

第二章 矩阵

1987 ~ 2008 本章考题考点分布统计表

考点	考频	考题分布与分值			
矩阵运算、初等变换	4	2003, 一(5) 题 4 分	2004, 13 题 4 分	2005, 14 题 4 分	2006, 14 题 4 分
伴随矩阵、可逆矩阵	3	1998, 二(5) 题 3 分	2000, 一(5) 题 3 分	2008, 7 题 4 分	
矩阵的秩	2	1998, 数三 3 分	2007, 16 题 4 分		
矩阵方程	5	1997, 三(6) 题 5 分 2002, 十一题 6 分	1998, 十二题 5 分	1999, 十一题 6 分	2001, 十一题 6 分

本章导读

本章从 1997 年开始有考题. 矩阵是线性代数的核心内容, 矩阵的概念、运算及理论贯穿线性代数的始终. 几乎年年都有单纯的矩阵知识的考题, 而且其他考题也回避不了矩阵的知识, 矩阵的重要性不言而喻.

二十多年来, 矩阵的解答题考得很少, 但复习时, 对于填空与选择不要大意失荆州.

真题分类练习



一阶题, 相对容易, 推荐先做



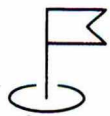
二阶题, 较综合, 可在第二轮复习时做

一、矩阵运算、初等变换

试题特点

试题简单、基本, 但容易失误. 由于矩阵乘法没有交换律, 没有消去律, 有零因子, 这和大家熟悉的算术运算有很大区别, 试题往往就是考查这里的基本功, 因此复习时对于矩阵的运算要正确, 熟练, 不要眼高手低, 犯低级失误.

矩阵的初等行变换是左乘初等矩阵, 矩阵的初等列变换是右乘初等矩阵, 这里要分清左乘、右乘, 记住初等矩阵的逆矩阵.



1 (2003, 一(5)题, 4分) 设 α 为三维列向量, α^T 是 α 的转置, 若 $\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 则

$\alpha^T\alpha = \underline{\hspace{2cm}}.$

答题区



2 (2004, 13题, 4分) 设 A 是三阶方阵, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B , 再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C , 则满足 $AQ = C$ 的可逆矩阵 Q 为

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

答题区



3 (2005, 14题, 4分) 设 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B , A^* , B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 则

- (A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^* . (B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^* .
(C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$. (D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$.

答题区

4 (2006, 14 题, 4 分) 设 A 为三阶矩阵, 将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B , 再将 B 的第 1 列的 -1

倍加到第 2 列得 C , 记 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则

(A) $C = P^{-1}AP$. (B) $C = PAP^{-1}$. (C) $C = P^TAP$. (D) $C = PAP^T$.

答题区

解题加速度

1. (2001, 数三, 3 分) 设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 A 可逆, 则 B^{-1} 等于

(A) $A^{-1}P_1P_2$. (B) $P_1A^{-1}P_2$. (C) $P_1P_2A^{-1}$. (D) $P_2A^{-1}P_1$.



2. (2004, 数三, 4 分) 设 n 阶矩阵 A 与 B 等价, 则必有

(A) 当 $|A| = a (a \neq 0)$ 时, $|B| = a$. (B) 当 $|A| = a (a \neq 0)$ 时, $|B| = -a$.
(C) 当 $|A| \neq 0$ 时, $|B| = 0$. (D) 当 $|A| = 0$ 时, $|B| = 0$.



二、伴随矩阵、可逆矩阵

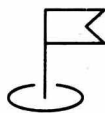
试题特点

伴随与可逆是矩阵中最重要的知识点,关键公式: $AA^* = A^*A = |A|E$,进而有

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* \text{ 或 } A^* = |A|A^{-1}$$

涉及伴随与可逆的试题非常多.要想到并灵活运用 $AA^* = A^*A = |A|E$ 这一核心公式.

定义法,单位矩阵恒等变形,可逆的充要条件都是重要的考点.



5 (1998,二(5)题,3分) 设 A 是任一 $n(n \geq 3)$ 阶方阵, A^* 是其伴随矩阵,又 k 为常数,且 $k \neq 0, \pm 1$,则必有 $(kA)^* =$

- (A) kA^* . (B) $k^{n-1}A^*$. (C) k^nA^* . (D) $k^{-1}A^*$.

答题区



6 (2008,7题,4分) 设 A 为 n 阶非零矩阵, E 为 n 阶单位矩阵.若 $A^3 = O$,则

- (A) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 不可逆. (B) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 可逆.
(C) $E - A$ 可逆, $E + A$ 可逆. (D) $E - A$ 可逆, $E + A$ 不可逆.

答题区



7 (2000,一(5)题,3分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}$, E 为四阶单位矩阵,且 $B = (E +$

$A)^{-1}(E - A)$,则 $(E + B)^{-1} =$ _____.

答题区





解题加速度

1. (1993, 数四, 8分) 已知三阶矩阵 A 的逆矩阵为 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, 试求伴随矩阵 A^* 的逆矩阵.



演算空间

2. (2002, 数四, 3分) 设 A, B 为 n 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 对应的伴随矩阵, 分块矩阵 $C =$

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}, \text{ 则 } C \text{ 的伴随矩阵 } C^* =$$

(A) $\begin{bmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} |A|B^* & O \\ O & |B|A^* \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{bmatrix}$.



演算空间

3. (1992, 数四, 3分) 设 $A, B, A+B, A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵, 则 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$ 等于

(A) $A^{-1}+B^{-1}$.

(B) $A+B$.

(C) $A(A+B)^{-1}B$.

(D) $(A+B)^{-1}$.



演算空间

4. (2002, 数四, 3分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = A^2 - 3A + 2E$, 则 $B^{-1} =$ _____.



演算空间

三、矩阵的秩



试题特点

矩阵的秩是重点也是难点,要正确理解矩阵秩的概念

$r(A) = r \Leftrightarrow A$ 中有 r 阶子式不为 0, 每个 $r+1$ 阶子式(若还有)全为 0.

在这里要分清“有一个”与“每一个”, 当 $r(A) = r$ 时, A 中能否有 $r-1$ 阶子式为 0? 能否有 $r+1$ 阶子式不为 0?

你用行列式来如何描述 $r(A) \geq r$? 如何描述 $r(A) < r$?

要搞清矩阵的秩与向量组秩之间的关系, 这种转换是重要的. 在线性相关的判断与证明中往往是由矩阵的秩推导向量组的秩, 而解方程组时往往由相关、无关推导矩阵的秩.

经初等变换矩阵的秩不变, 这是求秩的最重要的方法, 有时可以把定义法与初等变换法结合起来分析推导矩阵的秩.

要学会用 ① $|A|$ 是否为 0, ② 相关、无关, ③ 方程组的解; 会用其中的两个信息夹逼求出矩阵 A 的秩.



8 (1998, 数三, 3 分) 设 $n(n \geq 3)$ 阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

若矩阵 A 的秩为 $n-1$, 则 a 必为

- (A) 1. (B) $\frac{1}{1-n}$. (C) -1. (D) $\frac{1}{n-1}$.

答题区



9 (2007, 16 题, 4 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 A^3 的秩为_____.

答题区

解题加速度

1. (1994, 数四, 3 分) 设 A, B 都是 n 阶非零矩阵, 且 $AB = O$, 则 A 和 B 的秩

- (A) 必有一个等于 0. (B) 都小于 n .
(C) 一个小于 n , 一个等于 n . (D) 都等于 n .



演算空间

2. (1995, 数四, 3 分) 设矩阵 $A_{m \times n}$ 的秩为 $r(A) = m < n$, E_m 为 m 阶单位矩阵, 下述结论中正确的是

- (A) A 的任意 m 个列向量必线性无关.
(B) A 的任意一个 m 阶子式不等于零.
(C) A 通过初等行变换, 必可以化为 (E_m, O) 形式.
(D) 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 一定有无穷多组解.



演算空间

3. (1996, 3 分) 设 A 是 4×3 矩阵, 且 A 的秩 $r(A) = 2$, 而 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $r(AB) =$



四、矩阵方程

试题特点

解矩阵方程时, 首先要根据矩阵的运算法则、性质把方程化简(特别要注意矩阵的乘法没有交换律), 化简之后有三种形式: 公众号: 旗胜考研

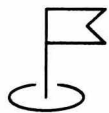
$$AX = B; XA = B; AXB = C$$

对于前两个方程, 若判断出 A 可逆, 则有

$$X = A^{-1}B; X = BA^{-1}$$

对于第三个方程, 若 A, B 均可逆, 则有 $X = A^{-1}CB^{-1}$.

那么, 再通过求逆等运算就可求出 X .



10 (1997, 三(6) 题, 5 分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 且 $A^2 - AB = E$, 其中 E 是三阶单

位矩阵, 求矩阵 B .

答题区

11 (1998, 十二题, 5 分) 设 $(2E - C^{-1}B)A^T = C^{-1}$, 其中 E 是 4 阶单位矩阵, A^T 是四阶矩阵 A 的转置矩阵, 且

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

求矩阵 A .

答题区

12 (1999, 十一题, 6 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 X 满足 $A^*X = A^{-1} + 2X$, 其

中 A^* 是 A 的伴随矩阵, 求矩阵 X .

答题区



13 (2001, 十一题, 6分) 已知矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

且矩阵 X 满足

$$AXA + BXB = AXB + BXA + E$$

其中 E 是三阶单位阵, 求 X .

答题区



14 (2002, 十一题, 6分) 已知 A, B 为三阶矩阵, 且满足 $2A^{-1}B = B - 4E$, 其中 E 是三阶单位矩阵.

(1) 证明: 矩阵 $A - 2E$ 可逆;

(2) 若 $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 求矩阵 A .

答题区