高数基础班（16）

16	多元微分学的概念及关系（重极限、连续、偏导数及全微分）	P129-P136

① 相同

② 不同

主讲 武忠祥 教授

第八章 多元函数微分学

第一节　多元函数的基本概念 √

第二节　多元函数微分法

第三节　多元函数的极值与最值

第一节　重极限 连续 偏导数 全微分

本节内容要点

一. 考试内容概要

（一）多元函数的极限

（二）多元函数的连续性

（三）偏导数

（四）全微分

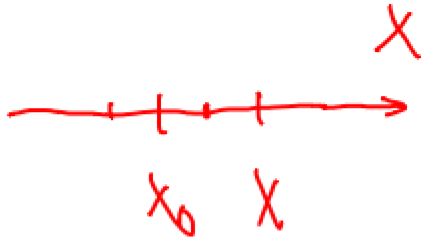
（五）连续、可导、可微的关系

二. 常考题型与典型例题

讨论连续性、可导性、可微性

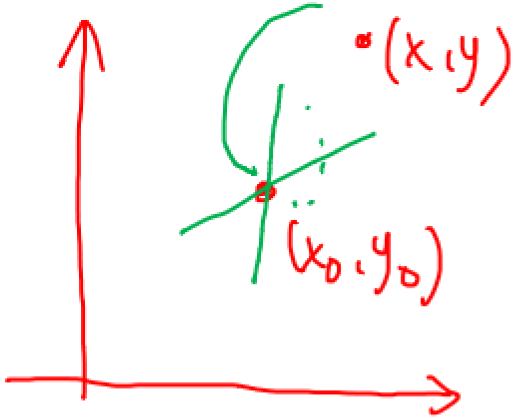
考试内容概要

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$



（一）多元函数的极限

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$$



注 1） $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 是以"任意方式"

2） （1）局部有界性　　　　（2）保号性

（3） 有理运算　　　　（4）极限与无穷小的关系

（5）夹逼性

洛必达

【例1】求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$.

3次 / 2次 $= 0$?

$\dfrac{0}{0}$ $\dfrac{A}{B}$ $\boxed{一般}$. A分次高于B. 0

A…等… 不存在

A…低 ∞

[解1] $0 \le \left|\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \le |x| \to 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$

$f(x)\to 0 \Longleftrightarrow |f(x)|\to 0$

① $|f(x,y)|$

② 夹逼

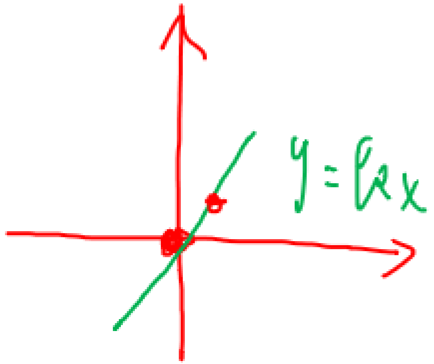
[解2] $\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = x \cdot \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ $x \to 0$ 无穷小 $\dfrac{y^2}{x^2+y^2} \to$ 有界.

$\left|\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\right| \le 1$

$\to 0$

【例2】证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\overset{2次}{xy}}{\underset{2次}{x^2+y^2}}$ 不存在.

【解】 $\lim\limits_{\substack{y=kx\\ x\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \dfrac{k}{1+k^2}$



$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在

(二) 多元函数的连续性

一元 ①概念

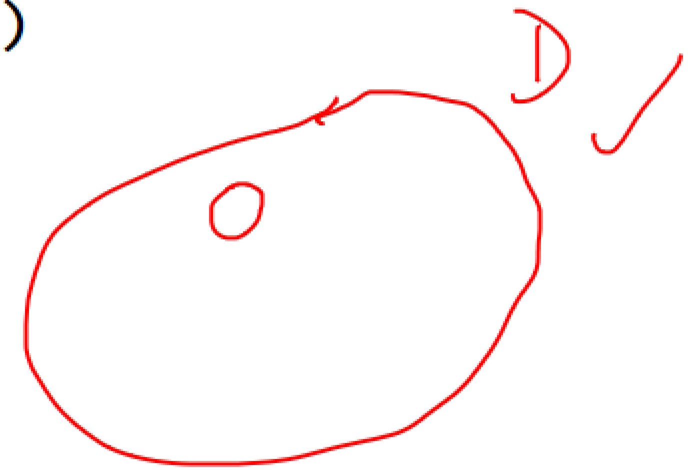
? ②间断点 *

③性质

1）连续的概念 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

2）连续函数的性质

性质1 多元连续函数的和、差、积、商（分母不为零）仍为连续函数；



性质2 多元连续函数的复合函数也是连续函数；

性质3 多元初等函数在其定义区域内连续；

性质4（最大值定理）

有界闭区域 D 上的连续函数在区域 D 上必能取得最大值与最小值。

性质5（介值定理）

有界闭区域 D 上的连续函数在区域 D 上必能取得介于最大值与最小值之间的任何值。

（三）偏导数

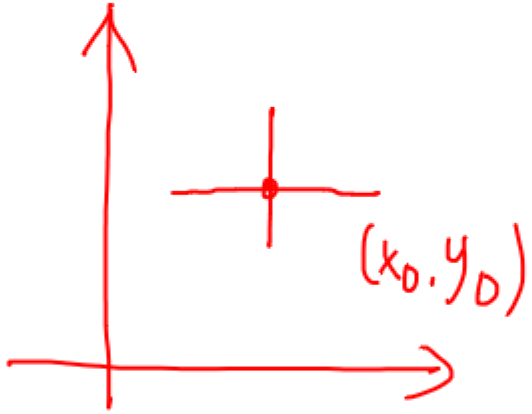
$z=f(x,y)=\varphi(x)$　　$y=f(x)$

1）偏导数的定义

$\varphi'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x}$

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\frac{d}{dx}f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}$$

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\frac{d}{dy}f(x_0,y)\Big|_{y=y_0}$$



[补2] $f(x,1)=\ln(1+|x|\sin 1)=\varphi(x)$，$\varphi'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+|x|\sin 1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|\sin 1}{x}$ 不存在

[补1] $f_x'(0,1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,1)-f(0,1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(1+|\Delta x\sin 1|)-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|\sin 1}{\Delta x}$ 不存在

【例3】（2023年3） 已知函数 $f(x,y)=\ln(y+|x\sin y|)$，则（　）

$f(0,y)=\ln y=g(y)$，$g'(1)=\dfrac{1}{y}\Big|_{y=1}=1$

A. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 不存在，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 存在.

B. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 存在，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 不存在.

C. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 均存在.

D. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 均不存在.

先代后求

$f_y'(0,1)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,1+\Delta y)-f(0,1)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\ln(1+\Delta y)-0}{\Delta y}=1$

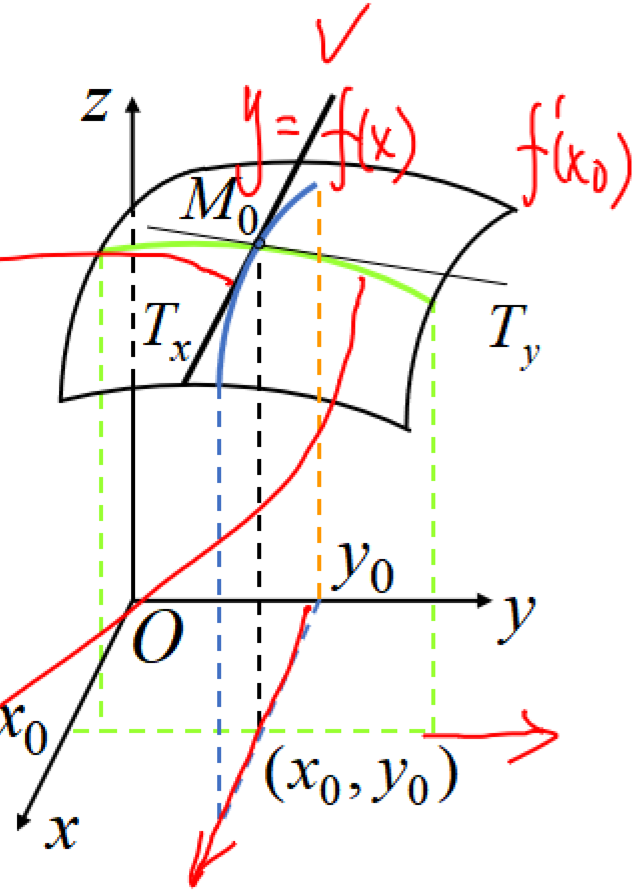
2）二元函数偏导数的几何意义

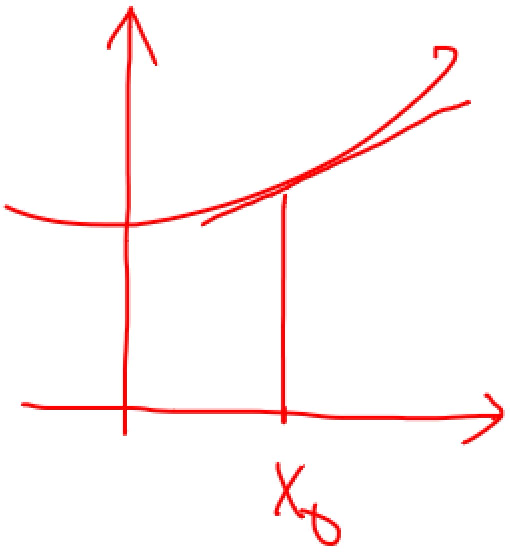
$z = f(x, y_0)$

$f_x(x_0, y_0)$

$z = f(x_0, y)$

$f_y(x_0, y_0)$





3）高阶偏导数

$z=z(x,y)$　　$\frac{\partial z}{\partial x}$　　$\frac{\partial z}{\partial y}$

定义5

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}$$

定理1 如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内连续，则在该区域内

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

5

（四）全微分

$\Delta y = 0$

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \boxed{A\Delta x} + o(\Delta x)$

dy

定义5 若 $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

$= A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$，则称函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微，

$A = f'(x_0)$

$dz = A\Delta x + B\Delta y$

$\frac{o(\sqrt{(\Delta x)^2})}{\Delta x} = \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x} = \frac{o(|\Delta x|)}{|\Delta x|} \cdot \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ 有界

$\left|\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\right| = 1$

定理2（可微的必要条件） 如果 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微，

$A = \frac{\partial z}{\partial x}$ $B = \frac{\partial z}{\partial y}$

则在点 (x_0, y_0) 处 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

可微 $\rightarrow$ 可导

用定义判定可微性

a) $f_x(x_0, y_0)$ 与 $f_y(x_0, y_0)$ 是否都存在？

b) $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta z - [f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$ 是否为零？

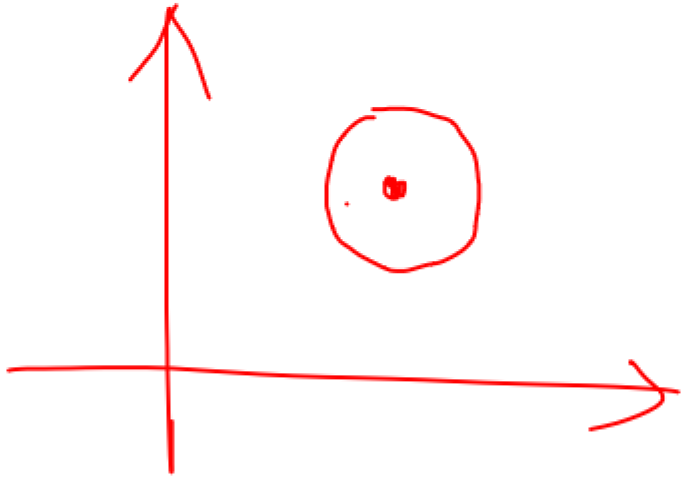
定理3（可微的充分条件） 如果 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微.

$f_x(x_0,y_0)$. $f_y(x_0,y_0)$ 存在 $\not\Rightarrow$ 可微.

$\boxed{f_x(x,y)}$

$f_y(x_0,y)$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f_x(x,y)=f_x(x_0,y_0)$$



(五)连续、可偏导及可微之间的关系

$f(x,y)=|x|+|y|$. $f(x,0)=|x|$

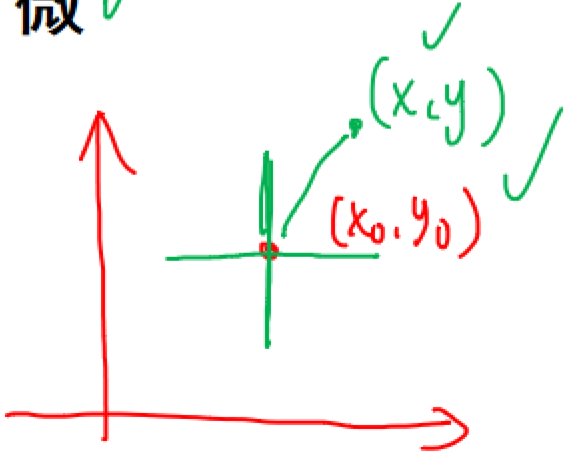
$f_x(0,0)$ 不存在

一元函数

连续 $\xrightarrow{|x|}$ 可导

$|x|$

可微



多元函数

连续 $\xrightarrow{|x|+|y|}$ 可偏导

$|x|+|y|$

可微

偏导数连续

$f_x(x_0,y_0)$ 存在

$f(x,y_0)$

$f_y(x_0,y_0)$ 存在

$f(x_0,y)$

常考题型与典型例题

常考题型

连续、偏导数、全微分的概念及其之间的关系

【例4】(1997年1) 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

在点 (0,0) 处(　　)

(A) 连续、偏导数存在　　(B) 连续、偏导数不存在

(C) 不连续、偏导数存在　　(D) 不连续、偏导数不存在

$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

【例2】先代后求

$f(x,0)=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

$f'_x(0,0)=0$

$f'_y(0,0)=0$

$f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$

【解】 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ $\boxed{不存在}$　$y=kx$ → 不连续.

$f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\quad}{x}$

【例5】（1994年，1,2）二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f_0'(x_0,y_0)$，$f_y'(x_0,y_0)$ 存在，是 $f(x,y)$ 在该点连续的（　　）

（A）充分而非必要条件　　（B）必要条件而非充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既非充分条件又非必要条件

连续 $\not\Leftrightarrow$ 可导

【例6】(2012年，3) 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$$，则 $dz|_{(0,1)}=$ ________.

$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$

$= A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$ $\quad \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

$f(0,1)-1=0$

【解1】由 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$ 得，$f(0,1)=1$，且

$\Delta z = f(x,y) - f(x_0, y_0)$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to1}}\frac{[f(x,y)-f(0,1)]-[2x-(y-1)]}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$$

$= A(x-x_0)+B(y-y_0)+o(\rho)$

$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

即 $\quad \Delta z = f(x,y)-f(0,1) = 2x-(y-1)+o(\rho)$

$dz = A\,dx + B\,dy$

则 $\quad dz|_{(0,1)} = 2dx - dy$

【解2】 $f(x,y)=2x-y+2 \qquad df(x,y)=2dx-dy$

【例7】证明以下几个经典的反例

（1） $f(x,y)=|x|+|y|$ 在 $(0,0)$ 点连续，但不可导（也不可微）；

（2） $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ 在 $(0,0)$ 点可导，但不连续；

（3） $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ 在 $(0,0)$ 点可导，但不可微；

（4） $$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 点可微，但偏导数不连续；

（1） $f(x,y)=|x|+|y|$ 在 $(0,0)$ 点连续，但不可导（也不可微）；

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(|x|+|y|\right)=0=f(0,0)$$

$f(x,0)=|x|$ $\quad$ $f_x(0,0)$ 不存在

（2）$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点可导，但不连续；

$y=kx$

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点可导，但不可微；

[解] ① $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0-0}{x}=0=A$

$f_y(0,0)=0=B$

② $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\dfrac{\left[\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}-0\right]-\left[0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y\right]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0\ ?$

用定义判定可微性

a) $f_x(x_0,y_0)$ 与 $f_y(x_0,y_0)$ 是否都存在？

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\dfrac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 不存在 $\Longrightarrow$ 不可微

b) $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{\Delta z-[f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 是否为零？

(4) $$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在 (0,0) 点可微，但偏导数不连续；

$f_x(x,y)$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f_x(x,y)=f_x(0,0)$$

[证] ① $$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{(\Delta x)^2}-0}{\Delta x}=0,\quad f_y(0,0)=0$$

② $$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{\left[\left((\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right)\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}-0\right]-\left[0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y\right]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0\Rightarrow 可微$$

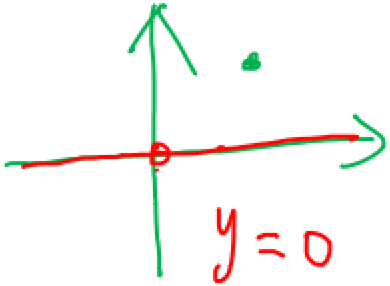
~~存在~~ $\to 0$ + 不存在 = 不存在

$(x,y)\neq(0,0)$, $$f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}+(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$=-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

$x\to0$

不存. $$-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$$ ∞ 1 -1

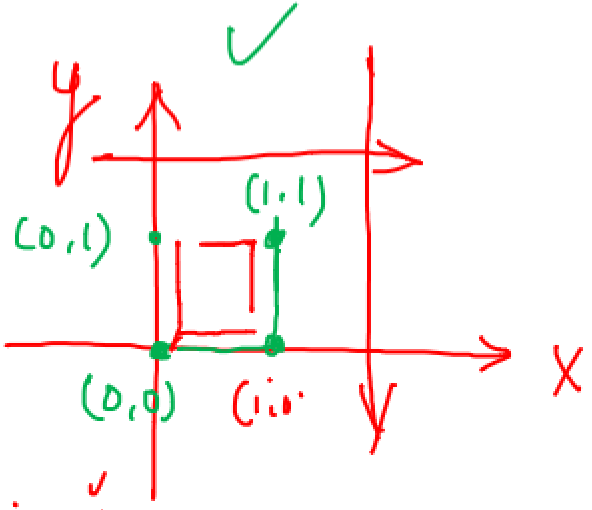


【例8】（2017年2）设 $f(x,y)$ 具有一阶偏导数，且对任意的 (x,y) 都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$，则（　）

(A) $f(0,0)>f(1,1)$.　　(B) $f(0,0)<f(1,1)$.

(C) $f(0,1)>f(1,0)$.　　(D) $f(0,1)<f(1,0)$.

(D)



【解1】

$$f(1,0)-f(0,1)=f(1,0)-f(0,0)+f(0,0)-f(0,1)$$

$$=f'_x(\xi,0)(1-0)+f'_y(0,\eta)(0-1)$$

$$=f'_x(\xi,0)-f'_y(0,\eta)>0$$

【解2】 排除法

$f(x,y)=x-y$

$f_x=1>0,\quad f_y=-1<0$