Notes of Introducing to linear algebra

FrankZhou-jun*

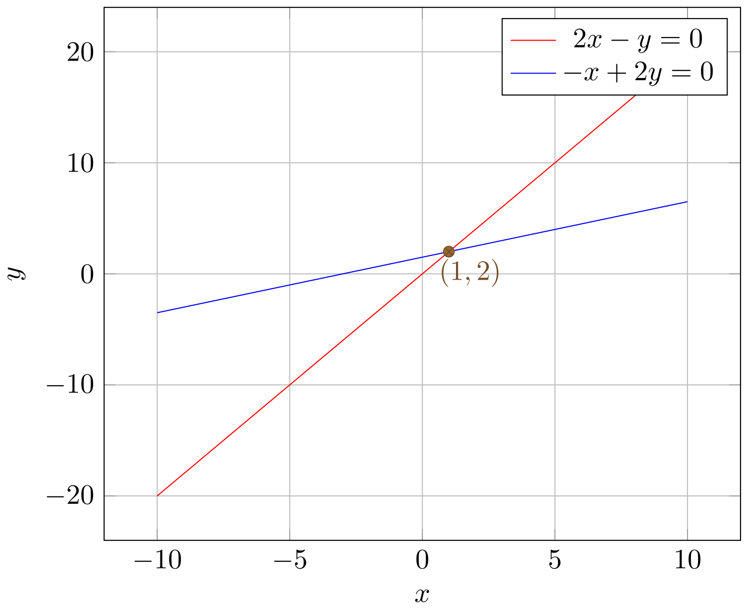
2019 年 10 月 14 日

1 the Geometry of linear equations

书上对常见的解线性方程组方式解释的很清楚了，这里从另一个角度解释”线性方程组”的意义。
假设一个两行的线性方程组

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 3 \end{aligned} \tag{1}$$

这是一个简单的二维线性方程组，解等于 $x = 1, y = 2$, 在**行图像** 中为二维空间下两条连线的交点。

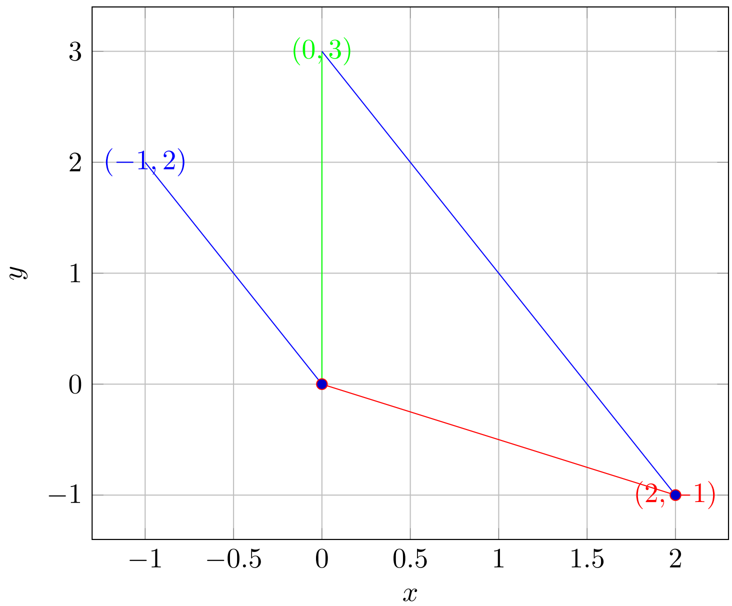


下面考虑**列图像**，化简方程组：

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

列图像中的集合意义就是找到合适的 x、y，进行伸缩变换，然后组合列向量，得到等号右边的列向量。

*研究方向：信号处理，机械故障诊断，深度学习，强化学习，邮箱:zhoujun14@yeah.net



从图中可以看到，第一列向量不变，第二列向量延伸两倍，在进行列向量组合，可以得到最右边的列向量，即可得到解 $x = 1, y = 2$。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

是否最右边的所有列向量可以用列向量组合的形式进行表示 。Can I solve $\mathbf{A}x = b$ for every b?($\mathbf{A}$ 为奇异或非奇异矩阵？是否所有列向量独立)

2 elimilation with matrix

假设增广矩阵 $(R(\mathbf{A}|b))$ 如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{row_1*-3+row_2}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{row_2*-2+row_3}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -10 \end{bmatrix}$$

其实可以使用初等矩阵进行行操作。$row_1 * -3 + row2$ 行操作可以表示为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

在该矩阵左边乘以一个矩阵是对其进行行操作，又成是进行列操作。置换矩阵如下所示：

左乘

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

右乘

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$$

3 multiplication and inverse matrix

3.1 multiplication

$$\underset{A:m\times n}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}} \underset{B:n\times p}{\left[\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{array}\right]} = \underset{c:m\times p}{\left[\begin{array}{c:c:c:c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{array}\right]}$$

两个矩阵相乘，可以把其中一个矩阵 B 看做多个列向量组合，将矩阵 A 每一行矩阵 B 中的某列向量，则得到矩阵 C 中对应列向量，"columns of C are combinations of columns of A", 矩阵 C 中的列向量是矩阵 A 中列向量的线性组合。这样便把前面的线性方程组结合起来思考。

3.2 inverse matrix

谈到可逆矩阵，不得不提一下奇异矩阵和非奇异矩阵，非奇异矩阵可逆，奇异矩阵不可逆。

假设矩阵 **A**

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

很明显，经过化简后矩阵 **A**

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

下面说明什么是奇异矩阵，若

$$\mathbf{A}x = 0 \tag{3}$$

存在任一个非零解 x，则 **A** 为奇异矩阵；若解 x 只有唯一零解，则是非奇异矩阵，即矩阵满秩。显然存在一个非零解 $\vec{x} = [-3, 1]$。

求可逆矩阵方法有 Gauss-Jordan elimination，$\mathbf{E}[\mathbf{A} \quad \mathbf{I}] = [\mathbf{I} \quad \mathbf{A}^{-1}]$, 注意这里就用到了" 矩阵乘以列向量等于列向量" 思想。**E** 表示对矩阵 $[\mathbf{A} \quad \mathbf{I}]$ 进行行变换，若初等矩阵 **E** 满足 $\mathbf{EA} = \mathbf{I}$, 则初等矩阵 **E** 为 $\mathbf{A}^{-1}$, 所以 $\mathbf{EI} = \mathbf{A}^{-1}$。

4 Fractorization into A = LU

L 代表 lower 下三角，U 代表 upper 上三角

$$\mathbf{E}_{32}\mathbf{E}_{31}\mathbf{E}_{21} = \mathbf{U}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_{21}^{-1}\mathbf{E}_{31}^{-1}\mathbf{E}_{32}^{-1}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{E}_{21}^{-1}\mathbf{E}_{31}^{-1}\mathbf{E}_{32}^{-1}$$

L 计算简单，包含了消元乘数信息。下面举个例子来说明这一过程，假设已知初等矩阵

$$\mathbf{E}_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_{32}\times\mathbf{E}_{21}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\10&-5&1\end{bmatrix}$$

可以看到这里对消元乘数进行了相乘操作

$$\mathbf{E}_{21}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\mathbf{E}_{32}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&5&1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}=\mathbf{E}_{21}^{-1}\mathbf{E}_{32}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&5&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&5&1\end{bmatrix}$$

可以发现这里是直接向消元乘数直接写入 $\mathbf{L}$ 中。

5 Transposes Permutations Spaces $\mathbf{R}^n$

置换矩阵 P:identify matrix with reordered rows ,$\mathbf{P}^T\mathbf{P}=\mathbf{I}$,$\mathbf{P}^T=\mathbf{P}^{-1}$。

转置矩阵 Transpose 的表达式为:

$$(\mathbf{A}^T)_{ij}=\mathbf{A}_{ji} \tag{4}$$

将转置用用到一个矩阵上，具有如下现象：一个矩阵转置后的矩阵等于转置前的矩阵，我们成该矩阵为 symmetric matrix，即：

$$\mathbf{A}^T=\mathbf{A} \tag{5}$$

转置有一个非常重要的作用，矩阵 $\mathbf{R}^T\mathbf{R}$ 是一个对称矩阵，通过计算分析可以验证：

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}1&2&4\\3&3&1\end{bmatrix}$$

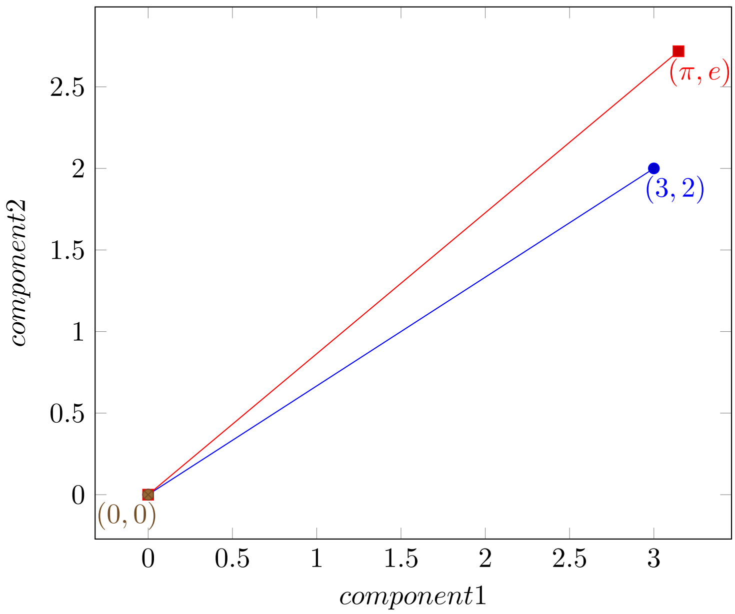
$$\mathbf{R}^T\mathbf{R}=\begin{bmatrix}1&3\\2&3\\4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&4\\3&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&11&7\\11&13&11\\7&11&17\end{bmatrix}$$

可以发现因为 $(\mathbf{A}^T)_{ij}=\mathbf{A}_{ji}$，所以在相乘的过程中具有重复的就算，比如 $row_1 * col_2$=$row_2 * row_1$, 也就是右斜方向上的数值关于主元线对称相等。

证明 $\mathbf{R}^T\mathbf{R}$ 是一个对阵矩阵 $(\mathbf{R}^T\mathbf{R})^T=\mathbf{R}^T(\mathbf{R}^T)^T=\mathbf{R}^T\mathbf{R}$

5.1 Spaces of $\mathbf{R}^n$

$\mathbf{R}^2$ 表示的是 **all 2-dim real vectors**, 也就是组成的 **X-Y plane**。$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\pi\\e\end{bmatrix}$。



$\mathbf{R}^2$ 包含了实数组成的所有 2-dim 向量，同理，$\mathbf{R}^3$ 包含了实数组成的所有 3-dim 向量。线性空间满足那 8 个 rules，具有封闭性，线面举个例子说明一下: 不是线性空间。

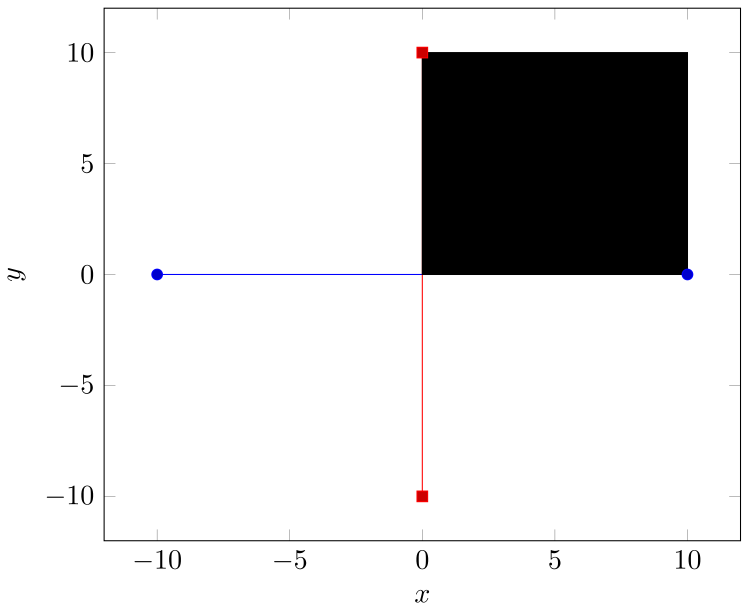


图 1: 取第一象限

可以验证，虽然第一象限的点满足加法法则，但当第一象限的点乘以一个负数时，得到的数很明显超出了第一象限。不具有封闭特点。

下面考虑一下什么是子空间，或者说 **a vector space inside $\mathbf{R}^2$**

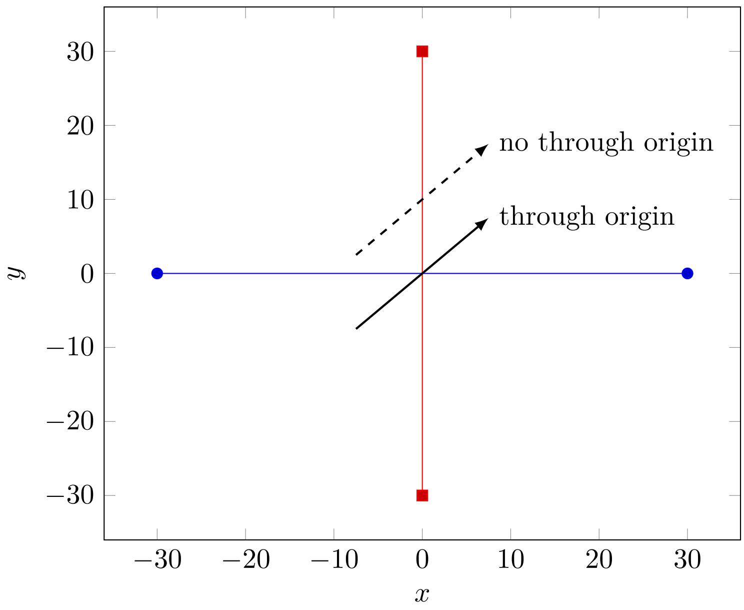


图 2: 子空间

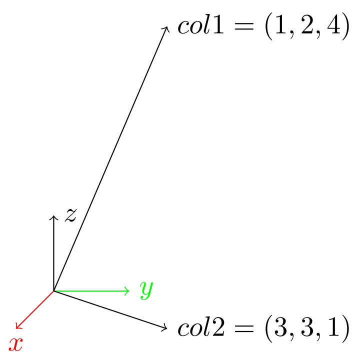
可以看到这里有两条线，其中一条线穿过原点，可以验证穿过原点的这条线的所有点可构成 $\mathbf{R}_2$ 下的子空间，这条线满足八个 rules，线性封闭。若果这条线不通过原点，则该线上的点乘 0 后，得到的点不在该空间范围内，也就是线性不封闭。可以得到 $\mathbf{R}^2$ 的子空间：

- all of $\mathbf{R}_2$, 即该空间**本身** 是一个子空间
- any line through origin, 通过原点的**线** 可以是一个子空间
- zero vector only，只有**原点向量** 的空间

同理我们可以得到 $\mathbf{R}^3$ 的子空间：

1. all of $\mathbf{R}_3$, 即该空间**本身** 是一个子空间
2. any plane through origin, 通过原点的**平面** 可以是一个子空间
3. any plane through origin, 通过原点的**线** 可以是一个子空间，**注意：**这里的线是在三维空间中，有 3 个 component。
4. zero vector only，只有**原点向量** 的空间

下面讲一下矩阵的列空间：



矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\mathbf{col1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ 和 $\mathbf{col2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 则 col1 和 col2 线性组合的所有向量构成 $\mathbf{R}^3$ 的子空间，叫做列空间, 可以是多列线性组合构成的线性空间。