高数基础班（20）

20	常数项级数（定义、性质、敛散性的判别法及举例）	P157-P163

主讲 武忠祥 教授

还不关注，你就慢了

第十章 无 穷 级 数

（数二不要求）

第一节 常数项级数 ✓

第二节 幂 级 数

第三节 傅里叶级数 （数三不要求）

第一节　常数项级数

本节内容要点

一. 考试内容概要

（一）级数的概念与性质

（二）级数的审敛准则

二. 常考题型与典型例题

常数项级数敛散性的判定

考试内容概要

（一）概念与性质

1. 级数的概念

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$ 无穷级数

$S_1 = u_1$

$S_2 = u_1 + u_2$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$ 部分和

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n = S$$

收，发

① 存在性 —— 敛散性 ※

② 值 —— 和

$S \approx S_n$

【例1】判定下列级数敛散性

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$;　　　　（2） $\sum_{n=0}^{\infty}aq^n \ (a\neq 0)$.

【解】 （1） $s_n = \ln(1+\frac{1}{1})+\ln(1+\frac{1}{2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})$

$$= \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n}$$

$$= \ln(\cancel{2}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdots\frac{n+1}{\cancel{n}}) = \ln(n+1)$$

由于　$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1) = \infty$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ 发散.

(2) $s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$

$$= \begin{cases} \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1, \\ na, & q = 1. \end{cases}$$

$a(1-1+1-1\cdots\cdots)$

0

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q} & |q|<1 \quad \text{收.} \\ \infty & |q|>1 \\ \infty & q=1 \\ \dfrac{a[1-(-1)^n]}{2} & q=-1 \end{cases} \quad \text{发}$$

2. 级数的性质

1）若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 s，则 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛，且其和为 ks.

2）若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 s, σ. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$

收敛于 $s \pm \sigma$.

【注】 收敛±发散=发散；　　发散±发散=不确定

3） 在级数中去掉、加上或改变有限项不影响级数的敛散性.

4） 收敛级数加括号仍收敛且和不变.

【注】1）加括号收敛 $\underset{\longleftarrow}{\not\longrightarrow}$ 原级数收敛；

2）加括号发散 $\longrightarrow$ 原级数发散；

$(1-1)+(1-1)+\cdots\cdots$ 发散.

$0 \quad 0$

S_n

5）（级数收敛必要条件）

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛 } \underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow} \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

$S_n = \sqrt{n}$.

$S_n - S_{n-1} = u_n$.

$\downarrow \quad \downarrow$

$S \quad S$

(二) 级数的审敛准则

(1) 正项级数 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \geq 0\right)$

$S_n \nearrow$

$S_n \to +\infty$

基本定理： $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ s_n 上有界

$S_n \leq S_n'$

1) 比较判别法： 设 $u_n \leq v_n$， 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overset{\text{大}}{v_n} \text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \overset{\text{小}}{u_n} \text{收敛}$$

若 u_n 发散 $\to S_n \to +\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overset{\text{小}}{u_n} \text{发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \overset{\text{大}}{v_n} \text{发散}$$

放大

收 ✓

$u_n \leq v_n$ 收.

发 ✓

$v_n \leq u_n$ 发.

2) 比较法极限形式： 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l\ (0\le l\le+\infty)$

①若 $0<l<+\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 同敛散.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$$

②若 $l=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

③若 $l=+\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛,

两个常用级数

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$$

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\le1$ 时发散；

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^n\ (a>0,q>0)$ 当 $q<1$ 时收敛，当 $q\ge1$ 时发散.

3) 比值法：设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\begin{cases}\text{收敛,} & \rho<1,\\ \text{发散,} & \rho>1,\\ \text{不一定,} & \rho=1,\end{cases}$

$n^p.$ $\ln n.$ 1) 2).

$\sqrt[n]{a q^n} \to q$

比

$a^n.$ $n!$ $n^n.$

4) 根值法：设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\begin{cases}\text{收敛,} & \rho<1,\\ \text{发散,} & \rho>1,\\ \text{不一定,} & \rho=1,\end{cases}$

3) 4).

优 | 缺

1) 2) 适用广 | 不方便

3) 4) 方便 | 适用窄

高

$n \geq \frac{1}{n_1}$

含 n 次幂 高

3) . 4) | 1) . 2)

5) 积分判别法：设 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上单调减，非负的连续函数，且 $a_n = f(n)$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 同敛散.

【例2】证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\le 1$ 时发散.

$a_n=\frac{1}{n^p}=f(n)$. $f(x)=\frac{1}{x^p}$

$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ $p>1$ 收敛, $p\le 1$ 发

$p>1$ 收敛, $p\le 1$ 发

【例3】判定级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$ 的敛散性. 发

$\frac{1}{n\ln n} < \frac{1}{n}$ 发

发

[证]. $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ $a_n=\frac{1}{n\ln n}=f(n)$.

$[2,+\infty)$.

$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\ln\ln x\Big|_2^{+\infty}=+\infty$

(2) 交错级数 $\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n, u_n>0\right)$

莱不尼兹准则：若（1）u_n 单调减 ?；（2）$\lim_{n\to\infty}u_n=0$ ✓

$\Longrightarrow$ / $\not\Longleftarrow$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛.

【注】$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛. $\overset{\times}{\Longrightarrow}$ / $\Longleftarrow$ u_n 单调减且 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$

$$u_{2n+1}=\frac{1}{2^{2n+1-1}}=\frac{1}{2^{2n}}$$

【例】$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+(-1)^n}}$ 收敛，但 $u_n=\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$ 并不递减.

$$u_{2n}=\frac{1}{2^{2n+1}}$$

$$\sum\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}}=\frac{1}{2^{1+\frac{(-1)^n}{n}}}\to\frac{1}{2}<1$$

(3) 任意项级数

1) 绝对收敛与条件收敛概念

$\sum u_n$收 $\xleftarrow{\;\;}$ $\not\to$ $\sum |u_n|$收 正项

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 必收敛，此时称 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **绝对收敛**

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **条件收敛**

2) 绝对收敛和条件收敛的基本结论

①绝对收敛的级数一定收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. ($\not\Leftarrow$)

②条件收敛的级数的所有正项(或负项)构成的级数一定发散. 即:

正 收 发 $u_n>0$ $u_n<0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ 条件收敛 } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n+|u_n|}{2} \text{ 和 } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n-|u_n|}{2} \text{ 发散.}$$

$\leq u_n$ $\geq u_n$

常考题型与典型例题

常考题型

常数项级数敛散性判定

【例4】（2015年3）下列级数中发散的是（　）

收 (A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$. a^n

收 (B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})$.

✓ (C) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$.

收 (D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

【解1】直接法

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$$

交　　正

收 + 发 = 发

$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$

$\ln n < n$

【解2】排除法

(A) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{3}=\frac{1}{3}<1$

(B) $\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n}$.

$\sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\,n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收.

(C) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}<1$　1^∞

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{(n+1)^p}=1$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^p}$

$=1$ X

【例5】（2013年3）设 $\{a_n\}$ 为正项数列，下列选项正确的是（　）

(A) 若 $a_n > a_{n+1}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛；

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则 $a_n > a_{n+1}$；

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则存在常数 $p>1$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}n^p a_n$ 存在；

(D) 若存在常数 $p>1$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}n^p a_n$ 存在，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛．

【解1】直接法

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^p}}$ 存在 $A\neq 0$ $=0$

$\frac{1}{n^p}$ 收敛

【解2】排除法

$a_n=(1+\frac{1}{n})$

$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln^2 n} \text{ 收敛}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\ln^2 n}}{\frac{1}{n^p}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{p-1}}{\ln^2 n}=+\infty$

$a_n<\frac{1}{n^p}$，收敛

$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{+\infty}$

收敛

【例4】（09年1）设有两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则（　　）

(A) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛. $= \sum \frac{1}{n}$

(B) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散. $\sum \frac{1}{n^2}$

(C) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛；

(D) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散.

$b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$　$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$b_n = \frac{1}{n}$　$a_n = \frac{1}{n}$

$\sum \frac{1}{n^4}$

$a_n \to 0$

$\sum b_n$ 收. $\to \sum b_n a_n$ 收 (正项)

【解1】直接法 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收 $\to \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收　|　$|b_n| \to 0 \Rightarrow |b_n| < 1, \Rightarrow |b_n| > b_n^2$

$\sum b_n$ 收 $\not\to$ $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

【解2】排除法

$a_n \to 0$　$|a_n| < 1$　$a_n^2 < 1, \Rightarrow a_n^2 b_n^2 \le b_n^2$

【例5】（2011年3）设 $\{u_n\}$ 是数列，则下列命题正确的是（　　）

（A）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛.

（B）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

（C）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛.

（D）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

$(1-1)+(1-1)+(1-)-$

$0\quad 0\quad 0$

收敛　　发

$1-1$

【解1】直接法

$u_n=1$ 发

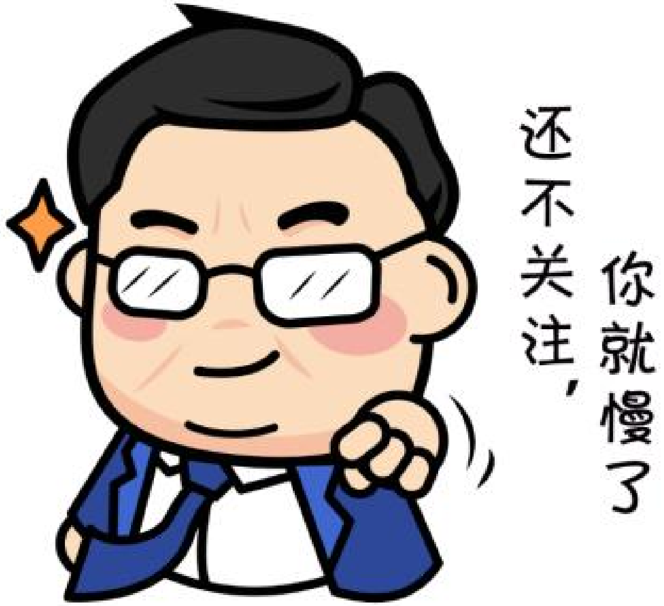
$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\cdots$ 收敛

$\sum(u_{2n-1}-u_{2n})$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)$

$=1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}+\cdots\to+\infty$ 发

【解2】排除法


还不关注，你就慢了