迭代法求解线性方程组

FrankZhou-jun*

2019 年 11 月 25 日

在求解线性方程组时除了考虑一般的计算数值求解外，还可通过迭代求解，在迭代求解的过程中，要注意收敛性和精度控制，如果这个线性方程迭代下去不能收敛，那么完全是在浪费时间。下面介绍一下 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法。迭代的递推公式：

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{G}\mathbf{x}^{k} + \mathbf{d}\ (k = 0, 1, ...) \tag{1}$$

$\mathbf{G}$ 为迭代矩阵，可以通过迭代矩阵来判断是否收敛。下面看一看谱半径的定义：设 n $\times$ n 矩阵 $\mathbf{G}$ 的特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, 称：

$$\rho(\mathbf{G}) = \underset{1\leq i\leq n}{max} |\lambda_i| \tag{2}$$

为矩阵 $\mathbf{G}$ 的谱半径。

地推公式收敛的条件就是，递推矩阵 $\rho(\mathbf{G}) < 1$。迭代精度一般取 $\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^{k} < 10^{-5}$。

1 Jacobi 迭代法

线性矩阵 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 满足条件 $a_ij \neq 0$, 则 $\mathbf{A}$ 分解为：

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}$$

这里的 **LU** 不是 **LU** 分解的意思。

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_{n,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{k+1} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}^{k} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}\ (k = 0, 1, ...) \tag{3}$$

可以得到 Jacobi 的迭代矩阵为：

$$\mathbf{G}_J = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$$

Jacobi 收敛条件为：$\mathbf{G}_J < 1$, 另一个判断条件为系数矩阵 $\mathbf{A}$ 是主对角线按行 (或按列) 严格占优 (n 阶方阵 A, 如果其主对角线元素的绝对值大于同行其他元素的绝对值之和, 则称 A 是严格对角占优的)。

举个例子最好，求解下列线性方程组的解

$$\begin{cases} 10x_1 & -2x_2 & -2x_3 & = 1 \\ -2x_1 & 10x_2 & -1x_3 & = 0.5 \\ -1x_1 & -2x_2 & 3x_3 & = 1 \end{cases}$$

求得迭代矩阵

$$\mathbf{G_J} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2000 & 0.2000 \\ 0.2000 & 0 & 0.1000 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

*研究方向：信号处理，机械故障诊断，深度学习，强化学习，邮箱:zhoujun14@yeah.net

则迭代公式为

$$\begin{cases} x_1^{k+1} & = 0 & +0.2x_2^k & +0.2x_3^k & +0.1 \\ x_2^{k+1} & = 0.2x_1^k & +0 & +0.1x_3^k & +0.05 \\ x_3^{k+1} & = \frac{1}{3}x_1^k & +\frac{2}{3}x_2^k & +0 & \frac{1}{3} \end{cases}$$

取 k=0 $x^k = [0, 0, 0]$

表 1: 迭代过程

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
1	0.1000	0.0500	0.3333
2	0.1767	0.1033	0.4000
3	0.2007	0.1253	0.4611
4	0.2173	0.1362	0.4838
5	0.2173	0.1362	0.4838
6	0.2240	0.1418	0.4966
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
13	0.2310	0.1470	0.5083
14	0.2311	0.1470	0.5084
15	0.2311	0.1471	0.5084

2 Gauss-Seidel 迭代法

Gauss-Seidel 迭代法与 Jacobi 迭代法类似，迭代矩阵稍有不同：

$$\mathbf{x}^{k+1} = -(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x}^k + (\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b} \tag{4}$$

$$\mathbf{G}_G = -(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$$

收敛条件为：$\mathbf{G}_G < 1$, 另一个判断条件为系数矩阵 $\mathbf{A}$ 是主对角线按行 (或按列) 严格占优 (n 阶方阵 A, 如果其主对角线元素的绝对值大于同行其他元素的绝对值之和, 则称 A 是严格对角占优的)。