Julia 集的分析和探索

顾格非
3210103528

2022 年 7 月 4 日

摘要

Julia set 是一个在复平面上形成分形的点的集合 [1]。以法国数学家加斯顿 · 朱利亚 (Gaston Julia) 的名字命名。本文回顾了相关的数学理论，设计了相关算法与代码实现，并展示通过代码得到的数值算例并进行了分析，最后分析了 Julia 集合与 Mandelbrot 集合的关系并得出结论。

1 引言

Julia 集合以法国数学家加斯顿 · 茱莉亚（Gaston Julia）的名字命名，他于 1915 年调查了它们的性质，并在 1918 年发表了著名的论文：Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles。

1979 年，在计算机的帮助下，B. B. Mandelbrot 研究了 Julia 集合，并试图对所有可能的形状进行分类，并提出了 Mandelbrot 集合。

2 数学理论

2.1 定义

Julia 集合可由 $f_c(z) = z^2 + c$ 反复迭代得到，对于固定的复数 c，取某一 z 值（如 $z = z_0$），可以得到序列：

$$z_0, f_c(z), f_c(f_c(z)), f_c(f_c(f_c(z))), \ldots\ldots$$

这一序列可能发散于无穷大或始终处于某一范围之内并收敛于某一值。我们将使其不扩散的 z 值的集合称为 Julia 集合。

2.2 Julia 集的不变性和对称性

如果 c 是实数，则 Julia 集围绕实轴镜像。具有非零虚部的其他 c 值具有 180 度旋转对称性 [2]。

Julia 集的点对于 $f(z)$ 的进一步迭代是“不变的”。这里，不变性并不意味着 $f(z_j) = z_j$，而是对于属于集合 J 的任何点 z_j ,$f(z_j)$ 也是 J 的成员。

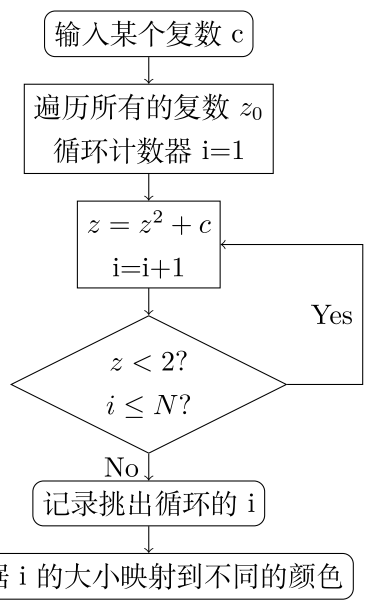
2.3 逃逸准则

对于一个复数 $z_n = x_n + iy_n$，定义模 $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$。则如果对于一个复数序列 $\{z_1, z_2 \dots z_n\}$ 有 $|z_j| > \max(2, |c|)$，则序列将逃逸到无穷大。

为了确定每个 z 是否属于 M 集，借助上面的逃逸准则, 若某一次迭代后 $|z| > 2$, 我们立即就判定为不在集合内, 这样可以方便的用计算机实现。

3 算法

设定一个迭代次数的上限 N ，当经过 N 次迭代，$f_c(z)$ 仍然没有超过 2，我们就认为这个点就属于 Julia 集合（尽管一些点也可能混入 Julia 集合）; 否则，就说明该点不 Julia 集合在中, 并记录这个点挑出循环时的次数。这样平面上每个点都对应了一个循环次数 i（对于集合内的点，$i = N$; 对于集合外的点，$i < N$），然后将 i 映射到颜色上去进行着色。



4 数值算例及分析

下面两个图分别取 c 为实数和复数的情况，分别展现了 Julia 集合的反射对称性和旋转对称性。

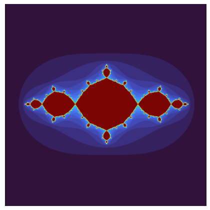


图 1: $c = -1$

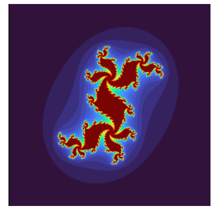
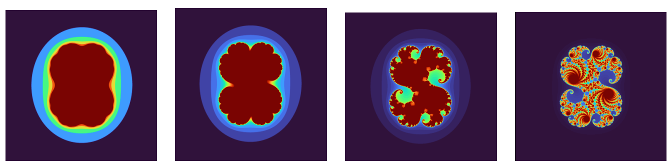


图 2: $c = 0.3 + 0.6i$

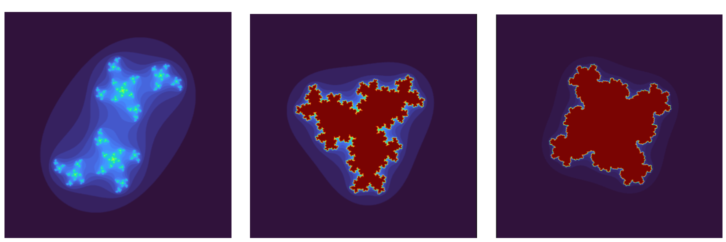
以下展现了一个迭代的过程。通过控制最大迭代次数 N 的增大，图形精度越来越高，红色的面积越来越小。



(a) N=5 (b) N=15 (c) N=100 (d) N=500

图 3: 不同迭代次数下 $c = 0.273 + 0.007i$ 的图像

本文前面所讨论的迭代方程都是基于 $z = z^2 + c$，但事实上，Julia 本人还研究过诸如 $z = z^4 + \frac{z^3}{z-1} + \frac{z^2}{z^3+4z^2+5} + c$ 的迭代方程，以下是我改变迭代方程的算例展示：



(a) $z = z^2 + c$ (b) $z = z^3 + c$ (c) $z = z^4 + c$

图 4: 不同迭代方程下 $c = 0.273 + 0.7i$ 的图像

5 与 mandelbrot 的关系

众所周知的 Mandelbrot 集形成了 Julia 集的一种索引。一个 Julia 集要么是连通的，要么是不连通的，从 Mandelbrot 集合内选择的 c 值是连通的，而从 Mandelbrot 集合外部选择的 c 值是不连通的。不连贯的集合通常被称为“dust”，无论以何种分辨率查看它们，它们都由单个点组成。

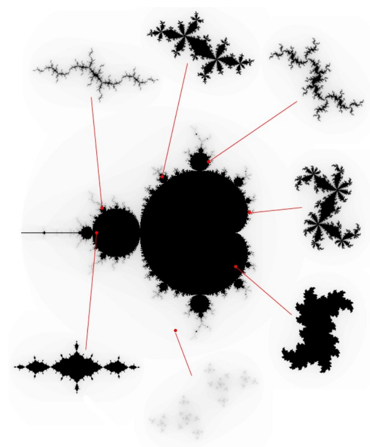


图 5: mandelbrot 与 Julia 连通性可视化

6 结论

Julia 集合波谲云诡的数学形态展现了数学世界的奇妙，作为后人我深深感谢前人的工作和为数学的美所折服。

参考文献

[1] Juan Carlos Ponce Campuzano. complex-analysis. `https://complex-analysis.com/content/julia_set.html`.

[2] David Hilbert. Julia Jewels. `https://www.mcgoodwin.net/julia/juliajewels.htmlmplex-analysis.com/content/julia_set.html`.