

第五章 特征值与特征向量

1987 ~ 2008 本章考题考点分布统计表


考点	考频	考题分布与分值	
特征值、特征向量的概念与计算	1	2002, 一(5) 题 3 分	
相似与相似对角化	2	2003, 十一题 10 分	2004, 23 题 9 分
实对称矩阵	2	2006, 23 题 9 分	2007, 24 题 11 分


本章导读

本章从 2002 年开始有考题. 特征值和特征向量是线性代数的重要内容之一, 也是考研的重点之一, 它涉及行列式、矩阵, 相关、无关, 秩, 基础解系……一系列问题, 知识点多, 综合性强, 必须好好复习.

第一, 要掌握求特征值、特征向量的各种方法; 第二是相似, 把握住和对角矩阵相似的充分必要条件, 会求可逆矩阵 P ; 第三(可能更重要), 利用实对称矩阵的隐含信息处理求特征值、特征向量, 用正交矩阵相似对角化等一系列问题.

真题分类练习

 一阶题, 相对容易, 推荐先做

 二阶题, 较综合, 可在第二轮复习时做

一、特征值、特征向量的概念与计算

试题特点

常见的命题形式:


1. 用定义 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$ 推理、分析、判断.
2. 由 $|\lambda E - A| = 0$ 和 $(\lambda_i E - A)x = 0$ 求基础解系.
3. 通过相似 $P^{-1}AP = B$.
 - (1) 如 $A\alpha = \lambda\alpha$, 则 $B(P^{-1}\alpha) = \lambda(P^{-1}\alpha)$,
 - (2) 如 $B\alpha = \lambda\alpha$, 则 $A(P\alpha) = \lambda(P\alpha)$,

特别地,如 $r(A) = 1$,有

$$|\lambda E - A| = \lambda^n - \sum a_{ii} \lambda^{n-1}$$

$$\lambda_1 = \sum a_{ii}, \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$$

通过下面的考题,请进一步体会考场上如何求特征值、特征向量.

 **1** (2002, 一(5) 题, 3 分) 矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ 的非零特征值是_____.

答题区

解题加速度

1. (1991, 数四, 4 分) 已知向量 $\alpha = (1, k, 1)^T$ 是矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量, 试求常数 k 的值.



2. (1992, 数四, 3 分) 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的非零特征值是_____.



3. (1993, 数四, 3 分) 设 $\lambda = 2$ 是非奇异矩阵 A 的一个特征值, 则矩阵 $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$ 有一个特征值等于

(A) $\frac{4}{3}$.

(B) $\frac{3}{4}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) $\frac{1}{4}$.



二、相似与相似对角化

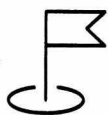
试题特点

围绕相似定义 $P^{-1}AP = B$, 相似的性质设计试题, 或者考查判断是否和对角矩阵相似.

$A \sim \Lambda \Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量

\Leftrightarrow 如 λ 是 A 的 k 重特征值, 则 λ 有 k 个线性无关的特征向量.

如 A 有 n 个不同的特征值 $\Rightarrow A \sim \Lambda$.



2

(2003, 十一题, 10 分) 若矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ 相似于对角矩阵 Λ , 试确定常数 a 的值; 并

求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = \Lambda$.

答题区

☐
☐
☐
☐
☐
☐ 一天

☐ 四天

☐ 七天

☐ 一月

☐ 考前



3 (2004, 23 题, 9 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{bmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并

讨论 A 是否可相似对角化.

答题区



解题加速度

1. (1997, 数四, 9 分) 设矩阵 A 与 B 相似, 且

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}.$$

(1) 求 a, b 的值.

(2) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = B$.



演算空间

2. (1999, 数四, 7 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & -1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, 问当 k 为何值时, 存在可逆矩阵 P , 使得

$P^{-1}AP$ 为对角矩阵? 并求出 P 和相应的对角矩阵.



演算空间

3. (2000, 数四, 9分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$, 已知 A 有 3 个线性无关的特征向量, $\lambda = 2$ 是

A 的二重特征值, 试求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵.



三、实对称矩阵

试题特点

实对称矩阵有几个重要的定理, 例如: 实对称矩阵一定和对角矩阵相似(不管特征值有没有重根); 实对称矩阵特征值不同时特征向量必相互正交(由此有内积为 0, 从而可构造齐次方程组求特征向量); 实对称矩阵可以用正交矩阵来相似对角化. 试题就是围绕这些定理来设计的. 此部分是考研的重点, 特别要复习好综合性强的解答题.

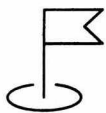


4 (2006, 23 题, 9 分) 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T$, $\alpha_2 = (0, -1, 1)^T$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解.

(I) 求 A 的特征值与特征向量;

(II) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$.

答题区



5 (2007, 24 题, 11 分) 设三阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$, 且 $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量, 记 $B = A^5 - 4A^3 + E$, 其中 E 为三阶单位矩阵.

(I) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 B .

答题区