高数基础班（11）

11	不定积分举例；定积分的概念、性质及计算方法；变上限积分	P83-P91

主讲 武忠祥 教授

还不关注，你就慢了

常考题型与典型例题

常考题型 求不定积分（换元、分部）
① ②

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$

t

【例18】 $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} =$ ______.

$\sqrt{x}$

$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\sqrt{x}$

第二类

【解1】 令 $\sqrt{1-x} = t$，$1-x = t^2$，$-dx = 2t\,dt$

原式 $= \int \frac{-2t\,dt}{(1+t^2)t} = -2\arctan t + C = -2\arctan\sqrt{1-x} + C$

【解2】 原式 $= \int \frac{-2d\sqrt{1-x}}{1+(\sqrt{1-x})^2} = -2\arctan\sqrt{1-x} + C$ 第一类

【例19】 设 $f(x)=\begin{cases} e^{x}, & x\geq 0, \\ \cos x, & x<0, \end{cases}$ 则 $\int f(x)dx =$ __________.

分段

连续 ↔ 可导

【解1】 $\int f(x)dx = \begin{cases} e^x + C_1, & x\geq 0 \\ \sin x + C_2, & x<0 \end{cases}$

$\boxed{\begin{matrix} 1+C_1 \\ \| \\ C_2 \end{matrix}}$

$\begin{cases} C_1 = C \\ C_2 = 1 + C \end{cases}$

$\int f(x)dx = \begin{cases} e^x + C, & x\geq 0 \\ \sin x + 1 + C, & x<0 \end{cases}$

$1+C \neq C$

$\int f(x)dx = \begin{cases} e^x + C, & x\geq 0 \\ \sin x + C, & x<0 \end{cases}$ $x=0$

C ✗

不连续 ↓ 不可导

【解2】 $f(x)$ 连续，则 $\boxed{F(x)=\int_0^x f(t)dt}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数

$\int_a^x$

$\int f(x)dx = F(x) + C$

$F(x) = \begin{cases} \int_0^x e^t dt, & x\geq 0 \\ \int_0^x \cos t\, dt, & x<0 \end{cases} = \begin{cases} e^x - 1, & x\geq 0 \\ \sin x, & x<0 \end{cases}$

【例20】（2023年2, 3）函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x\le 0,\\ (x+1)\cos x, & x>0.\end{cases}$ 的一个原函数为（ ）

A. $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x), & x\le 0,\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0.\end{cases}$

B. $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+1, & x\le 0,\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0.\end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}+x), & x\le 0,\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0.\end{cases}$ -1

D. $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+1, & x\le 0,\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0.\end{cases}$

$C=0$

1

$C=1$

$C_2=C_1-1$

【解1】 $x<0$, $\int f(x)dx=\int\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+C_1$ $\boxed{C_1=1+C_2}$

$x>0$, $\int f(x)dx=\int(x+1)\cos x dx=\int(x+1)d\sin x=(x+1)\sin x+\cos x+C_2$ -1

【例20】（2023年2, 3）函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x\le 0,\\ (x+1)\cos x, & x>0.\end{cases}$ 的一个原函数为（ ）

A. $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x), & x\le 0,\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0.\end{cases}$ $=\ln\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=-\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$

B. $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+1, & x\le 0,\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0.\end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}+x), & x\le 0,\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0.\end{cases}$ $0 \quad x\to 0^-$ $x=0$ 不连续，

$1 \quad \sin x+(x+1)\cos x-\sin x=(x+1)\cos x$

D. $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+1, & x\le 0,\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0.\end{cases}$

【解2】验证 $F'(x)=f(x)$.

$x=0$ — 可导 → 连续.

【例21】计算 $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx\ (a>0)$.

【解1】令 $x = a\sin t$

换元

$\sin t\cos t = \frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$

原式 $= \int \frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}\, a\cos t\, dt = \frac{a^2}{2}\int (1-\cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C$

$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$

还原

【解2】$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\int x\,d\sqrt{a^2-x^2}$

分部

2

$= -x\sqrt{a^2-x^2} + \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = -x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$

$= -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

【例22】(2006年2) 求 $\int \frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}}\mathrm{d}x$.

$e^{-x}dx=-de^{-x}$

$\int \frac{e^{-x}\cdot e^{x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

①分部：✓

【解1】 $\int \frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}}\mathrm{d}x=-\int \arcsin e^{x}\mathrm{d}(e^{-x})=-\frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}}+\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-e^{2x}}}}$. ✓ ②

换元

在 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ 中，令 $\sqrt{1-e^{2x}}=t$，则 $\mathrm{d}x=\frac{-t\,\mathrm{d}t}{1-t^{2}}$

$1-e^{2x}=t^2$

$e^{2x}=1-t^2$

$2x=\ln(1-t^2)$

$2dx=\frac{-2t}{1-t^2}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-e^{2x}}}=-\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^{2}}=-\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}+C$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-e^{2x}}}{1-\sqrt{1-e^{2x}}}+C$$

$$\int \frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}}\mathrm{d}x=-\frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}}-\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-e^{2x}}}{1-\sqrt{1-e^{2x}}}+C.$$

【解2】令 ① 换元 $\arcsin e^{x}=t$，则 $x=\ln\sin t,\ \mathrm{d}x=\dfrac{\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t.$

$$\int\frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}}\mathrm{d}x=\int\frac{t}{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t=-\int t d\frac{1}{\sin t}$$

② 分部

$$\frac{\cos t}{\sin t}$$

$$=-\frac{t}{\sin t}+\int\frac{1}{\sin t}\mathrm{d}t$$

$$e^{x}=\sin t$$

$$=-\frac{t}{\sin t}-\ln|\csc t+\cot t|+C$$

$$=-\frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}}-\ln\left|\frac{1}{e^{x}}+\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{e^{x}}\right|+C$$

$$=-\frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}}-\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})+x+C.$$

【例23】（2011年3）求不定积分 $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

【解】 $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)\mathrm{d}\sqrt{x}$ ①分部

$$= 2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x) - \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} - 2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$

d(1-x)

$\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$　　$\frac{\mathrm{d}x}{x}$

$$= 2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x) + \int\frac{\mathrm{d}(1-x)}{\sqrt{1-x}} - 4\sqrt{x}$$

$$= 2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x) + 2\sqrt{1-x} - 4\sqrt{x} + C.$$

②换元

【例24】（2009年2, 3）计算不定积分 $\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x \quad (x>0)$.

$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$

$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$

【解】设 $\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$ ，则 $x=\frac{1}{t^2-1}$ ① 换元

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x=\int \ln(1+t)\,\mathrm{d}\frac{1}{t^2-1}=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t.$$

$$\int\frac{1}{(t^2-1)(t+1)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\frac{(t+1)-(t-1)}{(t^2-1)(t+1)}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\frac{1}{2(t+1)}+C,$$

② 分部

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2(t+1)}+C$$

【例25】（1994年5）已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求

$$\int x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$f(x)\mathrm{d}x=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{d}\frac{\sin x}{x}$$

【解】 $f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

$$-3\int x^2 f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x \overset{*}{=} \int x^3 \mathrm{d}f(x)=x^3 f(x)-3\int x^2\,\mathrm{d}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=x^3 f(x)-3\left[x^2\frac{\sin x}{x}-2\int \sin x\,\mathrm{d}x\right]$$

$$=x^3\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}-3x\sin x-6\cos x+C$$

$$=x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C.$$

【例26】(2002年3, 4) 设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$，求 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x)\,dx$.

【解1】 令 $u=\sin^2 x$，则有 $\sin x=\sqrt{u}$，$x=\arcsin\sqrt{u}$，

$$f(x)=\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x)\,dx=\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

$$=-\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,d(1-x)=-2\int \arcsin\sqrt{x}\,d\sqrt{1-x}$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\int \sqrt{1-x}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,d\sqrt{x}$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C.$$

【例26】(2002年3, 4) 设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$，求 $\int \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

$\sin^2 t$

【解2】 令 $x=\sin^2 t$，则 ① $f(x)$ ②

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int \frac{\sin t}{\cos t}\cdot\frac{t}{\sin t}\cdot 2\sin t\cos t\,dt$$

$$=2\int t\sin t\,dt$$

$$=-2t\cos t+2\sin t+C$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C.$$

第五章　定积分与反常积分

第一节　定积分

第二节　反常 积分

第一节　定积分

本节内容要点

一. 考试内容概要

（一）定积分概念

（二）定积分的性质

（三）积分上限的函数

（四）定积分的计算

二. 常考题型与典型例题

题型一　定积分的概念、性质及几何意义

题型二　定积分计算　　*

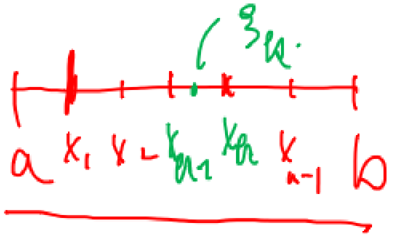
题型三　变上限定积分　*

第一节 定积分

考试内容概要

（一）定积分的概念

①分 ②匀 ③和 ④精



① ② $f(x)$

①存在性 —— 可积性

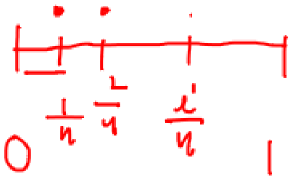
②值 —— 计算

截

1.定积分的定义 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \triangleq \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

【注】（1）$\lambda\to 0$ 与 $n\to\infty$ 不等价；

（2）$\int_a^b f(x)dx$ 仅与 $f(x)$ 和 $[a,b]$ 有关；$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.



（3）极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 与 ξ_i 的取法和区间 $[a,b]$ 的分法无关.

存在 ① ② n等分

$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$

“可爱因子”

2. 定积分存在的充分条件

f(x)连续 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ f(x)可积

✓ (1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续； ✓

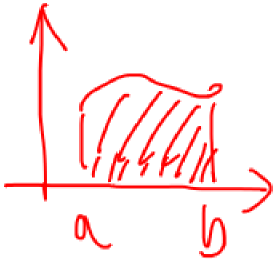
(2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界且只有有限个间断点； ✓

可积 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 有界

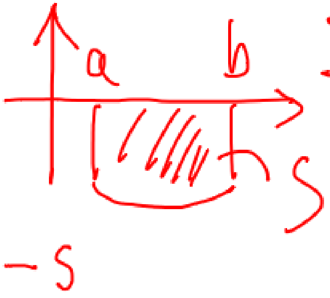
✓ (3) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上仅有有限个第一类间断点；

3. 定积分的几何意义

$f(x)>0$

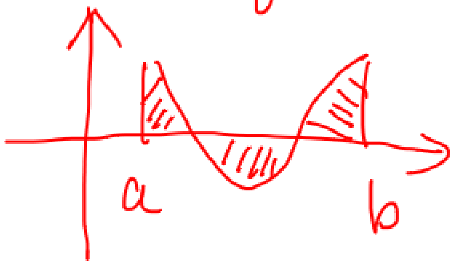


$f(x)<0$



$D(x)=\begin{cases}1, & x有理\\ 0, & x无理\end{cases}$

$\int_0^1 D(x)dx$ 不存在



（二）定积分的性质

① 积分不等式

② 极限

$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}\,dx$

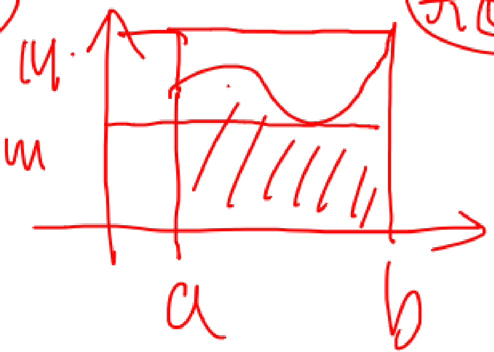
夹逼

1) 不等式：

（1） 若 $f(x)\le g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$ $(a\le b)$

（2） 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le M(b-a).$$ 估值性



（3） $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x.$ $|a+b|\le|a|+|b|$

2) 中值定理：

$F'(x)=f(x)$

*（1） 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

① 证明题

② 求极限

拉

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)=F'(\xi)(b-a)\qquad a<\xi<b$$

（2） 若 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 不变号，则

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,\quad a\le\xi\le b$$ $g(x)=1$

(三) 积分上限的函数 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x)$

定理： 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导且

$$\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(x).$$

① 微分与积分互为逆运算
② 原函数的存在性 连续

$$\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt\right)' = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

例 $\left(\int^{e^x} f(t)dt\right)' = f(e^x)e^x - f(x^2)\cdot 2x$

$\int_a^x f(t)dt$

$\int_a^x = \int_a^0 + \int_0^x$

$\left(\int_0^{\sin x} f(t)dt\right)' = f(\sin x)\cos x$

定理： 设 $f(x)$ 连续，

(1) 若 $f(x)$ 是奇函数，则 $\int_0^x f(t)dt$ 是偶函数；

(2) 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数；

$\left(\int_{\ln x}^1 f(t)dt\right)' = -f(\ln x)\frac{1}{x}$

$\int_a^x f(t)dt$

[证]. 令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ ∴ $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt \overset{t=-u}{=} \int_0^x f(-u)(-du) = \int_0^x f(u)du$

（四）定积分的计算

1）牛顿-莱布尼兹公式 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

2）换元法 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$

3）分部积分法 $\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u.$

4）利用奇偶性，周期性

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & f(x)\ \text{为奇函数}, \\ 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x, & f(x)\ \text{为偶函数}. \end{cases}$$

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5）利用公式

$$(1)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2}, & n\text{偶} \\ \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}, & n\text{奇} \quad (n>1) \end{cases}$$

f(x)连续 [0,1]

$$(2)\ \int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$$

$x=\pi-t$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx = \frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\overbrace{\sin x\,dx}^{-d\cos x}}{1+\cos^2 x} = -\frac{\pi}{2}\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left[-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi^2}{4}$$