Pobability System Analysis and Applied Probability

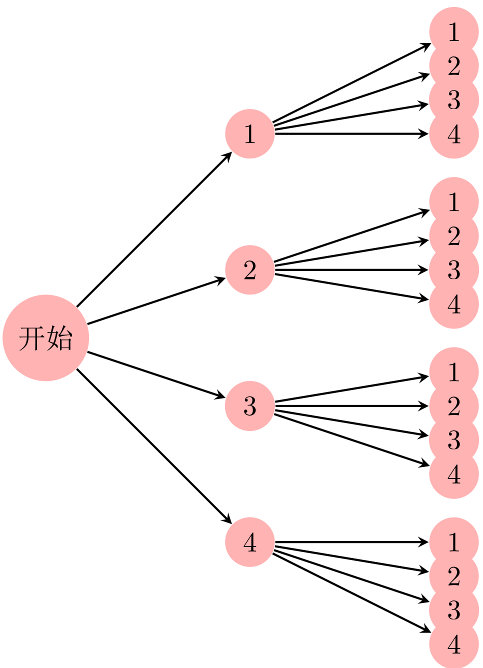
2019 年 12 月 15 日

1 Lecture 1 Probability Models and Axioms

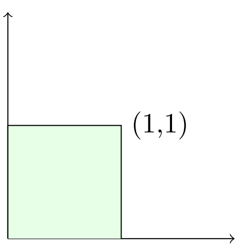
首先看一下什么是 samples space(样本空间)，比如一骰子扔出去之后，所得到的结果为 1,2,3,4,5,6. 这几个 outcome 组成的空间就为样本空间，样本空间包含了所有可能出现的 outcomes。比如，仍两次骰子 (骰子只有四面)，可能出现的所有结果为：

(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)

对应的 sequential description 为



在离散情况下看到的 outcomes 是可数的，但是在连续的时候，得到 outcome 可能有无穷多个。比如向一块板子扔飞镖，板子是一个边长为 1 的正方形：



数学表达为 $\Omega = \{(x,y)|0 \le x, y \le 1\}$

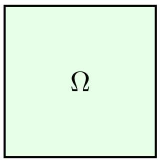
下面重点来了。从这句话中可以看到概率是个什么东西:assign probabilities to subsets of sample space,as opposed to assigning probabilities to individual outcomes. 将样本空间中某个子空间占的大小用概率来”衡量”，这里说明一下，样本空间中的某个子空间，其实就是指的某个事件，event：a subset of the sample space probability is assigned to events.

下面看一下概率种的三个公理：

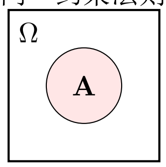
1. Nonnegativity $\mathbf{P}(\mathbf{A}) \geq 0$
2. Normalization $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, 这里 Ω 为整个样本空间。
3. Additivity $if\ \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \phi, then\ \mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B})$

$\mathbf{P}(\{s_1, s_2, .., s_k\}) = \mathbf{P}(\{s_1\}) + \mathbf{P}(\{s_2\}) +, ..., +\mathbf{P}(\{s_k\}) = \mathbf{P}(s_1) + \mathbf{P}(s_2) +, ..., +\mathbf{P}(s_k)$，这里的 $s_1, s_2, .., s_k$ 代表独立事件，然后求他们的并集。

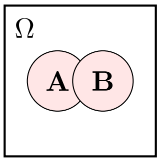
其中 Ω 代表整个样本空间，其中某个样本空间的子空间，或具有同一法则约束的子集，叫做事件。不用的法则约束得到的子集，可以用事件 $\mathbf{A}$、事件 $\mathbf{B}$ 等描述。如下图所示：



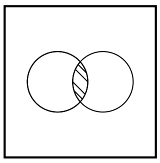
对样本空间中某一子集具有同一约束法则，得到的子空间，即事件 A



对于两个事件的并集 $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, 表示如下：



对于两个事件的交集 $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$, 表示如下：



看两个例子：

(1) 扔两次骰子，得到的结果如下。

(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)

每一个 outcome 的概率为 $\frac{1}{16}$. 则：

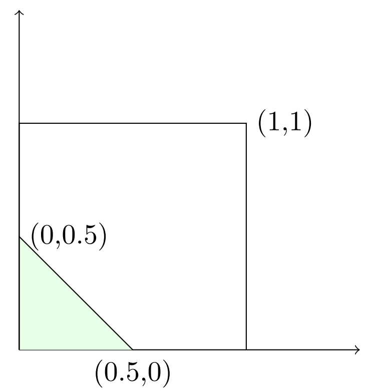
1. $\mathbf{P}((X, Y)\ is\ (1,1)\ or\ (1,2)) = \frac{2}{16}$
2. $\mathbf{P}([X = 1]) = \frac{4}{16}$

(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)

3. $\mathbf{P}(X+Y\ is\ odd)=\frac{8}{16}$
4. $\mathbf{P}(min(X,Y)=2)=\frac{5}{16}$

(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)

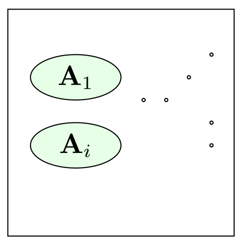
(2)two random number in [0,1]



1. $\mathbf{P}(X+Y\le\frac{1}{2})=\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}$
2. $\mathbf{P}(X,Y)=(0.5,0.3)=0$

2 Lecture2 conditioning and Bayes'Rule

离散模型与连续模型的一个小问题：$\mathbf{P}=area(\mathbf{A})$, 则正方形区域 $=\bigcup\limits_{x,y}\{(x,y)\}$



所以 $1=\mathbf{P}(\bigcup\limits_{x,y}\{(x,y)\})=\sum\mathbf{P}(\{(x,y)\})=\sum 0=0$

看似有点合理但又不对,在应用公式 $\mathbf{P}(\{s_1,s_2,..,s_k\})=\mathbf{P}(\{s_1\})+\mathbf{P}(\{s_2\})+,...,+\mathbf{P}(\{s_k\})=\mathbf{P}(s_1)+\mathbf{P}(s_2)+,...,+\mathbf{P}(s_k)$, 这里的 $s_1,s_2,..,s_k$ 代表独立事件，然后求他们的并集。所以这里中有两部分并不相等：$\bigcup\limits_{x,y}\{(x,y)\}\neq\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\mathbf{A}_i$。

conditional probability, 求在某事件发生的情况下，另一事件发生的概率。

$\mathbf{P}(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ =probability of $\mathbf{A}$.given that $\mathbf{B}$ occurred.

Assuming $\mathbf{P}\neq 0$

$\mathbf{P}(\mathbf{A}|\mathbf{B})=\frac{\mathbf{P}(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})}{\mathbf{P}(\mathbf{B})}$

还是举例说明一下前面的那个扔骰子例子：

(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)

事件 **B**：min(X,Y)=2
事件 **M**：max(X,Y)

1. $\mathbf{P}(\mathbf{M}=1|\mathbf{B})=0$

2. $\mathbf{P}(\mathbf{M}=2|\mathbf{B})=\frac{1}{5}$, 这里可以从两个角度考虑，一种是从公式角度出发考虑。$\mathbf{P}(\mathbf{M}=2|\mathbf{B})=\frac{\mathbf{P(M=2)\cap P(B)}}{\mathbf{P(B)}}=\frac{1/16}{5/16}=\frac{1}{5}$

   M(X,Y)=2

(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)

   and B

(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)

   =

(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)

   $=\frac{1}{16}$

   另一种方式是直接中事件 **B** 中看事件 $\mathbf{M}=\mathbf{2}$ 存在的比例为多大，

(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)

   可以看到事件 **B** 中只存在一个事件 $\mathbf{M}=\mathbf{2}$, 即 5 个中有 1 个事件 $\mathbf{M}=\mathbf{2}$，所以比例为 1/5。