高数基础班（23）

23	三重积分、线面积分的概念、计算方法及举例（曲线积分）	P187-P198

主讲 武忠祥 教授

还不关注，你就慢了

第十二章 多元积分学及其应用

第一节 三重积分

1. 定义 $$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\xi_k)\Delta v_k$$

2. 性质

3. 计算

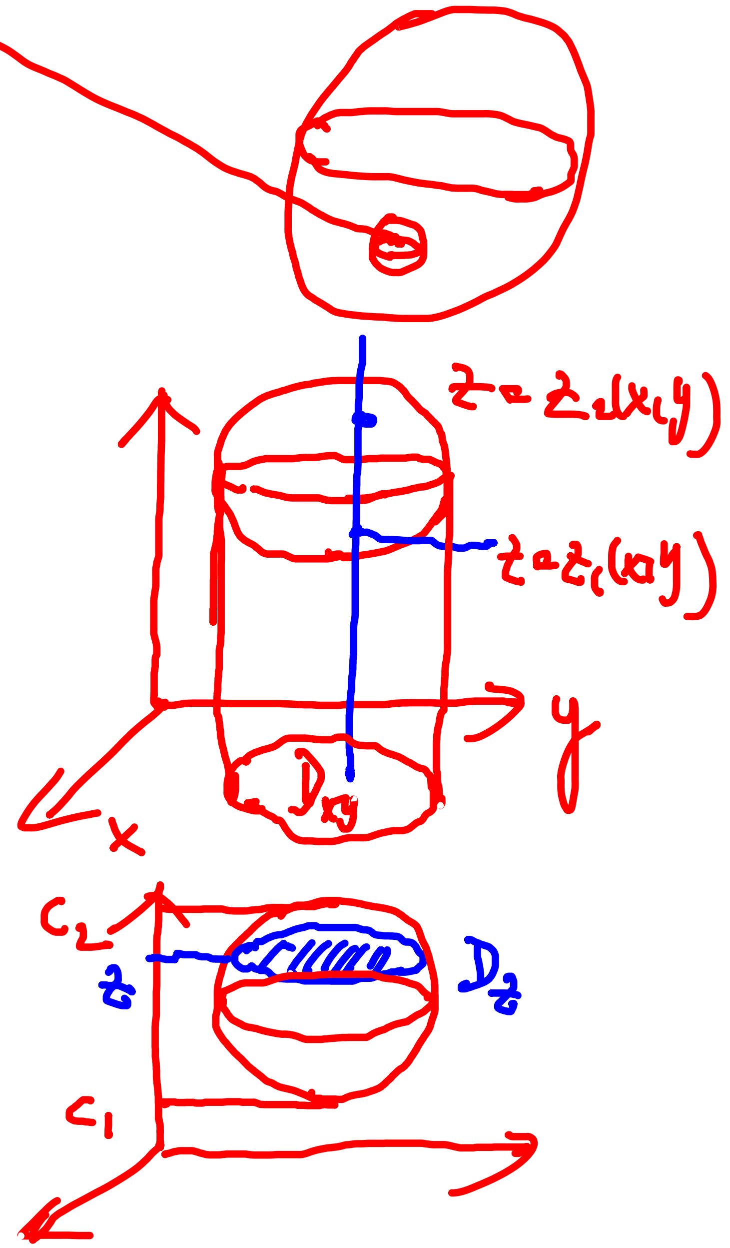
1) 直角坐标

i） 先一后二；

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{dv} = \iint\limits_{D_{xy}} d\sigma \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

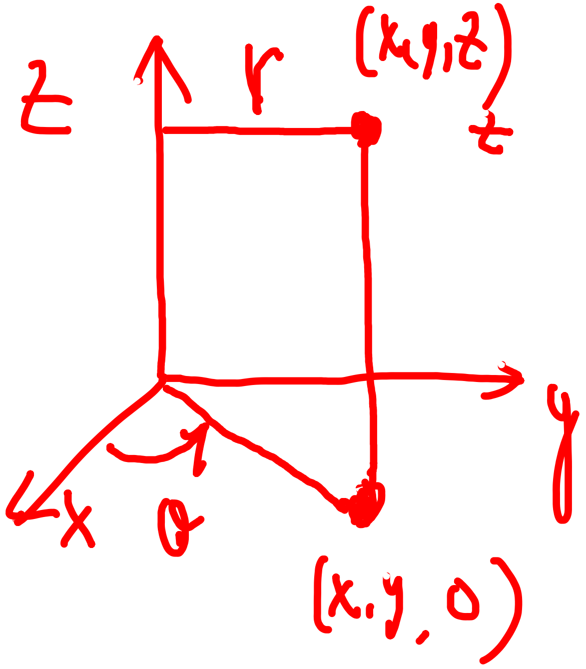
i i） 先二后一；

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{dv} = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy$$



2) 柱坐标

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, & 0 \le r < +\infty, \\ y = r\sin\theta, & 0 \le \theta \le 2\pi, \\ z = z, & -\infty < z < +\infty. \end{cases}$$



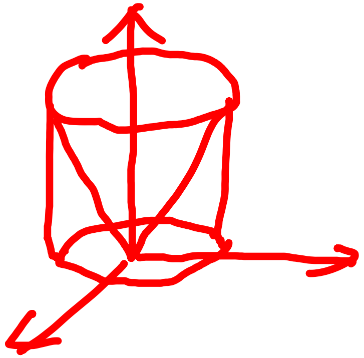
$r = c$

$$\boxed{dv = r\,dr\,d\theta\,dz}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv = \iiint_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

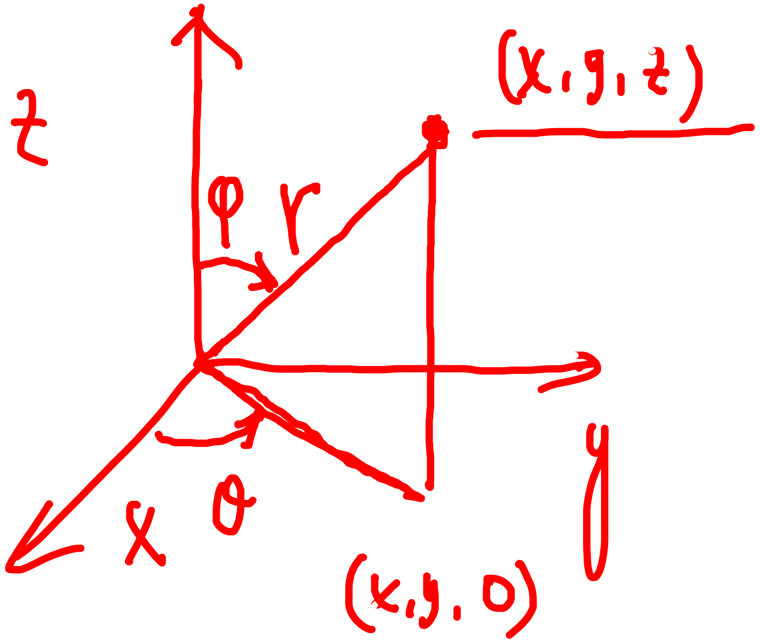
① $g(z)f(\sqrt{x^2+y^2}) = g(z)f(r)$

② Ω



3) 球坐标

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, & 0 \le r < +\infty, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, & 0 \le \varphi \le \pi, \\ z = r\cos\varphi, & 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

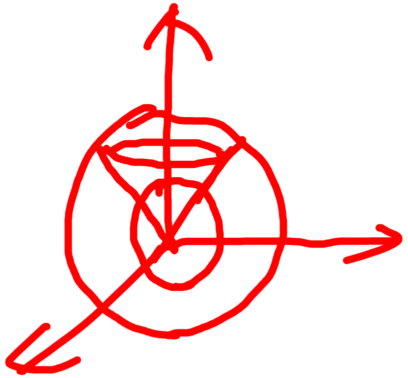


$$\boxed{dv = r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\theta}$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{dv} = \iiint_\Omega f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\theta$$

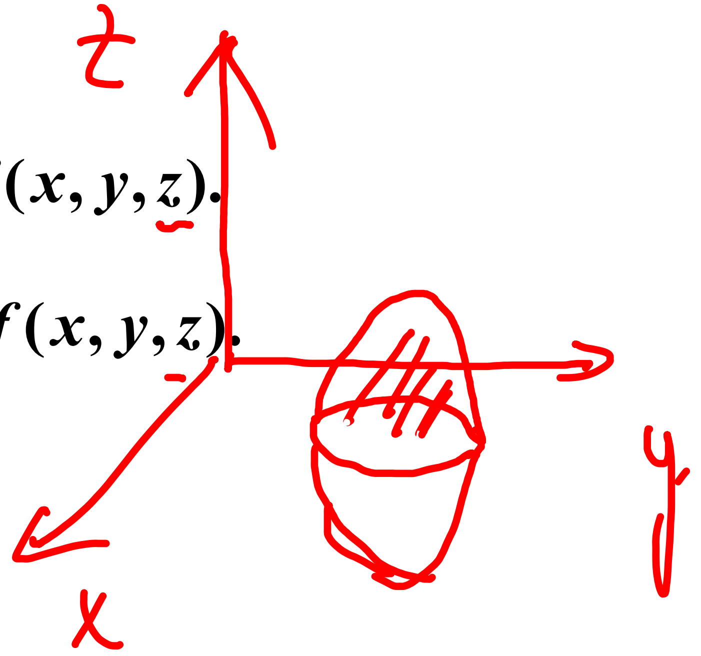
① $f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) = f(r)$

②



4) 利奇偶性　　若积分域 Ω 关于 xoy 坐标面对称

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\begin{cases}2\iiint_{\Omega_{z\geq 0}} f(x,y,z)\mathrm{d}V & f(x,y,-z)=f(x,y,z).\\ 0 & f(x,y,-z)=-f(x,y,z).\end{cases}$$



5)利用变量的对称性

$$\iiint (x^2+y^2)\,dV \overset{*}{=} \frac{2}{3}\iiint (x^2+y^2+z^2)\,dV$$

$x^2+y^2+z^2\leq R^2$　　　　$x^2+y^2+z^2\leq R^2$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^{R} r^2\, r^2 \sin\varphi\, dr$$

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

三重积分计算

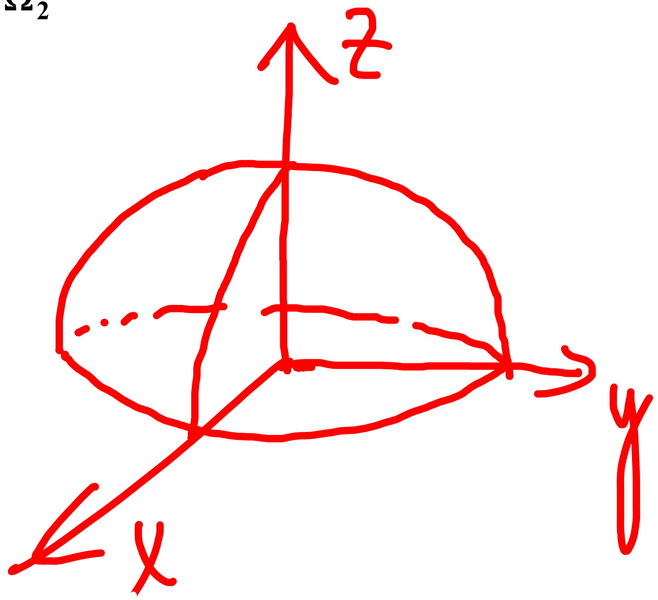
【例1】（1988年） 设有空间区域 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2 \le R^2, z \ge 0$;

及 $\Omega_2: x^2+y^2+z^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$, 则（ ）

（A）$\iiint\limits_{\Omega_1} x \,\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} x \,\mathrm{d}v$ （B）$\iiint\limits_{\Omega_1} y \,\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} y \,\mathrm{d}v$

（C）$\iiint\limits_{\Omega_1} z \,\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} z \,\mathrm{d}v$ （D）$\iiint\limits_{\Omega_1} xyz \,\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xyz \,\mathrm{d}v$

【解】



【例2】（2009年）设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$ ，则

$\iiint\limits_{\Omega} z^2\,dx\,dy\,dz =$ ________ .

$[\frac{4}{15}\pi]$

【解1】

$$\text{原式}=\int_{-1}^{1}dz\iint\limits_{D_z} z^2\,dxdy$$

$$=\int_{-1}^{1} z^2\cdot\pi(1-z^2)\,dz$$

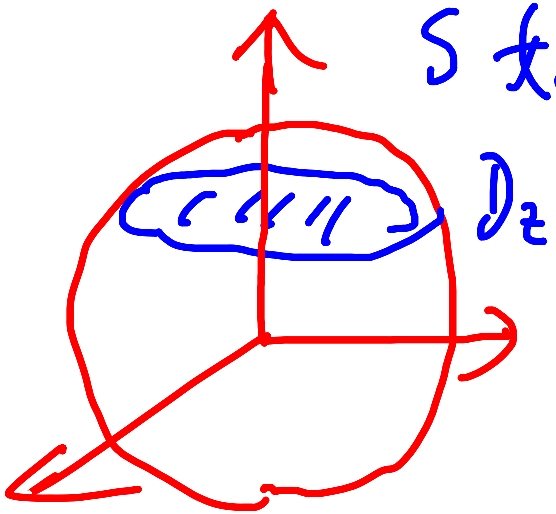
$$=2\int_0^1 \pi z^2(1-z^2)\,dz=\frac{4}{15}\pi$$

$\boxed{\text{先二后一}}$

① $f(z)$

② D_z: $x^2+y^2\le 1-z^2$

S 好求



【例2】(2009年) 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$ ，则

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\underline{\qquad\qquad}.$$

[$\frac{4}{15}\pi$]

【解2】

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2\,dV \overset{*}{=} \frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dV$$

对称性 + 球坐标

$$\overset{*}{=} \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\, r^2\sin\varphi\, dr$$

$$=\frac{4}{15}\pi$$

【例3】(2015年) 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面成的空间区域，则 $\iiint\limits_{\Omega}(\overset{z}{x}+\overset{2z}{2y}+3z)dxdydz=$ ________.

【解1】由变量的对称性知 $\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz=\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz,$

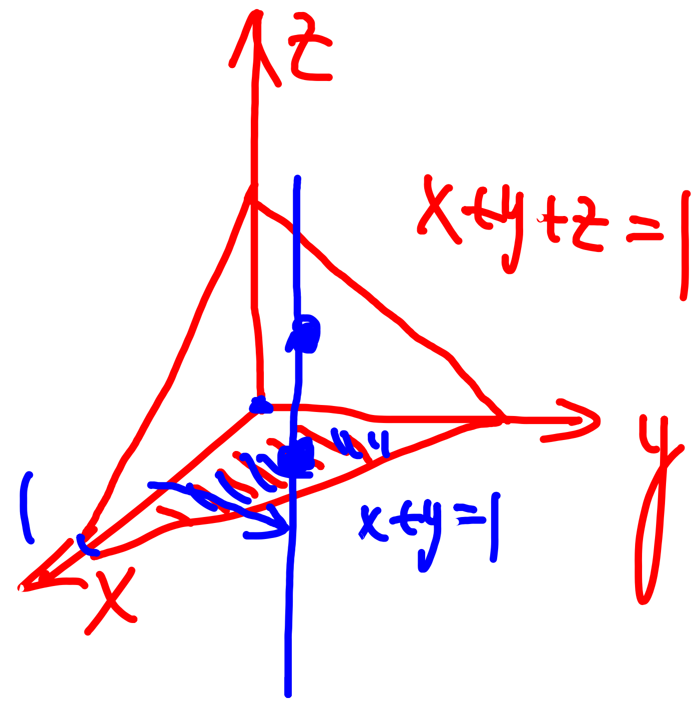
$$\iiint\limits_{\Omega} 2ydxdydz=\iiint\limits_{\Omega} 2zdxdydz,$$

则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz \overset{*}{=} 6\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$

$$=6\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}zdz$$

$$=3\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)^2 dy$$

$$=\int_0^1(1-x)^3 dx=\frac{1}{4}$$



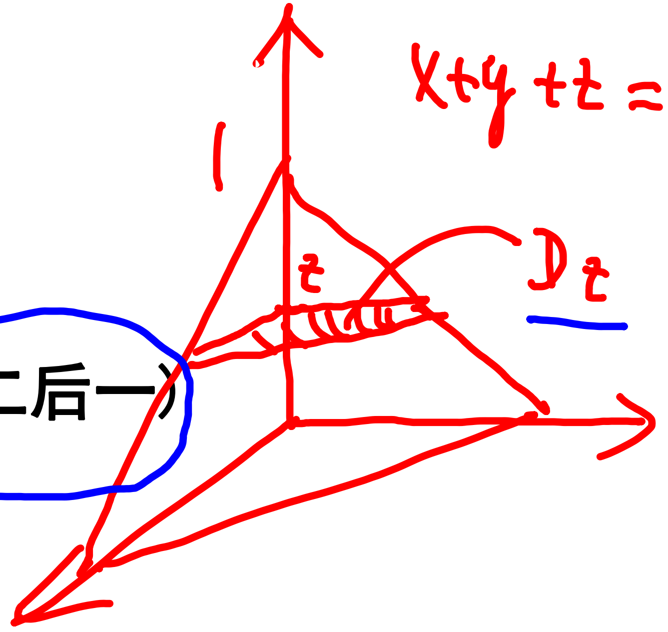
【解2】由变量的对称性知

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz = 6\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$$

$$= 6\int_0^1 dz \iint\limits_{D_z} z\,dxdy$$

(先二后一)

$$= 6\int_0^1 z\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2 dz = \frac{1}{4}$$



$x+y+z=1$

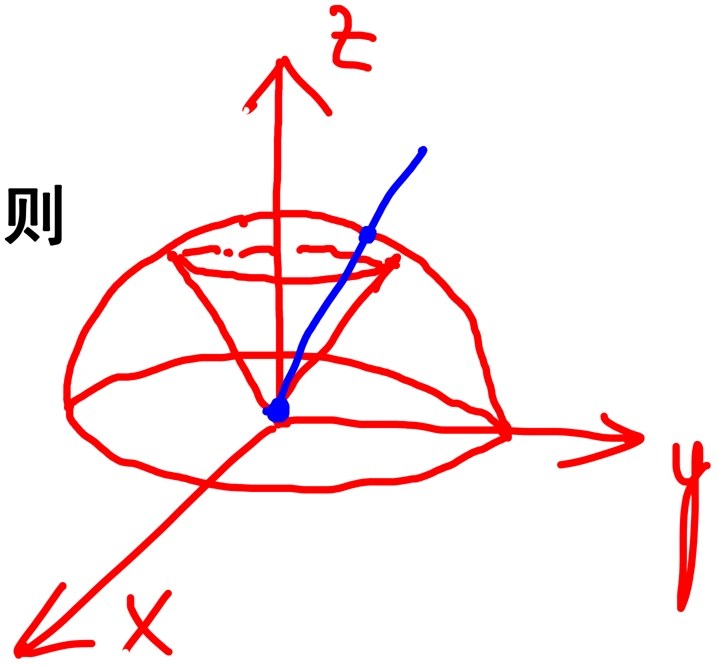
D_z

$x+y=1-z$

$1-z$

$\frac{1}{2}(1-z)^2$

【例4】（1989年）计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域.



【解1】由 Ω 关于 yOz 坐标面对称，x 是 x 的奇函数，则

① 奇 $\iiint\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}v=0.$

利用球面坐标计算

② 球 $$\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{8}.$$

所以 $$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\,\mathrm{d}v=\frac{\pi}{8}.$$

【例4】(1989年) 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域.

先一后二

【解2】 $\iiint\limits_{\Omega} z\,dV = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz = \frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{1}{2}} \left[(1-x^2-y^2)-(x^2+y^2)\right]dxdy$

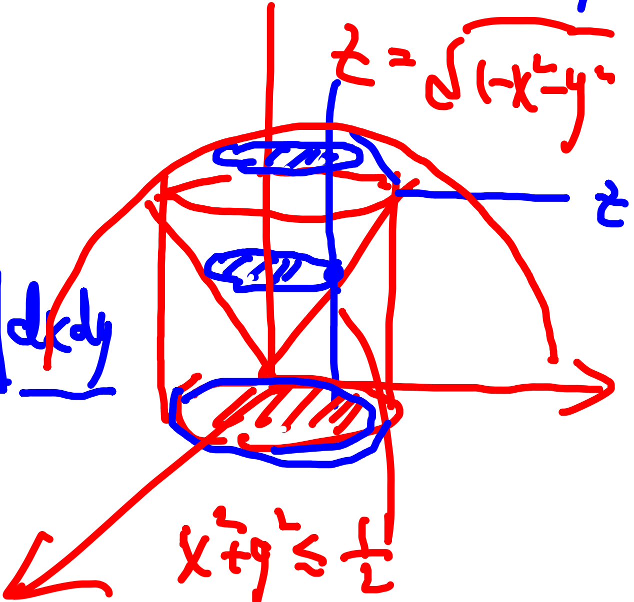
先二后一

【解3】 $\iiint\limits_{\Omega} z\,dV = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dz \iint\limits_{x^2+y^2\le z^2} z\,dxdy + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} dz \iint\limits_{x^2+y^2\le 1-z^2} z\,dxdy$

$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} z\pi z^2\,dz + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} z\pi(1-z^2)\,dz$

柱

【解4】 $\iiint\limits_{\Omega} z\,dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dr \int_r^{\sqrt{1-r^2}} z\,r\,dz$



$=\sqrt{1-r^2}$

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

$z=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x^2+y^2\le\frac{1}{2}$

$z=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{r^2}=r$

$x^2+y^2=r^2$

$r=\sqrt{1-r^2}$

$r^2=1-r^2 \quad r=\frac{1}{\sqrt{2}}$

第二节 曲线积分

(一)对弧长的线积分(第一类线积分)

L

1. 定义 $\displaystyle\int_L f(x,y)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$

2.性质 $\displaystyle\int_{L(\overset{\frown}{AB})} f(x,y)ds=\int_{L(\overset{\frown}{BA})} f(x,y)ds$(与路径方向无关)

3.计算方法:

$\begin{cases} x=x \\ y=y(x) \end{cases}$

1. 直接法

1)若 $C:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}\quad \alpha\le t\le\beta$

大

则 $\boxed{\displaystyle\int_C f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t}$

小

2)若 $C:y=y(x),\quad a\le x\le b$

则 $\boxed{\displaystyle\int_C f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x}$

3）若 $C:\rho=\rho(\theta)\quad \alpha\le\theta\le\beta$

则 $\displaystyle\int_C f(x,y)ds=\boxed{\int_\alpha^\beta f(\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta}$

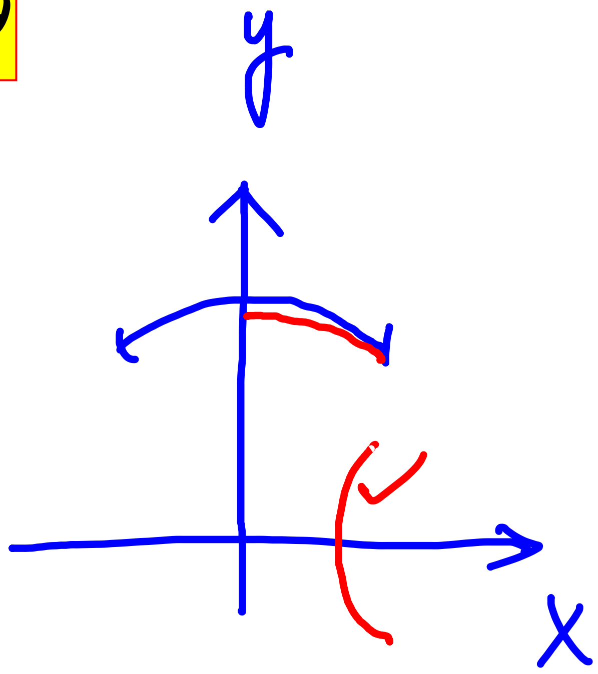
2. 利用奇偶性

i）若积分曲线关于 y 轴对称，则.

$$\int_C f(x,y)\mathrm{d}s=\begin{cases}2\int_{C_{x\ge0}} f(x,y)\mathrm{d}s, & f(-x,y)=f(x,y)\\ 0, & f(-x,y)=-f(x,y)\end{cases}$$

i i）若积分曲线关于 x 轴对称，则

$$\int_C f(x,y)\mathrm{d}s=\begin{cases}2\int_{C_{y\ge0}} f(x,y)\mathrm{d}s, & f(x,-y)=f(x,y)\\ 0, & f(x,-y)=-f(x,y)\end{cases}$$

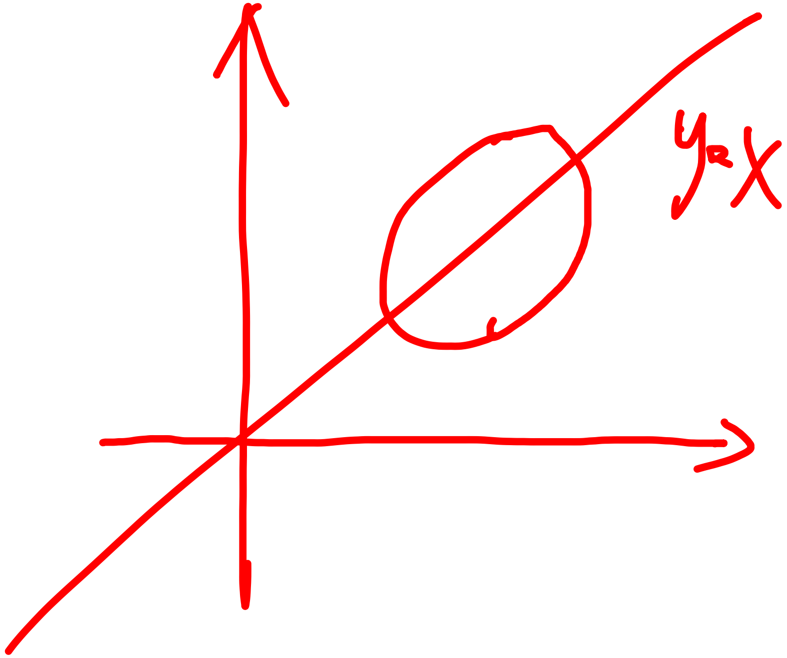


3.利用对称性

若积分曲线关于直线 $y=x$ 对称, 则

$$\int_C f(x,y)\mathrm{d}s=\int_C f(y,x)\mathrm{d}s$$

特别的 $\int_C f(x)ds=\int_C f(y)ds$



设空间曲线 L 的方程为：

$$x=x(t),y=y(t),z=z(t) \qquad (\alpha\le t\le\beta)$$

则

$$\boxed{\int_L f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt}$$

(二）对坐标的线积分（第二类线积分）

1. 定义 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$$

2. 性质 $\int_{L(\overset{\frown}{AB})} Pdx+Qdy=-\int_{L(\overset{\frown}{BA})} Pdx+Qdy$

（与积分路径方向有关）

3. 计算方法 (平面)

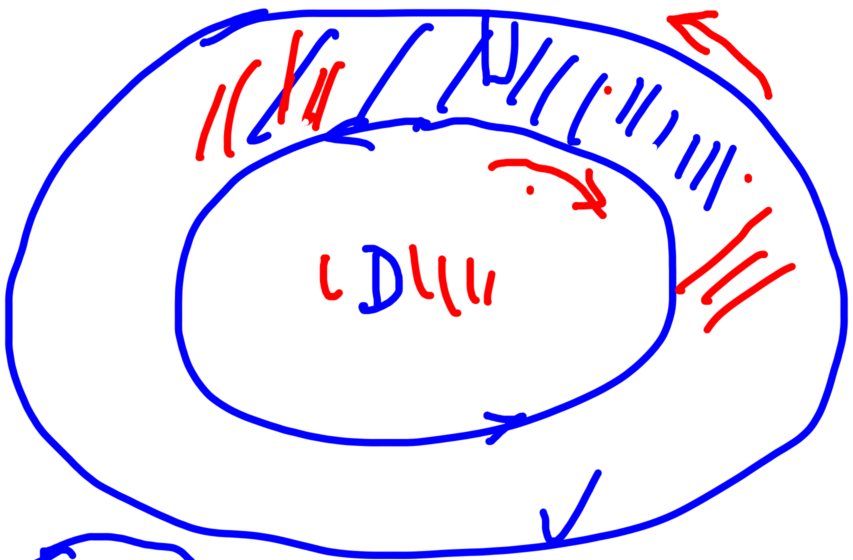
1)直接法　设 $L:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$, $t\in[\alpha,\beta]$，则

终

$$\boxed{\int_L Pdx+Qdy=\int_\alpha^\beta[P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]dt}$$

起

2)格林公式 $$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$$

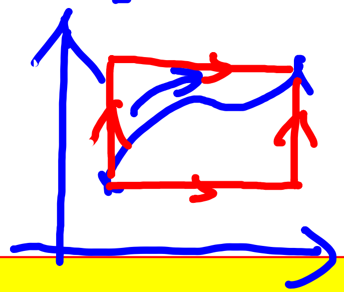


3)补线用格林公式

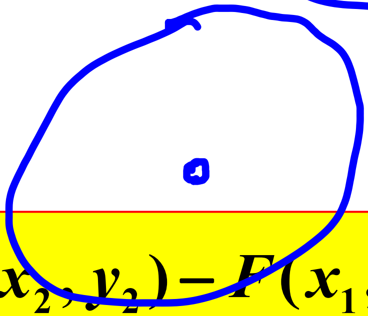
4)利用线积分与路径无关

i）判定：$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ （区域 D 单连通）

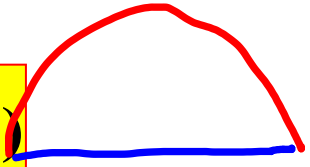
ii）计算：



a）改换路径；



b）利用原函数 $$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_1)$$



$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \mathrm{d}F(x,y)$$ dF

求原函数方法：①偏积分；②凑微分.

记L封闭 是 格林

否 补线格林

直接算

起点与路径无关

4. 两类线积分的联系：

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \oint_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\mathrm{d}s$$ L

5.计算方法（空间）

1)直接法 设 $L: x = x(t), y = y(t), z = z(t), \qquad t \in [\alpha, \beta]$

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t) + Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t) + R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}dt$$

终

起

2)斯托克斯公式 $\oint_L P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)dz$

$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

Σ 平面 $\quad \vec{n} \quad \Sigma$

$$= \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

曲线积分计算

一.第一类曲线积分的计算

【例1】（1989年）设平面曲线 L 为下半圆 $y=-\sqrt{1-x^2}$，

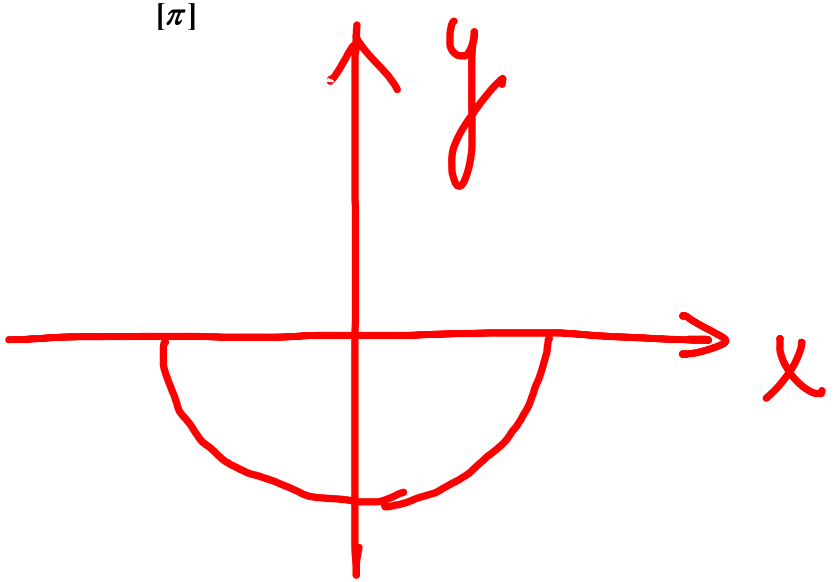
$x^2+y^2=1$

则曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s=$ ________.

[π]

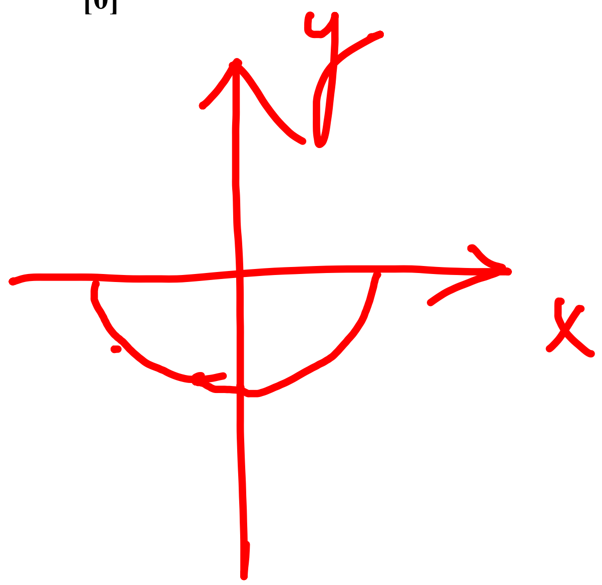
【解】

原式 $=\int_L 1\,ds=\pi$



【例1】（1989年）设平面曲线 L 为下半圆 $y=-\sqrt{1-x^2}$，

则曲线积分 $\int_L \overset{\text{奇}}{x}\,\mathrm{d}s =$ ________. [0]



【解】

原式 $=0$

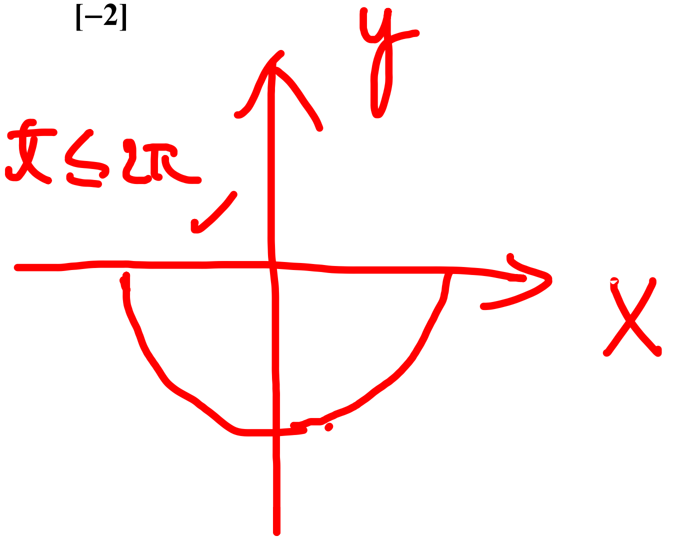
【例1】（1989年） 设平面曲线 L 为下半圆 $y=-\sqrt{1-x^2}$，

则曲线积分 $\int_L y\,\mathrm{d}s=$ ________ .

[−2]

【解】

$$\boxed{\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}} \quad \pi \le t \le 2\pi$$



$$\text{原式}=\int_{\pi}^{2\pi} \sin t\sqrt{\boxed{\sin^2 t+\cos^2 t}}\,dt$$

$$=-2$$

【例2】（1998年） 设 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a

则 $\oint_L (\underbrace{2xy}_{0}+3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}s=$ ________.

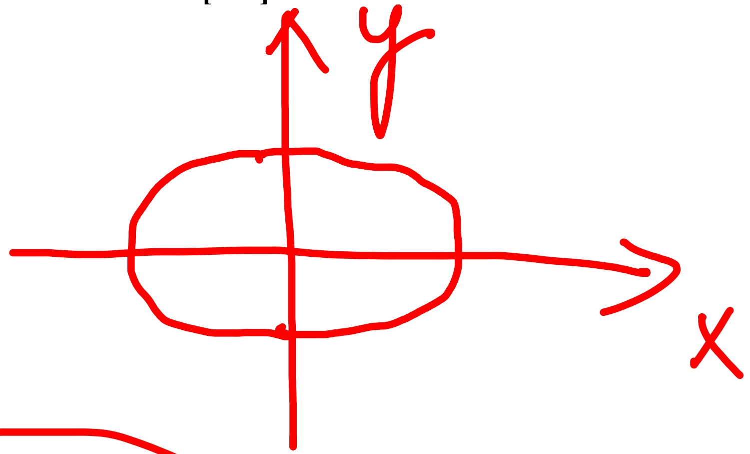
[12a]

【解】

原式 $= \oint_L (3x^2+4y^2)\,ds$

$= 12\oint_L \left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}\right) ds = 12\boxed{\oint_L 1\,ds}$

$=12a$



【例3】（2009年）已知曲线 $L: y=x^2\ (0\le x\le\sqrt{2})$，则

$\int_L x\,\mathrm{d}s=$____. $[\frac{13}{6}]$

【解】

$$\int_L x\,ds=\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1+4x^2}\,dx \qquad \frac{1}{8}d(1+4x^2)$$

$$=\frac{13}{6}$$

二. 第二类曲线积分的计算

【例4】（2004年）设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，则曲线积分 $\int_L x\,dy-2y\,dx=$ ________.

$[\frac{3}{2}\pi]$

【解】 $x=\sqrt{2}\cos t$，$y=\sqrt{2}\sin t$ 直接法

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(\sqrt{2}\cos t)^2+2\sqrt{2}^2\sin^2 t\right]dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[2\cos^2 t+4\sin^2 t\right]dt=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=6\cdot\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$$

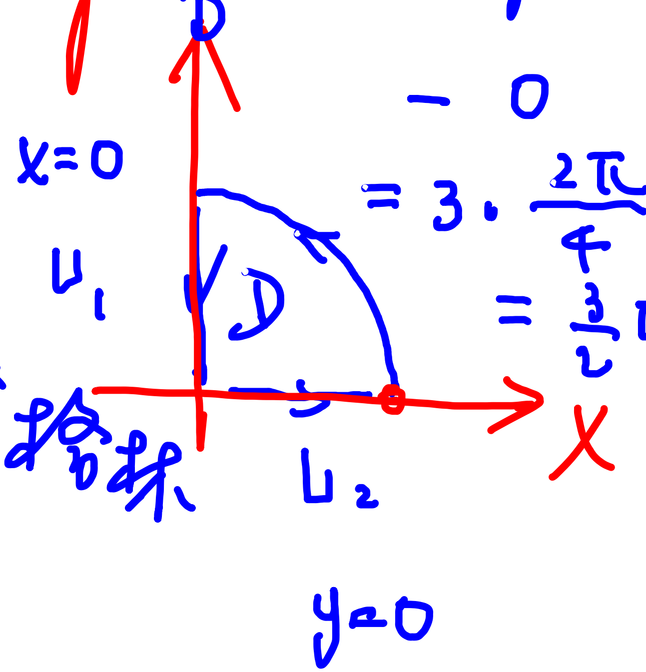
$$=\frac{3}{2}\pi$$

[3/2]

$$原式=\oint_{L+L_1+L_2}-\int_{L_1}-\int_{L_2}$$

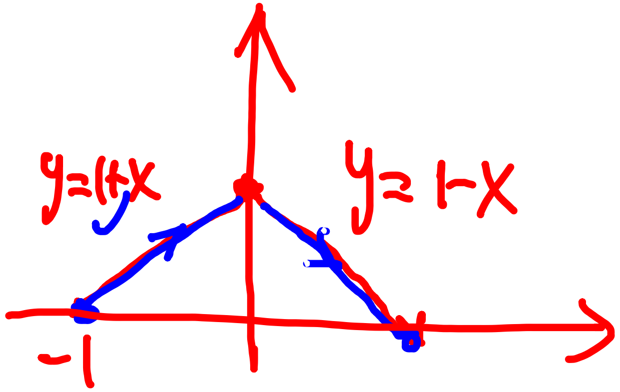
$$原=\iint_D(1+2)\,dxdy-0-0=3\cdot\frac{2\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$$

补线格林



【例5】（2010年）已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|\,(x\in[-1,1])$，起点是 $(-1,0)$，终点为 $(1,0)$，则曲线积分

$$\int_L xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = \underline{\qquad\qquad}.$$



【解1】 $L=L_1+L_2$，其中 $L_1: y=1+x\ (-1\le x\le 0)$

$L_2: y=1-x\ (0\le x\le 1)$

$$\int_{L_1} xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{0}[x(1+x)+x^2]\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}(2x^2+x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$$

$$\int_{L_2} xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y =$$

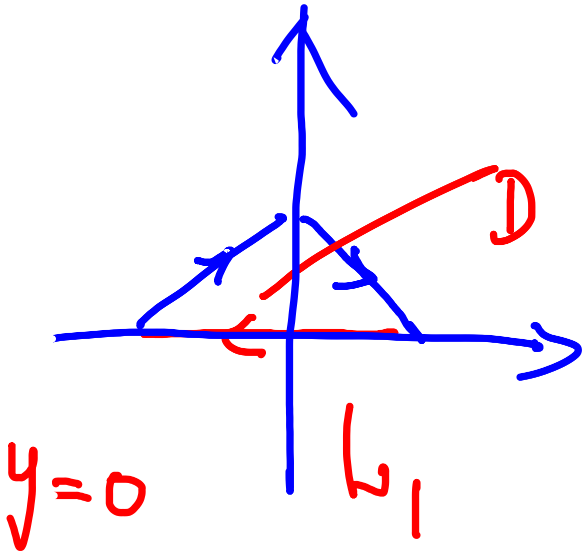
$$\int_{0}^{1}[x(1-x)-x^2]\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}(x-2x^2)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}$$

$$\int_L xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0$$

【例5】（2010年）已知曲线 L 的方程为 $y = 1 - |x| \ (x \in [-1,1])$，起点是 $(-1,0)$，终点为 $(1,0)$，则曲线积分

$$\int_L xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = \underline{\qquad\qquad}.$$

【解2】补线用格林公式



$$\text{原式} = \oint_{L+L_1} - \int_{L_1}$$

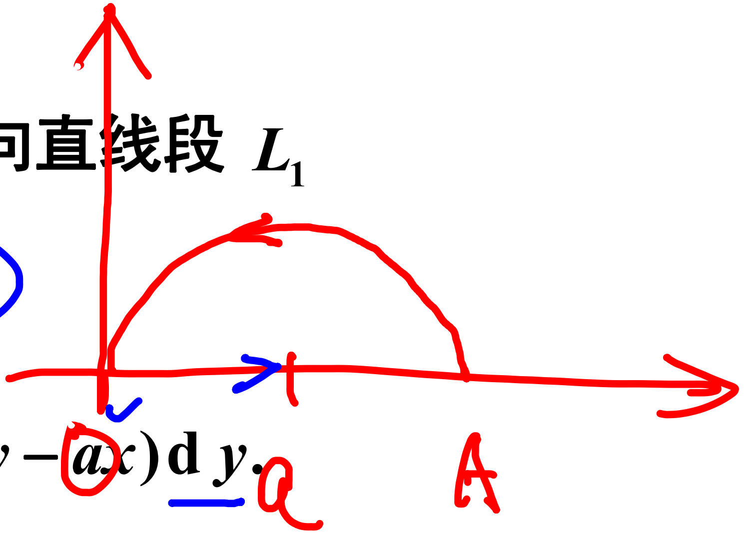
$$= \iint_D [2x - x]\,dxdy - 0$$

$$= \iint_D x\,dxdy = 0$$

【例6】（99年） 求 $I=\int_L (e^x \sin y - b(x+y))\,dx + (e^x \cos y - ax)\,dy$

$e^x \cos y - b$ $\quad$ $e^x \cos y - a$ $\quad$ ∴

其中 a,b 为正的常数，L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.



【解1】 添加从点 $O(0,0)$ 沿 $y=0$ 到点 $A(2a,0)$ 的有向直线段 L_1

$$I=\oint_{L\cup L_1} (e^x \sin y - b(x+y))\,dx + (e^x \cos y - ax)\,dy$$

$$-\int_{L_1} (e^x \sin y - b(x+y))\,dx + (e^x \cos y - ax)\,dy.$$

$y=0$

$$I_1=\iint_D (b-a)\,d\sigma = \frac{\pi}{2}a^2(b-a),$$

补线格林

$$I_2=\int_0^{2a} (-bx)\,dx = -2a^2 b.$$

从而 $I=I_1-I_2=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)+2a^2b=\left(\frac{\pi}{2}+2\right)a^2b-\frac{\pi}{2}a^3.$

【解2】 $$I=\int_L (e^x\sin y-b(x+y)\,dx+(e^x\cos y-ax)\,dy$$

无关. ✓

$$=\int_L e^x\sin y\,dx+e^x\cos y\,dy-\int_L b(x+y)\,dx+ax\,dy.$$

✓

前一积分与路径无关, 所以

$$\int_L e^x\sin y\,dx+e^x\cos y\,dy=e^x\sin y\Big|_{(2a,0)}^{(0,0)}=0.$$

对后一积分，取得参数方程: $\begin{cases}x=a+a\cos t,\\ y=a\sin t,\end{cases}$

$$\int_L b(x+y)\,dx+ax\,dy$$

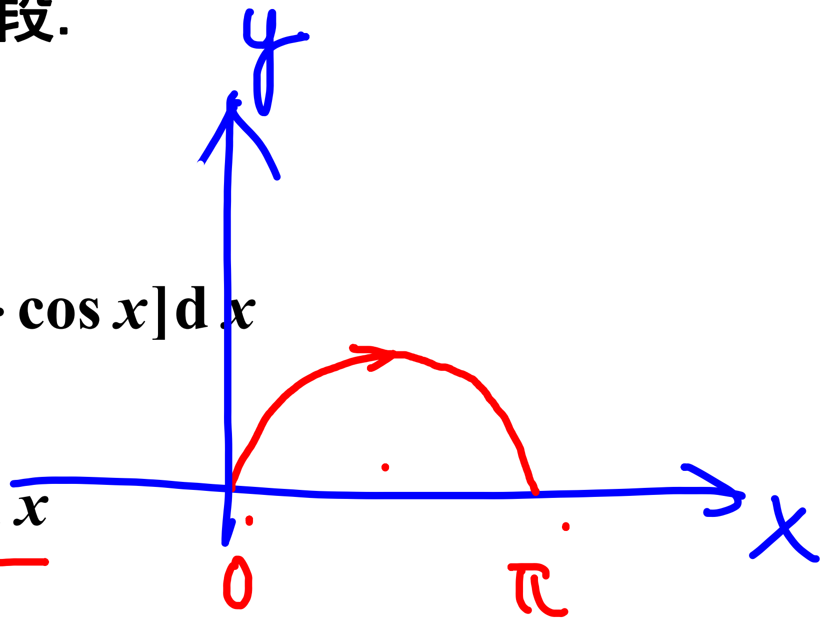
$$=\int_0^{\pi}(-a^2b\sin t-a^2b\sin t\cos t-a^2b\sin^2 t+a^3\cos t+a^3\cos^2 t)\,dt$$

$$=-2a^2b-\frac{1}{2}\pi a^2b+\frac{1}{2}\pi a^3,$$

【例7】（2008年） 计算曲线积分 $\int_L \sin 2x\,\mathrm{d}x + 2(x^2-1)y\,\mathrm{d}y$

其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(\pi,0)$ 的一段.

【解1】 直接法



$$\int_L \sin 2x\,\mathrm{d}x + 2(x^2-1)y\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi}[\sin 2x + 2(x^2-1)\sin x\cdot\cos x]\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi} x^2\,\mathrm{d}\sin^2 x = x^2\sin x\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$= (-2)\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$= -2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx = (-2\pi)\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{2}$$

$\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$$

【解2】 取 L_1 为 x 轴上从点 $(\pi,0)$ 到点 $(0,0)$ 的一段，

$y=0$

$y=\sin x$

$$\int_L \sin 2x\,\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\,\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{L+L_1}\sin 2x\,\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\,\mathrm{d}y-\int_{L_1}\sin 2x\,\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\,\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_D 4xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\int_\pi^0\sin 2x\,\mathrm{d}x=-\int_0^\pi\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}4xy\,\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^\pi$$

$$=-2\int_0^\pi x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$$

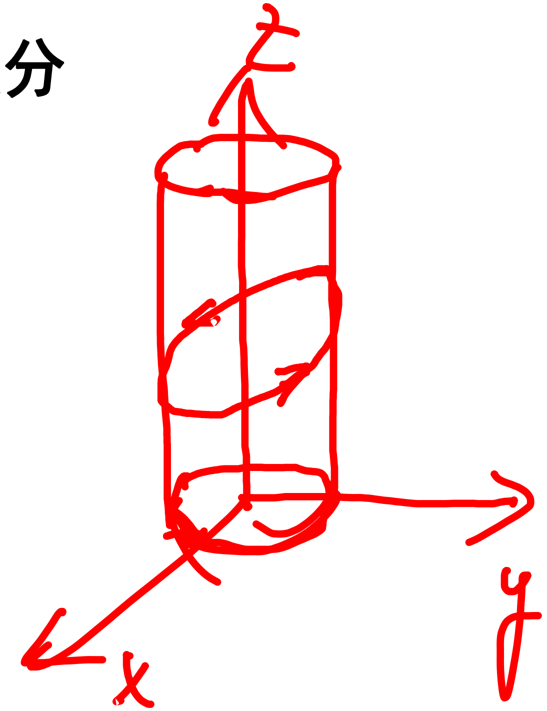
补线格林

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx$$

$$=(-2)\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\sin^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$=-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=(-2\pi)\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi^2}{2}$$

【例8】（2014年）设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L z\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}z =$ ________.



【解1】直接法　参数方程

$$x=\cos t, y=\sin t, z=-\sin t$$

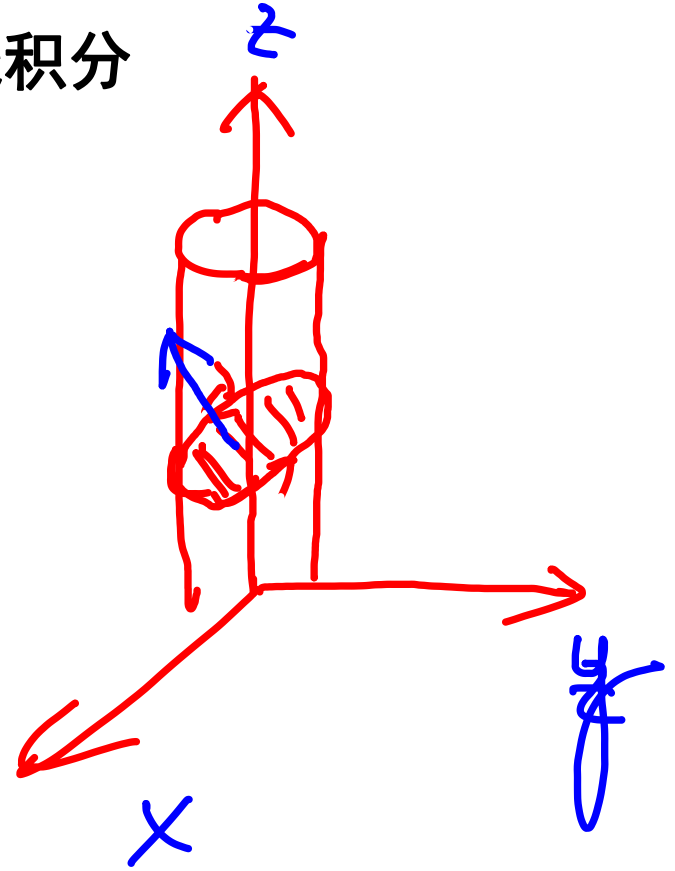
$$I=\int_0^{2\pi}(\sin^2 t-\sin t\cos t)dt$$

$$\frac{1}{2}\sin^2 t\Big|_0^{2\pi}$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt=4\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\pi$$

【例8】（2014年）设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L z\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}z=$ ________.

$y=-z$



【解2】 利用斯托克斯公式

$$\oint_L z\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}z=\iint_\Sigma (1-0)dydz+(1-0)dzdx+(0-0)dxdy$$

$$=\iint_\Sigma dzdx$$

$$=\iint_{D_{zx}} dzdx=\pi$$

$x^2+z^2=1$

【例8】（2014年）设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $\boxed{y+z=0}$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分

曲 平面

$\oint_L z\,dx+y\,dz=$ ________.

$-(ydx+ydy)$

$\boxed{z=-y}$

【解3】 化为平面线积分

$C: x^2+y^2=1$

$$\oint_L z\,dx+y\,dz=\oint_C(-ydx-ydy) \qquad (C: x^2+y^2=1)$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy \qquad \text{（格林公式）}$$

$$=\pi$$


还不关注，
你就慢了