实对称矩阵必可在实数域上相似对角化

顾格非
统计学 3210103528

2022 年 6 月 27 日

这是一个来自数分的问题，也是我《数学软件》的作业 1.

1 问题描述

实对称矩阵在实数域上一定能相似对角化吗?

答案是肯定的。下面我们就来证明它吧!

2 证明

我们只要证明存在 n 阶的正交阵 U 使得 U^TAU 为对角阵即可。为此，我们对矩阵的阶作归纳。

若 A 是 1 阶方阵，它已经对角化，令 $U=(1)_{1x1}$ 即得。

设已证明任何一个 $n-1$ 阶实对称阵都存在相应的正交阵 U_1 使得 U_1^TAU 为对角阵. 首先对于任何一个 n 阶实对称阵 A，它有 n 个实特征值 (包括重数)。设 λ_1 为其中一个特征值，ξ 为 A 的属于 λ_1 的一个特征向量且 $|\xi_1|=1$, 用 Schmidt 正交化方法将 ξ_1 扩充为 R^n 中的一组标准正交集 $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$, 则 $A\xi_1,A\xi_2,...,A\xi_n$ 均可以用 $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ 线性表示，不难验证:

$$A(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)=(A\xi_1,A\xi_2,...,A\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & a\\ 0 & A_1\end{pmatrix} \tag{1}$$

令 $U_0=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$，则因为 $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ 为标准正交基知 U_0 为正交阵，故（1）等价与

$$U_0^TAU_0=\begin{pmatrix}\lambda_1 & a\\ 0 & A_1\end{pmatrix} \tag{2}$$

由于（2）等式左端为实对称阵，故其等式右端的矩阵也是实对称的，从而 a 为 $n-1$ 维的零向量，A_1 为 $n-1$ 阶的实对称阵，依归纳假设知，存在

$n-1$ 阶正交阵 U_1 及 $n-1$ 阶对角阵 Λ_1, 使得 $U_1^T A U_1 = \Lambda_1$, 令

$$U = U_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

则 U 为正交阵，且

$$U^T A U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

这说明所要证明的结论对 n 阶实对称阵 A 也成立。由数学归纳法，对所有 n 阶的实对称阵 A，均存在一个 n 阶的正交阵 U 使得 $U^T A U$ 为对角阵，证毕。