第四章　多元函数微分学

1987 ～ 2008 本章考题考点分布统计表

考点	考频	考题分布与分值			
基本概念及性质	1	2007,7 题 4 分			
求多元函数的偏导数及全微分	5	2004,4 题 4 分	2004,21 题 10 分	2005,11 题 4 分	2007,15 题 4 分
		2008,13 题 4 分			
多元函数的极值	3	2005,20 题 10 分	2006,12 题 4 分	2008,21 题 11 分	
反问题	1	2006,20 题 12 分			

本章导读

本章主要研究二元函数的偏导数、全微分等概念，要掌握计算它们的各种方法以及它们的应用. 一元函数中的许多结论可以推广到二元函数中来，但有些结论是不成立的. 二元函数微分学要比一元函数微分学复杂得多，我们要掌握它们的共同规律，踏踏实实地做一些题目，一定会收到预期的效果.

试题特点

每年试题一般是一个大题、一个小题，分数约占试卷的 8%，主要考查复合函数求偏导数及多元函数的极值，难度不是很大. 一定要熟练掌握复合函数求偏导数的公式，特别要注意抽象函数求高阶偏导数的题目，以及复合函数求偏导数的方法在隐函数求偏导中的应用. 同时，多元函数微分学在几何中的应用和求函数的极值、最值也是考研数学的一个重点.

真题分类练习

一阶题，相对容易，推荐先做　　二阶题，较综合，可在第二轮复习时做

一、基本概念及性质

1 (2007,7 题,4 分) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$.

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$, 且 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$.

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

(D) $\lim\limits_{x\to 0}[f'_x(x,0)-f'_x(0,0)]=0$, 且 $\lim\limits_{y\to 0}[f'_y(0,y)-f'_y(0,0)]=0$.

答题区

二、求多元函数的偏导数及全微分

2 (2004,4 题,4 分) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 确定, 则 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

答题区

3 (2004,21 题,10 分) 设 $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$, 其中 f 具有连续二阶偏导数, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

答题区

艾宾浩斯抗遗忘复习计划	臻选题号						再做时间	□一天 □四天 □七天 □一月 □考前

4 (2005,11 题,4 分) 设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$,其中函数 φ 具有二阶导数,ψ 具有一阶导数,则必有

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

答题区

5 (2007,15 题,4 分) 设 $f(u,v)$ 是二元可微函数,$z=f\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)$,则 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=$ ______.

答题区

6 (2008,13 题,4 分) 设 $z=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$,则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}$ ______.

答题区

三、多元函数的极值

7 (2005,20 题,10 分) 已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$,并且 $f(1,1)=2$. 求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\{(x,y)\mid x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\}$ 上的最大值和最小值.

答题区

8 (2008,21 题,11 分) 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大和最小值.

答题区

9 (2006,12 题,4 分) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数,且 $\varphi'_y(x,y) \neq 0$,已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点,下列选项正确的是

(A) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$,则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.　(B) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$,则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

(C) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.　(D) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

答题区

四、反问题

10 (2006,20 题,12 分) 设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数,且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

(Ⅰ) 验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$;

(Ⅱ) 若 $f(1)=0, f'(1)=1$,求函数 $f(u)$ 的表达式.

答题区