高数基础班（22）

22	傅里叶级数；向量代数与空间解析几何；方向导数，曲面切平面，曲线法线	P172-P186

主讲 武忠祥 教授

还不关注，你就慢了

第三节　傅里叶级数

本节内容要点

一. 考试内容概要

（一）傅里叶系数与傅里叶级数

（二）收敛定理（狄利克雷）　✓

（三）函数展开为傅里叶级数　✓

二. 常考题型方法与技巧

题型一　有关收敛定理的问题

题型二　将函数展开为傅里叶级数

考试内容概要

（一）傅里叶系数与傅里叶级数

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad n = 0,1,2\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \qquad n = 1,2\cdots$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

（二）收敛定理（狄利克雷）

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续或有有限个第一类间断点，且只有有限个极值点，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上处处收敛，且收敛于

1） $S(x)=f(x)$　　当 x 为 $f(x)$ 的连续点.

2） $S(x)=\dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$　　当 x 为 $f(x)$ 的间断点.

3） $S(x)=\dfrac{f((-\pi)^{+})+f(\pi^{-})}{2}$　　当 $x=\pm\pi$.

（三）周期为 2π 的函数的展开

(1) $[-\pi,\pi]$ 上展开.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad n=0,1,2\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x \qquad n=1,2\cdots$$

(2) $[-\pi,\pi]$ 上奇偶函数的展开.

i）$f(x)$ 为奇函数

$$a_n=0, \qquad n=0,1,2\cdots$$

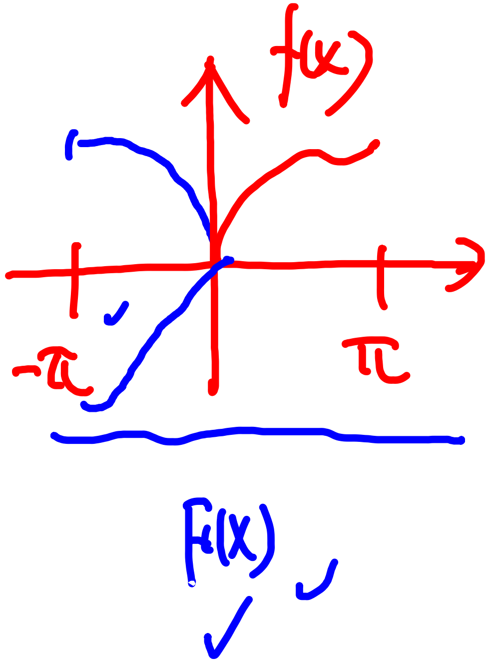
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x \qquad n=1,2\cdots$$

ⅱ) $f(x)$ 为偶函数.

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad n=0,1,2\cdots$$

$$b_n=0 \qquad n=1,2\cdots$$

(3) 在 $[0,\pi]$ 上展为正弦或展为余弦.



ⅰ) 展为正弦.

$$a_n=0, \qquad n=0,1,2\cdots$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \qquad n=1,2\cdots$$

ⅱ) 展为余弦.

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad n=0,1,2\cdots$$

$$b_n=0 \qquad n=1,2\cdots$$

（四）周期为 $2l$ 的函数的展开

(1) $[-l,l]$ 上展开.

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad n=0,1,2\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad n=1,2\cdots$$

(2) $[-l,l]$ 上奇偶函数的展开.

i） $f(x)$ 为奇函数.

$$a_n = 0, \qquad n = 0,1,2\cdots$$

✓ $$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad n = 1,2\cdots$$

ii) $f(x)$ 为偶函数.

✓ $$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad n = 0,1,2\cdots$$

$$b_n = 0 \qquad n = 1,2\cdots$$

(3)在 $[0, l]$ 上展为正弦或展为余弦.

i）展为正弦.

$$a_n = 0, \qquad n = 0,1,2\cdots$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad n = 1,2\cdots$$

ii）展为余弦.

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad n = 0,1,2\cdots$$

$$b_n = 0 \qquad n = 1,2\cdots$$

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

1.狄利克雷收敛定理

2.将函数展为傅里叶级数

1.狄利克雷收敛定理

【例1】（1988年1）设 $f(x)$ 是周期为2的周期函数，它在区间 $(-1,1]$ 上的定义为

$$f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\le 0,\\ x^3, & 0<x\le 1.\end{cases}$$

则 $f(x)$ 的傅里叶（Fourier）级数在 $x=1$ 处收敛于 $\underline{\ \frac{3}{2}\ }$. [$\frac{3}{2}$]

【解】

$$\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$$

【例2】（1989年1）设函数 $f(x)=x^2, 0\le x<1$，而

$2l=2$

奇

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, -\infty<x<+\infty$$

$l=1$

其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx$，$n=1,2,3,\cdots$ 则 $S\left(-\frac{1}{2}\right)$ 等于（　　）

（A）$-\frac{1}{2}$　　（B）$-\frac{1}{4}$

（C）$\frac{1}{4}$　　（D）$\frac{1}{2}$

[B]

【解】

$S\left(-\frac{1}{2}\right)=-S\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}$

2.将函数展为傅里叶级数

【例3】（1993年1）设函数 $f(x)=\pi x+x^2\ (-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则其中系数 b_3 的值为 ______. $[\frac{2}{3}\pi]$

2π

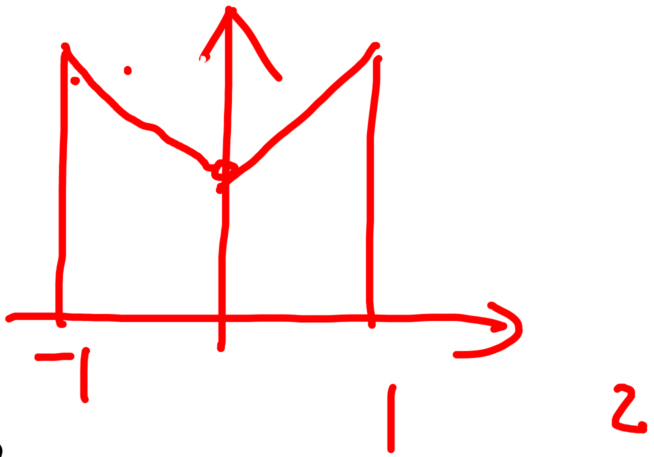
【解】

$$b_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi x+x^2)\sin 3x\,dx$$

$$=2\int_0^{\pi}x\sin 3x\,dx=-\frac{2}{3}\int_0^{\pi}x\,d\cos 3x=\frac{2}{3}\pi$$

【例4】（1991年1）将函数 $f(x)=2+|x|(-1\le x\le 1)$ 展开成以2 $=2l$ 为周期的傅里叶级数，并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和

$l=1$



【解】 由于 $f(x)=2+|x|\ (-1\le x\le 1)$ 是偶函数, 所以

① $b_n=0,\ n=1,2,\cdots\qquad a_0=2\int_0^1(2+x)dx=5,$

$$a_n=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x dx=2\int_0^1 x\cos n\pi x dx$$

$$=\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}\qquad n=1,2,\cdots$$

② $$2+|x|\overset{?}{=}\frac{5}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}.$$

$-1\le x\le 1$

当 $x=0$ 时, $2=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, 从而 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

a

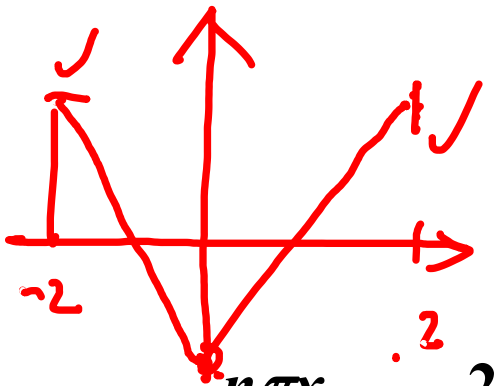
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$a=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}a$ $=\frac{\pi^2}{6}$

$\frac{3}{4}a=\frac{\pi^2}{8}\qquad a=\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8}$

【例5】（1995年1）将 $f(x)=x-1\ (0\le x\le 2)$ 展开成周期为4 $=2l$

的余弦级数.



$l=2$

$F(x)$

【解】 $a_0=\dfrac{2}{2}\displaystyle\int_0^2 (x-1)dx=0,$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 (x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{2}{n\pi}\int_0^2 (x-1)d\sin\frac{n\pi x}{2}=-\frac{2}{n\pi}\int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}0, & n=2k,\\ -\dfrac{8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1\end{cases}\quad (k=1,2,\cdots).$$

$$f(x)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}\qquad x\in[0,2]$$

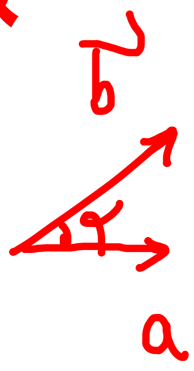
$0\le x\le 2$

第十一章 向量代数与空间解析几何及多元微分学在几何上的应用

第一节 向量代数

1. 数量积

1）几何表示： $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\alpha$



2）代数表示： $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

3）运算规律：

i）交换律： $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$

ii）分配律： $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}.$

4）几何应用：

i）求模： $|\mathbf{a}|=\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$

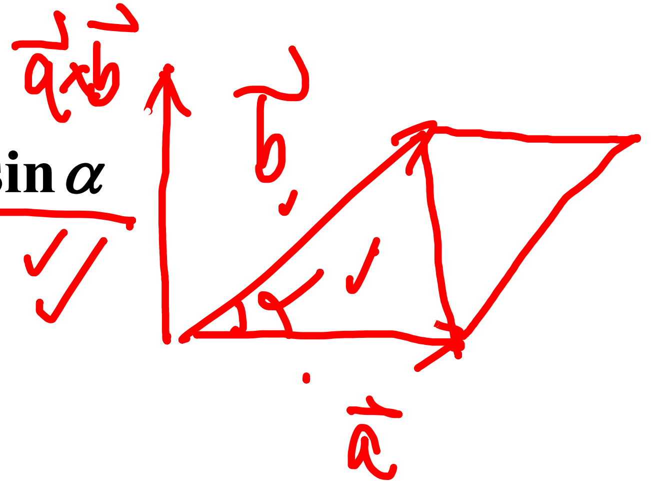
ii）求夹角： $\cos\alpha=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$

iii）判定两向量垂直： $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$

2. 向量积

1） 几何表示： $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 是一向量　　模：$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\alpha$

方向：右手法则.



2） 代数表示： $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

3） 运算规律

i) $a\times b=-(b\times a)$

ii） 分配律: $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$

4） 几何应用:

i） 求同时垂直于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的向量： $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$

ii） 求以 a 和 $\mathbf{b}$ 为邻边的平行四边形面积： $S=|a\times b|$

iii） 判定两向量平行： $\mathbf{a}//\mathbf{b}\Leftrightarrow \mathbf{a}\times\mathbf{b}=0$

3. 混合积: $(abc) = (a \times b) \cdot c$

1 1）代数表示: $(abc) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

2 2）运算规律:

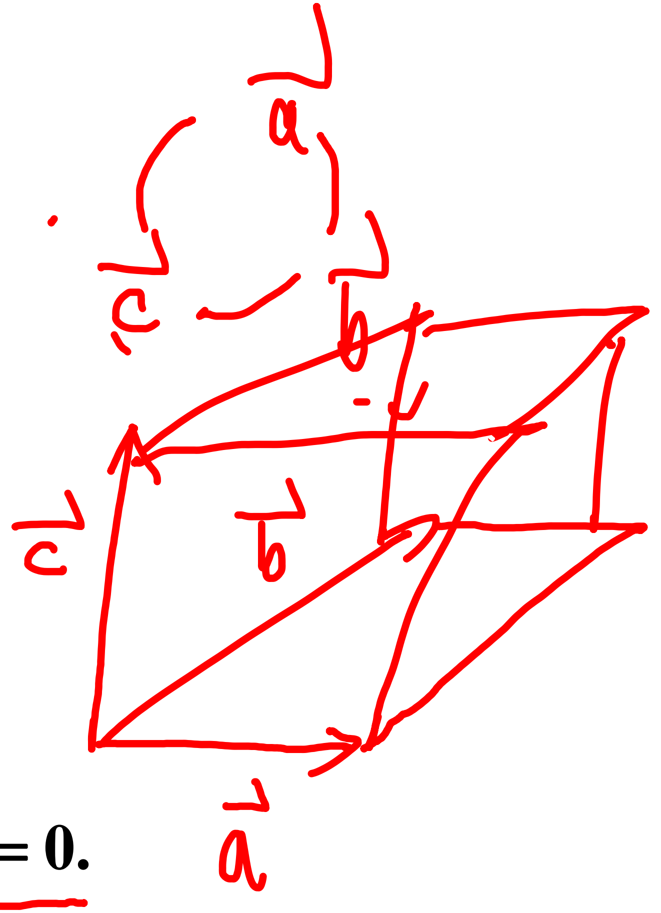
i）轮换对称性: $(abc) = (bca) = (cab)$ ✓

ii）交换变号: $(abc) = -(acb)$ ✓

3 3）几何应用

i）$V_{\text{平行六面体}} = |(abc)|$

ii）判定三向量共面: a, b, c 共面 $\Leftrightarrow (abc) = 0.$



常考题型与典型例题

常考题型

向量的计算

【例1】(1995年)设 $(a\times b)\cdot c=2$, 则

$[(a+b)\times(b+c)]\cdot(c+a)=$ ________

【解】$[(a+b)\times(b+c)]\cdot(c+a)=[a\times b+a\times c+b\times b+b\times c]\cdot(c+a)$

$=(a\times b)\cdot c+(a\times b)\cdot a+(a\times c)\cdot c+(a\times c)\cdot a+(b\times c)\cdot c+(b\times c)\cdot a$

$=(a\times b)\cdot c+(b\times c)\cdot a$

$=2(a\times b)\cdot c=4$

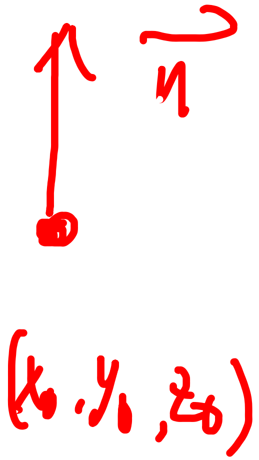
第二节 空间平面与直线

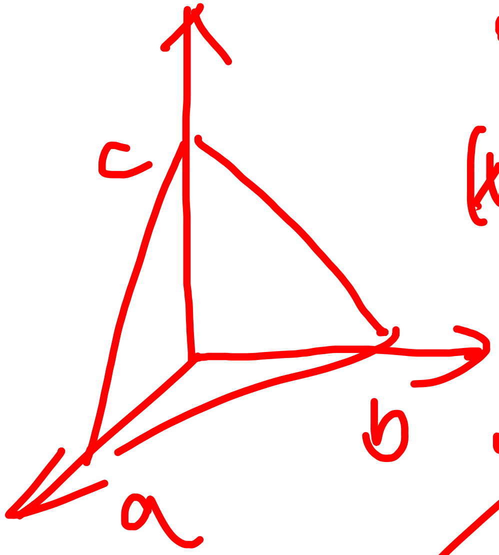
1. 平面方程

1）一般式： $Ax + By + Cz + D = 0.$ $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$

2） 点法式： $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

3） 截距式： $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$



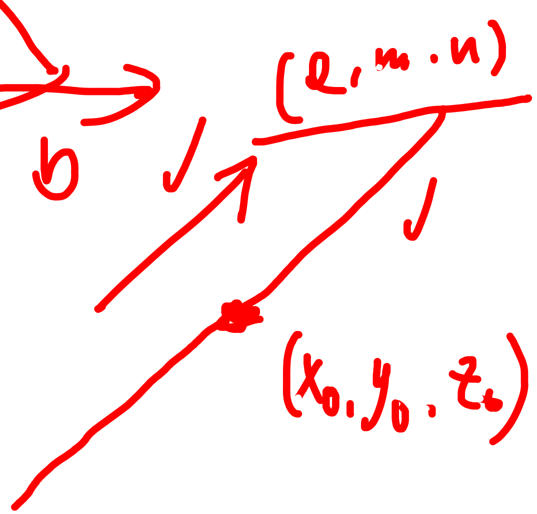


2. 直线方程

1）一般式： $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

2）对称式： $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}=t$

3）参数式： $x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt,\ z = z_0 + nt.$



9

3. 平面与直线的位置关系（平行、垂直、夹角）

关键：平面的法线向量，直线的方向向量。

4. 点到面的距离

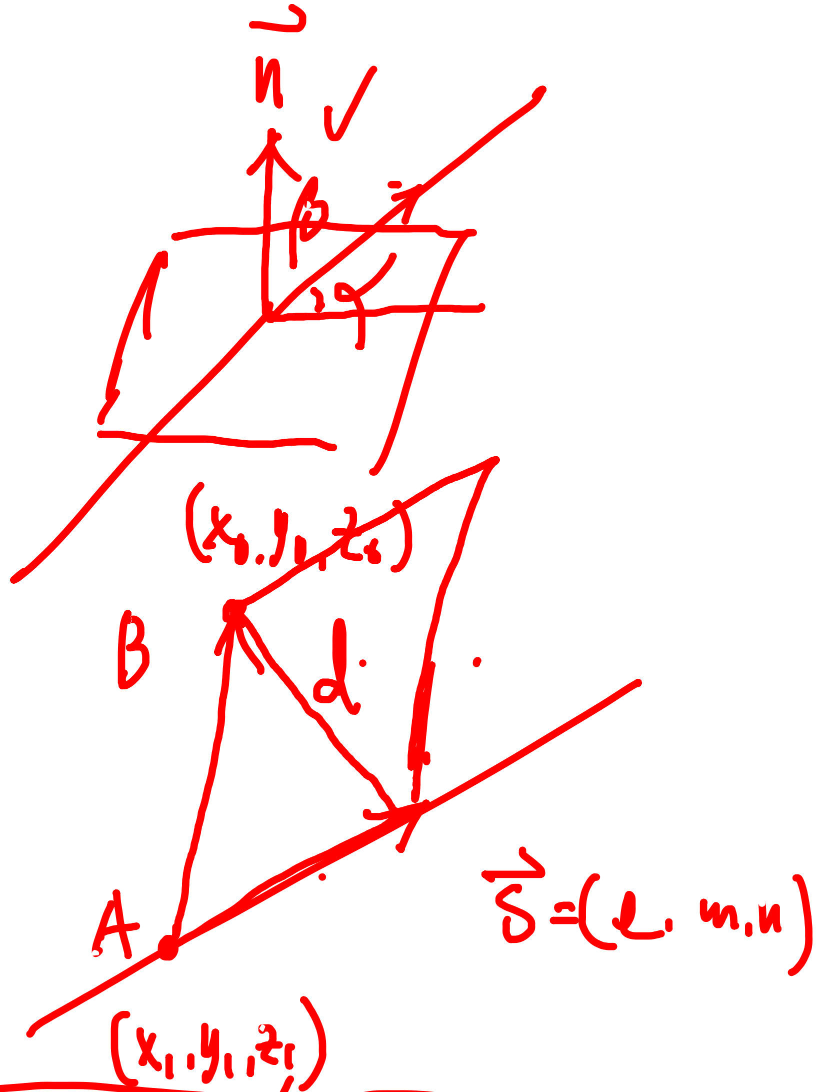
点 (x_0, y_0, z_0) 到平面 $Ax+By+Cy+D=0$ 的距离.

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

5. 点到直线距离

点 (x_0, y_0, z_0) 到直线 $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$

$$d=\frac{|\{x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0\}\times\{l,m,n\}|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$



$$\boxed{|\vec{AB}\times\vec{s}|=|\vec{s}|d}$$

常考题型与典型例题

常考题型

建立平面和直线方程

l_1 l_2

【例1】（1987年1）与两直线 $\begin{cases} x=1, \\ y=-1+t, \\ z=2+t \end{cases}$ 及 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 都平行，且过原点的平面方程为 ________.

$\vec{s_1}=(0,1,1)$ $\quad$ $\vec{s_2}=(1,2,1)$ $\quad$ $(1,-1,1)$

$\vec{n}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(-1,1,-1)$

$1\cdot(x-0)+(-1)(y-0)+1\cdot(z-0)=0$

$x-y+z=0$

$[x-y+z=0]$

第三节 曲面与空间曲线

1. 曲面方程: 一般式 $F(x,y,z)=0$ 或 $z=f(x,y)$

2. 空间曲线:

i）参数式: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ ii）一般式: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

3. 常见曲面

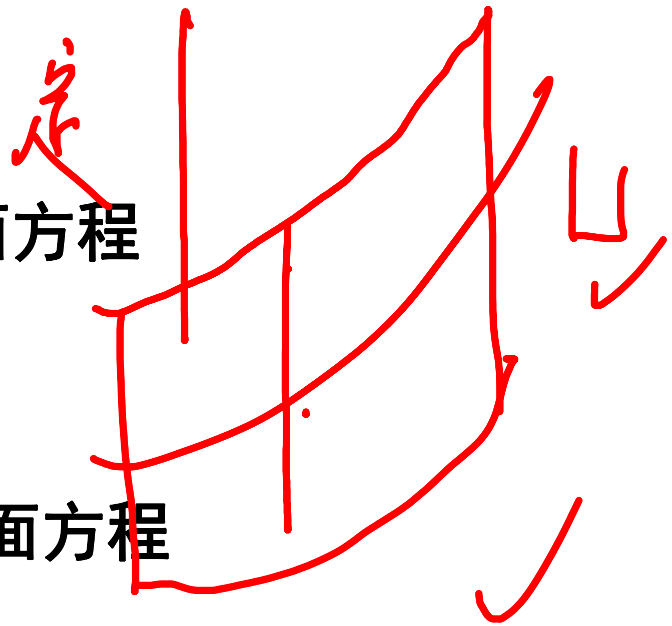
1）旋转面：一条平面曲线绕平面上一条直线旋转；

设 L 是 yoz 平面上一条曲线，其方程是 $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$，则

（1） L 绕 y 轴旋转所得旋转面方程为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$

（2） L 绕 z 轴旋转所得旋转面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$

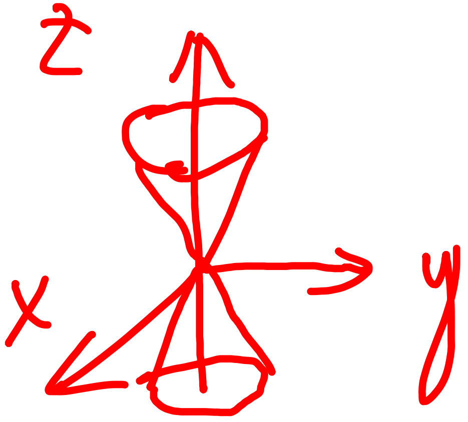
2.柱面: 平行于定直线并沿定曲线移动的直线L形成的轨迹;



(1) 准线为 $\Gamma:\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$, 母线平行于 z 轴的柱面方程为 $f(x,y)=0$;

(2) 准线为 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 母线平行于 z 轴的柱面方程为 $H(x,y)=0.$

3. 二次曲面



(1) 椭圆锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$; 特别的:圆锥面 $x^2+y^2=z^2$

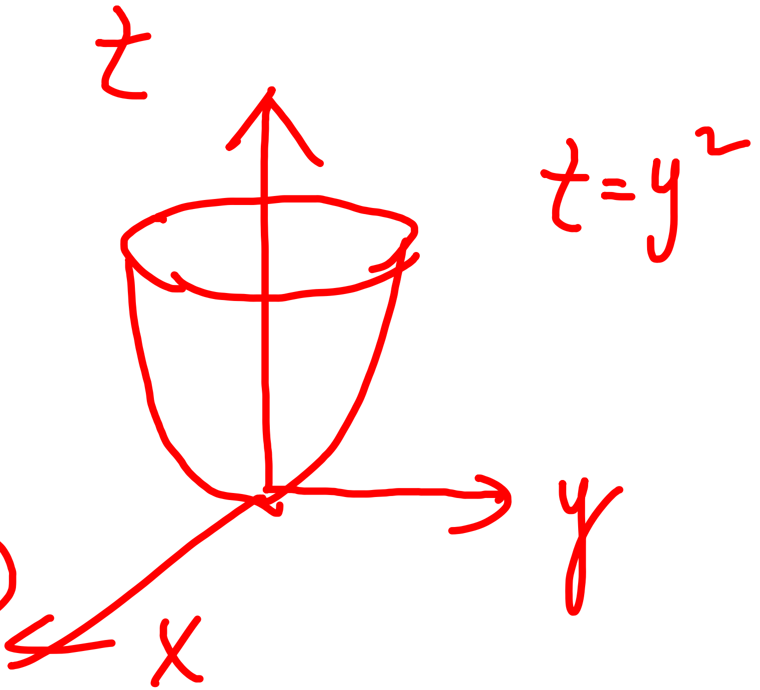
(2) 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$; 特别的:球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$

（3）单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

（4）双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

（5）椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z;$

特别的：旋转抛物面 $z=x^2+y^2$



（6）双曲抛物面 （马鞍面） $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$

4）空间曲线投影

曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 在 xoy 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}.$$

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

建立柱面和旋转面方程

【例1】求以曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+2z^2=1 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$ 为准线, 母线平行于 z 轴的柱面.

【解】 将 $z=x^2+y^2$ 代入 $x^2+y^2+2z^2=1$ 得

$$x^2+y^2+2(x^2+y^2)^2=1$$

即 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 为所要求的柱面.

【例2】求下列曲线绕指定的轴旋转产生的旋转面的方程

1) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 分别绕 x 轴和 y 轴旋转.

2) $\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ 分别绕 y 轴和 z 轴旋转.

【解】 1）绕 x 轴： $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$

绕 y 轴： $2(x^2 + z^2) + y^2 = 1$

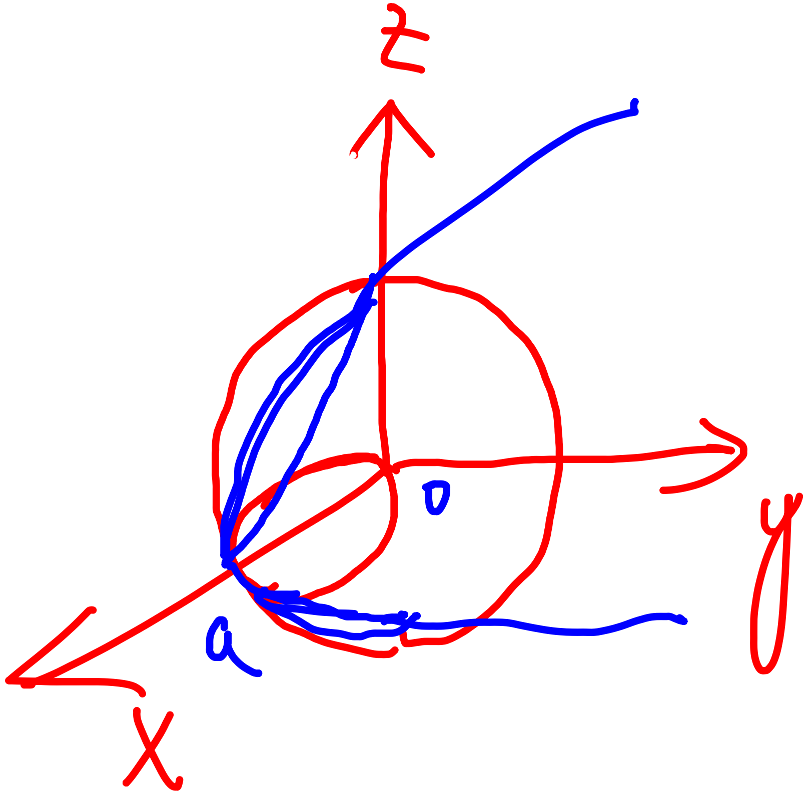
2）绕 y 轴： $x^2 + z^2 = y^4$

绕 z 轴： $z = y^2 + x^2$

【例3】求曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2(a>0) \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$ 在 xoy 面和 xoz 面上的投影曲线方程.

【解】在 xoy 面上的投影为 $\begin{cases} x^2+y^2=ax \\ z=0 \end{cases}$

在 xoz 面上的投影为 $\begin{cases} z^2+ax=a^2,(0\le x\le a) \\ y=0 \end{cases}$



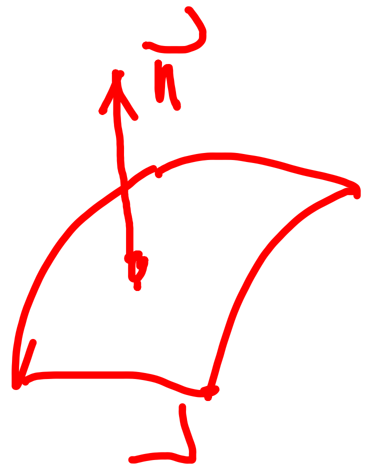
第四节 多元微分在几何上的应用

1. 曲面的切平面与法线

$f(x,y)-z=0$

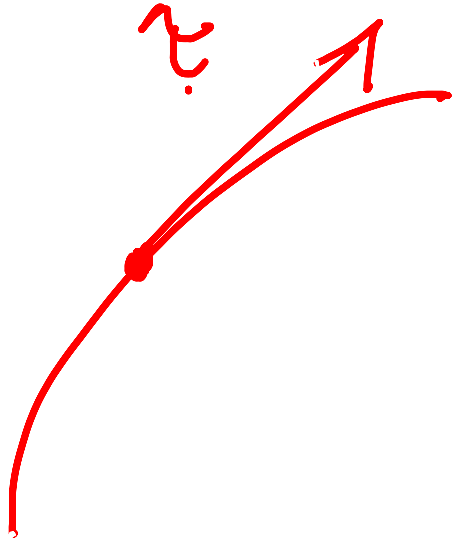
1） 曲面 $F(x,y,z)=0$ 法向量： $\mathbf{n}=\{F_x, F_y, F_z\}$

2） 曲面 $z=f(x,y)$ 法向量： $\mathbf{n}=\{f_x, f_y, -1\}$



2. 曲线的切线与法平面

1) 曲线 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ 切向量： $\tau=\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$



2) 曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 切向量： $\tau=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2$

其中 $\mathbf{n}_1=\{F_x, F_y, F_z\}$， $\mathbf{n}_2=\{G_x, G_y, G_z\}$

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

建立曲面的切平面和法线及曲线的切线和法平面

【例1】（2013年）曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为

（A） $x-y+z=-2.$　　（B） $x+y+z=0.$　　【A】

（C） $x-2y+z=-3.$　　（D） $x-y-z=0.$

$x-y+z+2=0$

$1\cdot(x-0)+(-1)(y-1)+1\cdot(z+1)=0$

【解】

$F(x,y,z)=x^2+\cos(xy)+yz+x$

$F_x=2x-y\sin(xy)+1$

$F_y(0,y,-1)=1-y$

$F(0,1,z)=1+z$

$F_x(0,1,-1)=1$

$F_y(0,1,-1)=-1$

$F_z(0,1,-1)=1$

【例2】（1993年）由曲线 $\begin{cases} 3x^2+2y^2=12, \\ z=0 \end{cases}$ 绕轴 y 旋转一周得到的旋转面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为________.

$(0,\sqrt{\frac{2}{5}},\sqrt{\frac{3}{5}})$

【解】

$$F = 3x^2+3z^2+2y^2-12=0$$

$F_x = 6x \quad 3x$

$F_y = 4y \quad 2y$

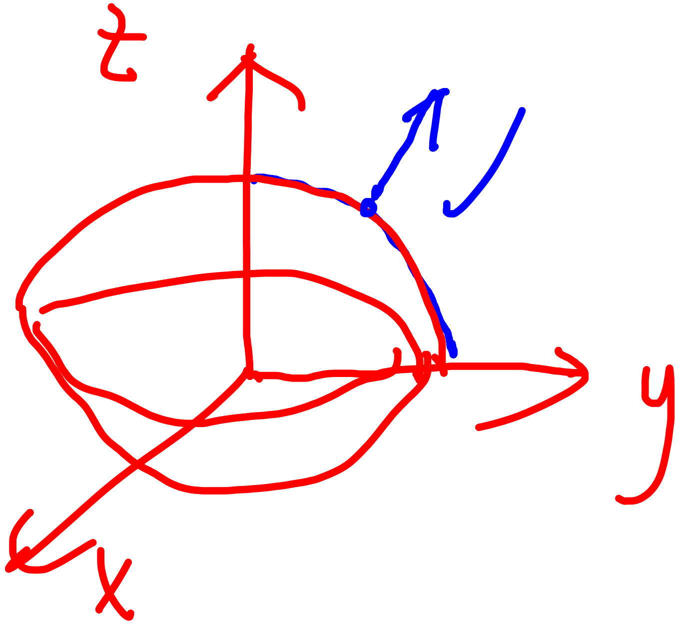
$F_z = 6z \quad 3z$

$$\vec{n} = (0, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{2})$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{0+12+18} = \sqrt{30}$$

$$\vec{n}^0 = \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{30}}, \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{30}}\right) = \left(0, \sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

$\sqrt{12} \quad \sqrt{18}$



【例3】（2003年）曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $2x + 4y - z = 0$

平行的切平面的方程是 ________.

$2x+4y-z=5$

解. $\vec{n}_1 = (2, 4, -1)$

【解】

$z = f(x, y)$

$\vec{n} = (f_x, f_y, -1) = (2x, 2y, -1)$

$\boxed{\frac{2x}{2} = \frac{2y}{4} = \frac{-1}{-1} = 1} \Rightarrow x = 1,\ y = 2,\ z = 5$

$-2 \quad -8 \quad +5$

$2(x-1) + 4(y-2) + (-1)(z-5) = 0$

$2x + 4y - z - 5 = 0$

【例4】求曲线 $x = t - \sin t$ $y = 1 - \cos t, z = 4\sin\frac{t}{2}$ 在点 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程和法平面方程.

$x_t = 1 - \cos t$

$y_t = \sin t$

$z_t = 2\cos\frac{t}{2}$

$\vec{\tau}$

【解】 $\vec{\tau} = (1, 1, \sqrt{2})$

点 $(\frac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2})$

切线方程为 $$\frac{x + 1 - \frac{\pi}{2}}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

法平面方程为 $$x + y + \sqrt{2}z - \frac{\pi}{2} - 4 = 0$$

【例5】求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线和法平面方程

【解】

切线方程为 $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{3}$

法平面方程为 $x-z=0$