第六章　定积分的应用

大纲考试内容	大纲考试要求		
	数一	数二	数三
利用定积分计算平面图形的面积、旋转体的体积和函数的平均值	会计算	会计算	会计算
用定积分表达和计算一些几何量与物理量(平面曲线的弧长、旋转体的侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力、质心、形心等)	掌握	掌握	
利用定积分求解简单的经济应用问题			会解

考试内容概要

用定积分可表示一些几何量与物理量(平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、变力做功、压力和函数平均值等),定积分的这些应用有个共同思想,即建立“微元”,然后对微元积分就得到所求量.

一、几何应用

1. 平面图形的面积

(1) 若平面域 D 由曲线 $y=f(x)$,$y=g(x)$($f(x)\geqslant g(x)$),$x=a$,$x=b$($a<b$) 所围成,则平面域 D 的面积为

$$S=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x.$$

(2) 若平面域 D 由曲线 $r=r(\theta)$,$\theta=\alpha$,$\theta=\beta$($\alpha<\beta$) 所围成,则其面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

2. 旋转体体积

若区域 D 由曲线 $y=f(x)$($f(x)\geqslant 0$) 和直线 $x=a$,$x=b$($0\leqslant a<b$) 及 x 轴所围成,则

(1) 区域 D 绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体体积为

$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 区域 D 绕 y 轴旋转一周所得到的旋转体体积为

$$V_y = 2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

3. **曲线弧长**（数三不要求）

(1)$C: y = y(x), a \leqslant x \leqslant b.$

$$s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x.$$

(2)$C:\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2+y'^2}\mathrm{d}t.$$

(3)$C: r = r(\theta), \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta.$

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta.$$

4. **旋转体侧面积**（数三不要求）

曲线 $y = f(x)(f(x) \geqslant 0)$ 和直线 $x = a, x = b(0 \leqslant a < b)$ 及 x 轴所围成区域绕 x 轴旋转所得旋转体的侧面积为

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x.$$

二、物理应用（数学三不要求）

1. 压力；　　2. 变力做功；　　3. 引力.

常考题型与典型例题

常考题型

1. 几何应用
2. 物理应用

一、几何应用

【例 1】 (2014，数三) 设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域，则 D 的面积为________.

解

所求面积为

$$S=\iint\limits_{D}1\mathrm{d}\sigma=\int_{1}^{2}\mathrm{d}y\int_{-y}^{-\frac{1}{y}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{1}^{2}\left(y-\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{2}y^{2}-\ln y\right)\Big|_{1}^{2}$$

$$=2-\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

【例 2】 （2013，数二）设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\left(-\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}\right)$，则 L 所围平面图形的面积是________.

解

【方法 1】 $S=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^{2}3\theta\mathrm{d}\theta=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos^{2}3\theta\mathrm{d}\theta$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 6\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}(\theta+\frac{1}{6}\sin 6\theta)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{12}.$$

【方法 2】 $S=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^{2}3\theta\mathrm{d}\theta=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos^{2}3\theta\mathrm{d}\theta\xlongequal{3\theta=t}\frac{1}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2}t\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{12}.$$

【例 3】 （2015，数二、三）设 $A>0$，D 是由曲线段 $y=A\sin x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 及直线 $y=0,x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域，V_1,V_2 分别表示 D 绕 x 轴与 y 轴旋转所成旋转体的体积. 若 $V_1=V_2$，求 A 的值.

解

$$V_1=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}A^{2}\sin^{2}x\mathrm{d}x=\pi A^{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^{2}A^{2}}{4}.$$

$$V_2=2\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cdot A\sin x\mathrm{d}x=-2\pi A\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}\cos x$$

$$=-2\pi A\left(x\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x\right)$$

$$=-2\pi A(0-1)=2\pi A.$$

又 $V_1=V_2$，则

$$\frac{\pi^{2}A^{2}}{4}=2\pi A,$$

解得 $A=\frac{8}{\pi}$.

【例 4】（2012，数二）过点(0,1)作曲线 $L: y=\ln x$ 的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 围成. 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解

【方法 1】 设切点为 (x_0, y_0)，则切线方程为 $y-y_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$.

【方法 2】 设过点(0,1)的切线方程为 $y-1=kx$.

【$S=2, V=\dfrac{2\pi}{3}(e^2-1)$】

【例 5】（2011，数一、二）曲线 $y=\int_0^x \tan t\,\mathrm{d}t\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的弧长 $s=$ ________.

【$\ln(1+\sqrt{2})$】

二、物理应用

【例 6】（2011，数二）一容器的内侧是由图 1 中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面，该曲线由 $x^2+y^2=2y\left(y\geqslant\dfrac{1}{2}\right)$ 与 $x^2+y^2=1\left(y\leqslant\dfrac{1}{2}\right)$ 连接而成.

(1) 求容器的容积；

(2) 若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出，至少需要做多少功？

（长度单位：m，重力加速度为 $g\,\mathrm{m/s^2}$，水的密度为 $10^3\,\mathrm{kg/m^3}$）

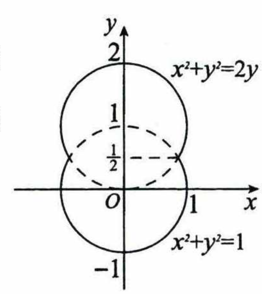

图 1

解

(1) 由对称性，所求的容积为

$$V=2\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}} x^2\,\mathrm{d}y=2\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)\,\mathrm{d}y=\frac{9\pi}{4},$$

即该容器的容积为 $\dfrac{9\pi}{4}\mathrm{m}^3$.

（2）所求的功为

$$W=10^3\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\pi(1-y^2)(2-y)g\mathrm{d}y+10^3\int_{\frac{1}{2}}^{2}\pi[2y-y^2](2-y)g\mathrm{d}y$$

$$=10^3\pi g\left[\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(2-y-2y^2+y^3)\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^{2}(4y-4y^2+y^3)\mathrm{d}y\right]$$

$$=\frac{27\times10^3}{8}\pi g,$$

即所求的功为$\dfrac{27\times10^3}{8}\pi g\mathrm{J}$.

【例 7】（2002，数二）某闸门的形状与大小如图 2 所示，其中 y 轴为对称轴，闸门的上部为矩形 $ABCD$，其中 $DC=2\mathrm{m}$，下部由二次抛物线与线段 AB 所围成，当水面与闸门的上端相平时，欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 5∶4，闸门矩形部分的高 h 应为多少 m（米）？

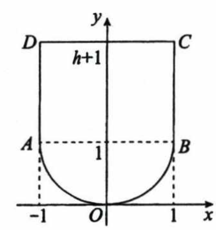

图 2

解

如图 2 建立坐标系，则抛物线的方程为 $y=x^2$.

闸门矩形部分承受的水压力

$$P_1=2\int_1^{h+1}\rho g(h+1-y)\mathrm{d}y=2\rho g\left[(h+1)y-\frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_1^{h+1}$$

$$=\rho g h^2,$$

其中 ρ 为水的密度，g 为重力加速度.

闸门下部承受的水压力

$$P_2=2\int_0^1\rho g(h+1-y)\sqrt{y}\mathrm{d}y$$

$$=2\rho g\left[\frac{2}{3}(h+1)y^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]\Bigg|_0^1$$

$$=4\rho g\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right).$$

由题意知$\dfrac{P_1}{P_2}=\dfrac{5}{4}$，即

$$\frac{h^2}{4\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right)}=\frac{5}{4},$$

解之得 $h=2$，$h=-\dfrac{1}{3}$（舍去），故 $h=2$，即闸门矩形部分的高应为 2m.