【持续更新】【专题】初等数论

Designed By：FrankWkd 【100%原创】【禁止搬运】

Updated at 2025.01.26

前言:

- 主要从线性筛开始速通初等数论
- 尽可能的多证明结论而不是阐述结论。如果你只是想回顾结论，请看其他人的 $Blog$.

一、基础概念

- 整除：对于两个正整数 a, b, 存在一个数 k ,使得 $a = bk$，则称 b 整除 a.**记作** $b \mid a$.
- 带余除法：对于两个正整数 a, b, 存在两个数 k, r ,使得 $a = bk + r$，则称 b 除 a 商 k 余 r.$(b \div a = k \dots r)$
- 因数：能整除一个数的数被称为这个数的因数.
- 公因数：两个数共同具有的因数被称为这两个数的公因数。
- 质数：只有 1 喝和它本身的数被称为质数。2 是质数。
- 质因子：一个数的质因数（既是它的因数也是质数的数）被称为质因子。
- 算术基本定理：一个数能表示成其若干个质因数的乘积（类似于分解质因数的逆运算）。

二、基础算法

- 因数分解：分解出正整数 x 的所有因子。
  - 复杂度：$O(\sqrt{n})$
- 埃氏筛：快速筛出 $1 - n$ 中所有的素数。
  - 复杂度：$O(nloglogn)$
- 质因数分解：快速分解出 n 的所有质因子。
  - 复杂度：$O(\sqrt{n})$
- 欧几里得算法：快速求出两个数 a, b 的最小公约数(gcd).
  - 核心公式：$gcd(a, b) = gcd(b, a \bmod b)$.

三、Euler欧拉筛(线性筛)

关于线性筛

- 一种基于埃氏筛的高效筛法。
- **时间复杂度** $O(n)$。
- **保证每一个素数只被其最小质因子筛除。**
- **每个素数只是被筛除一次。** 让我们一个一个地证明这些结论：

证明

注：请结合代码理解。

```
void getprime() {
    for (int i = 2; i <= n; i++) {
        if (!vis[i]) p[++k] = i;//k为素数个数
        for (int j = 1; j <= k and i * p[j] <= n; j++) {
            vis[i * p[j]] = 1;
            if (i % p[j] == 0) break;
        }
    }
}
```

- 1. 为什么这样写呢？怎么保证每个合数都被无遗漏地筛除呢？
    - 设一合数为 x，因为它是合数，所以它一定能表示为 $x = pi$ 的形式（一个合数可以分解成两个数的乘积）。
    - 我们令 p 为 x 的最小质因子。
    - 现在请看代码，可知：当 $i \ mod \ p = 0$ 时循环立即中断。通俗的理解就是：当 i 是 p 的倍数时，循环直接 $break$.
    - 那么，让我们回归到程序，第二层循环遍历的是所有已经筛出来的质数，由程序可得：只要有一个数符合循环 $break$ 的标准，循环就中断了。
    - 符合循环 $break$ 标准的质数肯定是一个小于 p 且**是 i 因数的质数**，对吧?
    - 既然这个数是 i ,的质因子，i 又是 x 的因子，这个数就是 x 的质因子。
    - 因为 p 是 x 的最小质因子，没有比它更小的质因子了，所以第二层循环中不可能再出现比 p 小而且是 x 的质因子的数了。
    - 所以 x 一定能被筛到。
    - 得证（反证法，不是特别严谨，有问题或疑问请评论或私信）。
- 2. 那又如何保证每一个数只被其最小质因子筛一次呢?
    - 我们设将要被筛除的合数为 x，将其分解为 $x = py = qz$ 的形式。
    - 其中，p 是 x 的最小质因子，q 是 x 的另一个质因子（比 p 大）
    - 接下来让我们再次分解: $x = pqk$，p, q 就是上面的 p, q，k 为使得上面式子成立的数.
    - 那么现在有：

$$= p(qk)$$

$$= q(pk)$$

- 我们设 $y = qk, z = pk$, 我们不难得到：z 中一定含有质因子 p 。而且 $p < q$ 。
- 当 i 枚举到 z 、j 枚举到 p 时，$i \bmod j = 0$ 会先一步成立，所以 j 不会再往下面枚举到 q ，从而避免了枚举到 $py = x$ 之后又枚举到 $qz = x$,造成重复计算.而且每个合数仅仅被其最小质因子（也就是 p）筛除.
- 让我们举个栗子：
  - 1. 要筛除的合数 x 是 35
  - 2. 最小质因子 p 是 5
  - 3. 质因子 q 是 7
  - 4. 35 可以写成 $35 = 5 * 7 = 7 * 5(x = py = qz)$ 的形式。
  - 5. 35 还可以写成 $35 = 5 * 7 * 1(x = pqk)$ 的形式。
  - 6. 由第五步中的式子转化为：$35 = 5 * (7 * 1) = 7 * (5 * 1)(x = py = qz)$ 的形式。
  - 7. 由第四步可知：$y = 7, z = 5$.
  - 8. 由第六步可知：$y = 7 * 1, z = 5 * 1$.
  - 9. 那么，z 中含有 p 的时候就会 $break$,刚好是在筛出 35 这个合数之后，以保证不会再往下筛，从而避免一个数被筛多次的情况。
- 3. 为什么复杂度是线性($O(n)$)的?
  - 因为每个质数只会被记录一次，每个合数只是会被筛除一次，但是埃氏筛会将每个合数筛 $loglogn$ 次（ $O(nloglogn)$ ），这就是欧拉筛（线性筛）为什么复杂度是 $O(n)$ 的原因。

例题：

- ☑ 洛谷 B3716 质因子分解3
  - 题面描述：T 组数据。每次给定一个整数 n，求 n 所有质因子的按位异或和.
  - 数据范围：$1 \leq T \leq 10^5, 2 \leq N \leq 10^8$
  - 思路：如果每次把 n 都除以自己的最小质因子，那么可以 $O(logn)$ 完成一次质因子分解。 如何求出最小质因子? 在线性筛的时候，每个数都被自己的最小质因子筛掉。所以我们只要在当一个数被筛的时候记录筛掉它的数即可。

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
const int N = 1e8 + 5;
```

```
bitset <N> vis;
int mn[N];
int p[N / 10];
void getprime() {
    for (int i = 2; i <= n; i++) {
        if (!vis[i])
            p[++k] = i, mn[i] = i;
        for (int j = 1; j <= k && i * p[j] <= n; j++) {
            vis[i * p[j]] = 1;
            mn[i * p[j]] = p[j];
            if (i % p[j] == 0)
                break;
        }
    }
}
int main() {
    int T, n;
    cin >> T;
    while (T--) {
        cin >> n;
        int ans = 0;
        while (n > 0) ans ^= nm[n], n /= nm[n];
        cout << ans << '\n';
    }
}
```

四、欧几里得定理及其扩展&裴蜀定理

欧几里得定理（gcd）

定理

- 先放定理：设 a, b 是两个整数，且 $b \neq 0$，则 $gcd(a, b) = gcd(b, a \bmod b)$。
- 时间复杂度：$O(log\ min(a, b))$

前置知识

- **模运算($\%$)**: 相信你学习到这里已经掌握了几乎所有模运算性质，这里我们只需使用到一个，即：
  - $$a \bmod b = a - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor \times b$$
  - $$a = a \bmod b + \lfloor \frac{a}{b} \rfloor \times b$$

- 为什么是这样呢?
- 这里的 $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ 就是 $a \div b$ 所得的整数商。将 a 减去这个值所得的就是 $a \div b$ 所得的余数。也就是 $a \bmod b$ 。
- 我们举例说明:
    - $$10\%3 = 10 - \lfloor \frac{10}{3} \rfloor \times 3$$
    - $$10 = 10\%3(余数部分) + \lfloor \frac{10}{3} \rfloor \times 3(整数商)$$

证明

下面开始证明（汗流浃背

- 设 $d = gcd(a, b)$,则 d 能整除 a, b, 即:
    - $$d \mid a \quad d \mid b$$
- 可以写成:
    - $$a = k_1 d, b = k_2 d \, (k_1, k_2 \in \mathrm{Z}(整数))$$
- 根据前置知识，$a\%b$ 可以写成:
    - $$a\%b = a - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor \times b$$
- 将 $a = k_1 d, b = k_2 d$ 带入得:
    - $$a\%b = k_1 d - \lfloor \frac{k_1 d}{k_2 d} \rfloor \times k_2 d$$
- 根据分数线的性质消元得:
    - $$a\%b = k_1 d - \lfloor \frac{k_1}{k_2} \rfloor \times k_2 d$$
- 设 $q = \lfloor \frac{k_1}{k_2} \rfloor$，并将其带入得:
    - $$a\%b = k_1 d - q k_2 d$$
- 提出公因数 d 可得:
    - $$a\%b = (k_1 - q k_2) d$$

- 因为 k_1, k_2 被定义为整数，且 q 已经经过了向下取整，所以 q 也是整数，故 $k_1 + qk_2$ 也是整数。
- 立得： d 整除 $a \bmod b$.
- **所以 d 既是 a, b 的最大公约数，也是 $b, a \bmod b$ 的公约数。**
- 反过来，设 $d = gcd(b, a \bmod b)$, 则 d 整除 $b, a \bmod b$.
- 由前置知识得： $a = a \bmod b + \lfloor \frac{a}{b} \rfloor \times b$
  - 因为： d 整除 $a \bmod b, b,$
  - 所以： d 整除 $a \bmod b, \lfloor \frac{a}{b} \rfloor \times b,$
  - 所以 $d \mid a$. (d 整除 a).
- 所以：d 整除 a, b .
- **整合**
  - 因为 d 是 a, b 的**最大**公因数，而 d 只是 a, b 的公因数，不难得到：$d \le d$ ；
  - 因为 d 是 $b, a \bmod b$ 的**最大**公因数，而 d 只是 $b, a \bmod b$ 的公因数，不难得到：$d \le d$；
- 综上所述：
  - $$\begin{cases} d \le d \\ d \le d \end{cases}$$
  - 该方程的解为：$d = d$
- 即：
  - $$gcd(a, b) = gcd(b, a \bmod b)$$
  - 当 $b = 0$ 时，$gcd(a, b) = a$,因为 b 除以任何数都是 0 ，那这个时候的最大公约数就理所应当的成为了 a, 满足：$a \mid a, b(0) \mid a$。
- 我们只需要逐渐递归求解 gcd 即可，递归的终止条件为 $b = 0$ ，那时只需 $return\ a$ 即可。

裴蜀定理

定理

先放定理：设 a, b 是不全为零的整数，则存在整数 x, y，使得 $ax + by = gcd(a, b)$ 。

证明

请确保您已经理解 gcd 及其前置知识&证明。

- 当 $b=0$ 时，由上面的证明可得：
  - $$gcd(a,b)=a$$
- 这时，$x=1,y=0$ 显然满足 $ax+by=gcd(a,b)$。

- 我们假设对于 $b, a \bmod b$，裴蜀定理成立，即存在整数 x_1,y_1，满足
  - $$bx_1+(a \bmod b)y_1=gcd(b,a \bmod b)$$
- 由模运算的性质（ gcd 的前置知识）可得：
  - $$a \bmod b=a-\lfloor \frac{a}{b} \rfloor b$$
- 将其带入得：
  - $$bx_1+(a-\lfloor \frac{a}{b} \rfloor b)y_1=gcd(b,a \bmod b)$$
- 拆括号得：
  - $$bx_1+ay_1-\lfloor \frac{a}{b} \rfloor by_1=gcd(b,a \bmod b)$$
- 移项得：
  - $$ay_1+bx_1-\lfloor \frac{a}{b} \rfloor by_1=gcd(b,a \bmod b)$$
- 合并同类项可得：
  - $$ay_1+(x_1-\lfloor \frac{a}{b} \rfloor y_1)b=gcd(b,a \bmod b)$$
- 由 gcd 的证明可得: $gcd(a,b)=gcd(b,a \bmod b)$.
- 带入得：
  - $$ay_1+(x_1-\lfloor \frac{a}{b} \rfloor y_1)b=gcd(a,b)$$
- 令：
  - $$x=y_1,y=x_1-\lfloor \frac{a}{b} \rfloor y_1$$
- 就找到了满足条件的 x,y 。

- 由数学归纳法可知，裴蜀定理对于任意不全为零的整数 a, b 都成立。
- 证毕。

扩展欧几里得算法（$exgcd$）

提示：扩展欧几里得算法是一种使用程序求解问题的算法，不是定理！

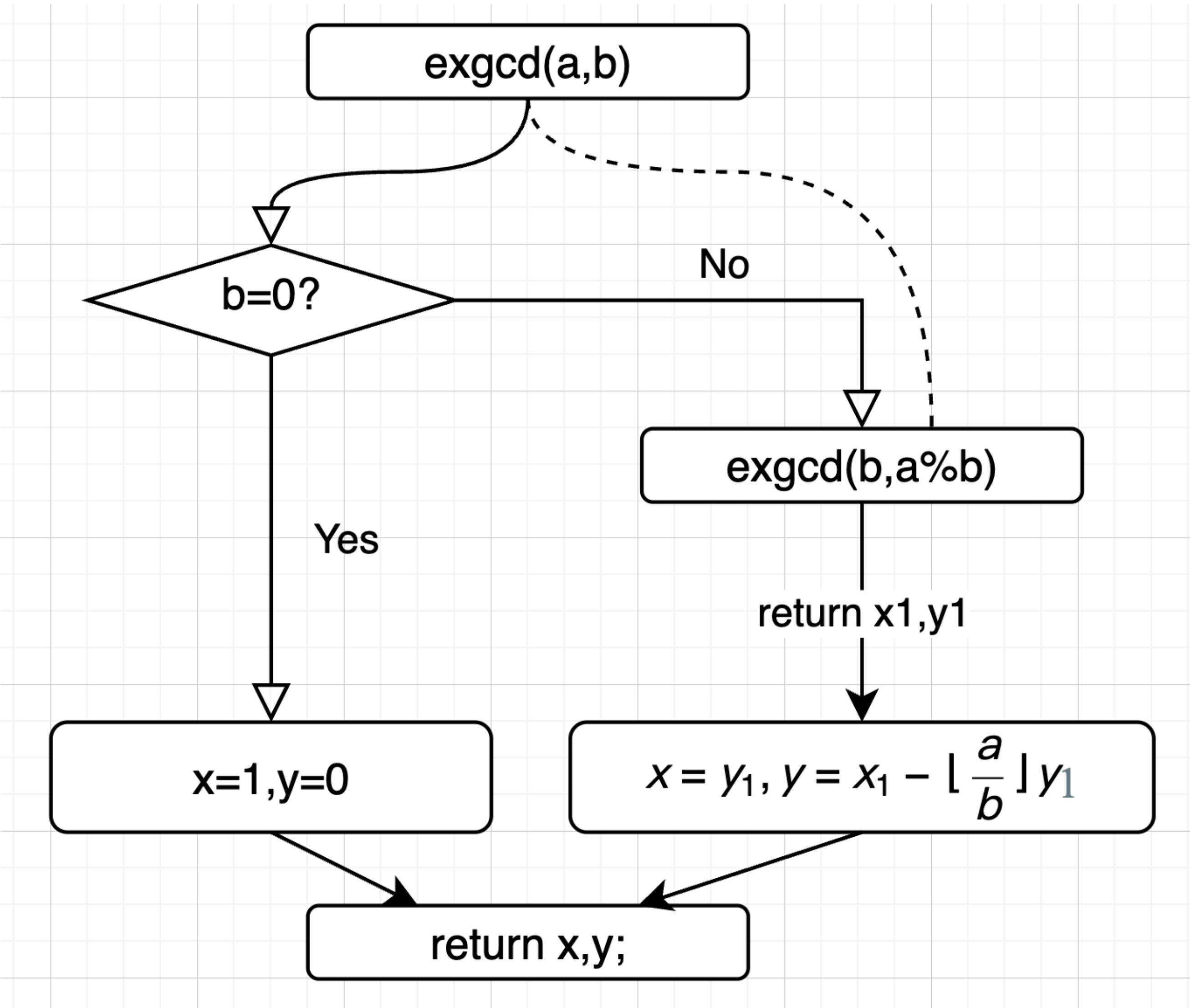
目标

目标：由 gcd 和裴蜀定理求 $ax + by = gcd(a, b)$ 的一组整数解。

做法

- 请确保您已经理解裴蜀定理的证明！
- 现在有方程 $ax + by = gcd(a, b)$ ，求该方程的一组解。
- 由裴蜀定理可知，当 $b = 0$ 时，该方程的解为 $x = 1, y = 0$
- 根据裴蜀定理的结论可知：
  - $$x = y_1, y = x_1 - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor y_1$$
- 这样就得到了满足 $ax + by = gcd(a, b)$ 的整数 x 和 y。
- 由裴蜀定理可知，x_1, y_1 是 $bx_1 + (a \mod b)y_1 = gcd(b, a \mod, b)$ 的解。只要再次递归求解该方程即可。

- 详情见程序流程图：(绘图工具：draw.io)



五、同余

- 符号为 【 $\equiv$ 】.
- 定义：$a \equiv b(mod\, p)$ 表示：$(a-b)\ mod\ p=0$，即 $a-b=km$（k 为整数）。
- 举个栗子：$a=13, b=3, p=5$，计算 $(13-3)\ mod\, 5$ 正好是 0,所以 5 能够整除 10.我们这时称：$13 \equiv 3(mod\, 5)$
- **性质：** 若 $a=b$：$a \equiv b(mod\, m)$
- **证明：**
- 等式两边同时 $mod\, p$ 得：
  - $$a\ mod\ x = b\ mod\ x$$
- 设 $a=k_1x+r, b=k_2x+r,$ 其中 k_1 是整数, r 就是 a 除以 x 后的余数，也就是 $a\ mod\ x=r$。

- 因为已知 $a\%x = b\%x$，所以它们除以 x 后的余数相同，都为 r，其中 k_2 是整数。
- 那么：
  - $$a - b = (k_1x + r) - (k_2x + r) = (k_1 - k_2)x$$
- 因为 k_1, k_2 都是整数，所以说：$a - b$ 是能被 m 整除的。
- 所以：
  - $$(a - b)\ mod\ x = 0$$
- 根据同余的定义得：
  - $$a \equiv b(mod\ x)$$
- 所以得出结论：等式两边同时模上一个数，等式依然成立。

六、逆元

前置知识

请保证你已经足够熟悉同余相关知识！

定义

- **先放定义：** 给定正整数 a, m，若存在整数 x 使得 $a \times x \equiv 1(mod\ m)$，则称：$x$ 是 a 在模 m 意义下的逆元，记作：a^{-1} .(注意这个写法是在模运算的情境下的一种表示，不是常规的倒数那种意思哦)

证明：

存在性：若 $gcd(x, p) = 1$ ，则 x 在模 p 意义下存在逆元。

- 根据裴蜀定理，若 $gcd(x, p) = 1$ ，则存在整数 s, t ，使得 $xs + pt = 1$
- 现在我们考虑其在模 p 的意义下， $1\ mod\ p = 1$，根据同余的性质，$(xs + pt) \bmod p = 1 \bmod p$
- 因为 $pt \equiv 0(mod\ p)$，所以 pt 对 $(sx + pt) \bmod p$ 并没有贡献，可以省略。

- 那么舍去 pt 后的式子为：$sx \bmod p = 1 \bmod p$。
- 此时，s 就是 x 在模 p 意义下的逆元，即：$x \cdot \quad s \equiv 1 \pmod p$.
- 得证：若 $gcd(x, p) = 1$ ，x 在模 p 意义下存在逆元。

必要性：若 x 在模 p 意义下存在逆元，则 $gcd(x, p) = 1$。

- 当 x 在模 p 意义下存在逆元时，我们把这个逆元记作 y，那么存在：
  - $$xy \equiv 1 \pmod p$$
- 根据模运算的定义的逆运算得：
  - $$(xy - 1) \bmod p = 0$$
- 我们将模运算写成这样的形式（k 为整数）：
  - $$xy - 1 = kp$$
- 移项得：
  - $$xy - kp = 1$$
- 我们设 $d = gcd(x, p)$，根据最大公约数的性质，d 整除 x, p，即：
  - $$d \mid x,\ \ d \mid p$$
- 因为 d 整除 x，所以 d 整除 xy；
- 因为 d 整除 p，所以 d 整除 kp；
- 所以 d 整除 $xy - kp$
- 因为 $xy - kp = 1$ ，所以 d 整除 1，又因为 d 是正整数，所以 $d = 1$，即：$gcd(x, p) = 1$

- 综上，充分性和必要性均得证，所以 x 在模 p 同余下存在逆元当且仅当 $gcd(x, p) = 1$。

Exgcd求逆元

我们暂且放一放逆元的各种稀奇古怪的性质，毕竟笔者脑子比你们还烂。。。

目标

目标：对于数 x, p, 对于同余方程 $x \times x^{-1} \equiv 1 \pmod p$，求 x^{-1} 的值。

解法

- 由同余定义得：原式可以分解为：$x \times x^{-1} = 1 + kp$，其中 k 为整数。
- 移项得：$x \times x^{-1} - kp = 1$
- 由逆元性质得：x 在模 p 同余下存在逆元当且仅当 $gcd(x, p) = 1$。
- 则原式可转化为: $x \times x^{-1} - kp = gcd(x, p)$
- 因为 k 为符合条件的整数，所以可以将原式抽象为：
  - $$x \times x^{-1} - kp = gcd(x, p)$$
- 其中，k 转化为原来的 k 的相反数。
- 发现该式为不定方程。
- **直接用 $Exgcd$ 食用即可～**