高数基础班（4）

4	求极限方法举例（洛必达法则；泰勒公式；夹逼原理；单调有界准则；定积分定义）	P25-P33

主讲 武忠祥 教授

方法4 利用洛必达法则求极限

洛必达法则

$\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$

若 1） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0\ (\infty)$;

2） $f(x)$ 和 $g(x)$在 x_0的某去心邻域内可导, 且 $g'(x)\neq 0$;

3） $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或 ∞ ）; ?

则 $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{?}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$\infty \quad 0$

$$[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$$

$0 \quad \infty$

$0 \quad \infty$

注：1）适用类型 $\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; 1^{∞}; ∞^{0}; 0^{0}.

2）解题思路 $$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\Leftarrow\begin{cases}0\cdot\infty \Leftarrow \begin{cases}1^{\infty}\\ \infty^{0}\\ 0^{0}\end{cases}\\ \infty-\infty\end{cases}$$

【例30】求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}$.　$\dfrac{0}{0}$

【解】 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\tan(x-1)}{-\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}x}$　（洛必达法则）　$\dfrac{0}{0}$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}$$　$(\tan(x-1)\sim x-1)$ ✓

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{1}{-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}x}$$ ✓　（洛必达法则）

$$=-\frac{4}{\pi^2}$$

【例31】（1988年3）求极限 $\lim\limits_{x\to1}(1-x^2)\tan\frac{\pi}{2}x$.

0 · ∞

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\overset{2}{\boxed{(1+x)}}(1-x)\dfrac{\overset{1}{\boxed{\sin\frac{\pi}{2}x}}}{\cos\frac{\pi}{2}x}$

$=2\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{\cos\frac{\pi}{2}x}$ $\qquad\dfrac{0}{0}$

$=2\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=\dfrac{4}{\pi}$

【例32】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

∞^0

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$$

【解】$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{1}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}=e^0=1$$

【例33】 设 $f(x)$ $\boxed{\text{二阶可导}}$ $f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=2$

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$ $\quad \dfrac{0}{0}$

n阶可导， n阶导数连续

$f^{(n-1)}(x)$ $\quad f^{(n)}(x)$

【解1】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-1}{2x}$ （洛必达法则）

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}$$

$$=\frac{f''(0)}{2}$$ （导数定义）

$$=1$$

【注】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}\overset{?}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-1}{2x}\overset{?}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{2}\overset{?}{=}\dfrac{f''(0)}{2}=1$ 经典的错误 标准的0分

存在 $\quad f''(x)$连续？

【例33】设 $f(x)$ 二阶可导 $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=2$

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$

【解2】 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$

即 $f(x)=x+x^2+o(x^2)$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+o(x^2)}{x^2}=1$

方法5 利用泰勒公式求极限

$\alpha \sim \beta \Rightarrow \alpha = \beta + o(\beta)$

定理（泰勒公式） 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处 n 阶可导，则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n$$

几个常用的泰勒公式

(1) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$

(2) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$

(3) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

(4) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$

(5) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

$\tan x - x \cancel{\sim} = \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

$\arctan x - x \sim -\frac{1}{3}x^3$

$\arcsin x - x \sim \frac{1}{6}x^3$

【例34】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

4次

$\frac{0}{0}$

① $\frac{f(x)}{g(x)}$ ：上下同阶

【解1】 $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4)$$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$ - -

② $f(x)-g(x)$ ：最低次

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}$$

【解2】 $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x + xe^{-\frac{x^2}{2}}}{4x^3}$$

洛

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x) - x\left(1 - e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}{x^3} = \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{6}x^3\right) - \left(\frac{1}{2}x^3\right)}{x^3} = -\frac{1}{12}$$

等

【例35】（1994年3）设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则（ ）.

（A） $a=1, b=-\dfrac{5}{2}$　　　　（B） $a=0, b=-2$

（C） $a=0, b=-\dfrac{5}{2}$　　　　（D） $a=1, b=-2$

【解1】 $2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)]-(ax+bx^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\underbrace{(1-a)}_{=0}x-\underbrace{(\frac{1}{2}+b)}_{=2}x^2+o(x^2)}{x^2}$　　$a=1, b=-\dfrac{5}{2}$

同阶

$1-a=0$　　　$-\frac{1}{2}x^2$　　　$-\frac{1}{2}-b=2$

【解2】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x}=0$　　$a=1$， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}-b=2$，　$b=-\dfrac{5}{2}$.

【解3】代入法　$a=0$ ✗ $\Rightarrow a=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\underbrace{\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}}_{\neq 0}+2=2$

【例36】（2000年2）若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ =? 0

（A）0　　（B）6　　（C）36　　（D）∞

【解1】 $$0=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{6x-\frac{(6x)^3}{3!}+o(x^3)+xf(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}-36$$

【注】 $$0=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)\overset{?}{=}\lim_{x\to 0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$$ 经典的错误 标准的0分

【例36】（2000年2）若 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$

（A）0　　（B）6　　（C）36　　（D）

【解2】 $0=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x-6x+6x+xf(x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x-6x}{x^3}+\boxed{\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{6}(6x)^3}{x^3}+\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}$$

$$=-36+\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}$$

【例36】（2000年2）若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$

（A）0 （B）6 （C）36 （D）∞

【解3】 $\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0+\alpha$ $\alpha\to 0$

$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$

$f(x)=(\qquad)$

【解4】排除法 $\sin 6x+xf(x)=0 \Rightarrow f(x)=-\dfrac{\sin 6x}{x}$

方法6　利用夹逼原理求极限

【例37】（1995年3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right]$ $= 0$

小　　大　　$= \frac{1}{2}$

【解】$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n} \le [\quad] \le \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}$　　n^2项

$\Downarrow$　　$\Downarrow$　　$n\to+\infty$

$\frac{1}{2}$　　$\frac{1}{2}$

【例38】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n}$

∞^0

1^0

[解1] 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty} 3\sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}$

$= 3$ $\nearrow$ 3 √

$\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & |x|<1 \\ \infty & |x|>1 \\ 1 & x=1 \\ \text{不} & x=-1 \end{cases}$

$\sqrt[n]{a}\to 1$

$\sqrt[n]{3^n} \leq$

[解2] $\sqrt[n]{3} \leq \sqrt[n]{1+2^n+3^n} \leq \sqrt[n]{3\cdot 3^n}$

$\downarrow$? $\downarrow$

1 ? √ 3 √ √ √

【例39】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_m{}^n}$， 其中 $a_i>0,(i=1,2,\cdots m)$

$=a$

$\max\{a_i\}=a$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n}$

$=3$

[解]. $\sqrt[n]{a^n}\le\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\le\sqrt[n]{m\,a^n}$

$\sqrt[n]{a^n}\to a$，$\sqrt[n]{m\,a^n}\to a$

【例40】（2008年4）设 $0<a<b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=$

（A） a （B） a^{-1}

（C） b （D） b^{-1}

[解] $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^n+\left(\frac{1}{b}\right)^n}=\frac{1}{a}$

【例41】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}$, $(x>0)$.

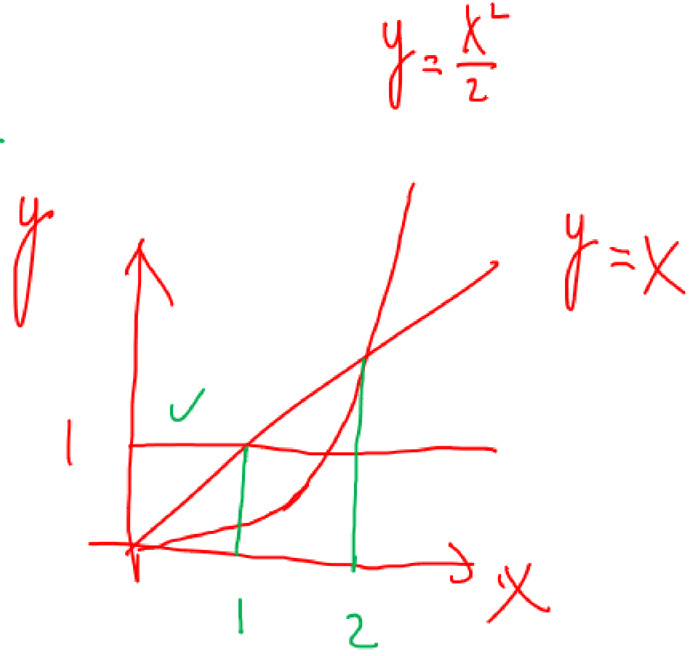
100

2

$1+1^n+x^n+(\frac{x^2}{2})^n$

【解】原式 $= \max\{1, x, \frac{x^2}{2}\}$

$$=\begin{cases} 1 & 0<x\le 1 \\ x & 1<x\le 2 \\ \frac{x^2}{2} & x>2 \end{cases}$$



几何.

方法7 利用单调有界准则求极限

$2ab \le a^2+b^2$

【例42】设 $x_1>0, x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)$, $n=1,2,\cdots$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】由题设知 $x_n>0$, 且 $x_{n+1}\ge 1$ (*)

$1,0,1,0,1,\cdots$

① 证极限存在

(*) $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)=\frac{1}{2}\left[(\sqrt{x_n})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)^2\right]\ge\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_n}}=1$ (*)

$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n}-x_n\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x_n^2}{x_n}\le 0$

$x_1=1,\quad x_{n+1}=1-x_n.$

或 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{x_n^2}\right]\le\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{1}\right]=1$

$x_n \downarrow$

$a=1-a$?

$\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 ② 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

$2a=a+\frac{1}{a}$ $\quad a^2=1 \quad a=\pm 1$

$a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}x_n=1.$

方法8 利用定积分定义求极限

【例43】求极限 $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right]$ $=\int_a^b f(x)dx$ $=\ln 2$

小 大

$\frac{n}{n+n}\le\left[\quad\right]\le\frac{n}{n+1}$

$\downarrow\qquad\downarrow$

$\frac{1}{2}\qquad 1$

【解】原式 $=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]$

ξ_k a b $\frac{b-a}{n}$

$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$

可爱因子 $=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$

$0\ \frac{1}{n}\ \frac{2}{n}\ 1$

$\stackrel{*}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(b-a)$

n等分

$f(x)$

$=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2$

⑧ $5+\boxed{3}$ 极

$\ln 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n}$

[练2] 求极 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right]=\ln 2$

$< \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$

$< \ln 2$

n项和

$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (x>0)$

$\frac{1}{n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

① 夹逼

② 定积分定义

"$\frac{1}{n}$"

$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$

$$\begin{cases} \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n+2} < \ln(n+2) - \ln(n+1) < \frac{1}{n+1} \\ \cdots\cdots \\ \frac{1}{2n} < \ln(2n) - \ln(2n-1) < \frac{1}{2n-1} \end{cases}$$

$< \ln 2n - \ln n$

$< \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$