac{1-\sin x}{1+\sin x}dx;$

【解】1） $\int \frac{(x+1)^3}{x^2}dx = \int \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2}dx$

$$= \int (x+3+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2+3x+3\ln|x|-\frac{1}{x}+C$$

【解】2） $\int \frac{x^4-x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{(x^4-1)-(1+x^2)+2}{1+x^2}dx$

$$= \int (x^2-1-1+\frac{2}{1+x^2})dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3-2x+2\arctan x+C$$

【解】3） $\int \frac{1-\sin x}{1+\sin x}dx = \int \frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}dx$

试+分项.

$$= \int (\sec^2 x-2\sec x \cdot \tan x+\tan^2 x)dx$$

$$= \tan x-2\sec x+\tan x-x+C$$

$$= 2\tan x-2\sec x-x+C$$

（三）三种主要积分法

1）第一类换元法（凑微分法）

若 $\int f(u)\,\mathrm{d}\,u = F(u) + C$

则 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,\mathrm{d}\,x = \int f[\varphi(x)]\,\mathrm{d}\,\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C$

分项 / 分部

① + − × ÷

② 复合 — 换元

【例3】求下列不定积分

1） $\int \sec^4 x dx$ $\sec^2 x dx = d\tan x$

2） $\int \frac{(\ln x+2)^2}{x} dx$

3） $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx$

4） $\int \frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx$

【解】1） $\int \sec^4 x dx = \int \sec^2 x d\tan x$

$$= \int (\tan^2 x + 1) d\tan x$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + C$$

【解】2） $\int \frac{(\ln x+2)^2}{x}dx = \int (\ln x+2)^2 d(\ln x+2)$ $X = d(\ln x + 2)$

$$= \frac{1}{3}(\ln x+2)^3 + C$$

【解】3） $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx = 2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{1+x}d\sqrt{x}$ $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\sqrt{x}$

$$= 2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}d\sqrt{x} = 2\int \arctan\sqrt{x}\,d\arctan\sqrt{x}$$

$$= (\arctan\sqrt{x})^2 + C$$

【解】4）$\int \frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = \int \frac{(1-x)+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$

$2-2x=2(1-x)$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2-2x)}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(3+2x-x^2)}{\sqrt{3+2x-x^2}} + \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{4-(x-1)^2}}$$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

✓

$$= \sqrt{3+2x-x^2} + \arcsin\frac{x-1}{2} + C$$

$\int \sqrt{1-x^2}dx$

【例4】（1993年3）$\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x=$ ____________. $(\frac{2}{\sqrt{\cos x}}+C)$

【解】原式 $=\int \frac{\sin x}{\cos^{\frac{3}{2}} x}dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos^{\frac{3}{2}} x} = 2\cos^{-\frac{1}{2}} x + C$

$= \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C$

【例5】(1997年2) 计算积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}} =$ ________.

[解1] 原式 $= \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$ $d(x-2)$ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

$= \arcsin \frac{x-2}{2} + C$

[解2] 原式 $= 2\int \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{4-(\sqrt{x})^2}} = 2\arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} + C$

2）第二类换元法

定理3 设 $x=\varphi(t)$ 是单调的、可导的函数，并且 $\varphi'(t)\neq 0$ $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t)+C,$$

则 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t)+C = F[\varphi^{-1}(x)]+C,$

1) $\sqrt{a^2-x^2}$ $\quad x=a\sin t\,(a\cos t)$

2) $\sqrt{a^2+x^2}$ $\quad x=a\tan t$

3) $\sqrt{x^2-a^2}$ $\quad x=a\sec t$

【例6】求下列不定积分, 其中 $a>0$.

$$1)\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \qquad 2)\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx$$

$$3)\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx \qquad 4)\int \sqrt{1+e^x}dx$$

【解】1) 令 $x=a\sin t$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int \frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}\cdot a\cos t dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\int (1-\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}(t-\frac{1}{2}\sin 2t)+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$$

$$2)\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx$$

【解1】2) 令 $x = a\tan t$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx = \int \frac{a\sec t}{a^2\tan^2 t}\cdot a\sec^2 t\,dt$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 t\cos t}dt = \int \frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin^2 t\cos t}dt$$

$$= \int \sec t\,dt + \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt = \ln\left|\sec t+\tan t\right| - \frac{1}{\sin t} + C$$

$$= \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) - \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + C$$

$$2)\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx$$

【解2】2) $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx = \int \frac{x^2+a^2}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}dx$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} + \int \frac{a^2 dx}{x^3\sqrt{1+(\frac{a}{x})^2}}$$

$$= \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) - \frac{1}{2}\int \frac{d[1+(\frac{a}{x})^2]}{\sqrt{1+(\frac{a}{x})^2}}$$

$$= \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) - \sqrt{1+(\frac{a}{x})^2} + C$$

$$= \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) - \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + C$$

$$3)\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$$

【解】3) 令 $x = a\sec t$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx = \int \frac{a\tan t}{\underline{a\sec t}} \cdot a\sec t\tan t dt$$

$$= a\int \tan^2 t dt = a\int (\sec^2 t - 1)dt$$

$$= a(\tan t - t) + C$$

$$= \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x} + C$$

4) $\int \sqrt{1+e^x}\,dx$

t

【解】4) 令 $t=\sqrt{1+e^x}$ ，则 $x=\ln(t^2-1)$,

$$\int \sqrt{1+e^x}\,dx=\int \frac{2t^2}{t^2-1}dt \;=2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt$$

$$=2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=2\sqrt{1+e^x}+\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$$

3）分部积分法 $\int u dv = uv - \int v du$ $(uv)'$

①何时用？

②如何用？

“适用两类不同函数相乘”

$\int p_n(x) e^{\alpha x} dx$, $\int p_n(x) \sin \alpha x dx$, $\int p_n(x) \cos \alpha x dx$,

$\int P_n(x) \ln x dx$; $\int P_n(x) \arctan x dx$; $\int P_n(x) \arcsin x dx$.

$\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$; $\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$. 2次

$\int x e^x dx$

$\int x \sin x dx$

$\int e^x \sin x dx$

【例7】求下列不定积分

1) $\int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int x d e^{2x}$

2) $\int x^2 \sin x dx = -\int x^2 d \cos x$

3) $\int x \ln x dx = \frac{1}{2} \int \ln x dx^2$

4) $\int e^x \sin^2 x dx = \int \sin^2 x d e^x$

$\int e^x \sin 2x dx = \int \sin 2x d e^x$

【例8】（1990年3）计算 $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x.$

【解】

$$\int \frac{\ln x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x = \int \ln x d\frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{\ln x}{1-x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x(1-x)}$$

$$= \frac{\ln x}{1-x} - \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\ln x}{1-x} + \ln\frac{|1-x|}{x} + C.$$

【例9】（1998年2）$\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x =$ ________.

【解】$\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\int \ln\sin x\,\mathrm{d}\cot x$

$$= -\cot x\cdot\ln\sin x + \int \cot^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$= -\cot x\cdot\ln\sin x + \int (\csc^2 x - 1)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\cot x\cdot\ln\sin x - \cot x - x + C.$$

3种

$$\left\{\begin{array}{l} \int e^{x^2}\mathrm{d}x \\ \int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \\ \int \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x \end{array}\right.$$

“积不出”

（四）三类常见可积函数积分

1) 有理函数积分 $\int R(x)\,\mathrm{d}\,x$

（1）一般法（部分分式法）；

*（2）特殊方法（加项减项拆或凑微分绛幂）；

【例10】（1999年2） $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}\,\mathrm{d}x =$ ____________.

$2x-6$

【解】 $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13} + 8\int \frac{\mathrm{d}(x-3)}{(x-3)^2+2^2}$

$\frac{1}{2}\int 2x-6$ 8

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13) + 4\arctan\frac{x-3}{2} + C.$$

$\int \frac{dx}{x^2+a^2}$

$= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

【例11】（1987年5）求不定积分 $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4+2x^2+5}$.

【解】 $$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4+2x^2+5}=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{(x^2+1)^2+4}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2}$$

$$=\frac{1}{4}\arctan\frac{x^2+1}{2}+C.$$

【例12】(2019年2) 求不定积分$\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx$

【解】 $$\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

$$\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx = \int \frac{-2}{x-1}dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}dx + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$$

$$= -2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \ln(x^2+x+1) + C$$

2) 三角有理式积分 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}\,x$

（1）一般方法(万能代换） 令 $\tan\frac{x}{2}=t$

$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}\,x=\int R(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}dt$$

*（2）特殊方法 （三角变形，换元，分部）

i）若 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则 令 $\boxed{u=\cos x;}$ $d\cos x$

ii）若 $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则 令 $\boxed{u=\sin x;}$ $d\sin x$

iii）若 $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$，则 令 $\boxed{u=\tan x.}$ $d\tan x$

【例13】（1996年3）求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

【解1】 原式 $=\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C.$

【解2】 令 $\tan\frac{x}{2}=t$, 则

$$\text{原式}=\int \frac{1}{1+\underbrace{\frac{2t}{1+t^2}}}\cdot\underbrace{\frac{2}{1+t^2}}dt$$

$$=\int \frac{2dt}{(1+t)^2}=-\frac{2}{1+t}+C$$

$$=-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C.$$

【例14】（1994年1，2，3）求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(2x)+2\sin x}$.

【解】 原式 $=\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x(\cos x+1)}$

$$\boxed{R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)}$$

$$\mathrm{d}\cos x$$

$$=\int \frac{-\sin x\,\mathrm{d}x}{2(1-\cos^2 x)(1+\cos x)} \quad \mathrm{d}\cos x$$

$$\overset{\cos x=u}{=\!=}-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u)(1+u)^2} \qquad \frac{1}{2}[(1-u)+(1+u)]$$

$$=-\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{1-u^2}+\frac{1}{(1+u)^2}\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{8}\left[\ln\frac{1-u}{1+u}+\frac{2}{1+u}\right]+C$$

$$=\frac{1}{8}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+\frac{1}{4(1+\cos x)}+C.$$

【例15】计算 $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x(1+\sin x)}$

$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

$\boxed{d\sin x}$

[解] 原式 $\displaystyle = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos^2 x(1+\sin x)} = \int \frac{d\sin x}{(1-\sin^2 x)(1+\sin x)}$

$\displaystyle \overset{\sin x = u}{=\!=} \frac{1}{2}\int \frac{[(1-u)+(1+u)]}{(1-u^2)(1+u)}\, du = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(1+u)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{1-u^2}$

【例16】计算 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x(\sin x+\cos x)}$

$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$

$d\tan x$

[解] 原式 $\displaystyle = \int \frac{d\tan x}{\tan x(\tan x+1)}$

$\displaystyle \overset{\tan x = u}{=\!=} \int \frac{(1+u)-u}{u(u+1)}\, du$

3)简单无理函数积分 $\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})\mathrm{d}\,x$

令 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$

【例17】计算 $\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx.$

【解1】令 $\sqrt{\frac{x+1}{x}}=t$, 则 $x=\frac{1}{t^2-1}, dx=-\frac{2t}{(t^2-1)^2}dt,$

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx=\int(t^2-1)t\frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt$$

$$=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=-2\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)+C$$

【例17】计算 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx.$

【解2】

$$\text{原式} = \int \frac{x+1}{x\sqrt{x^2+x}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}} + \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}} \quad -d\left(\frac{1}{x}+1\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$$

*

2 + 3 + 3

两个概念

3种方法

3类积分

① 重点：3种方法

② 难度.


还不关注，
你就慢了