Notes of Introducing to linear algebra

FrankZhou-jun*

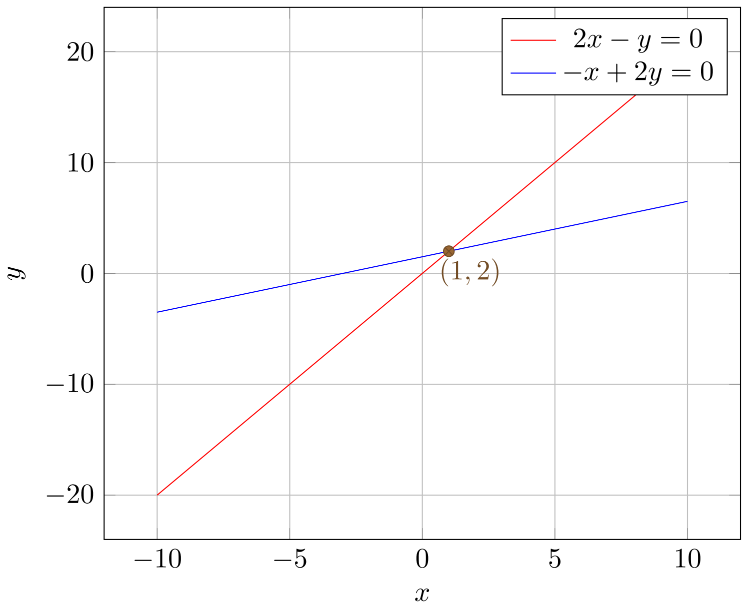
2019 年 10 月 22 日

1 the Geometry of linear equations

书上对常见的解线性方程组方式解释的很清楚了，这里从另一个角度解释”线性方程组”的意义。
假设一个两行的线性方程组

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 3 \end{aligned} \tag{1}$$

① 这是一个简单的二维线性方程组，解等于 $x = 1, y = 2$, 在**行图像** 中为二维空间下两条连线的交点。

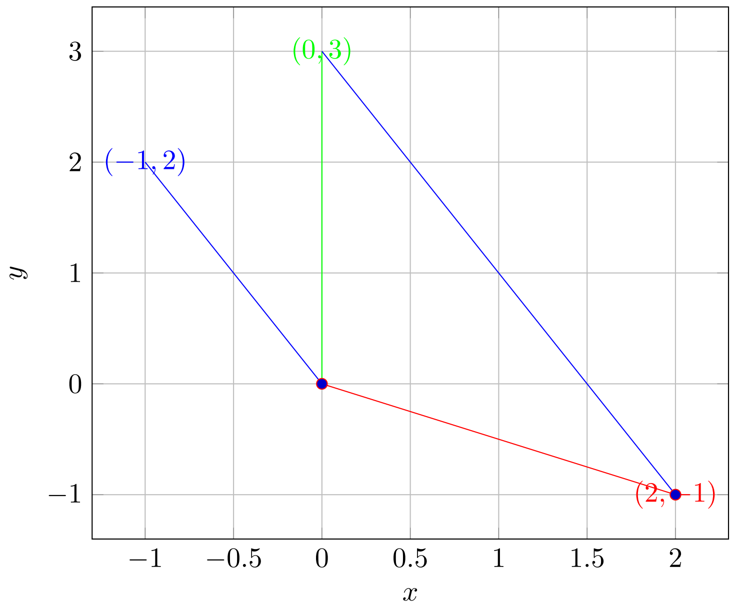


②下面考虑**列图像**，化简方程组：

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

列图像中的集合意义就是找到合适的 x、y，进行伸缩变换，然后组合列向量，得到等号右边的列向量。

*研究方向：信号处理，机械故障诊断，深度学习，强化学习，邮箱:zhoujun14@yeah.net



从图中可以看到，第一列向量不变，第二列向量延伸两倍，在进行列向量组合，可以得到最右边的列向量，即可得到解 $x = 1, y = 2$。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

由此，我们可以从中得到启发，求解线性方程组的问题其实就在问：**是否最右边的所有列向量可以用列向量组合的形式进行表示？**。Can I solve $\mathbf{A}x = b$ for every b?($\mathbf{A}$ 为奇异或非奇异矩阵？是否所有列向量独立)

2 elimilation with matrix

假设增广矩阵 $(R(\mathbf{A}|b))$ 如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{row_1*-3+row_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{row_2*-2+row_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -10 \end{bmatrix}$$

其实可以使用初等矩阵进行行操作。$row_1 * -3 + row2$ 行操作可以表示为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

在该矩阵左边乘以一个矩阵是对其进行行操作，右乘是进行列操作。下面举一个例子来说说明这两种操作，置换矩阵如下所示：

左乘

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

右乘

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$$

3 multiplication and inverse matrix

3.1 multiplication

3.1.1 A* 列 = 列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c:c:c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{array}\right]$$

$$A: m \times n \qquad B: n \times p \qquad = \qquad c: m \times p$$

两个矩阵相乘，可以把其中一个矩阵 B 看做多个列向量组合，将矩阵 A 每一行矩阵 B 中的某列向量，则得到矩阵 C 中对应列向量，”columns of C are combinations of columns of A”, 矩阵 C 中的列向量是矩阵 A 中列向量的线性组合。这样便把前面的线性方程组结合起来思考。

3.1.2 行 *B= 行

下面是矩阵 **A** 中每一行乘以 **B** 得到 **C** 中每一行。

$$\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ \hdashline c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{array}\right]$$

$$A: m \times n \qquad B: n \times p \qquad = \qquad c: m \times p$$

3.2 inverse matrix

谈到可逆矩阵，不得不提一下奇异矩阵和非奇异矩阵，非奇异矩阵可逆，奇异矩阵不可逆。

假设矩阵 **A**

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

很明显，经过化简后矩阵 **A**

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

下面说明什么是奇异矩阵，若

$$\mathbf{A}x = 0 \tag{3}$$

存在任一个非零解 x，则 **A** 为奇异矩阵；若解 x 只有唯一零解，则是非奇异矩阵，即矩阵满秩。显然存在一个非零解 $\vec{x} = [-3, 1]$。

求可逆矩阵方法有 Gauss-Jordan elimination，$\mathbf{E}[\mathbf{A} \quad \mathbf{I}] = [\mathbf{I} \quad \mathbf{A}^{-1}]$, 注意这里就用到了” 矩阵乘以列向量等于列向量” 思想。$\mathbf{E}$ 表示对矩阵 $[\mathbf{A} \quad \mathbf{I}]$ 进行行变换，若初等矩阵 $\mathbf{E}$ 满足 $\mathbf{EA} = \mathbf{I}$, 则初等矩阵 $\mathbf{E}$ 为 $\mathbf{A}^{-1}$, 所以 $\mathbf{EI} = \mathbf{A}^{-1}$。

4 Fractorization into A = LU

L 代表 lower 下三角，U 代表 upper 上三角

$$\mathbf{E}_{32}\mathbf{E}_{31}\mathbf{E}_{21} = \mathbf{U}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_{21}^{-1}\mathbf{E}_{31}^{-1}\mathbf{E}_{32}^{-1}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{E}_{21}^{-1}\mathbf{E}_{31}^{-1}\mathbf{E}_{32}^{-1}$$

$\mathbf{L}$ 计算简单，包含了消元乘数信息。下面举个例子来说明这一过程，假设已知初等矩阵

$$\mathbf{E}_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{32} \times \mathbf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 10 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

可以看到这里对消元乘数进行了相乘操作

$$\mathbf{E}_{21}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{E}_{32}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{E}_{21}^{-1}\mathbf{E}_{32}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

可以发现这里是直接向消元乘数直接写入 $\mathbf{L}$ 中。

5 Transposes Permutations Spaces $\mathbf{R}^n$

置换矩阵 P:identify matrix with reordered rows ,$\mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{I}$,$\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$。

转置矩阵 Transpose 的表达式为：

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = \mathbf{A}_{ji} \tag{4}$$

将转置用用到一个矩阵上，具有如下现象：一个矩阵转置后的矩阵等于转置前的矩阵，我们成该矩阵为 symmetric matrix，即：

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A} \tag{5}$$

转置有一个非常重要的作用，矩阵 $\mathbf{R}^T\mathbf{R}$ 是一个对称矩阵，通过计算分析可以验证：

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

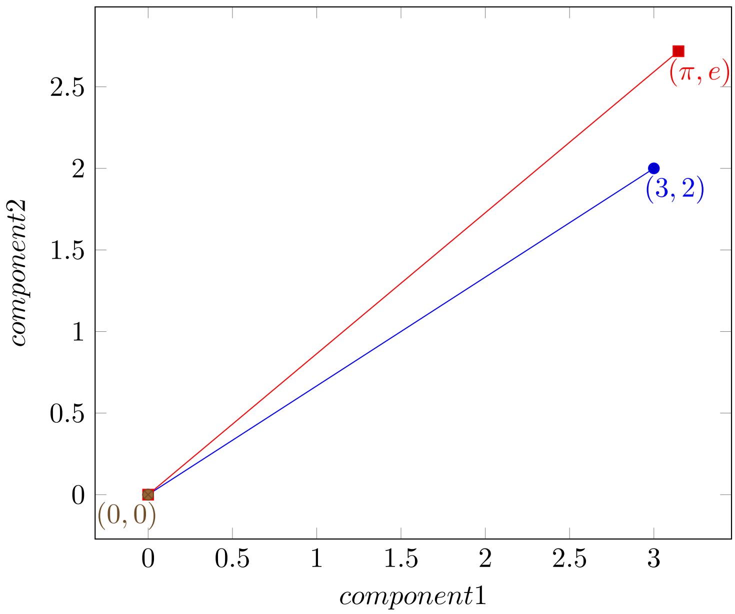
$$\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 7 \\ 11 & 13 & 11 \\ 7 & 11 & 17 \end{bmatrix}$$

可以发现因为 $(\mathbf{A}^T)_{ij} = \mathbf{A}_{ji}$，所以在相乘的过程中具有重复的就算，比如 $row_1 * col_2$=$row_2 * row_1$, 也就是右斜方向上的数值关于主元线对称相等。

证明 $\mathbf{R}^T\mathbf{R}$ 是一个对阵矩阵 $(\mathbf{R}^T\mathbf{R})^T = \mathbf{R}^T(\mathbf{R}^T)^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R}$

5.1 Spaces of $\mathbf{R}^n$

$\mathbf{R}^2$ 表示的是 **all 2-dim real vectors**, 也就是组成的 **X-Y plane**。$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\pi\\e\end{bmatrix}$。



$\mathbf{R}^2$ 包含了实数组成的所有 2-dim 向量，同理，$\mathbf{R}^3$ 包含了实数组成的所有 3-dim 向量。线性空间满足那 8 个 rules，具有封闭性，下面举个例子说明一下: 不是线性空间。

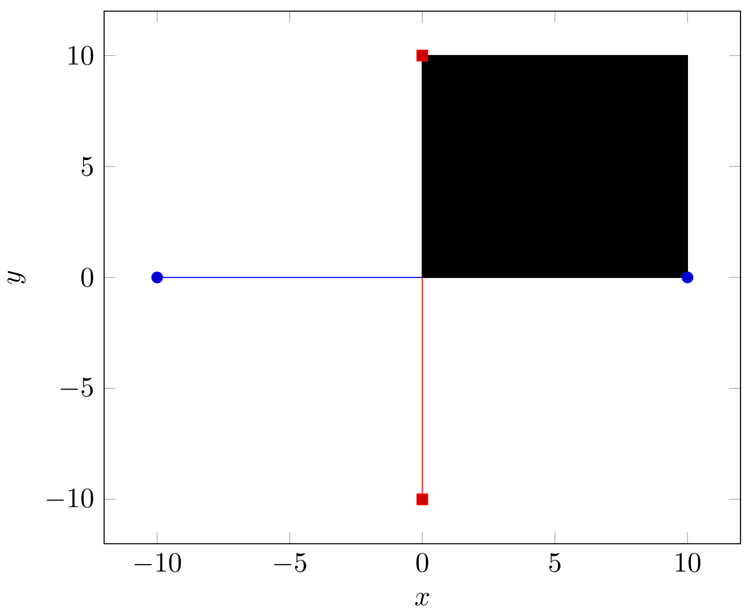


图 1: 取第一象限

可以验证，虽然第一象限的点满足加法法则，但当第一象限的点乘以一个负数时，得到的数很明显超出了第一象限。不具有封闭特点。

下面考虑一下什么是子空间，或者说 a vector space inside $\mathbf{R}^2$

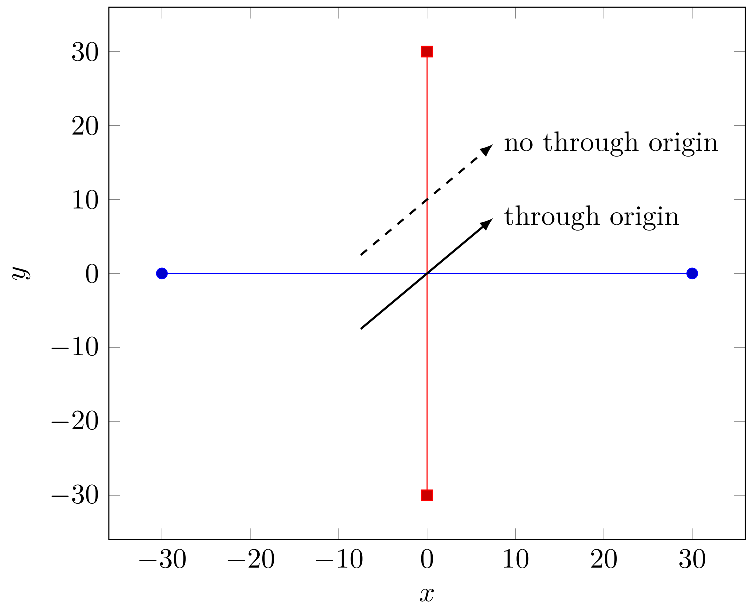


图 2: 子空间

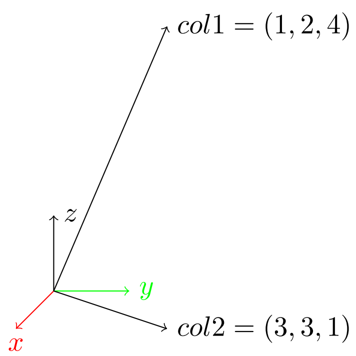
可以看到这里有两条线，其中一条线穿过原点，可以验证穿过原点的这条线的所有点可构成 $\mathbf{R}_2$ 下的子空间，这条线满足八个 rules，线性封闭。若果这条线不通过原点，则该线上的点乘 0 后，得到的点不在该空间范围内，也就是线性不封闭。可以得到 $\mathbf{R}^2$ 的子空间：

- all of $\mathbf{R}_2$, 即该空间**本身** 是一个子空间
- any line through origin, 通过原点的**线** 可以是一个子空间
- zero vector only，只有**原点向量** 的空间

同理我们可以得到 $\mathbf{R}^3$ 的子空间：

1. all of $\mathbf{R}_3$, 即该空间**本身** 是一个子空间
2. any plane through origin, 通过原点的**平面** 可以是一个子空间
3. any plane through origin, 通过原点的**线** 可以是一个子空间，**注意：**这里的线是在三维空间中，有 3 个 component。
4. zero vector only，只有**原点向量** 的空间

下面讲一下矩阵的列空间：



矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\mathbf{col1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ 和 $\mathbf{col2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 则 col1 和 col2 线性组合的所有向量构成 $\mathbf{R}^3$ 的子空间，叫做列空间, 可以是多列线性组合构成的线性空间。

6 Column Space and Null Space

6.1 Column Space

上一节已经讲了什么是列空间，这里在回顾一下，假设 **P** 和 **L** 是 **A** 的列空间。其中 **P** 是 $\mathbf{R}^3$ 中的平面子空间，其中 **L** 是 $\mathbf{R}^3$ 中的线子空间。

$\mathbf{P} \cup \mathbf{L}$ is a subspace?

$\mathbf{P} \cap \mathbf{L}$ is a subspace?

可以确定 **$\mathbf{P} \cap \mathbf{L}$ is a subspace!**，因为他们交集产生的子空间在 **P** or **L** or **both** 之中，所以交集一定是子空间。并集不是，不满足加法定理！

提到列空间有啥作用呢，我的理解是方面研究及知识传播，如要使线性方程组有解

$$\mathbf{A}x = b \tag{6}$$

b 应该存在 A 的列空间中 in $\mathbf{R}^4$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

可以看到矩阵 **A** 中 $col_3 = col_1 + col_2$, 这说明在 A 的列空间中，仅使用 col_1 和 col_2 就可以做子空间的基，而 col_3 没有做贡献，子空间可以描述为:**a two dimensional subspace of $\mathbf{R}^4$**

6.2 Null Space

零空间是指 $\mathbf{A}x = 0$ 的解形成的空间，可以发现 x=[0 0 0] 为齐次方程的解，在 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ 很明显还有另一个非零解 x=[1 1 -1], 所以 x=k[1 1 -1]，与前面的零解满足 8 个 rules，线性封闭构成零空间，即该其次方程中的零解为 $\mathbf{R}^3$ 空间中的一条过原点的线。

7 solving Ax=0 pivots variables,special solutions

主要还是用到了 Gauss-Jordan 消元法，如矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$，分别化简到 U(echelon) 形式、R 形式 (reduce row echelon)

$$\begin{matrix} \mathbf{A}{=}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}x = 0 \quad = & \mathbf{U}x = 0 \quad = & \mathbf{R}x = 0 \end{matrix}$$

matlab 中可以通过 rref($\mathbf{A}$) 直接得到 $\mathbf{U}$ 形式的矩阵，但 matlab 中的计算时这样的，将 $\mathbf{R}$ 的列进行变换，pivots columns 和 Free columns 移动到一起。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ pivotcolumn & freecolumn & pivotscolumn & freecolumn \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ pivotcolumn & pivotscolumn & freecolumn & freecolumn \end{bmatrix}$$

$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, 所以 $\mathbf{R}$ 可以表示为 $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

则 $\mathbf{Rx} = 0$, $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} x = 0$ 解得 $x = \begin{bmatrix} -\mathbf{F} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

这里主元列的个数 r 等于矩阵的秩 r($\mathbf{A}$)，自由列的个数等于 n-r，自由列的意思可以自由取值，所以一旦出现自由列，就有无穷多多个解，**如何表示这些无穷多个解呢？**，找到解的基就行啦，零空间的基一定是线性无关了，这里自由列的个数为 2，则取 $[x_2, x_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 得到的解分别为 $k_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。可以看到与 matlab 中 null($\mathbf{A}$) 得到解一样。

8 Solving $\mathbf{A}x = b$ Row Reduced Form R

由前面可知，要使 $\mathbf{A}x = b$ 有解，则 b 应该在列空间 $C(\mathbf{A})$ 中，也就是 b 可以用矩阵 $\mathbf{A}$ 各列进行线性组合表示。通过矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩可以确定解的个数。

to $\mathbf{A}x = b$

1. rank($\mathbf{A}$)=m=n
   $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ 1 solution
2. rank($\mathbf{A}$)=n<m
   $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$,0 or 1 solution
3. rank($\mathbf{A}$)=m<n
   $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$,∞ solution
4. rank($\mathbf{A}$)<m,r<n
   $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$,0 or ∞ solution

下面使用一个具体的例子求解 $\mathbf{A}x = b$,$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ 。

$$\mathbf{A} : b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & b_2 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_3 - 3b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix}$$

求解 $\mathbf{A}x = b$ 等于求 $x_{special}$ 特解 $+x_{null}$ 零空间。特解的求法解释设置自由变量为零，在代入线性方程组求解。

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \\ pivot & free & pivot & frer & ? \end{bmatrix}$$

所以 $[x_2, x_4] = [0, 0]^T$,

$$x_1 + 2x_2 = 12x_3 = 3$$

特解为 $x_{special} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$，上一节求出的零解为 $x_n = k_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$,x=$x_{special} + x_n$，在二维空间内，$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解为：零空间内某一向量 + 特解向量。

9 Independent,Basis,and,Dimension

repeat, when $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ are colums of $\mathbf{A}$

1. they are independent if null space of $\mathbf{A}$ is zero vector rank=n,no free variables
2. they are dependent if $\mathbf{A}x = 0$,for some none-zero c, rank<n,have free variables
3. vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ span a space,means:the space consists of all combinations of those vectors.

Basis for a space is a sequence of vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_d$ with 2 properties。

1. they are independent
2. they span a space

Giving a space,every basis for the space has the same number of vectors, 就是说不管你用什么基，只要构建的空间是同一个，则基的数量是一样的。我们把不变的数量的大小叫维度。由此，在解线性方程组时，矩阵 $\mathbf{A}$, **列空间** 的维度等于矩阵主元列的个数 (秩 r)，**零空间** 的维度等于自由列的个数 $(n - rank(\mathbf{A}))$。

10 The Four Foundamental Subsapce

这 4 个基本子空间主要是矩阵 $\mathbf{A}$ 的列空间 $C(\mathbf{A})$ 和零空间 $N(\mathbf{A})$，以及其转置矩阵 $\mathbf{A}^T$ 的 $C(\mathbf{A}^T)$ 和零空间 $N(\mathbf{A}^T)$, **假设矩阵 A is m by n**

1. column space C($\mathbf{A}$) in $\mathbf{R}^m$
2. null space N($\mathbf{A}$) in $\mathbf{R}^n$
3. row sapce =all combinations of rows=all combinations of $\mathbf{A}^T$ in $\mathbf{R}^n$
4. null sapce of $\mathbf{A}^T$,we could call it as left nu $\mathbf{R}^m$

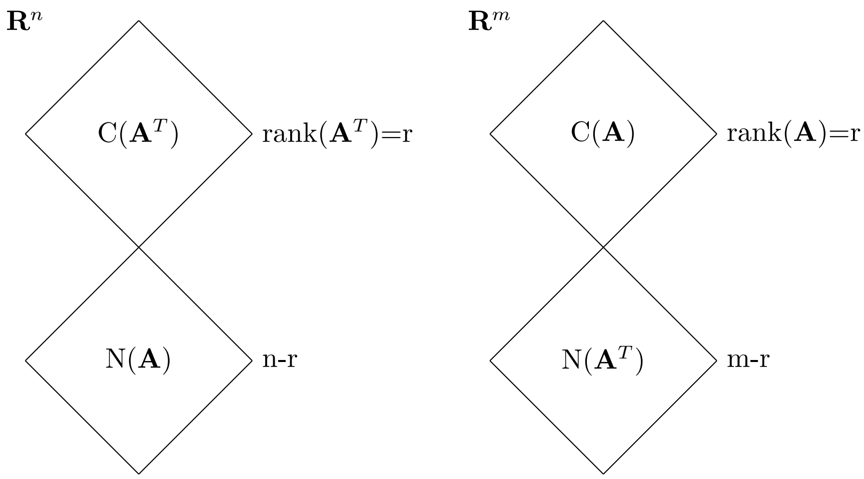


表 1: 4 个基本矩阵基和维度的确定

	C($\mathbf{A}$)	N($\mathbf{A}$)	C($\mathbf{A}^T$)	N($\mathbf{A}^T$)
basis	pivots columns of $\mathbf{A}$	free columns of $\mathbf{A}$	pivots columns of $\mathbf{A}^T$	free columns of $\mathbf{A}^T$
dim	r	n-r	r	m-r

11 Matrix spaces Rank 1-samll world Graphs

一个包含所有 3×3 维的矩阵，共有 9 维，基可以表示为：$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ldots\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$。

其子空间有

1. Symmetrix, 可以验证在 3×3 空间里，维度为 6，dim($\mathbf{S}$)=6
2. Upper triangle，可以验证在 3×3 空间里，维度为 6,dim($\mathbf{U}$)=6

$$\begin{cases}\mathbf{S}\cap\mathbf{U}=Symmetrix\cap Uppertriangle=Diagonal3\times 3, dim(\mathbf{S}\cap\mathbf{U})=3\\ \mathbf{S}+\mathbf{U}=anyelementofSanyelementofU=allof3\times 3, dim(\mathbf{S}+\mathbf{U})=9\end{cases}$$

可以得到维度计算公式：**dim(S)+dim(U)=dim(S ∩ U)+dim(S + U)**

结合微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$

可以得到特解有 sinx,cosx,e^{ix}, 但由于是是二阶微分方程，所以是有两个基，直接拿两个特解构建零空间就可以得到所有解了。所以完整解为：

$$y=c_1cosx+c_2sinx$$

下面讲一下秩为 1 的矩阵，可以表示为一列乘以一行，可以用秩为 1 的矩阵构造所有矩阵。

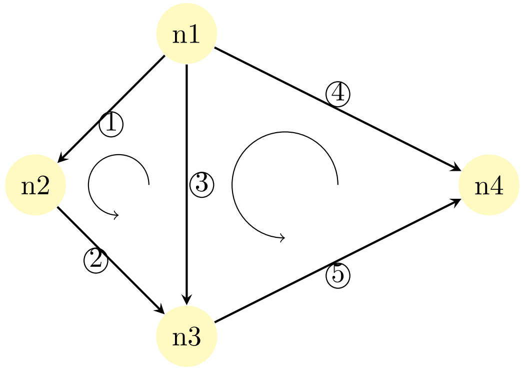
$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\mathbf{V}^T$$

假设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&4&5\\2&8&10\end{bmatrix}$ 则 $\mathbf{A}$ 可以表示为 $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&5\end{bmatrix}$

世界好小：六人法则：只要通过 6 个人就可以连接到世界上任何一个人。

12 Graphs,Network,Incidence Matrices

世界万物可以看成是一个巨大的关系网 (突然想起了一句话，世界万物是相互联系，具有各种各样的关系)，网中存在节点，在进行数学描述或建模研究时候可以得到关系图 (可能会更加复杂，但是这个例子可以很好的启发，甚至解释一切)，而矩阵可以描述图中的一些” 关系”。假设有 4 个 nodes，他们之间的联系有 5 条 edges，则可以得到以下图形。



从实际问题中得到图，让后得到关联矩阵 A

表 2: incident matrix

Nodes				
1	2	3	4	edges
-1	1	0	0	edge1
0	-1	1	0	edge2
-1	0	1	0	edge3
-1	0	0	1	edge4
0	0	-1	1	edge5

表中-1 **代表起点**，1 **代表终点** 。则关系就可以用一张稀疏矩阵或者其他矩阵进行描述。可以发现 edge1，edge2，edge3 构成一个回路，对应行向量相关，从图中也可以明显的感觉到③=①+②, 在后面的叙述中可以验证这一结论。

接下来对零空间进行分析 ，$\mathbf{A}x = 0$:

$$\mathbf{A}x = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_3 - x_1 \\ x_4 - x_1 \\ x_4 - x_3 \end{bmatrix} x = 0$$

由此可以计算边上上的差值 ，若 $x_1, x_2, .., x_5$ 代表电势，则，$\mathbf{A}x = 0$ 可以分析电势差。很明显存在零解 $x = k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 则 rank($\mathbf{A}$)=n-dim(N($\mathbf{A}$))=3。

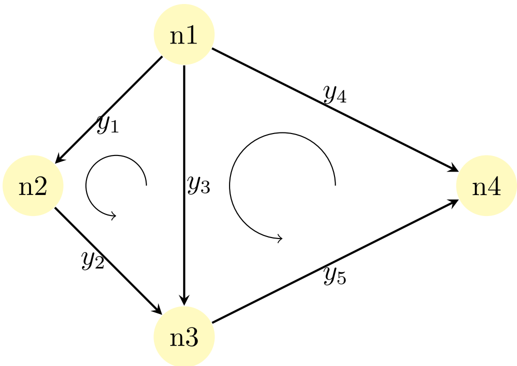
对左零空间进行分析 ，即 $\mathbf{A}^T y = 0$, 可计算出维度 $N(\mathbf{A}^T) = 5 - 3$

$$\mathbf{A}y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 01 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可以得到

$$\begin{cases} -y_1 - y_3 - y_4 = 0 \\ y_1 - y_2 = 0 \\ y_2 + y_3 - y_5 = 0 \\ y_4 + y_5 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

再看图



很明显上式可以表示出图中的关系，已知 $N(\mathbf{A}^T)=2$，则选择两个基就行了。解得

$$y = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

可以得到一个结论，欧拉公式：$\sharp$ **loops=$\sharp$edges-($\sharp$nodes-1)**

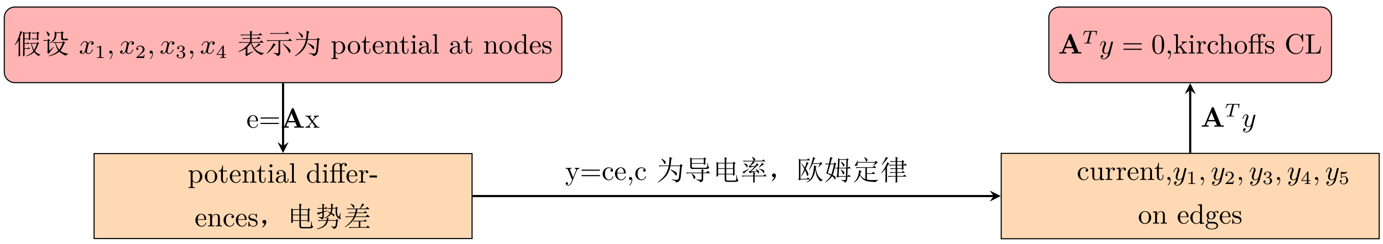


图 3: 电势建模分析流程

通过图3可以得到公式 $\mathbf{A}^T c \mathbf{A} x = 0$

13 Quiz review

N(**CD**)=N(**D**),if C is invertible

14 Orthogonal Vectors and subspaces

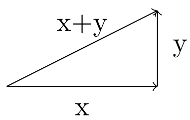
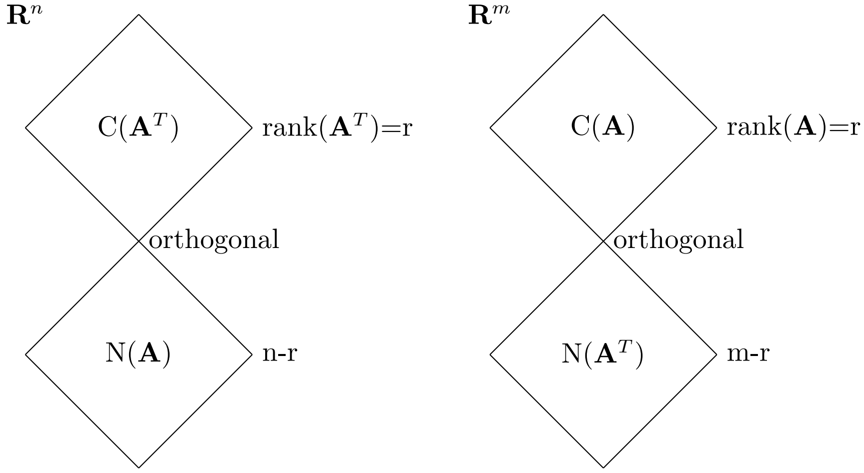


图 4: 正交向量

由勾股定理可得：$||x||^2+||y||^2=||x+y||^2 \Rightarrow x^Ty=0$。**两个空间正交是指任何空间 S 中的向量正交于任何空间 T 中的向量，Subsapce S is orthogonal to subspace T means:every vector in S is orthogonal to every vector in T**, 对于四个基本空间，可得到：



Row space is orthogonal to null space，通过 $\mathbf{A}x=0$ 就可清除看到，行空间正交于零空间，下进行证明: 可以看到所有行垂直于 x

$$\begin{bmatrix} row_1 & of & \mathbf{A} \\ row_2 & of & \mathbf{A} \\ & \cdots & \\ row_m & of & \mathbf{A} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

下面证明列空间垂直 x，行空间就是主元行的线性组合，因此就是证明主元行的线性组合垂直于 x

$$\left.\begin{matrix} c_1(row_1 \quad of \quad A)^Tx=0 \\ c_2(row_2 \quad of \quad A)^Tx=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (\underbrace{c_1(row_1 \quad of \quad A)^T+c_2(row_2 \quad of \quad A)^T}_{row \quad sapce})x=0$$

coming:$\mathbf{A}x=b$ when there is no solution m>n, How to solve 将在下一节进行详细讲解，这里先提一下，在两边同乘矩阵 $\mathbf{A}^T$ ：

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\hat{x}=\mathbf{A}^Tb$$

这里用到了最小二乘法的原理，原方程组在列空间中找不到向量 b，只能找一个和 b 相似的向量，而两点之间，直线最短，所以将向量 b 沿着列空间平面的法线方向投影到列空间平面，夹角越小则误差越小。

15 Projections onto subspace