Fourier

FrankZhou-jun*

2019 年 9 月 12 日

1 傅里叶变换

公式定义如下：

$$F(\omega) = \mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-jwt}dt \tag{1}$$

单纯看公式比较复杂，强烈推荐 `http://users.rowan.edu/~polikar/WTtutorial.html` ，该网站详细介绍傅里叶变换，目前正在拜读中

之前一直困扰我的问题在这里得到解决，**什么叫平稳信号？这里的平稳其实是相对频域来说的，指的是信号频域内的频率成分不随时间变化。**爱思考的小朋友可能会问，什么是频率成分，这里举例说明一下，假设 $x(t)$ 的组成如下：

$$x(t) = \sin(2\pi * 10 * t) + \sin(2\pi * 50 * t) + \sin(2\pi * 150 * t) + \sin(2\pi * 300 * t) \tag{2}$$

这里信号的频率成分包含 10hz,50Hz,150Hz,300Hz, 当然时域内波形你什么都看不出的。但是如果经过公式1变换就可以看到频率啦，不管时间如何变化，频率有且只有 4 中，不包含其他频率成分，我们就叫他稳定信号啦，如果频率成分在随着时间有变动，叫做非稳定信号。当然，在频率成分稳定的时候，时域信号表现出来的波形也是就是稳定的。

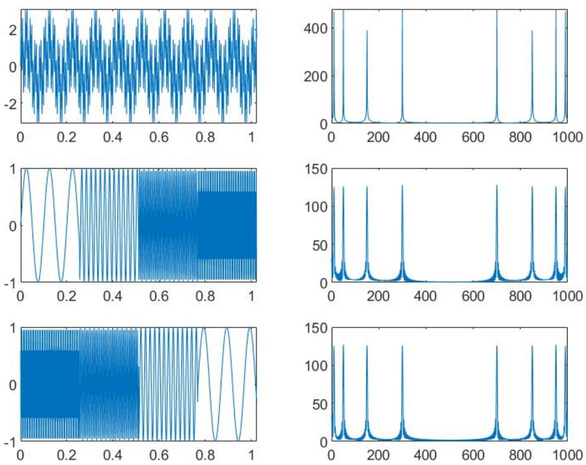


图 1: 时域波形图

图1可以看到第一张图时域（区间现象一下去无穷），对应的频域成分不变，所以是稳定信号。第一列第二张可以看到随着时间增加，波形越来越密集，频率越来越大，频率成分随着在发生改变，所以叫非平稳信号。公式2中频率 10hz，50hz，150hz，300hz 在整个时域段内都是一直存在，而非平稳信号就不一样了，可能在这个时间段存在 10hz，下一个时间段存在 50hz，在整个时间段不会一直存在，这里就表现出非平稳性。这里可以发现傅里叶变换只能表示信号中的频率成分，但何时出现什么频率，在频谱上来看不出来。如果把其中的某个频率干掉，则对应的时域波形就少了对应的波形成分，就叫滤波。信号的频谱可以展示在信号中包含的频谱成分，当然，图中所给的信号很简单，实际工况中的

*研究方向：信号处理，机械故障诊断，深度学习，强化学习，邮箱:zhoujun14@yeah.net

信号是很复杂的，常常表现出非平稳状态，如果我们不但想知道信号的频率成分，还要了解其在哪个时间段出现，则傅里叶变换就不适合了。后来有出现短时傅里叶变换，小波变换等。

2 向量运算

这里专门拿来写向量之间的运算，通常包含两种**点积和叉积** 两个向量经过点积之后是一个数, 所以又叫数量积，类似的两个向量经过叉积后为一个向量，则又叫向量积。

在线性代数中，点积叫内积，叉积叫外积，点积和叉积是根据它们在数学公式中的**符号** $(\cdot, \times)$ 来叫的。同一个东西为啥要叫这么多名字。

下面简单介绍一下什么叫**内积** 假设两个向量 $\vec{\boldsymbol{a}}$ 和 $\vec{\boldsymbol{b}}$

$$\vec{\boldsymbol{a}} = [a_1, a_2, ..., a_n] \tag{3}$$
$$\vec{\boldsymbol{b}} = [b_1, b_2, ..., b_n] \tag{4}$$

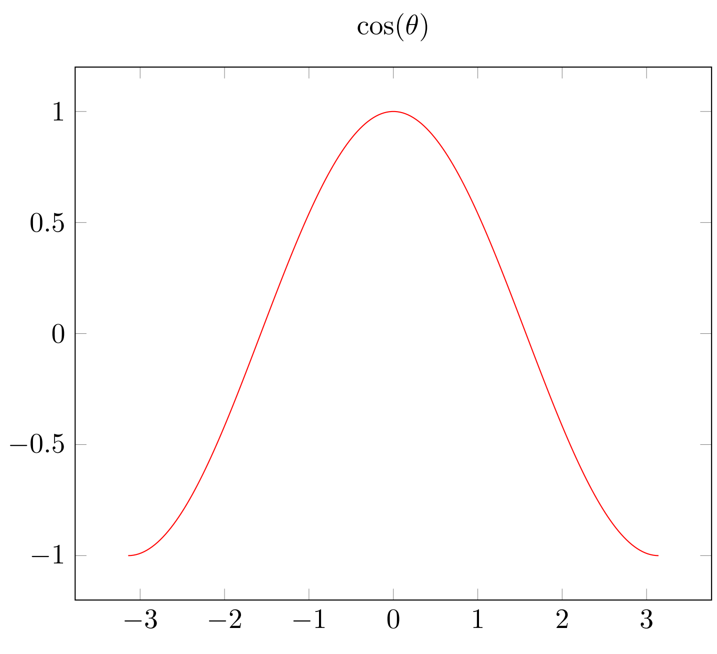
向量内积一般要求的是两个向量的维度是一样的，则坐标表示下向量的内积的计算公式为：

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + ... + a_n * b_n \tag{5}$$

内积的另一个公式：

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = |\vec{\boldsymbol{a}}||\vec{\boldsymbol{b}}| \cos\theta \tag{6}$$

式中 θ 为两向量的夹角，推导过程可看`https://blog.csdn.net/zhangyingjie09/article/details/88375120`这篇博客解释的很详细。内积有啥意义呢，其中之一就是表征两向量间的夹角，在公式7中可以看到向量 $\vec{\boldsymbol{a}}$ 和向量 $\vec{\boldsymbol{b}}$ 均取绝对值，内积的正负取决于 θ，下图为 $\cos\theta$ 的图形



可以看到在 $0 < |\theta| < \frac{\pi}{2}$ 内大于零，在 $|\theta| = \frac{\pi}{2}$ 内等于零，在 $-\pi < \theta < -\frac{\pi}{2} <$ 和 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 小于零。

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = 0 \tag{7}$$

两向量内积 =0 是一个非常重要的性质，表示两个向量互相**垂直** 。空间中的基就要求所有基向量之间两两内积为零，即两两垂直。

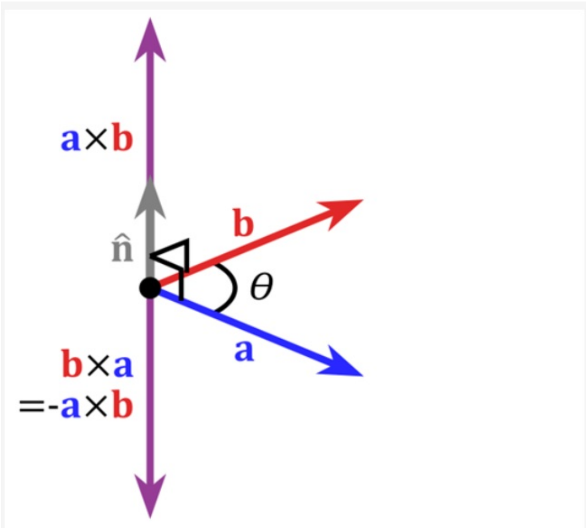
接下来讲一讲什么叫**外积** ，假设一个三维向量 $\vec{\boldsymbol{a}}$ 和 $\vec{\boldsymbol{b}}$ 的坐标为：

$$\vec{\boldsymbol{a}} = [x_1, y_1, z_1] \tag{8}$$
$$\vec{\boldsymbol{b}} = [x_2, y_2, z_2] \tag{9}$$

则：

$$\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 * z_2 - z_1 * y_2) * i + (z_1 * x_2 - x_1 * z_2) * j + (x_1 * y_2 - y_1 * x_2) * k \tag{10}$$

方向为：$\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}$ 右手系，如下图[1]所示：



什么叫线性信号？这个问题也一致困扰这我，应该是指信号具有叠加性，总觉得和系统有关。假设采集信号过程中的系统为线性系统，而我们采集的信号是经过线性系统”某种处理”后得到，得到的结果等于输入信号的叠加，这样的信号称为线性信号。

[1]https://www.cnblogs.com/lzhu/p/10405091.html