

第四章 多元函数微分学

1987 ~ 2008 本章考题考点分布统计表

考点	考频	考题分布与分值			
基本概念及性质	1	2007,7 题 4 分			
求多元函数的偏 导数及全微分	5	2004,4 题 4 分 2008,13 题 4 分	2004,21 题 10 分	2005,11 题 4 分	2007,15 题 4 分
多元函数的极值	3	2005,20 题 10 分	2006,12 题 4 分	2008,21 题 11 分	
反问题	1	2006,20 题 12 分			

本章导读

本章主要研究二元函数的偏导数、全微分等概念, 要掌握计算它们的各种方法以及它们的应用. 一元函数中的许多结论可以推广到二元函数中来, 但有些结论是不成立的. 二元函数微分学要比一元函数微分学复杂得多, 我们要掌握它们的共同规律, 踏踏实实地做一些题目, 一定会收到预期的效果. 公众号: 旗胜考研

试题特点

每年试题一般是一个大题、一个小题, 分数约占试卷的 8%, 主要考查复合函数求偏导数及多元函数的极值, 难度不是很大. 一定要熟练掌握复合函数求偏导数的公式, 特别要注意抽象函数求高阶偏导数的题目, 以及复合函数求偏导数的方法在隐函数求偏导中的应用. 同时, 多元函数微分学在几何中的应用和求函数的极值、最值也是考研数学的一个重点.

真题分类练习



一阶题, 相对容易, 推荐先做



二阶题, 较综合, 可在第二轮复习时做



一、基本概念及性质



1 (2007, 7 题, 4 分) 二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的一个充分条件是

- (A) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} [f(x, y) - f(0, 0)] = 0.$
 (B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$
 (C) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$
 (D) $\lim_{x \rightarrow 0} [f'_x(x, 0) - f'_x(0, 0)] = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} [f'_y(0, y) - f'_y(0, 0)] = 0.$

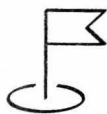
答题区

二、求多元函数的偏导数及全微分



2 (2004, 4 题, 4 分) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z = e^{2x-3z} + 2y$ 确定, 则 $3 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

答题区



3 (2004, 21 题, 10 分) 设 $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$, 其中 f 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$

答题区

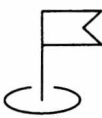
☐
☐
☐
☐
☐
☐ 一天

☐ 四天

☐ 七天

☐ 一月

☐ 考前

 **4** (2005, 11 题, 4 分) 设函数 $u(x, y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t) dt$, 其中函数 φ 具有二阶导数, ψ 具有一阶导数, 则必有

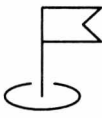
(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

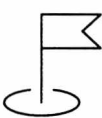
(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

答题区

 **5** (2007, 15 题, 4 分) 设 $f(u, v)$ 是二元可微函数, $z = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

答题区

 **6** (2008, 13 题, 4 分) 设 $z = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$, 则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} =$ _____.

答题区

三、多元函数的极值



7 (2005, 20 题, 10 分) 已知函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = 2xdx - 2ydy$, 并且 $f(1, 1) = 2$.

求 $f(x, y)$ 在椭圆域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$ 上的最大值和最小值.

答题区



8 (2008, 21 题, 11 分) 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 4$ 下的最大和最小值.

答题区

9 (2006, 12 题, 4 分) 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$, 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是

- (A) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$. (B) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.
 (C) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$. (D) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

答题区

四、反问题

10 (2006, 20 题, 12 分) 设函数 $f(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

(I) 验证 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$;

(II) 若 $f(1) = 0, f'(1) = 1$, 求函数 $f(u)$ 的表达式.

答题区