Números de Catalán

El n-ésimo número de Catalán se obtiene, aplicando coeficientes binomiales, a partir de la siguiente fórmula:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}, \qquad con\ n \geq 0.$$

n	
0	1
1	1
2	2
3	5
4	14
5	42
6	132
7	429
8	1.430
9	4.862
10	16.796
11	58.786
12	208.012
13	742.900
14	2.674.440
15	9.694.845
16	35.357.670
17	129.644.790
18	477.638.700
19	1.767.263.190
20	6.564.120.420
21	24.466.267.020
22	91.482.563.640
23	343.059.613.650
24	1.289.904.147.324
25	4.861.946.401.452

Propiedades

Una expresión alternativa para C_n es

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}, \qquad con\ n \geq 1.$$

Los números de Catalán satisfacen la siguiente relación de recurrencia:

$$C_0 = 1 \quad y \quad C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}\,, \qquad con\ n \geq 0.$$

Y también satisfacen:

$$C_0 = 1 \quad y \quad C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n,$$

que puede ser una forma más eficiente de calcularlos.

La expresión en forma de recursión sería:

$$C_n = \begin{cases} si\ n = 0 \Rightarrow 1 \\ si\ n > 0 \Rightarrow \dfrac{2(2n+1)}{n+2} C_{n-1} \end{cases}$$

Aplicaciones en combinatoria

Aquí se muestran algunos ejemplos, con ilustraciones para el caso C3 = 5.

C_n es el número de palabras de Dyck de longitud 2n. Una palabra de Dyck es una cadena de caracteres que consiste en n X's y n Y's de forma que no haya ningún segmento inicial que tenga más Y's que X's. Por ejemplo, lo siguiente son las palabras de Dyck de longitud 6:

XXXYYY XYXXYY XYXYXY XXYYXY XXYXYY

Reinterpretando el símbolo X como un paréntesis abierto y la Y como un paréntesis cerrado, Cn cuenta el número de expresiones que contienen n pares de paréntesis correctamente colocados:

((())) ()(()) ()()() (())() (()())

C_n es el número de formas distintas de agrupar n + 1 factores mediante paréntesis (o el número de formas de asociar n aplicaciones de un operador binario). Para n = 3 por ejemplo, tenemos las siguientes cinco formas distintas de agrupar los cuatro factores:

((ab)c)d (a(bc))d (ab)(cd) a((bc)d) a(b(cd))

Las aplicaciones sucesivas de un operador binario pueden representarse con un árbol binario. En este caso, Cn es el número de árboles binarios de n + 1 hojas, en los que cada nodo tiene cero o dos hijos.

C_n es el número de caminos monótonos que se pueden trazar a través de las líneas de una malla de n × n celdas cuadradas, de forma que nunca se cruce la diagonal. Un camino monótono es aquél que empieza en la esquina inferior izquierda y termina en la esquina superior derecha, y consiste únicamente en tramos que apuntan hacia arriba o hacia la derecha. El recuento de estos caminos es equivalente a contar palabras de Dyck: X significa “moverse a la derecha” e Y significa “moverse hacia arriba”.

C_n es el número de formas distintas de cortar un polígono convexo de n + 2 lados en triángulos conectando vértices con líneas rectas sin que ninguna se corte.

Sucesión de Fibonacci

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Forma matricial

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{bmatrix}$$

Propiedades de la sucesión

Cualquier número natural se puede escribir mediante la suma de un número limitado de términos de la sucesión de Fibonacci, cada uno de ellos distinto a los demás.

Tan sólo un término de cada tres es par, uno de cada cuatro es múltiplo de 3, uno de cada cinco es múltiplo de 5.

Cada número de Fibonacci es el promedio del término que se encuentra dos posiciones antes y el término que se encuentra una posición después. Es decir

$$f_n = \frac{f_{n-2} + f_{n-1}}{2}$$

Lo anterior también puede expresarse así: calcular el siguiente número a uno dado es 2 veces éste número menos el número 2 posiciones más atrás.

$$f_{n+1} = 2f_n - f_{n-2}$$

La suma de los n primeros números es igual al número que ocupa la posición n+2 menos uno. Es decir

$$f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} + 1$$

Otras identidades interesantes incluyen las siguientes:

$$f_0 - f_1 - f_2 - \cdots + (-1)^n f_n = (-1)^n f_{n-1} - 1$$

$$f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}$$

$$f_0 + f_2 + f_4 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$$

$$f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$$

$$f_1 f_2 + f_2 f_3 + f_3 f_4 + \cdots + f_{2n-1} f_{2n} = f_{2n}^2$$

$$f_1 f_2 + f_2 f_3 + f_3 f_4 + \cdots + f_{2n} f_{2n+1} = f_{2n+1}^2 - 1$$

Si $k \geq 1$, entonces $f_{n+k} = f_k f_{n+1} + f_{k-1} f_n$, para cualquier $n \geq 0$

$f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$

$f_{n+1}^2 + f_n^2 = f_{2n+1}$

$f_{n+2}^2 - f_{n+1}^2 = f_n f_{n+3}$

$f_{n+2}^2 - f_n^2 = f_{2n+2}$

$f_{n+2}^3 + f_{n+1}^3 - f_n^3 = f_{3n+3}$

El máximo común divisor de dos números de Fibonacci es otro número de Fibonacci. Más específicamente

$$mcd(f_n, f_m) = f_{mcd(n,m)}$$

Si $f_p = a$, tal que a es un número primo, entonces p también es un número primo, excepto, $f_4 = 3$, 3 es un número primo, pero 4 no lo es.

La suma de diez números Fibonacci consecutivos es siempre 11 veces superior al séptimo número de la serie.

El último dígito de cada número se repite periódicamente cada 60 números. Los dos últimos, cada 300; a partir de ahí, se repiten cada $15 \times 10^{n-1}$ números.