第四章 线性方程组

1987 ～ 2008 本章考题考点分布统计表

考点	考频	考题分布与分值			
齐次方程组、基础解系	3	2001,十二题 6分	2004,22题 9分	2005,23题 9分	
非齐次方程组的求解	7	1997,四题 8分	2000,十二题 6分	2001,一(5)题 3分	2002,十二题 6分
		2003,十二题 8分	2006,22题 9分	2008,22题 12分	
公共解与同解	1	2007,23题 11分			

本章导读

本章从1997年开始有考题.线性方程组是否有解?若有解,那么一共有多少解?有解时怎样求出其所有的解?如何求齐次方程组的基础解系?

当给出具体的方程组时,如何加减消元化简(注意只用行变换)?如何求出所有的解(可能还涉及对一些参数的讨论)?

没有具体的方程组时,如何利用解的结构(注意对矩阵秩的推断)分析、推导出通解?

面对两个方程组,如何处理公共解或同解问题?

这一切都是大家在复习方程组时要认真对待的.方程组历年来都是考试的重点,其比重大,分值高,解答题多,大家一定要好好复习.

真题分类练习

一阶题,相对容易,推荐先做　　二阶题,较综合,可在第二轮复习时做

一、齐次方程组、基础解系

试题特点

考查的主要定理是:

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ 秩 $r(\boldsymbol{A})<n$;

(2) 齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 如有非零解,则必有无穷多解,而线性无关的解向量个数为 $n-r(\boldsymbol{A})$.

求基础解系是重点.

$n-r(\boldsymbol{A})$ 既表示 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 线性无关解向量的个数,也表示方程组中自由变量的个数,如何确定自由变量?如何给自由变量赋值并求解,是这一章的基本功.

不论是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$,还是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 都要涉及求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,这里的计算一定要过关(正确、熟练).

线性无关的证明题的另一种出题方法就是证基础解系.

1 (2001,十二题,6 分) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,若 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+t\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4+t\boldsymbol{\alpha}_1$,讨论实数 t 满足什么关系时,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

答题区

2 (2005,23 题,9 分) 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行是 (a,b,c),a,b,c 不全为零,矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}(k\text{ 为常数})$$

且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

答题区

艾宾浩斯抗遗忘复习计划	臻选题号						再做时间	□一天 □四天 □七天 □一月 □考前

3 (2004,22 题,9 分) 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+2x_3+2x_4=0,\\ 3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0,\\ 4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0.\end{cases}$$

试问 a 取何值时,该方程组有非零解?并求出其通解.

答题区

解题加速度

1.(1989,数四,3 分)设 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充分必要条件是

(A) $r=n$.　　(B) $r\geqslant n$.　　(C) $r<n$.　　(D) $r>n$.

演算空间

2.(1994,数四,8 分)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.证明 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是该方程组的一个基础解系.

演算空间

3.(1992,数三,3 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解的充分条件是

(A)$\boldsymbol{A}$ 的列向量线性无关.　　(B)$\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关.

(C)$\boldsymbol{A}$ 的行向量线性无关.　　(D)$\boldsymbol{A}$ 的行向量线性相关.

演算空间

二、非齐次方程组的求解

试题特点

记住解的结构

$$\boldsymbol{\alpha}+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的特解,$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

往届考生在加减消元时计算错误较多(一定要多动手做;认真);讨论参数时不能丢三落四,要严谨.

求 $\boldsymbol{A}$ 的秩、求特解、求基础解系、讨论参数是复习时要注意的知识点.

4 (1997,四题,8 分)λ 取何值时,方程组

$$\begin{cases}2x_1+\lambda x_2-x_3=1\\ \lambda x_1-x_2+x_3=2\\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$$

无解,有唯一解或有无穷多解?并在有无穷多解时写出方程组的通解.

答题区

5 (2000, 十二题, 6 分) 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}0\\0\\8\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$, 其中 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置，求解方程 $2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}$.

答题区

6 (2001, 一(5) 题, 3 分) 设方程 $\begin{bmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$ 有无穷多个解，则 $a=$ ________.

答题区

7 (2003, 十二题, 8 分) 已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax+2by+3c=0$$
$$l_2: bx+2cy+3a=0$$
$$l_3: cx+2ay+3b=0$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.

答题区

8 (2006,22 题,9 分)已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1, \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1, \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$$

有 3 个线性无关的解.

(Ⅰ)证明方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$;

(Ⅱ)求 a,b 的值及方程组的通解.

答题区

9 (2002,十二题,6 分)已知四阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为四维列向量,其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$,求线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

答题区

10（2008，22 题，12 分）设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{bmatrix}_{n\times n},\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

（Ⅰ）证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$；

（Ⅱ）当 a 为何值时，该方程组有唯一解？并求 x_1；

（Ⅲ）当 a 为何值时，该方程组有无穷多解？并求通解.

答题区

解题加速度

1.（1991，数四，3 分）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 所对应的齐次线性方程组，则下列结论正确的是

(A) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解.

(B) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解.

(C) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解.

(D) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

演算空间

2.(2000,数三,数四,3分)设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是四元非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的三个解向量,且秩$(\boldsymbol{A})=3$,$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$c$表示任意常数,则线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解$\boldsymbol{x}=$

(A) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$.　(D) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}$.

演算空间

三、公共解与同解

试题特点

如果已知两个方程组(Ⅰ)和(Ⅱ),那么将其联立$\begin{cases}(\mathrm{I})\\(\mathrm{II})\end{cases}$,其联立方程组的解就是(Ⅰ)与(Ⅱ)的公共解.

如果已知(Ⅰ)与(Ⅱ)的基础解系分别是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$,则可设公共解为$\boldsymbol{\gamma}$,那么

$$\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2$$

由此得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$,解出$k_1,k_2,k_3,l_1,l_2$可求出公共解$\boldsymbol{\gamma}$.

以上这两种常见的出题方法应当把握.

而处理同解的方法,往往是代入来处理,即把(Ⅰ)的解代入(Ⅱ),把(Ⅱ)的解代入(Ⅰ).

11 (2007,23题,11分)设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+2x_2+ax_3=0,\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}\qquad ①$$

与方程

$$x_1+2x_2+x_3=a-1\qquad ②$$

有公共解,求a的值及所有公共解.

答题区

解题加速度

1.(2000,数三,3 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵,则对于线性方程组(Ⅰ):$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和(Ⅱ):$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$,必有

(A)(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解,(Ⅰ)的解也是(Ⅱ)的解.

(B)(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解,但(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解.

(C)(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解,(Ⅱ)的解也不是(Ⅰ)的解.

(D)(Ⅰ)的解是(Ⅱ)的解,但(Ⅱ)的解不是(Ⅰ)的解.

演算空间

2.(2002,数四,8 分) 设 4 元齐次线性方程组(Ⅰ)为

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0\\ x_1+2x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$$

而已知另一 4 元齐次线性方程组(Ⅱ)的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,a+2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,4,a+8)^{\mathrm{T}}$$

(1) 求方程组(Ⅰ)的一个基础解系;

(2) 当 a 为何值时,方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有非零公共解?在有非零公共解时,求出全部非零公共解.

演算空间