高数基础班（18）

18	多元函数的极值（无约束极值；条件极值）；最大最小值	P144-P149

主讲 武忠祥 教授

还不关注，你就慢了

第三节　多元函数的极值与最值

本节内容要点

一. 考试内容概要

（一）无约束极值 ✓

（二）条件极值与拉格朗日乘数法

（三）最大最小值

二. 常考题型方法与技巧

题型一 求极值（无条件）

题型二 求最大最小值

题型三 最大最小值应用题

考试内容概要

（一）无约束极值

定义7 若在点 (x_0,y_0) 的某邻域内恒成立不等式

$$f(x,y)\le f(x_0,y_0) \quad (f(x,y)\ge f(x_0,y_0))$$

则称 f 在点 (x_0,y_0) 取得极大值（极小值），点 (x_0,y_0) 称为 f 的极大值点（极小值点），极大值与极小值统称为极值，极大值点与极小值点统称为极值点.

定理5（极值的必要条件） 设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) ① 存在偏导数，且 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ ② 的极值点，则

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\quad f'_y(x_0,y_0)=0.$$

(0,0) ✓

驻点 $\underset{|x|+|y|}{\overset{xy}{\rightleftarrows}}$ 极值.

定理6（极值的充分条件） 设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有二阶连续偏导数，又 $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$，f(x,y) 可导

记 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则

（1）当 $AC-B^2>0$ 时，有极值 $\begin{cases} A>0 & \text{极小值;} \\ A<0 & \text{极大值.} \end{cases}$

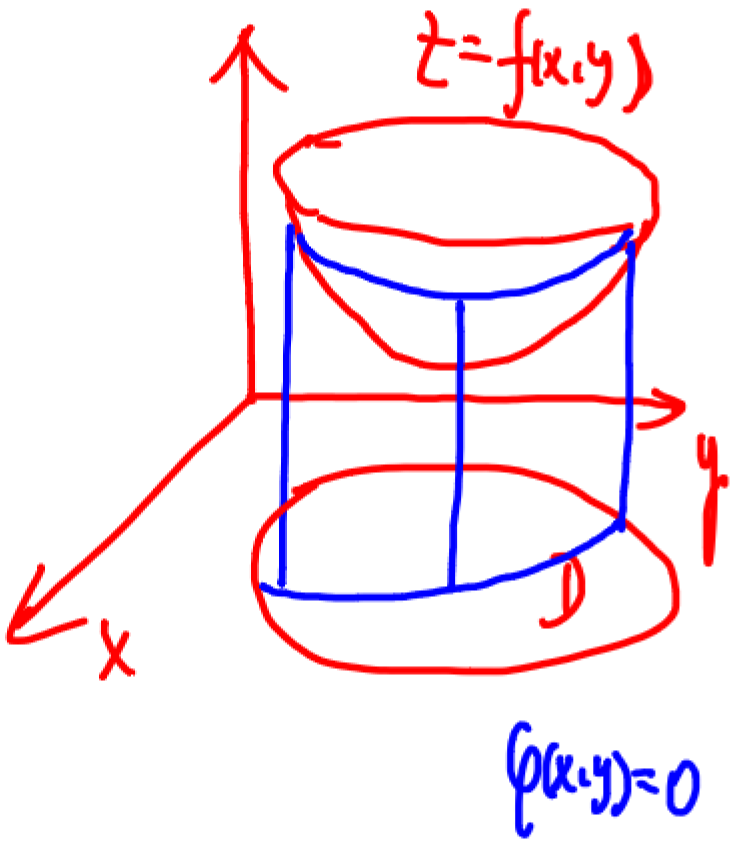
（2）当 $AC-B^2<0$ 时，无极值.

（3）当 $AC-B^2=0$ 时，不一定（一般用定义判定）.

可能极值点：
①驻点. (*)
②f_x 与 f_y 都不存在 ✓
f_x 不存在，$f_y=0$
$f_x=0$，f_y 不存在

（二）条件极值与拉格朗日乘数法

$z=f(x,y)$



1） 函数 $f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 条件下的极值.

令 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

$$\begin{cases} F_x=f_x'(x,y)+\lambda\varphi_x'(x,y)=0, \\ F_y=f_y'(x,y)+\lambda\varphi_y'(x,y)=0, \\ F_\lambda=\varphi(x,y)=0, \end{cases}$$

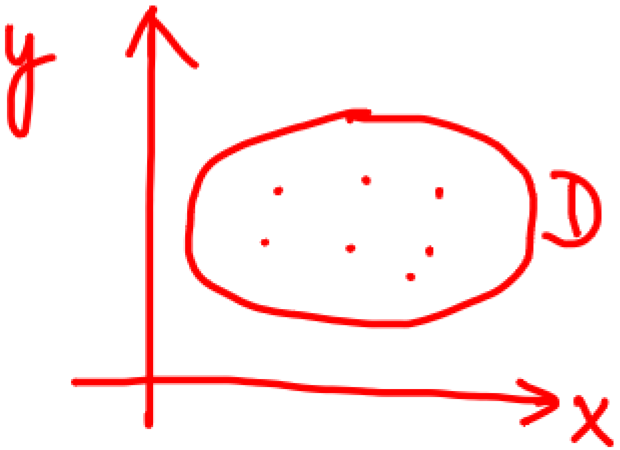
2） 函数 $f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0,\psi(x,y,z)=0$

条件下的条件极值.

令 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$

（三）最大最小值

$f(x)$



1. 求连续函数 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上的最大最小值

1） 求 $f(x,y)$ 在 D 内部可能的极值点.

2） 求 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最大最小值. *

3） 比较

2. 应用题

1) $z=f(x,y)$ ✓

常考题型与典型例题

常考题型

1. 求极值
2. 求连续函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上的最大最小值；
3. 最大最小值应用题.

【例1】（2003年，3）设可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极小值则下列结论正确的是

（A） $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数大于零.

（B） $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零.

（C） $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数小于零.

（D） $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数不存在.

$f(x_0,y)=\varphi(y)$

$f_y(x_0,y_0)=\varphi'(y_0)$

【解】

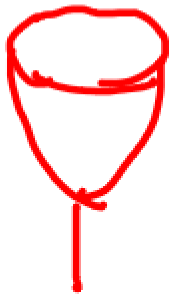
[解1] $f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0$

$\varphi'(y_0)=0,$

[解2] $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 取极小值

$\varphi(y)=f(x_0,y)$ 在 y_0 取极小值

$\varphi'(y_0)=0$



(x_0,y_0)

【例2】(2009年, 2) 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为

$dz = \overset{z_x}{x}dx + \overset{z_y}{y}dy$, 则点 $(0,0)$

$z_x = x$, $z_y = y$

X (A) 不是 $f(x,y)$ 的连续点.

① $z_x(0,0) = z_y(0,0) = 0$

(B) 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

$(0,0)$

(C) 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

② $A = z_{xx} = 1$, $C = z_{yy} = 1$, $B = z_{xy} = 0$

✓ (D) 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

$AC - B^2 = 1 > 0$ 有极值.

【解1】

$A = 1 > 0$, 极小值.

【例2】(2009年, 2) 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为

$dz=xdx+ydy$, 则点 $(0,0)$

(A) 不是 $f(x,y)$ 的连续点.

(B) 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(C) 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

(D) 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

【解2】 $z=z(x,y)$

$z_x=x,\ z_y=y$

① 偏积分 ✓ 直接法

$z_x=x \qquad z=\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+\varphi(y)$

$z_y=y \qquad + \qquad z_y=\varphi'(y)=y,\ \varphi(y)=\frac{1}{2}y^2+c$

$\boxed{z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+c}$ 极小值

② 凑微分 ✓

$dz=xdx+ydy=d(\frac{1}{2}x^2)+d(\frac{1}{2}y^2)$

$=d(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2)$

$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+c$

【例2】(2009年, 2) 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为

$\underline{dz=xdx+ydy}$, 则点 $(0,0)$

(A) 不是 $f(x,y)$ 的连续点.

(B) 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(C) 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

(D) 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

【解3】排除法 $z=\underline{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2}=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

【例3】(2017年3) 二元函数 $z = xy(3 - x - y)$ 的极值点是（　）

(A) $(0,0)$,　(B) $(0,3)$,　(C) $(3,0)$,　(D) $(1,1)$.

【解】由 $\begin{cases} z_x = y(3 - 2x - y) = 0 \\ z_y = x(3 - 2y - x) = 0 \end{cases}$ 得驻点 $(0,0), (0,3), (3,0), (1,1)$.

$$z_{xx} = -2y, z_{yy} = -2x, z_{xy} = 3 - 2x - 2y.$$

在 $(0,0)$ 点 $AC - B^2 = -9 < 0$, 无极值;

在 $(0,3)$ 点 $AC - B^2 = -9 < 0$, 无极值;

在 $(3,0)$ 点 $AC - B^2 = -9 < 0$, 无极值;

在 $(1,1)$ 点 $AC - B^2 = 3 > 0$, 有极值;

【例4】(2009年, 1, 3) 求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

$x=0$　　　　$y=\frac{1}{e}$

【解】① $f_x'(x,y)=2x(2+y^2)$, $f_y'(x,y)=2x^2y+\ln y+1$.

令 $\begin{cases} f_x'(x,y)=0, \\ f_y'(x,y)=0, \end{cases}$ 解得唯一驻点 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$. 由于

② $A=f_{xx}''\left(0,\frac{1}{e}\right)=2(2+y^2)\Big|_{\left(0,\frac{1}{e}\right)}=2\left(2+\frac{1}{e^2}\right)$,

"先代后求"

$B=f_{xy}''\left(0,\frac{1}{e}\right)=4xy\Big|_{\left(0,\frac{1}{e}\right)}=0$,

$C=f_{yy}''\left(0,\frac{1}{e}\right)=\left(2x^2+\frac{1}{y}\right)\Big|_{\left(0,\frac{1}{e}\right)}=e$,

所以 $AC-B^2=2e\left(2+\frac{1}{e^2}\right)>0$　$A>0$. 极小值为 $f\left(0,\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$.

【例5】(2008年2) 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ ≥ 0

和 $x+y+z=4$ 下的最大值和最小值.

$\boxed{\text{条件最值.}}$

【解】

① $F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4)$.

$$令\begin{cases} F'_x=2x+2\lambda x+\mu=0, \\ F'_y=2y+2\lambda y+\mu=0, \\ F'_z=2z-\lambda+\mu=0, \\ F'_\lambda=x^2+y^2-z=0, \\ F'_\mu=x+y+z-4=0, \end{cases}$$

$x(1+\lambda)=y(1+\lambda)$, $(x-y)(1+\lambda)=0$

① 若 $\lambda=-1 \Rightarrow \mu=0 \Rightarrow z=-\frac{1}{2}$, ✗

② 若 $x=y$, $z=2x^2$

$2x^2+2x-4=0$

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$x_1=1$, $x_2=-2$

解方程组，得 $(x_1,y_1,z_1)=(1,1,2)$, $(x_2,y_2,z_2)=(-2,-2,8)$.

② 故所求的最大值为72，最小值为6.

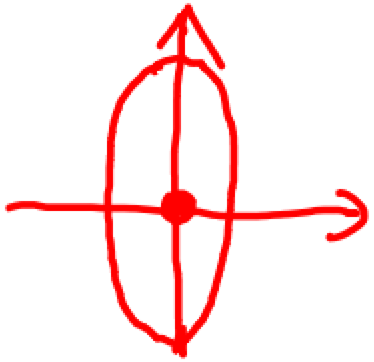
【例6】(2005年2) 已知 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=2x\,\mathrm{d}x-2y\,\mathrm{d}y$ $= dx^2-dy^2$

且 $f(1,1)=2$. 求 $f(x,y)$ 在 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+\dfrac{y^2}{4}\le 1\right\}$ 上的最大最小值. $= d(x^2-y^2)$

【解1】 由 $\mathrm{d}z=2x\,\mathrm{d}x-2y\,\mathrm{d}y$ $z=x^2-y^2+C$

1 可知 $z=f(x,y)=x^2-y^2+C$. $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

再由 $f(1,1)=2$, 得 $C=2$, 故 $z=f(x,y)=x^2-y^2+2$.



令 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x=0, \dfrac{\partial f}{\partial y}=-2y=0$, 解得驻点 $(0,0)$

2 在椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上, $z=x^2-(4-4x^2)+2$ *

即 $z=5x^2-2 \quad (-1\le x\le 1)$,

其最大值为 $z\big|_{x=\pm1}=3$, 最小值为 $z\big|_{x=0}=-2$, 再与 $f(0,0)=2$

3 比较, 可知 $f(x,y)$ 在椭圆域 D 上的最大值为 3, 最小值为 -2 .

【解2】① 同解法一，得驻点 $(0,0)$

② 设 $L = x^2 - y^2 + 2 + \lambda\left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1\right)$

*

令 $\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = -2y + \frac{\lambda}{2} y = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0, \end{cases}$

$x(1+\lambda)=0,$ $x=0,\ y=\pm 2$

$-2y - \frac{1}{2}y=0$

$\lambda=-1$ $y=0,\ x=\pm 1$

解得4个可能的极值点 $(0,2),(0,-2),(1,0)$ 和 $(-1,0)$

又 $f(0,2) = -2, f(0,-2) = -2, f(1,0) = 3, f(-1,0) = 3$，再与

③ $f(0,0) = 2$ 比较，得 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为3，最小值为 $-2.$

【解3】① 同解法一，得驻点 $(0,0)$

② 椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 的参数方程为 $x=\cos t, y=2\sin t$.

则 $z=f(x,y)=x^2-y^2+2=\cos^2 t-4\sin^2 t+2$

$$=3-5\sin^2 t$$

故 $f_{\max}=3, f_{\min}=-2$

①

② × ✓

③

3   -2

③ $f(0,0)=2$