高数基础班（7）

7	高阶导数；常考题型举例（导数定义；复合、隐函数、参数方程求导；高阶导数；导数应用）	P51-P58

主讲 武忠祥 教授

（三）高阶导数

1）定义6(高阶导数) $y^{(n)}=[f^{(n-1)}(x)]',$

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$$

注：如果函数 $f(x)$ 在点 x 处 n 阶可导，则在点 x 的某邻域内 $f(x)$ 必定具有一切低于 n 阶的导数.

2）常用的高阶导数公式：

$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$

1）$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$； 2）$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$；

3）$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$ 4）$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$.

【例14】设 $y=\sin 3x$，求 $y^{(n)}$.

$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$; ✓

【解】令 $\boxed{y=\sin u,}$ $u=3x$

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot 3$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{du^2}\cdot 3^2$

$\sin^{(n)}(ax+b)=a^n\sin\left[ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2}\right]$

$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d^ny}{du^n}\cdot 3^n=\sin(u+n\frac{\pi}{2})3^n=3^n\sin(3x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

【例15】设 $y=x^2\cos x$，求. $y^{(n)}$

$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$.

【解】令 $u=x^2$. $v=\cos x$ $y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$ ✓

$y^{(n)}=x^2\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})+n(2x)\cos\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot 2\cos\left(x+(n-2)\frac{\pi}{2}\right)$

常考题型与典型例题

1. 导数定义；　　2. 复合函数、隐函数、参数方程求导；

3. 高阶导数；　　4. 导数应用

(一) 导数定义

【例16】(1994年3) 已知 $f'(x_0)=-1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$ ___1___.

【解1】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x} \xlongequal{*} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0-2x)-f(x_0)}{-2x}\cdot\dfrac{-2x}{x} = -2f'(x_0)+f'(x_0)$ (1)

$-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0-x)-f(x_0)}{-x}\cdot\dfrac{-x}{x}$ $= -f'(x_0)$ $=1$

Δx

$f'(x_0)=\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}$

$\square\to 0$

$\square\neq 0$

【解2】具体函数：$f(x)=-x$，

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{-(x_0-2x)+(x_0-x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$

选，填.

【例17】（2011年2, 3）已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$,

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

(A) $-2f'(0)$. $=-2$ (B) $-f'(0)$. $=-1$

(C) $f'(0)$ $=1$ (D) 0.

【解1】直接法 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^3)}{x^3}=f'(0)-2f'(0)=-f'(0)$

【解2】排除法 $f(x)=x$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-2x^3}{x^3}=-1$

$f'(0)=1$

【例18】（2013年，1）设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n(f(\frac{1}{n})-1)=$ ____1____ . [1]

$f(0)$

【解】【解】原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\frac{1}{n})-1}{\frac{1}{n}}=f'(0)$ ，$f(0)=1$

由 $y-x=e^{x(1-y)}$ 知当 $x=0$，时 $y=1$

$y'-1=e^{x(1-y)}\left[(1-y)+x(-y')\right]$

$y'(0)-1=0\Rightarrow y'(0)=1$

【例19】(2018年1, 2, 3) 下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是（ ）

$a=0$

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$, 可导　　(B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$, 可导

(C) $f(x)=\cos|x|$, 可导　　(D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

【解1】直接法 (A) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|\sin|\Delta x|}{\Delta x}=0$ →0 无穷小　(B) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|\sin\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x}=0$ →0 无穷小

$\left|\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\right|=1$

【解2】排除法 (C) $\cos x$ 可导. (D) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\sqrt{|\Delta x|}-1}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}-\frac{1}{2}, & \Delta x\to 0^+\\ \frac{1}{2}, & \Delta x\to 0^-\end{cases}$

注：常用的结论：设 $f(x)=\varphi(x)|x-a|$, 其 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的充要条件是 $\varphi(a)=0$.

【例20】设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是 存在

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty} h[f(a+\frac{1}{h})-f(a)]$ $=\lim\limits_{h\to+\infty}\frac{f(a+\frac{1}{h})-f(a)}{\frac{1}{h}}=f'_+(a)$

(B) $\lim\limits_{n\to\infty} n[f(a+\frac{1}{n})-f(a)]$

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$

(D) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ $=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$

$\frac{1}{h}\to 0^+$　$\frac{1}{n}\to 0^+$　$n\to+\infty$

$f'(a)$ 存在

$\Delta x\to 0$

$\square\to 0$　$\square\neq 0$

$f'(a)$ 存 $=\lim\frac{f(a+\square)-f(a)}{\square}$

$\square\to 0$　$\square\neq 0$　$\square\to 0^+$　$\square\to 0^-$　?

$h=0$　?

$f'(0)$ 不存在　$f(x)=|x|$

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|-|-h|}{2h}=0$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{2}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right]$

不存在

(二) 复合函数、隐函数、参数方程求导

【例21】(1993年3) 设 $y=\sin[f(x^2)]$，其中 f 具有二阶导数，

求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

【解】 $\frac{dy}{dx}=\cos[f(x^2)]f'(x^2)\cdot 2x$

$\frac{d^2y}{dx^2}=-\sin[f(x^2)]f'^2(x^2)(2x)^2+\cos[f(x^2)]f''(x^2)\cdot(2x)^2$

$+\cos[f(x^2)]f'(x^2)\cdot 2$

【例22】（2022年2）已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2+xy+y^3=3$ 确定，则

$y''(1)=$ ________.

$-\dfrac{31}{32}$

[解] 当 $x=1$, $y=1$　　$1+y+y^3=3$　　$y^3-1+y-1=0$　　$(y-1)[y^2+y+2]=0$

$2x+y+xy'+3x^2y'=0$　　$3+y'(1)+3y'(1)=0$

$y'(1)=-\dfrac{3}{4}$

$2+2y'+xy''+6xy'+3x^2y''=0$

$y''(1)=-\dfrac{31}{32}$

【例23】(2021年1, 2)设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2e^t+t+1, \\ y=4(t-1)e^t+t^2 \end{cases}$ 确定，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$ $\underline{\quad \frac{2}{3} \quad}$. $\frac{2}{3}$

t

【解】 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{4e^t+4(t-1)e^t+2t}{2e^t+1}=\dfrac{2t[2e^t+1]}{2e^t+1}=2t$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=2\cdot\dfrac{1}{x'(t)}=\dfrac{2}{2e^t+1}$ $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2}=2$

$t=0$ $\qquad \dfrac{2}{3}$

（三）高阶导数

【例24】（2007年2，3）设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$ ________. $\left[\dfrac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}\right]$

【解1】$y=(2x+3)^{-1}$，

$y'=(-1)(2x+3)^{-2}\cdot 2$

$y''=\underline{(-1)(-2)}(2x+3)^{-3}\cdot 2^2$

$y^{(n)}=(-1)^n n!(2x+3)^{-(n+1)}\cdot 2^n$

$y^{(n)}(0)=\dfrac{(-1)^n n!\cdot 2^n}{3^{n+1}}$

【解2】$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\boxed{\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}}x^n+o(x^n)$

$a_n x^n$

$\dfrac{1}{1-x}=1+x+\cdots+x^n\cdots$

$\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$

$a_n=(-1)^n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$y=\dfrac{1}{2x+3}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1+\frac{2}{3}x}=\dfrac{1}{3}\left[1-\dfrac{2}{3}x+\cdots+(-1)^n\left(\dfrac{2}{3}x\right)^n+\cdots\right]$

【例25】（2015年2）函数 $f(x)=x^2 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$

$f^{(n)}(0)=$ ________ .

[$n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$]

$v=2^x$　① 公式　② 求 y', y'' 归纳　③ 泰勒

$v'=2^x\ln 2$

【解1】 $u=x^2$, $v=2^x$, $u'=2x$, $u''=2$, $u'''=0$ … $f^{(n)}(x_0)$

$$f^{(n)}(0)=C_n^2 u''(0) v^{(n-2)}(0)=\frac{n(n-1)}{2!}\cdot 2\cdot 2^0 \ln^{n-2}2=n(n-1)\ln^{n-2}2$$

$$e^x=1+x+\cdots\frac{x^n}{n!}\cdots$$

【解2】 $$f(x)=x^2 e^{x\ln 2}=x^2\left[1+x\ln 2+\cdots+\frac{(\ln 2)^n}{n!}x^n+\cdots\right]$$ $n-2$

$$x^2+\cdots+\frac{(\ln 2)^n}{n!}x^{n+2}+\cdots$$

$$\cancel{a_n=\frac{(\ln 2)^n}{n!}}$$

$$a_n=\frac{(\ln 2)^{n-2}}{(n-2)!}=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$f^{(n)}(0)=n(n-1)\ln^{n-2}2$$

（四）导数应用

(1)导数的几何意义

【例26】（2011年3）曲线 $\tan\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)=e^{y}$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 ______. $(y=-2x)$

$k_{切}$

$k_{切}=\frac{dy}{dx}=-2$

$y-0=(-2)(x-0)$

$y=-2x$

$\sec^{2}\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)(1+y')=e^{y}y'$

$2(1+y'(0))=y'(0)\Rightarrow y'(0)=-2$

【例27】（2013年2）曲线 $\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = \ln\sqrt{1+t^2}, \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为

$= \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$ $\qquad$ $(x+y=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2)$

$$k_{切} = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = t$$

$k_{切}=1$ $\qquad$ $k_{法}=-1$

$x_0 = \frac{\pi}{4}$, $\quad y_0 = \frac{1}{2}\ln 2$

$y - \frac{1}{2}\ln 2 = -\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad$ $y + x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$

【例28】（1997年, 1）对数螺线 $\rho=e^{\theta}$ 在点 $(\rho,\theta)=\left(e^{\pi/2},\frac{\pi}{2}\right)$

处的切线的直角坐标方程为 ____. $(x+y=e^{\frac{\pi}{2}})$

$k_{切}=\frac{dy}{dx}$ $\theta=\frac{\pi}{2}$

$\begin{cases} x=\rho\cos\theta=e^{\theta}\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta=e^{\theta}\sin\theta \end{cases}$ 参数 $\frac{dy}{dx}=\frac{e^{\theta}\sin\theta+e^{\theta}\cos\theta}{e^{\theta}\cos\theta-e^{\theta}\sin\theta}$

$k_{切}=-1$ $x_0=0$, $y_0=e^{\frac{\pi}{2}}$

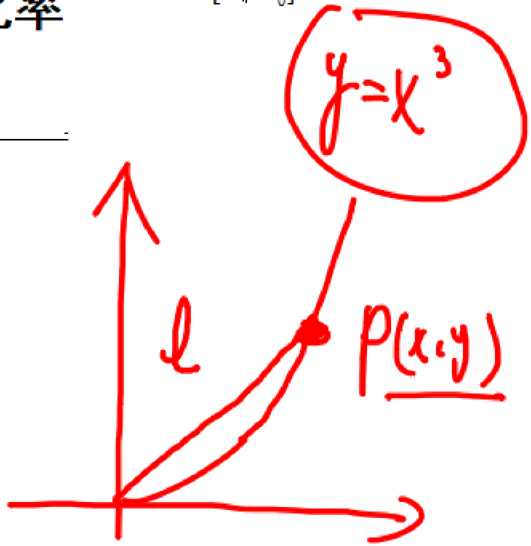
$y-e^{\frac{\pi}{2}}=(-1)(x-0)$ $y+x=e^{\frac{\pi}{2}}$

(2)相关变化率(数三不要求)

l, x

【例29】(2016年2) 已知动点 P 在曲线 $y=x^3$ 上运动，记坐标原点与点 P 间的距离为 l. 若点 P 的横坐标对时间的变化率为常数 v_0，则当点 P 运动到点 $(1,1)$ 时，l 对时间的变化率是 ____ [$2\sqrt{2}v_0$]

$\frac{dl}{dt}$



【解】 $l=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x^6}$ ①

$$\frac{dl}{dt}=\frac{2x+6x^5}{2\sqrt{x^2+x^6}}\cdot\frac{dx}{dt} \quad ②$$

$$\frac{dl}{dt}=\frac{8}{2\sqrt{2}}v_0=2\sqrt{2}v_0$$

$$\frac{dx}{dt}=v_0$$

第二章　导数与微分

导数与微分

- 题型一　利用导数定义求极限
- 题型二　利用导数定义求导数
- 题型三　利用导数定义判断可导性 *

α值

求导法

- 题型一　复合函数
- 题型二　隐函数
- 题型三　参数方程（数三不要求）
- 题型四　高阶导数 *

导数应用

- 题型一　切线、法线
- 题型二　相关变化率（数三不要求）