高数基础班（24）

24	曲面积分计算举例；多元积分应用（质量、质心、形心、转到惯量，变力沿曲线做功，场论初步（散度，旋度）	P198-P208

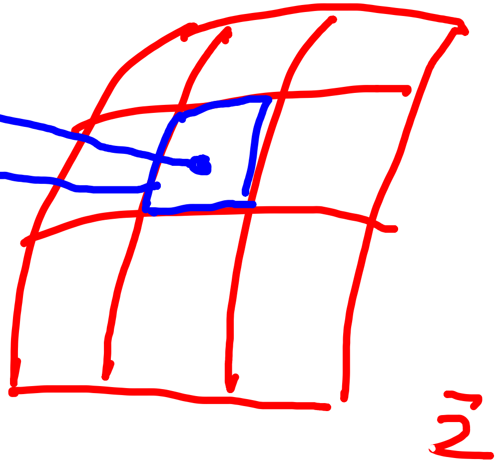
主讲 武忠祥 教授

还不关注，你就慢了

第三节 曲面积分

(一) 对面积的面积分（第一类面积分）

1. 定义 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$



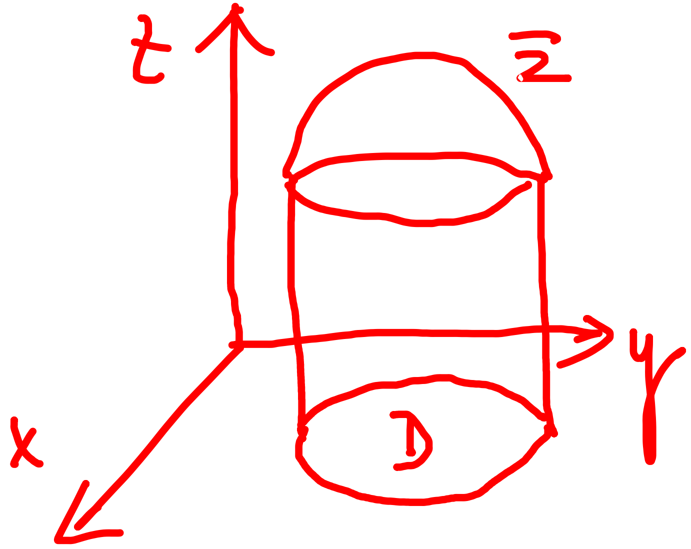
2. 性质 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{-\Sigma} f(x,y,z)dS$

（与积分曲面的方向无关）

$x=x(y,z)$

3.计算方法

$y=y(x,z)$ $\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dxdz$ $x^2+y^2=1$



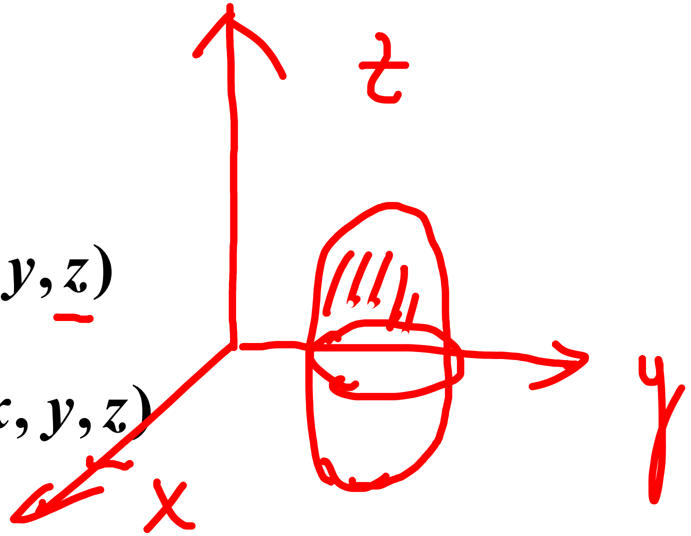
1．直接法：$\Sigma: z = z(x,y),\quad (x,y)\in D$

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^{\ 2}+z_y^{\ 2}}\,\mathrm{d}\sigma$$

2. 利用奇偶性

若曲面 Σ 关于 xoy 面对称，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \begin{cases} 2\iint_{\Sigma_{z\geq 0}} f(x,y,z)\mathrm{d}S, & f(x,y,-z) = f(x,y,z) \\ 0, & f(x,y,-z) = -f(x,y,z) \end{cases}$$



3. 利用对称性

$\Sigma: \ x^2+y^2+z^2=1$

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\,dS \overset{*}{=} \frac{2}{3}\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,dS$$

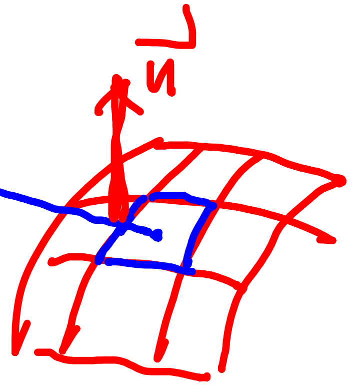
$$= \frac{2}{3}\iint_{\Sigma} 1\,dS = \frac{2}{3}4\pi = \frac{8\pi}{3}$$

（二）对坐标的面积分（第二类面积分）

1. 定义

dzdx

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$



2. 性质

$$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=-\iint\limits_{-\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

（与积分曲面的方向有关）

3. 计算方法

Σ $x=c$ $I=0$

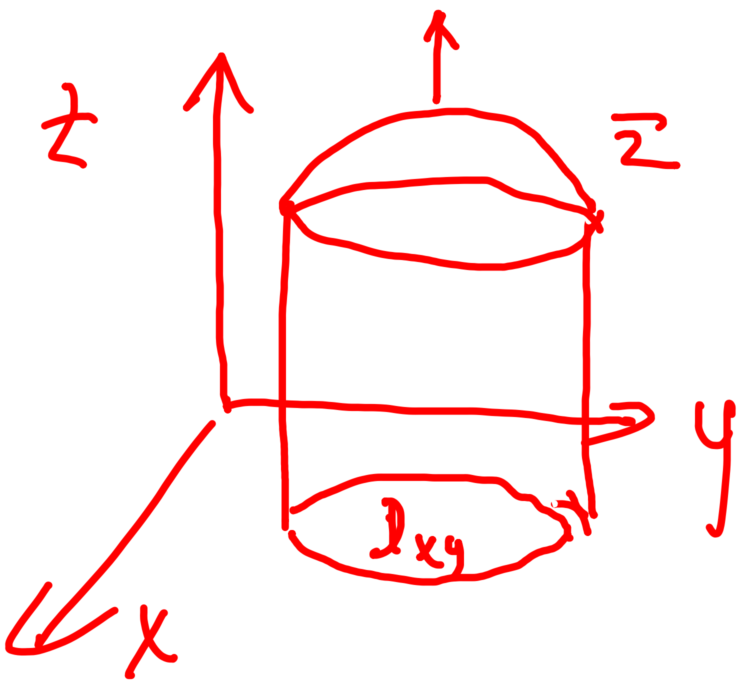
Σ, $y=c$ $I=0$

1）直接法：

(1) 设曲面：$z=z(x,y)$, $(x,y)\in D_{xy}$

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$$

$\mp$



(2) 设曲面： $\Sigma: x = x(y,z), \quad (y,z) \in D_{yz}$

前

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm \iint_{D_{yz}} P[x(y,z), y, z]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

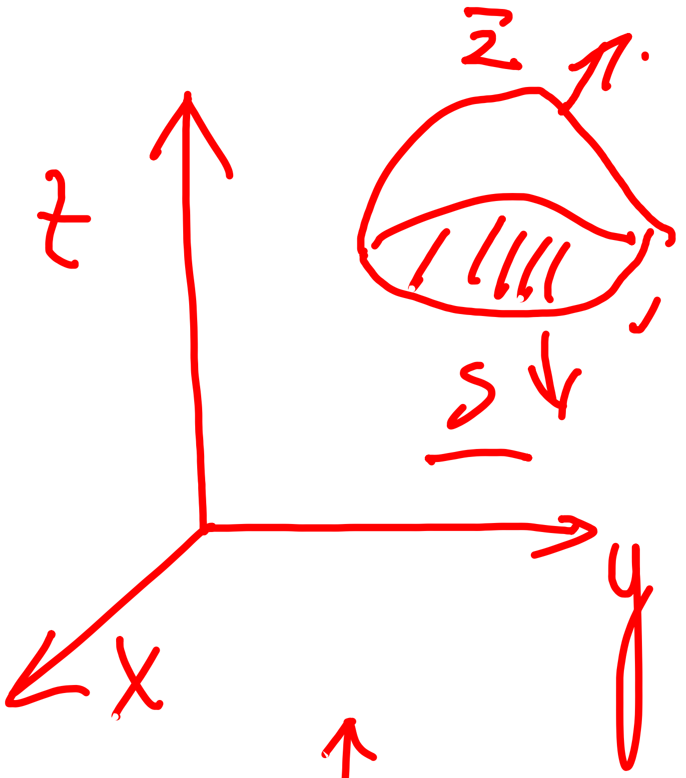
后

(3) 设曲面： $\Sigma: y = y(z,x), \quad (z,x) \in D_{zx}$

右

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \pm \iint_{D_{zx}} Q[x, y(z,x), z]\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

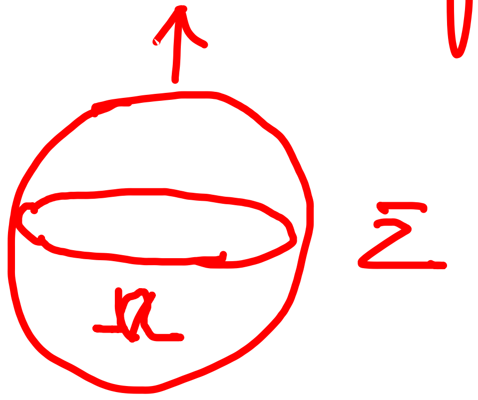
左



2) 高斯公式:

$$\oiint_{\Sigma_{外}} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}V$$

✓ ✓ ✓

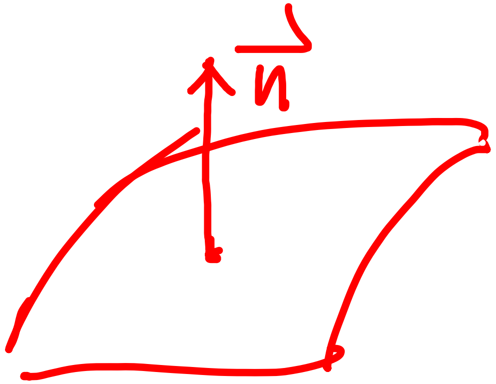


3) 补面用高斯公式.

4.两类面积分的联系

$$\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}(P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$



常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

曲面积分计算

一. 第一类曲面积分的计算

【例1】（2000年）设 $S: \underline{x^2+y^2+z^2=a^2}(z\geq 0)$，$S_1$ 为 S 在一卦限中的部分，则有（　　）

Δ

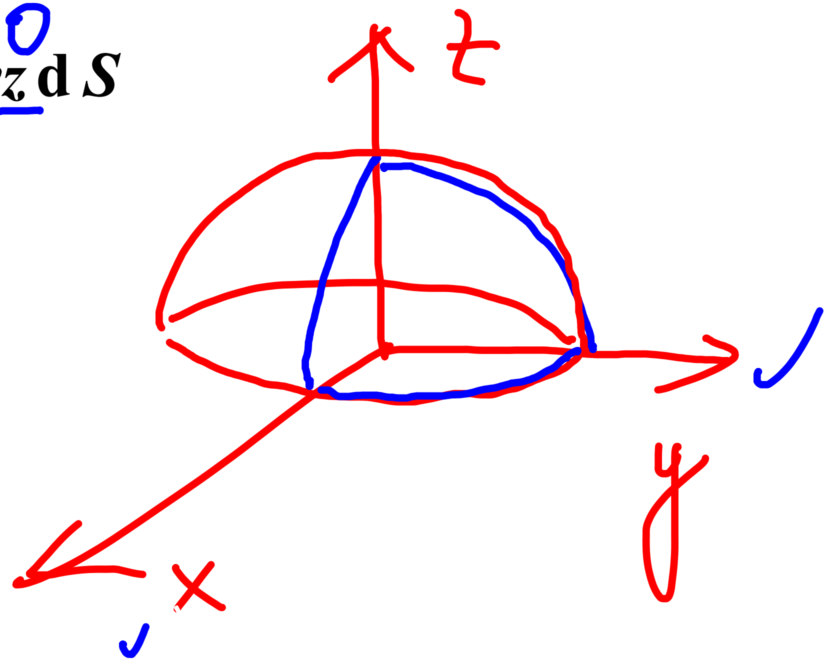
（A） $\iint\limits_{S} \overset{=0}{x}\,\mathrm{d}S \cancel{=} 4\iint\limits_{S_1} \overset{>0}{x}\,\mathrm{d}S$

（B） $\iint\limits_{S} \overset{=0}{y}\,\mathrm{d}S \cancel{=} 4\iint\limits_{S_1} \overset{>0}{x}\,\mathrm{d}S$

（C） $\iint\limits_{S} z\,\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{S_1} x\,\mathrm{d}S$ ✓

（D） $\iint\limits_{S} \underset{\substack{\| \\ 0}}{xyz}\,\mathrm{d}S \cancel{=} 4\iint\limits_{S_1} \overset{>0}{xyz}\,\mathrm{d}S$

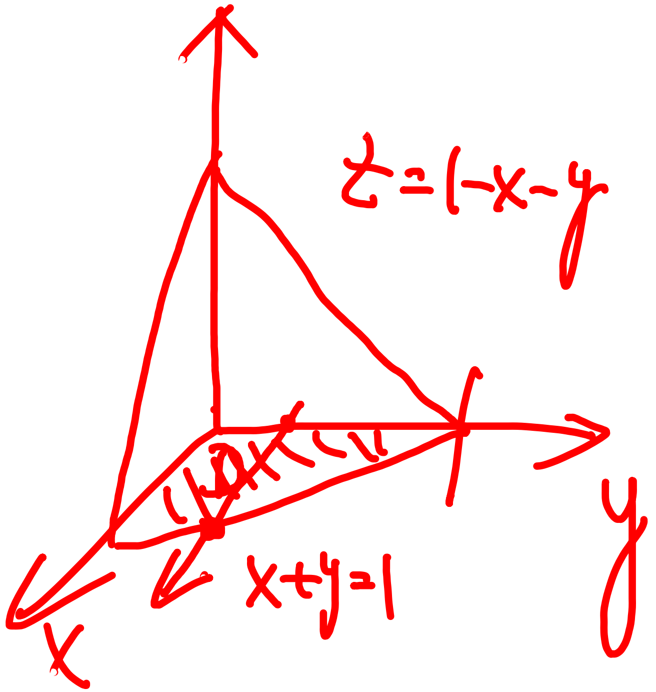
【解】 ✓ $= 4\iint\limits_{S_1} z\,\mathrm{d}S =$



【例2】（2012年）设

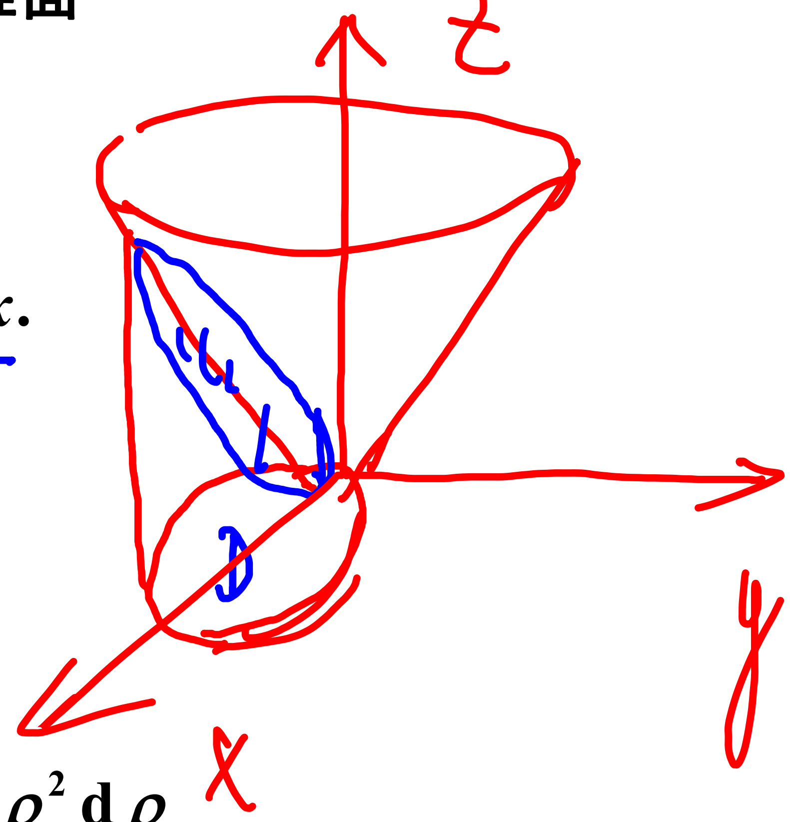
$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{3}\,dxdy$$

$\Sigma=\{(x,y,z)\mid x+y+z=1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$，则 $\iint\limits_{\Sigma} y^2 dS=$ ________.



【解】 $\iint\limits_{\Sigma} y^2 dS=\sqrt{3}\iint\limits_{D} y^2 dxdy=\sqrt{3}\int_0^1 dy\int_0^{1-y} y^2 dx=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

【例3】(1995年) 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2\le 2x$ 内的部分.



【解】 Σ 在 xOy 平面上的投影区域 $D: x^2+y^2\le 2x.$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}\sigma=\sqrt{2}\,\mathrm{d}\sigma.$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S \overset{*}{=} \iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{d}\sigma=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{16\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{32}{9}\sqrt{2}.$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

二. 第二类曲面积分的计算

线面：可代入

重、不可代

$x^2+y^2+z^2\le 1$

【例4】（1988年）设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧, 计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma} x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

【解】由高斯公式，并利用球面坐标计算三重积分，得

$$I=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v \quad \cancel{= 3\iiint 1\,\mathrm{d}V = 3\cdot\frac{4}{3}\pi 1^3 = 4\pi}$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\,\mathrm{d}r=\frac{12}{5}\pi.$$

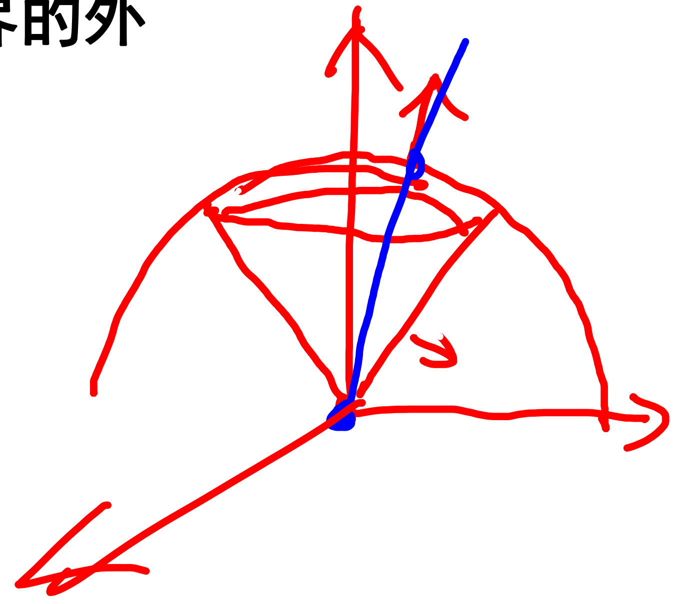
【例5】（2005年） 设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域，Σ 是 Ω 的整个边界的外侧，则 $\oiint_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=$ ______. $[(2-\sqrt{2})\pi R^3]$

【解】

原式 $= \iiint_{\Omega}[1+1+1]dV$

球 $= 3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{R} r^2\sin\varphi\, dr$

$= (2-\sqrt{2})\pi R^3$



【例6】(2008年) 设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，则

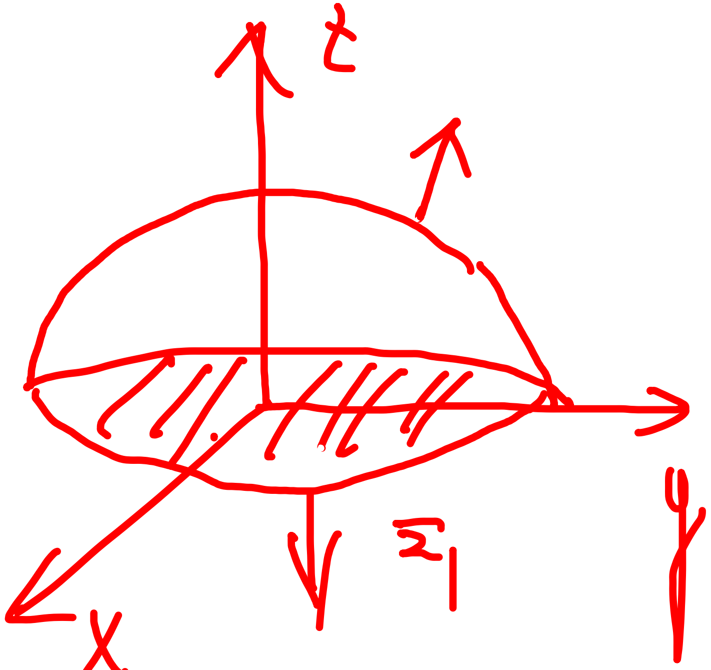
$$\iint\limits_{\Sigma} xydydz + xdzdx + x^2dxdy = \_\_\_\_\_\_\_\_ .$$

【解】设 Σ_1 是曲面 $z=0\ (x^2+y^2\le 4)$ 取下侧，

$$\iint\limits_{\Sigma} = \iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint\limits_{\Sigma_1} = \iiint\limits_{\Omega} ydxdydz - \iint\limits_{\Sigma_1} .$$

0

补面



$z=0$

由对称性知 $\iiint\limits_{\Omega} ydxdydz = 0$

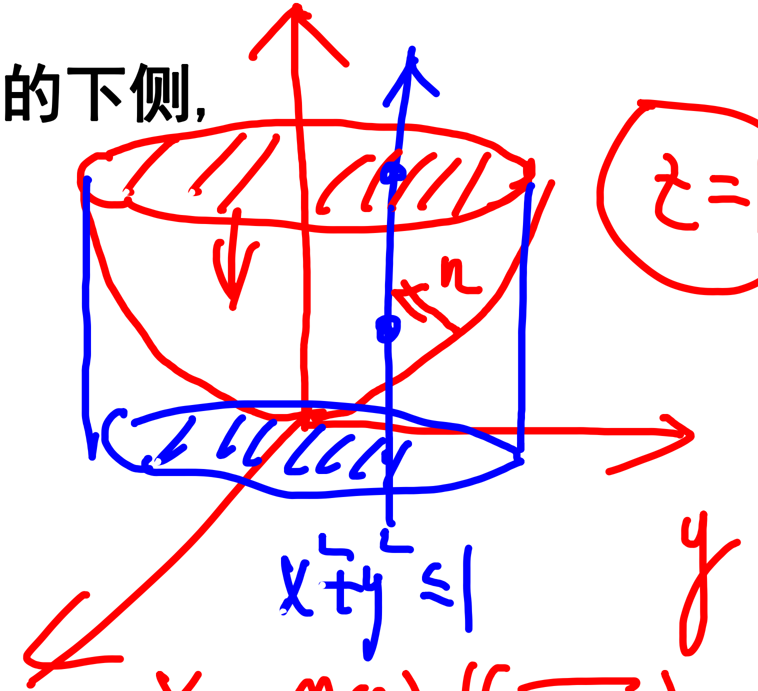
故 $\iint\limits_{\Sigma} = -\iint\limits_{\Sigma_1} = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(x^2+y^2)dxdy = 4\pi$

【例7】（2014年）设 Σ 是曲面 $z=x^2+y^2(z\le 1)$ 的上侧，

补面

计算面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy$.

【解】设 S 为平面 $z=1$ 包含在曲面 $z=x^2+y^2$ 之内部分的下侧，



$$I=\iint\limits_{\Sigma+S}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy$$

$$-\iint\limits_{S}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy$$

$-2x$　$-2y$　$z=1$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1]dv-0$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2+7)dv+6\iiint\limits_{\Omega}xdv+6\iiint\limits_{\Omega}ydv$$

$\varphi(z)\iint(dx^2+y^2)$

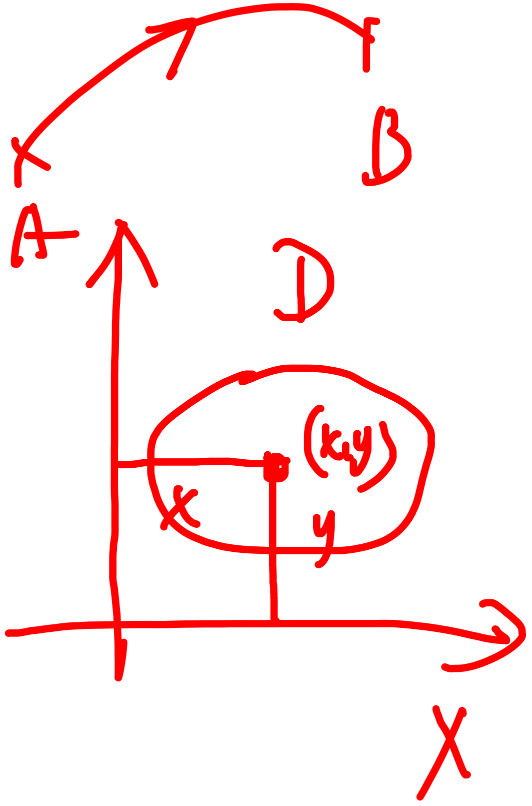
$$\iiint\limits_{\Omega}xdv=\iiint\limits_{\Omega}ydv=0$$

$z=\rho^2$

$$\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2+7)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1d\rho\int_{\rho^2}^1(3\rho^2+7)\rho dz=4\pi$$

第四节 多元积分应用

几何形体 / 所求量	二重 平面板	三重 空间体	一型线 曲线	一型面 曲面
几何度量	$S=\iint_D 1\,d\sigma$			
质　量	$\iint_D \rho(x,y)\,d\sigma$			
质　心	$\bar{x}=\dfrac{\iint_D x\rho(x,y)\,d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)\,d\sigma}$	形心: $\rho(x,y)=\rho$	$\bar{x}=$	$\dfrac{\iint_D x\,d\sigma}{S}$
转动惯量	$I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)\,d\sigma$,	$I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)\,d\sigma$	$\vec{F}=(0,0,R)$	



1. 变力作功: ✓ $W=\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$

2. 通量: $\Phi=\iint_{\Sigma} P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy$

常 考 题 型 与 典 型 例 题

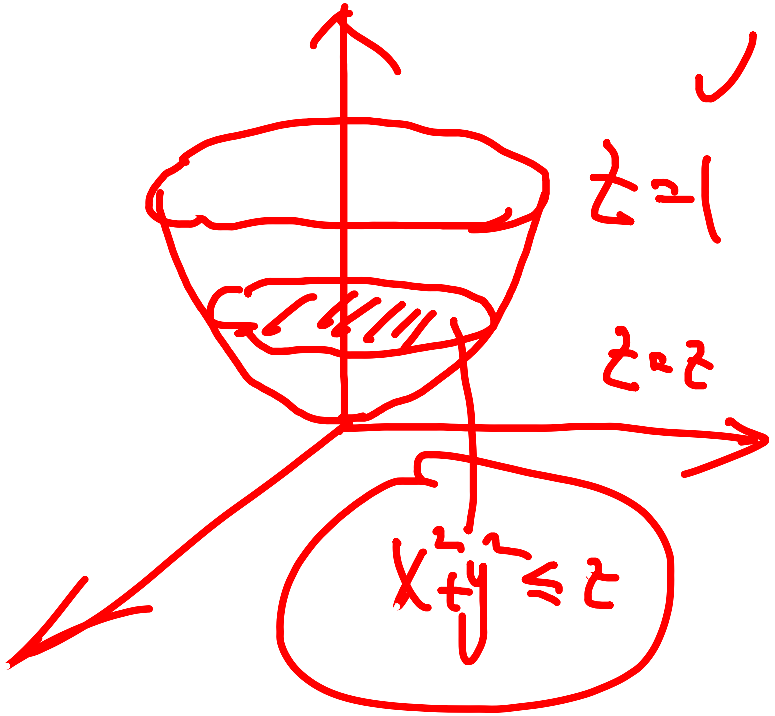
常考题型

形心和变力做功的计算

【例1】（2010年）设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le z\le 1\}$，则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z}=$ ________.

$z=x^2+y^2$

【解】 $$\bar{z}=\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}V \Big/ \iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V$$



$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V=\int_0^1\left(\iint\limits_{x^2+y^2\le z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z=\int_0^1 \pi z\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}$$

$$\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}V=\int_0^1\left(\iint\limits_{x^2+y^2\le z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)z\,\mathrm{d}z=\int_0^1 \pi z^2\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3}$$

$$\bar{z}=\frac{2}{3}.$$

【例2】(2000年) 设有一半径为 R 的球体，P_0 是此球的表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比（比例常数 $k>0$），求球体的重心位置.

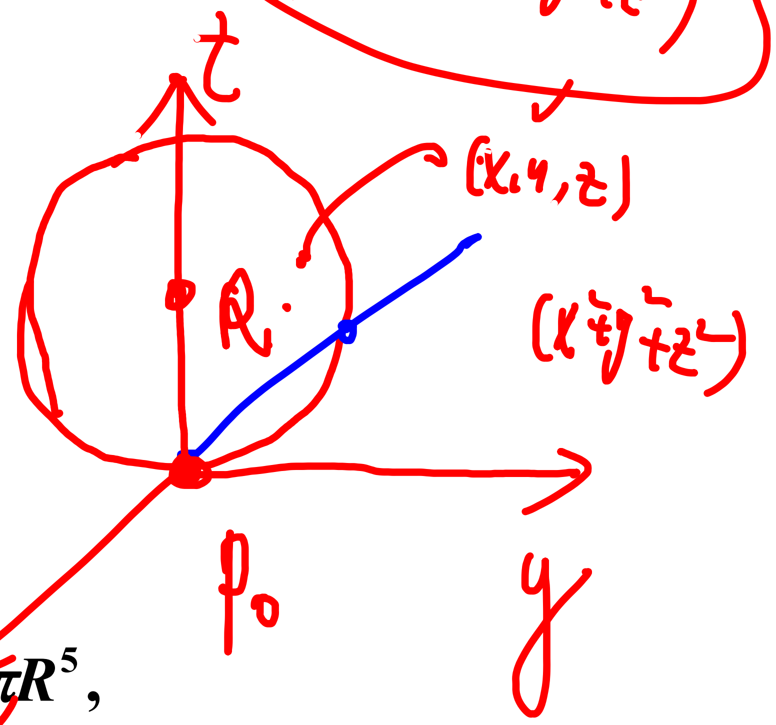
$\rho = k(x^2+y^2+z^2)$

【解】 $x^2+y^2+z^2=2Rz.$

$r^2 = 2Rr\cos\varphi$

$$\bar{x}=0,\quad \bar{y}=0,\quad \bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} kz(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega} k(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v}.$$

$r=2R\cos\varphi$



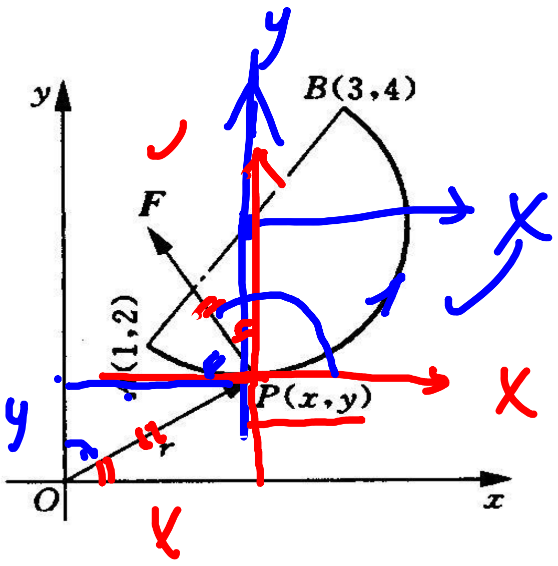
r^2

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{32}{15}\pi R^5,$$

$$\iiint\limits_{\Omega}z(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^5\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{64}{3}\pi R^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{8}{3}\pi R^5,$$

【例3】(1990年) 质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周，从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受到变力 $\mathbf{F}$ 作用(见右图) $\mathbf{F}$ 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离，其方向垂直于直线段 OP，且与 y 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$. 求变力 $\mathbf{F}$ 对质点 P 所作的功.



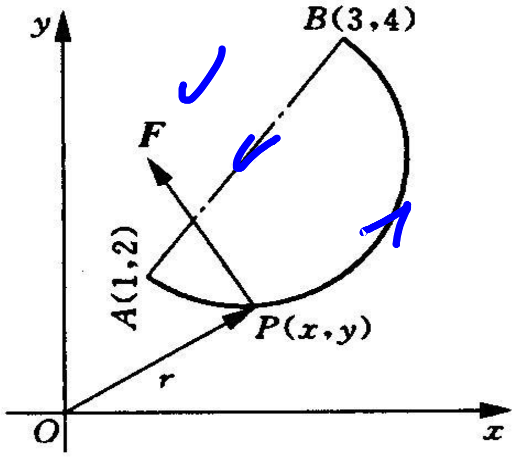
$\vec{F}=(-y,x)$

【解1】按题意，变力 $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$. $W=\int_{\overset{\frown}{AB}}-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y$

圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的参数方程是 $\begin{cases}x=2+\sqrt{2}\cos\theta,\\ y=3+\sqrt{2}\sin\theta,\end{cases}$ $-\frac{3}{4}\pi\le\theta\le\frac{\pi}{4}$.

$$W=\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}}\left[\sqrt{2}(3+\sqrt{2}\sin\theta)\sin\theta+\sqrt{2}(2+\sqrt{2}\cos\theta)\cos\theta\right]\mathrm{d}\theta=2(\pi-1).$$

【例3】(1990年) 质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周，从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受到变力 $\mathbf{F}$ 作用(见右图) $\mathbf{F}$ 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离，其方向垂直于直线段 OP，且与 y 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$. 求变力 $\mathbf{F}$ 对质点 P 所作的功.



$y=y(x)$

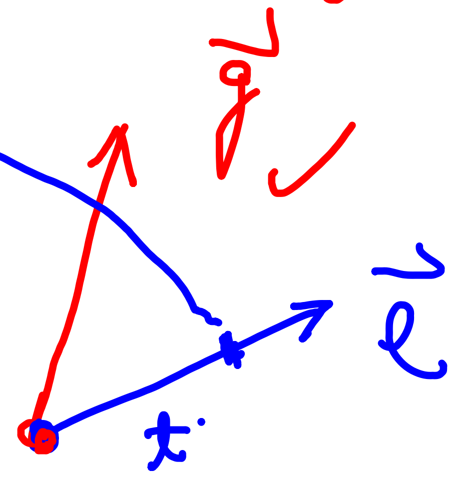
【解2】按题意，变力 $\boxed{\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}.}$ $W=\int_{\overset{\frown}{AB}}-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y$

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}}-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=\oint_{\overset{\frown}{AB}+\overline{BA}}-ydx+xdy-\int_{\overline{BA}}-ydx+xdy$$

$$=\iint_D 2dxdy-\int_3^1-(1+x)dx+xdx=2\pi-2$$

第五节 场论初步

$z=z(x,y)$



1. 方向导数

1）定义：$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$

2）计算：若 $z=f(x,y)$ 可微，则

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$$

$\vec{g}$ ① ②

2. 梯度:

定义：设 $f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 有连续一阶偏导数

$$\mathrm{grad}\,u=f_x(x_0,y_0)\mathrm{i}+f_y(x_0,y_0)\mathrm{j}$$

3. 散度: 设有向量场 $\mathbf{A}(x,y,z)=\{P,Q,R\}$

数.

$$\mathrm{div}\mathbf{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

4. 旋度: 设有向量场 $\mathbf{A}(x,y,z)=\{P,Q,R\}$

向量.

$$\mathrm{rot}\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

梯度、旋度、散度的计算

【例1】(1996年) 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$

处沿 A 指向 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为 ______. [$\frac{1}{2}$]

【解】

$u(x,0,1)=\ln(1+x)$. $\quad u_x(1,0,1)=\frac{1}{1+x}\Big|_{x=1}=\frac{1}{2}$, $\quad \frac{\partial u}{\partial l}$ $\quad |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{9}=3$

$u(1,y,1)=\ln(1+\sqrt{y^2+1})$ $\quad u_y(1,0,1)=0$ $\quad \overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$

$u(1,0,z)=\ln(1+z)$. $\quad u_z(1,0,1)=\frac{1}{1+z}\Big|_{z=1}=\frac{1}{2}$

$\cos\alpha \quad \cos\beta \quad \cos\gamma$

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}+(0)\cdot\frac{(-2)}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(1)}{3}$$

$=\frac{1}{2}$

【例2】 在椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上求一点，使函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在该点沿 $l=(1,-1,0)$ 方向的方向导数最大.

(x,y,z)

$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$

$\vec{l^0}=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$

$2x \quad 2y \quad 2z$

【解】

$F=\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+\lambda(2x^2+2y^2+z^2-1)$

$$\begin{cases} F_x=\sqrt{2}+4\lambda x=0 \\ F_y=-\sqrt{2}+4\lambda y=0 \\ F_\lambda=2x^2+2y^2+z^2-1=0 \end{cases}$$

$F_z=2\lambda z=0$

$4\lambda x=-4\lambda y$

$\lambda(x+y)=0$

① $\lambda=0$ ✗

② $y=-x$

$z=0$

$4x^2=1 \quad x^2=\frac{1}{4}, \quad x=\pm\frac{1}{2} \quad y=\mp\frac{1}{2}$

$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0) \quad (-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$

$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$

【例3】（2012年） $\mathrm{grad}(xy+\frac{z}{y})|_{(2,1,1)}=$ __________.

(1,1,1)

【解】

$\vec{g}=(1,1,1)$

$x-\frac{z}{y^2}$

$2-1=1$ $\frac{1}{y}$

【例4】（1989年） 向量场 $\mathbf{u}(x,y,z)=xy^2\mathbf{i}+ye^z\mathbf{j}+x\ln(1+z^2)\mathbf{k}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $\operatorname{div}\mathbf{u}=$ ________. (2)

【解】

$$\frac{2xz}{1+z^2}$$

$$\operatorname{div}u=1+1+0=2$$

【例5】（2018年） 向量场 $\vec{F}(x,y,z)=xyi-yzj+zxk$ [$i-k$]

的旋度 $rot\vec{F}(1,1,0)=$ <u>$i-k$</u>.

【解】

$$rot\vec{F}(1,1,0)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & -yz & zx \end{vmatrix}_{(1,1,0)}=(1,\ 0,-1)$$

$0+y$

$0-x$

$-(z-0)$

$(x-0)$