高数基础班（17）

17	多元函数微分法及举例（复合函数微分法；隐函数微分法）	P137-P144

主讲 武忠祥 教授

第二节　多元函数微分法

本节内容要点

一. 考试内容概要

（一）复合函数微分法

（二）隐函数微分法

二. 常考题型与典型例题

题型一　复合函数的偏导数与全微分

题型二　隐函数的偏导数与全微分

考试内容概要

$y=f(u),\ u=\varphi(x)$ 可导 $\Rightarrow y=f[\varphi(x)]$ 可导.

$y-u-x$

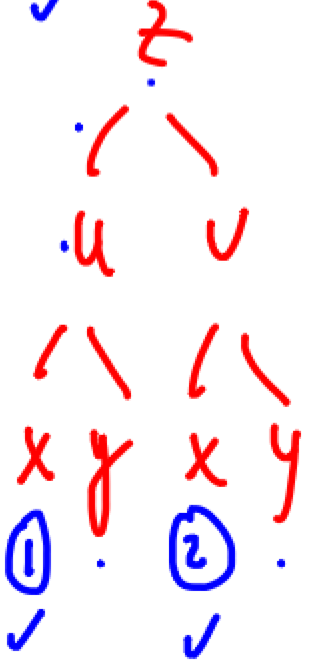
$y'_x = y'_u \cdot u'_x = f'(u)\varphi'(x)$

$dy = \boxed{y'_x dx} = y'_u u'_x dx = \boxed{y'_u du}$

（一）复合函数的微分法

定理4 设 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 在点 (x,y) 处有对 x 及对 y 的偏导数，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处有连续偏导数，则 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 在点 (x,y) 处的两个偏导数存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\boxed{\frac{\partial z}{\partial u}}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\boxed{\frac{\partial z}{\partial u}}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$



全微分形式的不变性

设函数 $z=f(u,v)$, $u=u(x,y)$ 及 $v=v(x,y)$ 都有连续的一阶偏导数，则复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 的全微分

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\boxed{\frac{\partial z}{\partial u}}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

（二）隐函数的微分法

1）由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$

$$\boxed{y'=-\frac{F'_x}{F'_y}.}$$

$F'_x \neq 0 \Rightarrow x=x(y,z)$

2）由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$

② $F'_x+F'_z\frac{\partial z}{\partial x}=0$

① 若 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内有连续偏导数，且 ② $F(x_0,y_0,z_0)=0$，③ * $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. 则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域可唯一确定一个有连续偏导数的函数 $z=z(x,y)$，并有

③ $F'_x dx+F'_y dy+F'_z dz=0$

$dz=(\quad)dx+(\quad)dy$

z_x　　z_y

① $$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},}\qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.}$$

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

复合函数及隐函数的偏导数与全微分的计算

一.复合函数偏导数与全微分

【例1】(2011年1) 设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$，则

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=\underline{\qquad\qquad}.$$

【解1】 $$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{y\sin xy}{1+x^2y^2}$$

先代后求

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{y^2\cos(xy)(1+x^2y^2)-2xy^3\sin xy}{(1+x^2y^2)^2}$$

?

故 $$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=4.$$

【例1】（2011年1）设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$ ，则

$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$ ________. $=\varphi'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x}$ ✓

【解2】 $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{y\sin xy}{1+x^2y^2}$ ✓ $F_x(x,2)=\frac{2\sin 2x}{1+4x^2}=\varphi(x)$ $\varphi(0)=0$

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=F_{xx}(0,2)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{x(1+4x^2)}$$

①先代后求 ✓

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{x(1+4x^2)}=4$$

②定义 ✓

【例2】（2011年3）设 $z=(1+\frac{x}{y})^{\frac{x}{y}}$，则 $dz|_{(1,1)}=$ ________.

$[(1+2\ln 2)(dx-dy)]$

$u=1$

【解1】令 $\frac{x}{y}=u$，$z=(1+u)^u$，$dz=z'_u\,du$　　$du=d\frac{x}{y}$

$z=e^{u\ln(1+u)}$，$dz=e^{u\ln(1+u)}\left[\ln(1+u)+\frac{u}{1+u}\right]\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}$

$dz\Big|_{(1,1)}=2\left[\ln 2+\frac{1}{2}\right](dx-dy)$　　$z'_x(1,1)$，$z'_y(1,1)$

【解2】 $z(x,1)=\underbrace{(1+x)^x}=e^{x\ln(1+x)}$　　$u'_y=-\frac{1}{y^2}$

$z'_x(x,1)=e^{x\ln(1+x)}\left[\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}\right]$，$z'_x(1,1)=2\left[\ln 2+\frac{1}{2}\right]=1+2\ln 2$

$dz=(1+2\ln 2)(dx-dy)$

$z(1,y)=(1+\frac{1}{y})^{\frac{1}{y}}\ \underline{\underline{\frac{1}{y}=u}}\ \underline{(1+u)^u}$　　$z'_y(1,1)=(1+2\ln 2)(-1)$

【例3】(2007年, 1) 设 $f(u,v)$ 为二元可微函数，$z = f(x^y, y^x)$，

则 $\dfrac{\partial z}{\partial x} =$ ________. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

$[yx^{y-1} f_1' + y^x \ln y f_2']$

$(a^x)' = a^x \ln a$

【解1】 $u = x^y$, $v = y^x$, $z = f(u,v)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} y x^{y-1} + \frac{\partial f}{\partial v} y^x \ln y$$

$$\begin{tikzcd} & z \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\ u \arrow[d] \arrow[dr] & & v \arrow[d] \arrow[dr] & \\ x & y & x & y \end{tikzcd}$$

【解2】 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f_1' y x^{y-1} + f_2' \cdot y^x \ln y$ ✓

【例4】(2017年1, 2) 设函数 $f(u,v)$ 具有2阶连续导数,

$y=f(e^x,\cos x)$, 求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$, $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

$\left[\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f_u'(1,1),\ \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=f_u'(1,1)+f_{uu}''(1,1)-f_v'(1,1)\right]$

【解】

$$\frac{dy}{dx}=f_1'e^x+f_2'(-\sin x),\quad f_2'(e^x,\cos x)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f_1'(1,1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f_{11}''e^{2x}+f_1'\cdot e^x+f_{22}''\sin^2x-f_2'\cos x$$

$$+f_{12}''(-e^x\sin x)\qquad+f_{21}''(-e^x\sin x)$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=f_{11}''(1,1)+f_1'(1,1)-f_2'(1,1)$$

【例5】(2019年3) 设函数 $f(u,v)$ 具有2阶连续偏导数, 函数

$g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$, 求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$. $[1-3f_{11}-f_{22}]$

$f''_{12}=f''_{21}$

【解】

$\dfrac{\partial g}{\partial x}=y-f'_1-f'_2$

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-[f''_{11}+f''_{12}]-[f''_{21}+f''_{22}]$

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=1-[f''_{11}-f''_{12}]-[f''_{21}-f''_{22}]$

$\dfrac{\partial g}{\partial y}=x-f'_1+f'_2$

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-[f''_{11}-f''_{12}]+[f''_{21}-f''_{22}]$

原式 $=1-3f''_{11}-f''_{22}$

【例6】(2009年2) 设 $z=f(x+y,x-y,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\mathrm{d}z$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

$z_x \quad z_y$

【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'+yf_3' \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}=f_1'-f_2'+xf_3'$

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=(f_1'+f_2'+yf_3')\mathrm{d}x+(f_1'-f_2'+xf_3')\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}z=f_1'(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+f_2'(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)+f_3'(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=(\quad)\mathrm{d}x+(\quad)\mathrm{d}y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''-f_{12}''+xf_{13}''+f_{21}''-f_{22}''+xf_{23}''+f_3'+y(f_{31}''-f_{32}''+xf_{33}'')$$

$$=f_{11}''+(x+y)f_{13}''-f_{22}''+(x-y)f_{23}''+xyf_{33}''+f_3'$$

【例7】(2011年1, 2) 设函数 $z = f(xy, yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$. 求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$

【解1】由 $z = f(xy, yg(x))$ 知

$g(1)$ $g'(1)=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yf_1' + yg'(x) f_2',$$

先代后求

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_1' + y[xf_{11}'' + g(x) f_{12}''] + g'(x) f_2' + yg'(x)[xf_{21}'' + g(x) f_{22}''].$$

?

由题意 $g(1)=1, g'(1)=0$，在上式中令 $x=1, y=1$ 得

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = f_1'(1,1) + f_{11}''(1,1) + f_{12}''(1,1).$$

【例7】(2011年1, 2) 设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$. 求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

先代后求

【解2】由 $z=f(xy,yg(x))$ 知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+yg'(x)f_2',$$

$x=1$　　$g'(1)=0$

由题意 $g(1)=1, g'(1)=0$，在上式中令 $x=1$ 得

$$z_x(1,y)=yf_1'(y,y)$$

$y=1$

$$z_{xy}(1,y)=f_1'(y,y)+y[f_{11}''(y,y)+f_{12}''(y,y)]$$

x

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1).$$

【例8】(2014年1,2)设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，

u

$z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$.

若 $f(0)=0, f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式。

【解】令 $e^x\cos y=u$，则 $z=f(u)$

$\lambda=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)e^x\cos y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-f'(u)e^x\sin y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)e^{2x}\cos^2 y+f'(u)e^x\cos y$$

$e^{2x}f''(u)=(4f(u)+u)e^{2x}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}\sin^2 y-f'(u)e^x\cos y$$

$f''(u)=4f(u)+u \qquad f''(u)-4f(u)=ue^{0u}$

$r^2-4=0 \quad r_{1,2}=\pm 2$

$f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u} \qquad f^*=au+b,$

$f^*=au+b$

$$a=-\frac{1}{4}, b=0.$$

齐 非特

$$f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{1}{4}u$$

$$f(0)=0, f'(0)=0$$

$$C_1=\frac{1}{16}, C_2=-\frac{1}{16},$$

$$f(u)=\frac{1}{16}(e^{2u}-e^{-2u}-4u)$$

二、隐函数的偏导数与全微分

【例9】(2015年2，3) 若函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 确定，则 $dz|_{(0,0)} =$ ________.

【解1】由 $x = 0, y = 0$ 知 $z = 0$

方程 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 两端微分得

$$e^{x+2y+3z}(dx + 2dy + 3dz) + yzdx + xzdy + xydz = 0$$

将 $x = 0, y = 0, z = 0$ 代入上式得

$$dx + 2dy + 3dz = 0$$

则 $dz|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}(dx + 2dy).$

【例9】(2015年2，3) 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程

$e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $dz|_{(0,0)}=$ ________.

$z'_x(0,0)$, $z'_y(0,0)$

【解2】由 $x=0, y=0$ 知 $z=0$

$$dz|_{(0,0)}=z_x(0,0)dx+z_y(0,0)dy$$

在 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 中令 $y=0$ 得，$e^{x+3z}=1$, 两边对 x 求导得

$$e^{x+3z}(1+3z_x)=0,$$

先代后求

$$z_x(0,0)=-\frac{1}{3}$$

同理可得 $z_y(0,0)=-\dfrac{2}{3}$

则 $dz|_{(0,0)}=-\dfrac{1}{3}(dx+2dy).$

【例10】（1988年4）已知$u+\mathrm{e}^u=xy$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

$F = u+e^u-xy=0$

$u=c$

【解】等式 $u+\mathrm{e}^u=xy$ 两端对 x 求偏导得

$$(1+e^u)\frac{\partial u}{\partial x}=y \qquad u=u(x,y)$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{1+e^u}}$$

① [illegible]

同理可得 $$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{1+e^u}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{(1+e^u)-e^u\dfrac{\partial u}{\partial y}y}{(1+e^u)^2}=\frac{1}{1+e^u}-\frac{xye^u}{(1+e^u)^3}$$

② $$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_u}=-\frac{-y}{1+e^u}=\frac{y}{1+e^u}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_u}=-\frac{-x}{1+e^u}=\frac{x}{1+e^u}$$

③ $$(1+e^u)du=ydx+xdy$$

$$du=\frac{y}{1+e^u}dx+\frac{x}{1+e^u}dy$$

【例11】(2010年1, 2) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$

确定，其中 F 为可微函数, 且 $F_2'\neq 0$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ( ) .

(A) x (B) z (C) $-x$ (D) $-z$

试

【解】 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{-\dfrac{xy}{x^2}F_1-\dfrac{xz}{x^2}F_2}{\dfrac{1}{x}F_2}$, $y\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{\dfrac{y}{x}F_1}{\dfrac{1}{x}F_2}$, $\dfrac{F_x'}{F_z'}$

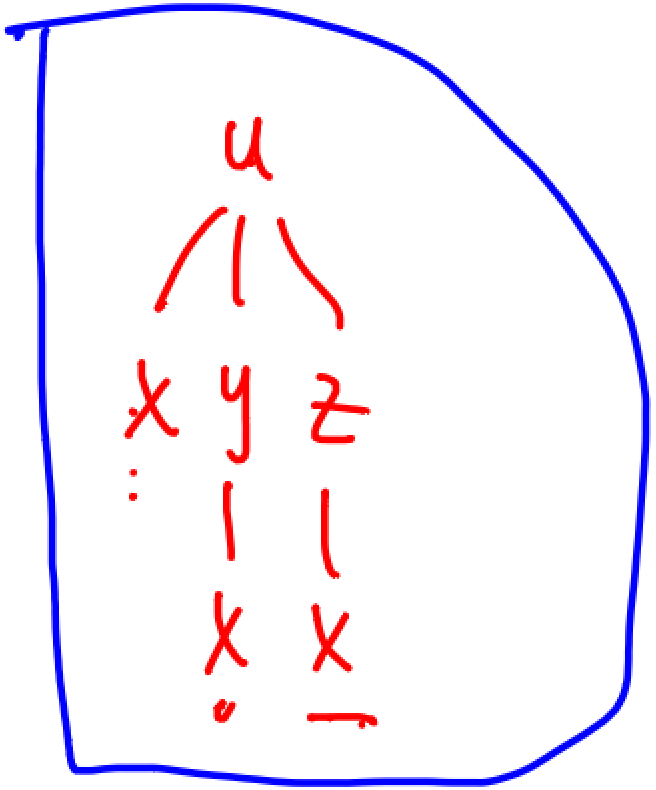
$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{-\dfrac{y}{x}F_1-\dfrac{z}{x}F_2}{\dfrac{1}{x}F_2}-\frac{\dfrac{y}{x}F_1}{\dfrac{1}{x}F_2}=z$$

故应选 (B) .

【例12】（2001年3）设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，

又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定：

$e^{xy}-xy=2$ 和 $e^{x}=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$，求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.



【解1】 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}. \qquad (1)$$

由 $e^{xy}-xy=2$ 两边对 x 求导，得

$$e^{xy}\left(y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)-\left(y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{x}.$$

又由 $e^{x}=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ 两边对 x 求导，得

$$e^{x}=\frac{\sin(x-z)}{x-z}\cdot\left(1-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right),\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1-\frac{e^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}.$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}+\left[1-\frac{e^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}\right]\frac{\partial f}{\partial z}.$$

【例12】(2001年3) 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定：

$e^{xy}-xy=2$ 和 $e^{x}=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，求 $\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}$.

【解2】 $du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz \qquad (1)$

$du=(\quad)dx$

等式 $e^{xy}-xy=2$ 两端微分得

$$e^{xy}(ydx+xdy)-(ydx+xdy)=0, \quad dy=-\frac{y}{x}dx$$

等式 $e^{x}=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 两端微分得

$$e^{x}dx=\frac{\sin(x-z)}{x-z}(dx-dz) \quad dz=(1-\frac{e^{x}(x-z)}{\sin(x-z)})dx.$$

$$du=[\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}+\left[1-\frac{e^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}\right]\frac{\partial f}{\partial z}]dx$$

【例13】(2008年3) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 φ 具有二阶导数，且 $\varphi'\neq -1$.

（I）求 $\mathrm{d}z$ ✓

（II）记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

【解1】（I）设 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z-\varphi(x+y+z)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=\frac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}$$

$\varphi'(x+y+z)$ ✓

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{1}{1+\varphi'}[(2x-\varphi')\mathrm{d}x+(2y-\varphi')\mathrm{d}y].$$

（II）由于 $u(x,y)=\dfrac{2}{1+\varphi'}$，所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2}{(1+\varphi')^2}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\varphi''=-\frac{2(2x+1)\varphi''}{(1+\varphi')^3}.$$

【例13】（2008年3）设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 φ 具有二阶导数，且 $\varphi'\neq -1$.

（I）求 $\mathrm{d}z$

（II）记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$

【解2】（I）对等式 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 两端求微分，得

$$2x\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y-\mathrm{d}z=\varphi'\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z).$$

解出 $\mathrm{d}z$，得

$$\mathrm{d}z=\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}\mathrm{d}x+\frac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}\mathrm{d}y.$$

(II) 同解1.


还不关注，
你就慢了