

目录

一、 初等概率论	1
1.1 随机变量	1
1.2 数字特征	1
(i) 一些定理	1
(ii) 两个不等式	2
(iii) 特征函数	2
1.3 极限定理	3
(i) 依概率收敛	3
(ii) 依分布收敛	3
(iii) 几乎处处收敛	4
(iv) 均方收敛	5
1.4 条件概率和条件期望	5
二、 随机过程基本概念	7
2.1 随机过程的概念	7
2.2 随机过程的分布刻画	7
2.3 随机过程的数字特征	9
(i) 数字特征	9
(ii) 两个随机过程之间的关系	10
2.4 几类常见的随机过程	10
三、 Poisson 过程	12
3.1 Poisson 流	12
3.2 齐次 Poisson 过程	13
(i) Poisson 过程的数字特征	13
(ii) Poisson 过程的分布规律	14
(iii) Poisson 过程的样本曲线	15
(iv) 到达时刻的分布	15
(v) 等候时间的分布	15
(vi) Poisson 过程的另一种解释	16
(vii) 到达时刻的条件分布	16
3.3 Poisson 过程的合并与分解	17
3.4 复合 Poisson 过程	18
3.5 非齐次 Poisson 过程	19
(i) 基本性质	20
(ii) 时间变换	21

四、 Markov 链	21
4.1 Markov 链及例子	21
4.2 Markov 链的有限维分布	23
4.3 常返性和瞬时性	25
4.4 状态空间分解	28
4.5 极限分布与平稳分布	29
(i) 极限分布	29
(ii) 平稳分布	30
4.6 吸收概率与平均吸收时间	32
4.7 可逆 Markov 链	33
五、 Galton-Watson 分枝过程	35
5.1 模型简介	35
5.2 生成函数	36
5.3 分枝过程的生成函数	37
5.4 生存与灭绝概率	38
六、 平稳随机过程遍历性	38
6.1 时间平均	38
6.2 均值遍历性	40
七、 Brown 运动	42
7.1 Brown 运动及基本性质	42
7.2 与 Brown 运动相关的过程	45
(i) Brown 桥	45
(ii) 反射 Brown 运动	45
(iii) 几何 Brown 运动	46
(iv) 积分过程	46
7.3 最大值与首中时分布	46
7.4 随机积分 (Itô 积分)	48
(i) 有界变差与无界变差	48
(ii) 随机积分	49
(iii) Itô 积分	49
(iv) Itô 公式	50
(v) Itô 过程	50
7.5 Black-Scholes 公式	51

一、初等概率论

1.1 随机变量

定义 1.1.1 设 Ω 是一个非空集合, \mathcal{F} 是 Ω 中的子集类, 如果满足:

- (1) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$;
- (2) (关于取补封闭): 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $\bar{A} \in \mathcal{F}$;
- (3) (关于可列并封闭): 若 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$,

则称 \mathcal{F} 是 Ω 上 σ -代数, 称 (Ω, \mathcal{F}) 为可测空间.

定义 1.1.2 设 $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, 如果满足:

- (1) $P(\Omega) = 1$;
- (2) (可列可加性): 若 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ 且两两互斥, 则 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$,

则称 P 是 (Ω, \mathcal{F}) 上的概率测度, 此时称 (Ω, \mathcal{F}, P) 为概率空间.

例 1.1.1 [古典概率模型]

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}, \quad N < \infty; \quad \mathcal{F} = 2^\Omega.$$

定义概率测度

$$P(A) = \frac{|A|}{N},$$

那么, (Ω, \mathcal{F}, P) 是一个古典概率空间.

例 1.1.2 [几何概率模型] 设 Ω 是 \mathbb{R}^d , $d \geq 1$ 的一个可测区域, $|\Omega| < \infty$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}$. 定义概率测度

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \quad A \in \mathcal{F}.$$

那么, (Ω, \mathcal{F}, P) 是一个几何概率空间.

定义 1.1.3 设 (Ω, \mathcal{F}) 和 (Ω', \mathcal{F}') 是给定的两个可测空间, ξ 是 Ω 到 Ω' 上的映射. 如果对任何 $A \in \mathcal{F}'$, 有 $\xi^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, 则称 ξ 为可测映射. 特别地, 当 $(\Omega', \mathcal{F}') = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ 时, 称 ξ 为随机变量 (可测函数), 这里 \mathcal{B} 是 \mathbb{R} 上 Borel σ -代数.

1.2 数字特征

(i) 一些定理

定理 1.2.1 (单调收敛定理) 设 $\{X_n\}$ 是随机变量序列, 若 X_n 非负且递增收敛于 X , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = E(X).$$

定理 1.2.2 (Fatou 引理) 设 $\{X_n\}$ 是随机变量序列, 若 X_n 非负, 那么

$$E\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n\right) = \liminf_{n \rightarrow \infty} E(X_n).$$

定理 1.2.3 (Lebesgue 控制收敛定理) 设 $\{X_n\}$ 是随机变量序列, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$, 且存在非负随机变量 η , 使得 $E(\eta) < \infty$, 且对所有 n , $|X_n| \leq \eta$, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = E(X).$$

定理 1.2.4 (Fubini 定理) 设对 $a \leq t \leq b$, $X(t)$ 是随机变量, 若 $\int_a^b E|X(t)|dt < \infty$ 或对所有 $a \leq t \leq b$, $X(t)$ 都非负, 则

$$E\left[\int_a^b X(t)dt\right] = \int_a^b E[X(t)]dt.$$

(ii) 两个不等式

定理 1.2.5 (Chebyshev 不等式) 对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

定理 1.2.6 (Markov 不等式) 假设 f 是一个单调非负函数, 那么对 $\forall x > 0$, 有

$$P(X \geq x) \leq \frac{E[f(X)]}{f(x)}.$$

(iii) 特征函数

定义 1.2.1 假设 X 是一个随机变量, 具有分布函数 $F(x)$. 定义

$$\phi(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x), \quad t \in \mathbb{R}.$$

称 $\phi(t)$ 为 X 的特征函数.

任何随机变量的特征函数总是存在的.

命题 1.2.1 特征函数具有下列性质:

- (1) $\phi(0) = 1$;
- (2) $|\phi(t)| \leq 1$;
- (3) $\phi(t)$ 在 \mathbb{R} 上一致连续;
- (4) $\phi(t)$ 是非负定的, 即对任意实数 t_1, \dots, t_m 和复数 z_1, \dots, z_m , $\sum_{i,j=1}^n z_i \bar{z}_j \phi(t_i - t_j) \geq 0$;
- (5) 如果 $E|X|^k < \infty$, 那么 $\phi(t)$ k 次可微, 且在 0 处可进行 Taylor 展开:

$$\phi(t) = 1 + \sum_{m=1}^k \frac{i^m}{m!} \alpha_m t^m + \theta \frac{\beta_k}{(k+1)!} t^{k+1},$$

其中 α_m 为 m -th 半不变累积量, β_k 为 k -th 阶绝对矩, $|\theta| \leq 1$;

- (6) 如果 X, Y 相互独立, 那么 $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$.

定理 1.2.7 (唯一性定理) 随机变量的分布函数和特征函数相互唯一确定. 即随机变量

$$X \stackrel{d}{=} Y \iff \phi_X = \phi_Y.$$

特别地, 如果随机变量 X 的特征函数 $\phi(t)$ 绝对可积, 那么 X 具有密度函数

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi(t) dt.$$

如果随机变量 X 的特征函数 $\phi(t)$ 形如 $\phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{int}$, 并且 $a_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, 那么 X 是离散型随机变量, 具有分布 $P(X = n) = a_n$.

1.3 极限定理

(i) 依概率收敛

定义 1.3.1 假设 (Ω, \mathcal{F}, P) 是概率空间, $X, X_n, n \geq 1$ 是一列随机变量. 如果对任意 $\varepsilon > 0$,

$$P(\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon) \rightarrow 0,$$

则称 X_n 依概率收敛到 X , 记作 $X_n \xrightarrow{P} X$.

命题 1.3.1 依概率收敛具有以下性质:

(1) 若 $X_n \xrightarrow{P} X, X_n \xrightarrow{P} Y$, 那么 $P(X = Y) = 1$.

(2) 若 $X_n \xrightarrow{P} X, X_n - Y_n \xrightarrow{P} 0$, 那么 $Y_n \xrightarrow{P} X$.

(3) 若 $X_n \xrightarrow{P} X, Y_n \xrightarrow{P} Y$, 那么 $X_n \pm Y_n \xrightarrow{P} X \pm Y, X_n Y_n \xrightarrow{P} XY, X_n/Y_n \xrightarrow{P} X/Y$.

(4) 若 $X_n \xrightarrow{P} X, f$ 是连续函数, 那么 $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$.

下面是依概率收敛的三个重要的大数律.

定理 1.3.1 (Bernoulli) 设 $S_n \sim B(n, p), n \geq 1, 0 < p < 1$, 则 $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$.

定理 1.3.2 (Chebyshev) 设 $\xi_n, n \geq 1$ 是一列随机变量, $E(\xi_n^2) < \infty$, 令 $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, 若 $\frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} \rightarrow 0$, 则 $\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{P} 0$.

定理 1.3.3 (Khinchine) 设 $\xi_n, n \geq 1$ 是一列独立同分布随机变量, $E(\xi_1) = \mu$, 令 $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, 则 $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$.

(ii) 依分布收敛

定义 1.3.2 假设 $F(x), F_n(x), n \geq 1$ 是一列分布函数, 如果对每一个 F 的连续点 x , 都有 $F_n(x) \rightarrow F(x)$, 那么称 F_n 弱收敛到 F , 记作 $F_n \xrightarrow{w} F$.

定义 1.3.3 假设随机变量 X, X_n 分别定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P), (\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ 上, $n \geq 1$. 如果相应的分布函数弱收敛, 那么称 X_n 依分布收敛到 X , 记作 $X_n \xrightarrow{d} X$.

依分布收敛最经典的判别法如下定理.

定理 1.3.4 (Lévy 连续性定理) 假设 $X, X_n, n \geq 1$ 是一列随机变量, 特征函数分别为 $\phi_X(t), \phi_n(t)$,

(1) $X_n \xrightarrow{d} X$ 当且仅当相应的特征函数收敛, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) = \phi_X(t), t \in \mathbb{R}.$$

(2) 如果存在一个函数 $\phi(t)$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) = \phi(t), t \in \mathbb{R}.$$

并且 $\phi(t)$ 在 0 点处连续, 那么存在一个随机变量 X 使得 $\phi_X = \phi$, 并且 $X_n \xrightarrow{d} X$.

命题 1.3.2 依分布收敛具有以下性质:

(1) 若 $X_n \xrightarrow{P} X$, 那么 $X_n \xrightarrow{d} X$.

(2) 如果 $X_n \xrightarrow{d} c$, 那么 $X_n \xrightarrow{P} c$.

(3) 如果 $X_n - Y_n \xrightarrow{P} 0$, 并且 $X_n \xrightarrow{d} X$, 那么 $Y_n \xrightarrow{d} X$.

(4) 如果 $X_n \xrightarrow{d} X$, f 是连续函数, 那么 $f(X_n) \xrightarrow{d} f(X)$.

(5) 如果 $X_n \xrightarrow{d} X, Y_n \xrightarrow{P} c$, 那么 $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$.

下面是依分布收敛的两个重要的极限定理.

定理 1.3.5 (De Moivre-Laplace) 假设 $S_n \sim B(n, p), n \geq 1, 0 < p < 1$, 那么

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

定理 1.3.6 (Lévy-Feller) 设 $\xi_n, n \geq 1$ 是一列独立同分布随机变量, $E(\xi_1) = \mu, \text{Var}(\xi_1) = \sigma^2 < \infty$, 那么

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

(iii) 几乎处处收敛

定义 1.3.4 假设 $X, X_n, n \geq 1$ 是定义在概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的一列随机变量, 如果存在 $\Omega_0 \in \mathcal{F}$, 使得 $P(\Omega_0) = 0$, 并且对任意 $\omega \in \Omega \setminus \Omega_0$,

$$X_n(\omega) \rightarrow X(\omega),$$

那么称 X_n 几乎处处收敛到 X , 记作 $X_n \rightarrow X \text{ a.s.}$

命题 1.3.3 几乎处处收敛具有以下性质:

(1) 如果 $X_n \rightarrow X \text{ a.s.}$, 那么 $X_n \xrightarrow{P} X$.

(2) 如果对任意 $\varepsilon > 0, \sum_{n=1}^{\infty} P(\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon) < \infty$, 那么 $X_n \rightarrow X \text{ a.s.}$

下面是几乎处处收敛的两个重要的大数律.

定理 1.3.7 (Borel) 设 $\xi_n, n \geq 1$ 是一列独立同分布于 $B(1, p)$ 的随机变量, 定义 $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, 那么 $\frac{S_n}{n} \rightarrow p$ a.s..

定理 1.3.8 (Kolmogorov) 令 $\xi_n, n \geq 1$ 是一列独立同分布随机变量, $E(\xi_1) = \mu$. 定义 $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, 那么 $\frac{S_n}{n} \rightarrow \mu$ a.s..

(iv) 均方收敛

定义 1.3.5 假设 $X, X_n, n \geq 1$ 是一列定义在概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的随机变量, 具有有限 r 阶矩 ($r > 0$). 如果

$$E|X_n - X|^r \rightarrow 0,$$

则称 X_n r 阶均方收敛到 X , 记作 $X_n \xrightarrow{L^r} X$.

命题 1.3.4 如果 $X_n \xrightarrow{L^r} X$, 那么 $X_n \xrightarrow{P} X$.

1.4 条件概率和条件期望

定义 1.4.1 设 (Ω, \mathcal{F}, P) 是一个概率空间, $A \in \mathcal{F}$, 且 $P(A) > 0$. 当 A 发生时事件 B 发生的条件概率定义为

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

此时 $(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot | A))$ 也是一个概率空间.

条件概率具有乘法公式、链式法则、全概率公式和贝叶斯公式. 这些都是初等概率论的重要内容.

定义 1.4.2 若 X 是 (Ω, \mathcal{F}, P) 上可积的随机变量, 定义 X 在 A 发生时的条件期望为 X 关于条件概率 $P(\cdot | A)$ 的期望, 记为 $E(X | A)$.

注意到 $E(X) = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega)$ 是 X 在 Ω 上的加权平均, 因此

$$E(X | A) = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega | A) = \frac{1}{P(A)} \int_A X(\omega) dP(\omega)$$

是 X 在 A 上的加权平均.

命题 1.4.1 条件期望具有以下性质:

- (1) $E(X 1_A) = E(X | A)P(A)$;
- (2) 若 A_1, A_2, \dots 是 Ω 的划分, 且 $P(A_i) > 0$, 则以下全期望公式成立:

$$E(X) = \sum_i E(X | A_i)P(A_i).$$

例 1.4.1 独立重复地抛一枚硬币直至有 k 次相继出现正面, 计算所抛次数的均值. (设每次出现正面的概率为 p).

解 令 N_k 表示所抛次数, T 表示首次出现反面时所抛的次数, 则

$$E(N_k | T = i) = \begin{cases} i + E(N_k), & i \leq k, \\ k, & i > k. \end{cases}$$

于是由全期望公式

$$E(N_k) = \sum_{i \geq 1} E(N_k | T = i) P(T = i) = \sum_{k=1}^k [i + E(N_k)] p^{i-1} (1-p) + kp^k.$$

$$\text{解得 } E(N_k) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^k}.$$

定义 1.4.3 设 Y 是一取值为 y_1, y_2, \dots 的离散型随机变量, 定义给定 Y 的条件下 X 的条件期望 $E(X | Y)$ 为 Y 的一个函数, 它在 $Y = y$ 时的取值是 $E(X | Y = y)$, 即

$$h(Y) = E(X | Y) = \sum_i E(X | Y = y_i) \mathbf{1}_{\{Y=y_i\}}.$$

它是关于 $\sigma(Y)$ 可测的随机变量.

命题 1.4.2 全期望公式: $E(X) = E[E(X | Y)]$.

例 1.4.2 设 Y_1, Y_2, \dots 独立同分布, 均值为 μ , 方差为 σ^2 . 设 N 是取非负整数值的随机变量, 与 Y_1, Y_2, \dots 独立, 且 $E(N^2) < \infty$. 令 $X = Y_1 + \cdots + Y_N$, 计算 $E(X)$ 和 $\text{Var}(X)$.

解 对非负整数 n , 由于 N 与 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 独立, 所以

$$\begin{aligned} E(X | N = n) &= E(Y_1 + \cdots + Y_N | N = n) \\ &= E(Y_1 + \cdots + Y_n | N = n) = E(Y_1 + \cdots + Y_n) = n\mu. \end{aligned}$$

因此 $E(X | N) = N\mu$, 故 $E(X) = E[E(X | N)] = E(N\mu) = \mu E(N)$.

进一步,

$$\begin{aligned} E(X^2 | N = n) &= E[(Y_1 + \cdots + Y_N)^2 | N = n] \\ &= E[(Y_1 + \cdots + Y_n)^2 | N = n] \\ &= E[(Y_1 + \cdots + Y_n)^2] \\ &= \text{Var}(Y_1 + \cdots + Y_n) + [E(Y_1 + \cdots + Y_n)]^2 = n\sigma^2 + n^2\mu^2. \end{aligned}$$

因此 $E(X^2 | N) = N\sigma^2 + N^2\mu^2$, 故 $E(X^2) = E[E(X^2 | N)] = \sigma^2 E(N) + \mu^2 E(N^2)$. 所以

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sigma^2 E(N) + \mu^2 \text{Var}(N).$$

例 1.4.3 设 $\xi \sim U(0, 1)$, 在 $\xi = x$ 的条件下 X 服从 $B(n, x)$, 求 X 的分布律.

解 (解法一) 对整数 $0 \leq k \leq n$, 由全概率公式

$$P(X = k) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X = k | \xi = x) f(x) dx = \int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} dx = \binom{n}{k} \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

(解法二) 令 $\phi(t) = E(e^{itX})$, 注意到 $E(e^{itX} | \xi = x) = (1 + x(e^{it} - 1))^n$. 于是

$$\phi(t) = E[1 + \xi(e^{it} - 1)]^n = \int_0^1 (1 + x(e^{it} - 1))^n dx = \frac{1}{n+1} (1 + e^{it} + e^{2it} + \cdots + e^{nit}).$$

所以 $P(X = k) = \frac{1}{n+1}, 0 \leq k \leq n$.

二、随机过程基本概念

2.1 随机过程的概念

随机过程是一族随机变量, 用于描述与时间相关的随机现象.

定义 2.1.1 假设 (Ω, \mathcal{F}, P) 是概率空间, (E, \mathcal{E}) 是可测空间, T 是指标集. 如果对任何 $t \in T$, X_t 是 (Ω, \mathcal{F}) 到 (E, \mathcal{E}) 上的可测映射, 则称 $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$ 是 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的以 (E, \mathcal{E}) 为状态空间的随机过程.

随机过程 $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$ 的随机性通过 ω 体现出来, 随机过程用映射来表示就是 $X_t(\omega) : T \times \Omega \rightarrow E$. 固定 t , $X_t(\cdot)$ 是随机变量; 固定 ω , 称 $X(\omega)$ 是 T 的函数, 称为随机过程的样本曲线或样本轨迹.

对过程的一次具体观察结果就是一条样本轨迹.

2.2 随机过程的分布刻画

定义 2.2.1 (1-维分布) 给定 $t \in T$, X_t 是定义在概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 的随机变量. 对每个 E 的子集 A , 定义

$$\nu_t(A) = P(\omega \in \Omega : X_t(\omega) \in A),$$

称 ν_t 为随机过程 \mathbf{X} 在 t 时刻的 1-维分布.

特别地, 对 $E = \mathbb{R}, T = (-\infty, +\infty)$ 的情况, 我们可以给出 X_t 的分布函数

$$F_t(x) = P(X_t \leq x).$$

定义 2.2.2 (k-维分布) 给定 $t_1, \dots, t_k \in T$, $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ 是定义在概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 的 k -维随机向量. 对 E 的子集 A_1, \dots, A_k , 定义

$$\nu_{t_1, \dots, t_k}(A_1, \dots, A_k) = P(\omega \in \Omega : X_{t_1}(\omega) \in A_1, \dots, X_{t_k}(\omega) \in A_k),$$

称 ν_{t_1, \dots, t_k} 为随机过程 \mathbf{X} 在 t_1, \dots, t_k 时刻的 k -维分布.

特别地, 对 $E = \mathbb{R}, T = (-\infty, +\infty)$ 的情况, 我们可以给出 $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ 的联合分布函数

$$F_{t_1, \dots, t_k}(x_1, \dots, x_k) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_k} \leq x_k).$$

命题 2.2.1 随机过程 \mathbf{X} 的有限维分布函数族 $\{F_{t_1, \dots, t_k}(x_1, \dots, x_k), k = 1, 2, \dots, t_i \in T\}$ 满足:

- (1) 横向相容: 对 $(1, 2, \dots, k)$ 的任何置换 τ , $F_{t_{\tau(1)}, \dots, t_{\tau(k)}}(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(k)}) = F_{t_1, \dots, t_k}(x_1, \dots, x_k)$.
- (2) 纵向相容: $\lim_{x_{k+1} \rightarrow \infty} F_{t_1, \dots, t_k, t_{k+1}}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = F_{t_1, \dots, t_k}(x_1, \dots, x_k)$.

例 2.2.1 有 10 把步枪, 其中 2 把已校正, 命中率为 p_1 , 其余 8 把未校正, 命中率为 p_2 , 这里 $p_1 > p_2$. 某人任取一把开始打靶, 令 X_n 为第 n 次命中的次数, 即

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{第 } n \text{ 次命中,} \\ 0, & \text{第 } n \text{ 次未命中.} \end{cases}$$

- (1) 对 $n \neq m$, 求 (X_n, X_m) 的联合分布律和边缘分布律.
- (2) 以 S_n 表示前 n 次命中的次数, 求 S_n 的分布律.
- (3) 若 $p_1 = 1, p_2 = 0$, 写出所有样本函数和 S_n 的分布律, 并说明此时对 $n \neq m$, X_n 和 X_m 独立吗?

解 (1) 令事件 A 表示取到已校正的枪, 由全概率公式得

$$\begin{aligned} p_{11} &= P(X_n = 1, X_m = 1) \\ &= P(X_n = 1, X_m = 1 | A)P(A) + P(X_n = 1, X_m = 1 | \bar{A})P(\bar{A}) \\ &= 0.2p_1^2 + 0.8p_2^2. \end{aligned}$$

同理可求

$$p_{01} = p_{10} = 0.2p_1(1 - p_1) + 0.8p_2(1 - p_2), \quad p_{00} = 0.2(1 - p_1)^2 + 0.8(1 - p_2)^2.$$

进而, 边缘分布

$$P(X_n = 0) = 0.2(1 - p_1) + 0.8(1 - p_2), \quad P(X_n = 1) = 0.2p_1 + 0.8p_2.$$

(2) 同样利用全概率公式

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &= P(S_n = k | A)P(A) + P(S_n = k | \bar{A})P(\bar{A}) \\ &= 0.2C_n^k p_1^k (1 - p_1)^{n-k} + 0.8C_n^k p_2^k (1 - p_2)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

(3) 若 A 发生, 则百发百中; 若 A 不发生, 则永不命中. 因此 $\{X_n\}$ 只有两条样本函数 $(1, 1, 1, \dots)$ 和 $(0, 0, 0, \dots)$; $\{S_n\}$ 只有两条样本函数 $(1, 2, 3, \dots)$ 和 $(0, 0, 0, \dots)$. 于是 S_n 的分布律为

$$P(S_n = 0) = P(\bar{A}) = 0.8, \quad P(S_n = n) = 0.2.$$

而 X_n 与 X_m 不独立, 因为 $P(X_n = 1 | X_m = 1) = 1 \neq 0.2 = P(X_n = 1)$.

例 2.2.2 [简单随机游走] 甲乙两人游戏, 第 i 次甲赢的钱数为 X_i 元. 设 X_1, \dots, X_n, \dots 独立同分布, 满足

$$P(X_i = 1) = p, \quad P(X_i = -1) = q = 1 - p.$$

记前 n 次甲赢的总钱数为 S_n , 计算

- (1) S_n 的分布律;
- (2) $P(S_1 = 1, S_3 = 1, S_8 = 4)$.
- (3) 若 $p = 0.36$, 游戏一直到甲恰好赢 50 次为止, 问游戏需进行 100 次以上的概率约为多少?

解 (1) 以 V_n 记前 n 次甲赢的总次数, 则 $V_n \sim B(n, p)$, 且 $S_n = V_n - (n - V_n) = 2V_n - n$. 所以

$$P(S_n = k) = P\left(V_n = \frac{k+n}{2}\right) = \binom{n}{\frac{k+n}{2}} p^{\frac{k+n}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}, \quad k \text{ 与 } n \text{ 奇偶性相同, 且 } -n \leq k \leq n.$$

(2) 由题意得

$$\begin{aligned} P(S_1 = 1, S_3 = 1, S_8 = 4) &= P(S_1 = 1, S_3 - S_1 = 0, S_8 - S_3 = 3) \\ &= P(S_1 = 1)P(S_3 - S_1 = 0)P(S_8 - S_3 = 3) \\ &= p(2pq)(C_5^4 p^4 q) = 10p^6 q^2. \end{aligned}$$

(3) 以 W_{50} 记甲恰好赢 50 次时游戏进行的次数, 则 $\{W_{50} > 100\} = \{V_{100} < 50\}$. 由中心极限定理, V_{100} 近似服从 $N(100p, 100pq)$. 因此

$$P(W_{50} > 100) = P(V_{100} < 50) = P(V_{100} \leq 49) \approx \Phi\left(\frac{49 - 100p}{10\sqrt{pq}}\right) = \Phi(2.71) = 0.9966.$$

由此可见概率非常大.

一般情况下, 很难写出所有有限维分布. 下面介绍两种特殊情况:

(1) 利用条件概率的链式法则计算 k -维分布

给定 $t_1, \dots, t_k \in T$, 我们有

$$\begin{aligned} \nu_{t_1, \dots, t_k}(A_1, \dots, A_k) &= P(\omega \in \Omega : X_{t_1}(\omega) \in A_1, \dots, X_{t_k}(\omega) \in A_k) \\ &= P(X_{t_1} \in A_1)P(X_{t_2} \in A_2 | X_{t_1} \in A_1) \cdots \\ &\quad \times P(X_{t_k} \in A_k | X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_{k-1}} \in A_{k-1}) \end{aligned}$$

由此, 如果知道随机过程 \mathbf{X} 在各个不同时刻的条件概率, 就可以写出整个过程的分布.

(2) 考虑增量的分布

假设 $T \subseteq (-\infty, +\infty)$, $E = \mathbb{R}$. 给定 $t_1, \dots, t_k \in T$, 不妨设 $t_1 < t_2 < \dots < t_k$, 并考虑增量

$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}},$$

如果知道上述增量的分布, 那么 X_{t_1}, \dots, X_{t_k} 的分布便可以通过线性变换得到. 特别地, 当所有增量互相独立时, 只要知道任意两个时刻的增量的分布, 就可以完全确定整个过程的分布.

综上所述, 为了揭示随机过程的分布规律, 需要知道随机现象如何随时间推移而变化的内在机制.

2.3 随机过程的数字特征

(i) 数字特征

假设 $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$ 是随机过程, $E = \mathbb{R}$.

如果对 $\forall t \in T$, $E|X_t| < \infty$, 记 $\mu_t = E(X_t)$, 称 $\mu_t, t \in T$ 为**均值函数**.

如果对 $\forall t \in T$, $E(X_t^2) < \infty$, 记 $\sigma_t^2 = \text{Var}(X_t)$, 称 $\sigma_t^2, t \in T$ 为**方差函数**, $r(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t)$ 为**协方差函数**, $\rho(s, t) = E(X_s X_t)$ 为**(自)相关函数**.

显然我们有 $r(s, t) = \rho(s, t) - \mu_s \mu_t$.

例 2.3.1 [余弦波过程] 求随机相位余弦波 $X(t) = a \cos(\omega t + \Theta)$, $-\infty < t < +\infty$, $\Theta \sim U(0, 2\pi)$ 的均值函数、方差函数和自相关函数.

解 由定义,

$$\mu_t = E(X_t) = \int_0^{2\pi} a \cos(\omega t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = 0.$$

$$\rho(s, t) = E(X_s X_t) = a^2 \int_0^{2\pi} \cos(\omega s + \theta) \cos(\omega t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = \frac{a^2}{2} \cos \omega(t - s).$$

因此

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(X_t) = E(X_t^2) - [E(X_t)]^2 = \rho(t, t) - \mu_t^2 = \frac{a^2}{2}.$$

(ii) 两个随机过程之间的关系

设 $\mathbf{X} = (X_t, t \in T_1)$ 和 $\mathbf{Y} = (Y_s, s \in T_2)$ 都是概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的随机过程. 如果对 $\forall m, n \geq 1, t_1, \dots, t_m \in T_1$ 和 $s_1, \dots, s_n \in T_2$ 有 $(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})$ 和 $(Y_{s_1}, \dots, Y_{s_n})$ 相互独立, 则称 $\mathbf{X} = (X_t, t \in T_1)$ 和 $\mathbf{Y} = (Y_s, s \in T_2)$ 相互独立.

对两个随机过程 $\mathbf{X} = (X_t, t \in T_1)$ 和 $\mathbf{Y} = (Y_s, s \in T_2)$, 称 $\rho_{XY}(t, s) = E(X_t Y_s)$, $t \in T_1, s \in T_2$ 为 \mathbf{X} 和 \mathbf{Y} 的互相关函数, $r_{XY}(t, s) = \text{Cov}(X_t, Y_s) = \rho_{XY}(t, s) - \mu_X(t)\mu_Y(s)$, $t \in T_1, s \in T_2$ 为 \mathbf{X} 和 \mathbf{Y} 的互协方差函数.

如果对 $\forall t \in T_1, s \in T_2$, 恒有 $r_{XY}(t, s) = 0$, 则称随机过程 \mathbf{X} 和 \mathbf{Y} 是不相关的.

2.4 几类常见的随机过程

定义 2.4.1 (弱平稳过程) 假设 $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$ 是实值随机过程, T 为实数集, 并且对 $\forall t \in T$, 二阶矩 $E(X_t^2) < \infty$. 如果

(1) 均值函数为常数, 即 $\mu_t = \mu$,

(2) 相关函数 $\rho(s, t)$ 仅依赖于时间间隔长度 $t - s$, 而与时刻 s 和 t 无关,

则称 $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$ 是弱平稳过程.

定义 2.4.2 (强平稳过程) 假设 $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$ 是状态空间为 E 的随机过程. 如果对 $\forall t, t_1, \dots, t_k \in T$, 随机向量 $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})$ 和 $(X_{t_1+t}, X_{t_2+t}, \dots, X_{t_k+t})$ 具有相同分布, 即

$$\nu_{t_1, \dots, t_k} = \nu_{t_1+t, \dots, t_k+t},$$

则称 $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$ 为强平稳过程.

一般情况下, 强平稳过程并不一定是弱平稳过程, 需要二阶矩存在的条件.

例 2.4.1 设 $X(t) = A \cos t + B \sin t$, $t \in \mathbb{R}$, A 与 B 独立, 满足 $E(A) = E(B) = 0$, $\text{Var}(A) = \text{Var}(B) = 1$.

(1) 计算均值函数和自相关函数, 问 $\{X(t)\}$ 是弱平稳过程吗?

(2) 若 $P(A = \pm 1) = P(B = \pm 1) = 0.5$, 求 $X(0)$ 和 $X\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 的分布律, 问 $\{X(t)\}$ 是强平稳过程吗?

(3) 若 A, B 均服从 $N(0, 1)$, 求 $X(0)$, $X\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 和 $X(0) + X\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 的分布, 问 $\{X(t)\}$ 是强平稳过程吗?

解 (1) 由定义

$$\mu_X(t) = E[A \cos t + B \sin t] = E(A) \cos t + E(B) \sin t = 0$$

为常数, 而

$$\rho_X(t_1, t_2) = E[(A \cos t_1 + B \sin t_1)(A \cos t_2 + B \sin t_2)] = \cos(t_2 - t_1)$$

只与 $t_2 - t_1$ 有关, 因此 $\{X(t)\}$ 是弱平稳过程.

(2) 注意到 $X(0) = A$, $X\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(A+B)$. 因此 $X(0)$ 的分布律为

$$P(X(0) = \pm 1) = P(A = \pm 1) = 0.5.$$

$X\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 的分布律为

$$P\left(X\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\right) = P(A=1, B=1) = \frac{1}{4}, \quad P\left(X\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\right) = P(A=-1, B=-1) = \frac{1}{4},$$

$$P\left(X\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0\right) = P(A=1, B=-1) + P(A=-1, B=1) = \frac{1}{2}.$$

同样由 (1) 知 $\{X(t)\}$ 是弱平稳过程但不是强平稳过程.

(3) 由正态分布的线性变换不变性可知, $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ 服从 n 维正态分布, 所以 $\{X(t)\}$ 是正态过程, 因此 $\{X(t)\}$ 是弱平稳过程也是强平稳过程. 下面进行计算

$$X(0) = A \sim N(0, 1), \quad X\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(A+B) \sim N(0, 1), \quad X(0) + X\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{2}A + \frac{\sqrt{2}}{2}B \sim N(0, 2+\sqrt{2}).$$

定义 2.4.3 (增量平稳过程) 假设 $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$ 是实值随机过程, T 是实数集. 如果对 $\forall s < t$, $X_t - X_s$ 的分布仅与时间间隔长度 $t-s$ 有关, 而与 s 和 t 无关, 那么称 $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$ 是增量平稳过程.

定义 2.4.4 (增量独立过程) 假设 $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$ 是实值随机过程, T 为实数集. 如果对 $\forall t_1 < t_2 < \dots < t_k$, 随机变量

$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}.$$

相互独立, 那么称 $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$ 是增量独立过程.

命题 2.4.1 设 $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$ 是增量独立过程, $X_0 = 0$, 则

(1) 有限维分布由所有增量 $X_t - X_s$ 分布确定;

(2) $\text{Cov}(X_t, X_s) = \text{Var}(X_{\min\{s, t\}})$.

例 2.4.2 设 X_1, \dots, X_n, \dots 独立同分布, $S_0 = 0$. 对 $n \geq 1$, 定义 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

(1) 证明: $\{S_n : n = 0, 1, \dots\}$ 是平稳独立增量过程.

(2) 若 $E(X_1) = \mu$, $\text{Var}(X_1) = \sigma^2$. 计算 $\{S_n\}$ 的均值函数和自相关函数.

解 (1) 证明: 对任意 $n > m > 0$, $S_n - S_m = \sum_{i=m+1}^n X_i$, 因为 X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布, 因此

$$(X_{m+1}, X_{m+2}, \dots, X_n) \stackrel{d}{=} (X_1, X_2, \dots, X_{n-m}).$$

所以 $S_n - S_m$ 与 S_{n-m} 同分布, 即 $\{S_n\}$ 是增量平稳过程.

另一方面, 对任意 $n \geq 3$, $0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_n$, 由于 X_1, X_2, \dots, X_{m_n} 独立, 所以

$$\sum_{i=m_1+1}^{m_2} X_i, \sum_{i=m_2+1}^{m_3} X_i, \dots, \sum_{i=m_{n-1}+1}^{m_n} X_i$$

独立, 这说明 $S_{m_2} - S_{m_1}, \dots, S_{m_n} - S_{m_{n-1}}$ 独立, 因此 $\{S_n\}$ 是增量独立过程. 综上所述, $\{S_n\}$ 是平稳独立增量过程.

(2) 由定义

$$\mu_S(n) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n\mu.$$

对 $0 \leq m \leq n$,

$$\text{Cov}(S_m, S_n) = \text{Cov}(S_m, S_m) + \text{Cov}(S_m, S_n - S_m) = \text{Var}(S_m) = m\sigma^2.$$

于是

$$E(S_m S_n) = \text{Cov}(S_m S_n) + E(S_m)E(S_n) = m\sigma^2 + mn\mu^2.$$

因此对 $m \geq 0, n \geq 0$, 有 $\rho_S(m, n) = mn\mu^2 + \min(m, n)\sigma^2$.

定义 2.4.5 (正态过程) 假设 $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$ 是实值随机过程, T 为实数集. 如果任意 k -维分布都是联合正态分布, 则称 $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$ 为正态过程.

命题 2.4.2 如果 $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$ 是弱平稳正态过程, 那么它一定是强平稳正态过程.

由定义知, $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$ 是正态过程当且仅当它对任意有限线性组合是正态随机变量.

定义 2.4.6 (白噪声) 假设 $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$ 是状态空间为 E 的随机过程, 如果 X_s 和 X_t 互不相关, 则称 $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$ 为白噪声.

例 2.4.3 设 $\mathbf{X} = (X_t, t \geq 0)$ 是正态过程, $\mu_X(t) = t, r_X(s, t) = st + 1$, 求 $X_1, X_2, X_1 + X_2$ 的分布.

解 计算方差

$$\sigma_X^2(t) = r_X(t, t) = t^2 + 1.$$

因此 $X_t \sim N(t, t^2 + 1)$. 即 $X_1 \sim N(1, 2), X_2 \sim N(2, 5)$.

又因为 $X_1 + X_2$ 服从正态分布, 而

$$E(X_1 + X_2) = 1 + 2 = 3, \quad \text{Var}(X_1 + X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + 2r_X(1, 2) = 13.$$

所以 $X_1 + X_2 \sim N(3, 13)$.

三、Poisson 过程

3.1 Poisson 流

Poisson 流用于描述随机服务系统, 令 $N(0) = 0$, 当 $t > 0$ 时, $N(t)$ 表示 $(0, t]$ 时间内某服务系统接受顾客服务的次数. 因此 $\mathbf{N} = (N(t), t \geq 0)$ 是连续时间、取非负整数值的随机过程, 亦称作计数过程, 其具有下列属性:

(1) 平稳性——前往某服务设施寻求服务的顾客流是平稳的

$$N(t) - N(s) \stackrel{d}{=} N(t - s), \quad s < t.$$

(2) 独立性——各个顾客在某时刻是否前往某服务设施寻求服务相互独立

$$N(t) - N(s) \text{ 与 } N(s) \text{ 独立.}$$

(3) 稀有性——短时间内, 最多只有一名顾客寻求服务

$$P(N(t + \Delta t) - N(t) = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t),$$

$$P(N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t).$$

其中, 参数 λ 称为 Poisson 流的强度, 它的大小表示该服务系统的繁忙程度.

令 $N(0) = 0$, 当 $t > 0$ 时, $N(t)$ 表示强度为 λ 的 Poisson 流在 $(0, t]$ 时间内的顾客数. 那么 $N(t)$ 服从参数为 λt 的 Poisson 分布:

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

3.2 齐次 Poisson 过程

定义 3.2.1 假设 $N = (N(t), t \geq 0)$ 是非负整数值随机过程, 并且具有下列性质:

(1) 初始值为 0: $P(N(0) = 0) = 1$.

(2) 平稳性: 假设 $s < t$, $N(t) - N(s)$ 与 $N(t - s)$ 具有相同分布:

$$N(t) - N(s) \stackrel{d}{=} N(t - s), \quad s < t.$$

(3) 独立性: 假设 $s < t$, $N(t) - N(s)$ 与 $N(t - s)$ 相互独立.

(4) Poisson 分布:

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

则称 $N = (N(t), t \geq 0)$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程.

(i) Poisson 过程的数字特征

(1) 均值函数

$$\mu_t = E[N(t)] = \lambda t.$$

于是 $\lambda = E[N(1)] = \frac{E[N(t)]}{t}$ 表示单位时间内顾客寻求服务的个数, 同时是平均强度.

(2) 方差函数

$$\text{Var}(N(t)) = \lambda t.$$

(3) 相关函数

假设 $s < t$, 则

$$\begin{aligned} E[N(s)N(t)] &= E[N(s)(N(t) - N(s) + N(s))] \\ &= E[N(s)(N(t) - N(s))] + E[N^2(s)] \\ &= E[N(s)]E[N(t) - N(s)] + E[N^2(s)] \\ &= E[N(s)]E[N(t - s)] + E[N^2(s)] \\ &= \lambda^2 st + \lambda s. \end{aligned}$$

因此 $E[N(s)N(t)] = \lambda^2 st + \lambda \min(s, t)$.

(4) 协方差函数

假设 $s < t$, 利用 (1) 和 (3) 的结论可得

$$\text{Cov}(N(s), N(t)) = E[N(s)N(t)] - E[N(s)]E[N(t)] = \lambda s.$$

因此 $\text{Cov}(N(s), N(t)) = \lambda \min(s, t)$.

(ii) Poisson 过程的分布规律

(1) 1-维分布

$$N(0) = 0, \quad N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t), \quad t > 0.$$

(2) k -维分布

假设 $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$, 则

$$\begin{aligned} & P(N(t_1) = m_1, N(t_2) = m_2, \dots, N(t_k) = m_k) \\ &= P(N(t_1) = m_1, N(t_2) - N(t_1) = m_2 - m_1, \dots, N(t_k) - N(t_{k-1}) = m_k - m_{k-1}) \\ &= P(N(t_1) = m_1)P(N(t_2) - N(t_1) = m_2 - m_1) \cdots P(N(t_k) - N(t_{k-1}) = m_k - m_{k-1}) \\ &= \frac{(\lambda t_1)^{m_1} e^{-\lambda t_1}}{m_1!} \cdots \frac{(\lambda(t_k - t_{k-1}))^{m_k - m_{k-1}} e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})}}{(m_k - m_{k-1})!}. \end{aligned}$$

(3) 条件分布

对 $s < t$, $m \leq n$, 有

$$\begin{aligned} P(N(t) = n \mid N(s) = m) &= e^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^{n-m}}{(n-m)!}, \\ P(N(s) = m \mid N(t) = n) &= \binom{n}{m} \left(\frac{s}{t}\right)^m \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m}. \end{aligned}$$

也就是说, 在 $N(t) = n$ 的条件下, $N(s) \mid N(t)=n \sim B\left(n, \frac{s}{t}\right)$.

例 3.2.1 顾客依 Poisson 过程到达某商店, 速率为 4 人/小时. 已知商店上午 9:00 开门.

(1) 求到 9:30 时仅到 1 位顾客, 而到 11:30 时已到 5 位顾客的概率.

(2) 求第 2 位顾客在 10 点前到达的概率.

(3) 求第 1 位顾客在 9:30 前到达且第 2 位顾客在 10:00 前到达的概率.

解 以上午 9:00 作为 0 时刻, 以 1 小时作为单位时间. 设 $N(t)$ 表示 $(0, t]$ 内来的顾客数, 则 $\mathbf{N} = \{N(t), t > 0\}$ 是 $\lambda = 4$ 的 Poisson 过程.

(1) 由题意

$$\begin{aligned} P(N(0.5) = 1, N(2.5) = 5) &= P(N(0.5) = 1, N(2.5) - N(0.5) = 4) \\ &= P(N(0.5) = 1)P(N(2.5) - N(0.5) = 4) \\ &= P(N(0.5) = 1)P(N(2) = 4) \\ &= \frac{2^1}{1!} e^{-2} \cdot \frac{8^4}{4!} e^{-8} = 0.0155. \end{aligned}$$

(2) 令 S_n 表示第 n 个顾客到达的时刻, 则

$$P(S_2 \leq 1) = P(N(1) \geq 2) = 1 - e^{-4} - 4e^{-4} = 1 - 5e^{-4}.$$

(3) 类似地,

$$\begin{aligned}
 P(S_1 \leq 0.5, S_2 \leq 1) &= P(N(0.5) \geq 1, N(1) \geq 2) \\
 &= P(N(0.5) = 1, N(1) - N(0.5) \geq 1) + P(N(0.5) \geq 2) \\
 &= P(N(0.5) = 1)P(N(0.5) \geq 1) + P(N(0.5) \geq 2) \\
 &= 2e^{-2}(1 - e^{-2}) + 1 - e^{-2} - 2e^{-2} = 1 - e^{-2} - 2e^{-4}.
 \end{aligned}$$

(iii) Poisson 过程的样本曲线

根据定义, $N = (N(t), t \geq 0)$ 是连续时间、取非负整数值的随机过程, 因此样本曲线一定是阶梯型曲线.

由于 $N(0) = 0$, 所以在第一个顾客到达之前, $N(t) = 0$. 令 S_1 表示第一个顾客到达时刻, 则有 $N(t) = 0, t < S_1$; $N(S_1) = 1$. 一般地, 令 S_n 表示第 n 个顾客到达时刻, 那么有

$$N(t) = n - 1, S_{n-1} \leq t < S_n; \quad N(S_n) = n.$$

这样, $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ 是 Poisson 过程的跳跃点, 跳跃高度为 1.

记 $S_0 = 0$, 于是实直线上点列 $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$, 可以看作是 Poisson 流, 从而

$$N(t) = \#\{n \geq 1; S_n \leq t\} = \max_n \{n \geq 1; S_n \leq t\}.$$

(iv) 到达时刻的分布

由于 $S_n > t \Leftrightarrow N(t) \leq n - 1, t \geq 0$, 所以

$$P(S_n > t) = P(N(t) \leq n - 1) = \sum_{k=0}^{n-1} P(N(t) = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad t \geq 0,$$

求导得, $S_n \sim \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$, 即 $S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$.

(v) 等候时间的分布

令 $X_0 = 0, X_1 = S_1 - S_0, \dots, X_n = S_n - S_{n-1}$, 于是 $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$. 假设 $X_{n-1} \sim \text{Exp}(\lambda)$, 则

$$\begin{aligned}
 P(X_n > t) &= P(S_n - S_{n-1} > t) \\
 &= \int_0^\infty P(S_n - S_{n-1} > t | S_{n-1} = s) P(S_{n-1} = s) ds \\
 &= \int_0^\infty P(N(t+s) - N(s) = 0) P(S_{n-1} = s) ds \\
 &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \lambda e^{-\lambda s} ds = e^{-\lambda t}.
 \end{aligned}$$

所以, $X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$, 亦有结论 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立.

(vi) Poisson 过程的另一种解释

假设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 是一列独立同分布的指数随机变量, 令 $S_0 = 0, S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

定义

$$N(0) = 0, N(t) = \max_n \{n \geq 1, S_n \leq t < S_{n+1}\}, \quad t > 0.$$

于是 $\mathbf{N} = (N(t), t \geq 0)$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程.

定理 3.2.1 $\mathbf{N} = (N(t), t \geq 0)$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程当且仅当其时间间隔 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 独立同分布于参数为 λ 的指数分布.

(vii) 到达时刻的条件分布

定理 3.2.2 假设 $\mathbf{N} = (N(t), t \geq 0)$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程, 令 S_1, S_2, \dots 为顾客依次到达时刻. 给定 $t > 0$, 那么

$$(S_1, S_2, \dots, S_n | N(t) = n) \stackrel{d}{=} (U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)}),$$

其中 $U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)}$ 为 $(0, t)$ 上 n 个独立同分布均匀随机变量 U_1, U_2, \dots, U_n 的次序统计量.

推论 3.2.1 假设 $\mathbf{N} = (N(t), t \geq 0)$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程. 对 $t > s \geq 0$, 令 W_1, W_2, \dots 分别为 $(s, t]$ 内发生的第 1 个事件, 第 2 个事件, \dots 的到达时刻. 任意给定正整数 n , 则

$$(W_1, W_2, \dots, W_n | N(t) - N(s) = n) \stackrel{d}{=} (U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)}),$$

其中 $U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)}$ 为 (s, t) 上 n 个独立同分布均匀随机变量 U_1, U_2, \dots, U_n 的次序统计量.

例 3.2.2 保险理赔按速率 λ 的 Poisson 过程 $\{N(t)\}$ 到达. 设各人理赔金额独立同分布 (且独立于此 Poisson 过程), 具有均值为 μ 的分布 G . 以 S_i 和 C_i 分别表示第 i 次理赔的时间和金额. 采用贴现算法, 即 t 时刻的 1 元相当于 0 时刻的 $e^{-\alpha t}$ 元, 则到 t 时刻为止总理赔的贴现价值为

$$D(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} e^{-\alpha S_i} C_i,$$

计算 $E(D(t))$.

解 由到达时刻的条件分布知,

$$(S_1, S_2, \dots, S_n | N(t) = n) \stackrel{d}{=} (U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)}),$$

其中 $U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)}$ 为 $(0, t)$ 上 n 个独立同分布均匀随机变量 U_1, U_2, \dots, U_n 的次序统计量. 因此

$$E[D(t) | N(t) = n] = E\left[\sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha U_{(i)}}\right] = \sum_{i=1}^n E(C_i) E(e^{-\alpha U_{(i)}}) = n\mu E\left[\sum_{i=1}^n e^{-\alpha U_i}\right] = n\mu \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha t}.$$

所以

$$E[D(t)] = E[E(D(t) | N(t))] = \frac{\lambda\mu}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}).$$

3.3 Poisson 过程的合并与分解

定理 3.3.1 (Poisson 过程的合并) 假设 $N_1 = (N_1(t), t \geq 0)$ 和 $N_2 = (N_2(t), t \geq 0)$ 是两个独立 Poisson 过程, 参数分别为 λ_1 和 λ_2 . 令 $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$, 那么 $N = (N(t), t \geq 0)$ 是 Poisson 过程, 参数为 $\lambda_1 + \lambda_2$.

上述结论对任意有限个 Poisson 过程也成立.

例 3.3.1 某银行有两个窗口可以接受服务. 上午九点钟小王到达这个银行, 此时两个窗口分别有一个顾客在接受服务, 另外有 2 个顾客排在小王的前面等待接受服务, 一会儿又来了很多顾客. 假设服务的规则是先来先服务, 也就是说一旦有一个窗口顾客接受完服务, 那么排在队伍中的第一个顾客就马上在此窗口接受服务. 假设各个顾客接受服务的时间独立同分布, 而且服从均值为 20 分钟的指数分布. 问: 小王在十点钟之前能够接受服务的概率?

解 以上午九点钟为 0 时刻, 以 1 小时作为单位时间. 对 $i = 1, 2$, 令 $N_i(t)$ 表示 $(0, t]$ 内第 i 个窗口完成服务的顾客数, 则 $\{N_i(t); t \geq 0\}$ 是强度为 3 的 Poisson 过程, 且 $\{N_1(t)\}$ 和 $\{N_2(t)\}$ 相互独立.

令 $N(t)$ 表示 $(0, t]$ 内这两个窗口完成服务的顾客总数, 则由 Poisson 过程的合并可知 $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$, 且 $\{N(t)\}$ 是强度为 6 的 Poisson 过程. 以 S_i 表示第 i 个顾客服务完成的时刻, 则所求概率为

$$P(S_3 \leq 1) = P(N(1) \geq 3) = 1 - e^{-6} - 6e^{-6} - 18e^{-6} = 0.938.$$

定理 3.3.2 (Poisson 过程的分解) 假设寻求某种服务的顾客分为两类, 来自类型 I 的可能性为 p , 来自类型 II 的可能性为 $1 - p$. 令 $t > 0$, 用 $N(t)$ 表示 $(0, t]$ 内寻求服务的顾客总数, $N_1(t)$ 表示 $(0, t]$ 内寻求服务的 I 型顾客个数, $N_2(t)$ 表示 $(0, t]$ 内寻求服务的 II 型顾客个数. 假设 $N = (N(t), t \geq 0)$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程, 那么 $N_1 = (N_1(t), t \geq 0)$ 和 $N_2 = (N_2(t), t \geq 0)$ 分别是参数为 λp 和 $\lambda(1 - p)$ 的 Poisson 过程, 且二者相互独立.

上述结论对多个类型服务也成立.

例 3.3.2 设 $N(t)$ 表示手机在 $(0, t]$ 天内收到的短信数. 假设 $\{N(t); t \geq 0\}$ 是强度为 10 条的 Poisson 过程, 其中每条短信独立地以概率 0.2 是垃圾短信. 求:

- (1) 一天内没有收到垃圾短信的概率;
- (2) 第一天内收到 3 条有用短信, 1 条垃圾短信, 第二天没有收到垃圾短信的概率.

解 以 $X(t)$, $Y(t)$ 分别表示手机在 $(0, t]$ 天内收到的垃圾短信数和有用短信数, 则 $\{X(t); t \geq 0\}$ 和 $\{Y(t); t \geq 0\}$ 分别是强度为 2 和 8 的 Poisson 过程, 且相互独立.

$$(1) P(X(1) = 0) = e^{-2} = 0.135.$$

(2)

$$\begin{aligned} & P(Y(1) = 3, X(1) = 1, X(2) - X(1) = 0) \\ &= P(Y(1) = 3)P(X(1) = 1, X(2) - X(1) = 0) \\ &= P(Y(1) = 3)P(X(1) = 1)P(X(2) - X(1) = 0) \\ &= \frac{8^3}{3!}e^{-8} \cdot 2e^{-2} \cdot e^{-2} = \frac{512}{3}e^{-12}. \end{aligned}$$

3.4 复合 Poisson 过程

定义 3.4.1 假设 $N = (N(t), t \geq 0)$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ 是一列随机变量. 令

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i,$$

于是, $Z = (Z(t), t \geq 0)$ 是连续时间参数、取实值的随机过程. 一般情况下, $Z = (Z(t), t \geq 0)$ 不再是 Poisson 过程, 称 $Z = (Z(t), t \geq 0)$ 为复合 Poisson 过程.

定理 3.4.1 在如上定义的基础上, 进一步假设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ 是一列独立同分布随机变量, 均值为 μ , 方差为 σ^2 , 并且与 $N = (N(t), t \geq 0)$ 独立, 则

$$(1) EZ(t) = \mu\lambda t, \text{Var}(Z(t)) = (\mu^2 + \sigma^2)\lambda t;$$

$$(2) Z = (Z(t), t \geq 0) \text{ 增量独立且增量平稳.}$$

例 3.4.1 某零件在运行中会受到撞击. 记在 $(0, t]$ 内受到的撞击次数为 $N(t)$, 设 $\{N(t)\}$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程. 各次撞击带来的磨损量分别为 ξ_1, ξ_2, \dots , 假设它们独立同服从参数为 β 的指数分布, 且与 $\{N(t)\}$ 独立. 如果磨损量大于 $\alpha > 0$, 那么更换零件. 计算零件的平均寿命.

解 (解法一) 令 η 为此零件的寿命, $Z(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} \xi_k$, 则

$$\eta = \inf\{t > 0 : Z(t) > \alpha\}.$$

于是 $E(\eta) = \int_0^\infty P(\eta > t)dt = \int_0^\infty P(Z(t) \leq \alpha)dt$. 而由全概率公式

$$P(Z(t) \leq \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Z(t) \leq \alpha | N(t) = n)P(N(t) = n) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{k=1}^n \xi_k \leq \alpha\right)P(N(t) = n).$$

令 $M(t) = \sup\left\{n \geq 0 : \sum_{k=1}^n \xi_k \leq t\right\}$, 则 $\{M(t)\}$ 是参数为 β 的 Poisson 过程. 因此

$$P\left(\sum_{k=1}^n \xi_k \leq \alpha\right) = P(M(\alpha) \geq n).$$

综合上述, 我们有

$$E(\eta) = \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} P(M(\alpha) \geq n) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} P(M(\alpha) \geq n) dt.$$

注意到

$$\int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}, \quad E(M(\alpha)) = \sum_{n=0}^{\infty} P(M(\alpha) > n),$$

$$\text{所以 } E(\eta) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} P(M(\alpha) \geq n) = \frac{1 + E(M(\alpha))}{\lambda} = \frac{1 + \alpha\beta}{\lambda}.$$

(解法二) 令 $S_0 = 0$, S_n 为第 n 次撞击发生的时刻, $T_n = S_n - S_{n-1}$, $n \geq 1$. 令 X 为磨损量首次大于 α 时受到的撞击数目, η 为此零件的寿命, 于是

$$\eta = S_X, \quad X = \min\{n \geq 1 : \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n > \alpha\}.$$

由于 $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ 与 $\{N(t), t \geq 0\}$ 独立, 所以

$$E(S_X | X = n) = E\left(\sum_{i=1}^n T_i | X = n\right) = E\left(\sum_{i=1}^n T_i\right) = \frac{n}{\lambda}.$$

于是 $E(S_X) = E[E(S_X | X)] = \frac{1}{\lambda} E(X)$. 同样地, 令 $M(t) = \sup \left\{ n \geq 0 : \sum_{k=1}^n \xi_k \leq t \right\}$, 则 $\{M(t)\}$ 是参数为 β 的 Poisson 过程. 而 X 是此过程中时刻 α 后首次发生的事件, 因此 $X = M(\alpha) + 1$. 所以

$$E(\eta) = \frac{E(X)}{\lambda} = \frac{1 + E(M(\alpha))}{\lambda} = \frac{1 + \alpha\beta}{\lambda}.$$

(解法三) 令 η 为此零件的寿命, 记 $f(\alpha) = E(\eta)$. 令 $S_0 = 0$, S_n 为第 n 次撞击时刻, $T_n = S_n - S_{n-1}$, $n \geq 1$.

(1) 如果 $\alpha = 0$, 则 $\eta = S_1 = T_1$, 所以 $f(0) = E(\eta) = \frac{1}{\lambda}$.

(2) 设 $\alpha > 0$, 则零件至少可经过 1 次撞击, 之后的撞击时间间隔 T_2, T_3, \dots i.i.d. $\sim \text{Exp}(\lambda)$ 且与 T_1 独立. 因此之后形成的计数过程 $\{N_1(t); t \geq 0\}$ 仍是参数为 λ 的 Poisson 过程且与 T_1 独立. 其中 $N_1(t) = N(T_1 + t) - N(T_1)$.

第 1 次撞击的磨损量 $\xi_1 \sim \text{Exp}(\beta)$, 且 $\{\xi_1, T_1\}$ 与 $\{\xi_n, N_1(t); n \geq 1, t \geq 0\}$ 独立.

如果 $\xi_1 = x > \alpha$, 则 $\eta = T_1$, 所以 $E(\eta | \xi_1 = x) = E(T_1) = \frac{1}{\lambda}$.

如果 $\xi_1 = x \leq \alpha$, 则还需磨损量大于 $\alpha - x$, 所以

$$E(\eta | \xi_1 = x) = E(T_1) + f(\alpha - x) = \frac{1}{\lambda} + f(\alpha - x).$$

由全期望公式:

$$f(\alpha) = E(\eta) = \int_0^\infty E(\eta | \xi_1 = x) f_{\xi_1}(x) dx = \frac{1}{\lambda} + \beta e^{-\alpha\beta} \int_0^\alpha e^{\beta u} f(u) du.$$

从而可求得 $f(\alpha) = \frac{1 + \alpha\beta}{\lambda}$.

3.5 非齐次 Poisson 过程

令 $t > 0$, $N(t)$ 表示 $(0, t]$ 内顾客寻求服务的个数. 假设

- (1) 初始条件: $N(0) = 0, N(t) \geq 0$;
- (2) 独立性: 假设 $s < t$, 则 $N(t) - N(s)$ 与 $N(s)$ 独立;
- (3) 稀有性: 存在一个非负函数 $\lambda(t)$ 使得

$$P(N(t + \Delta t) - N(t) = 1) = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P(N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t).$$

其中参数 $\lambda(t)$ 被称为 Poisson 流的强度函数, 它的大小表示该服务系统的繁忙程度.

定义 3.5.1 在上述假设下, $N(t)$ 服从参数为 $m(t) = \int_0^t \lambda(u) du$ 的 Poisson 分布. 特别地, 对 $\forall s < t$, 有

$$P(N(t) - N(s) = k) = \frac{[m(t) - m(s)]^k}{k!} e^{-[m(t) - m(s)]}, \quad \forall k \geq 0,$$

称 $N = (N(t), t \geq 0)$ 是强度为 $\lambda(\cdot)$ 的非齐次 Poisson 过程.

(i) 基本性质

(1) $EN(t) = m(t)$, $\text{Var}N(t) = m(t)$.

(2) 假设 $s < t$, 由增量独立与增量平稳的性质, 得

$$\begin{aligned} EN(s)N(t) &= E[N(s)(N(t) - N(s) + N(s))] \\ &= EN(s)E(N(t) - N(s)) + EN(s)^2 \\ &= m(s)m(t-s) + m(s) + [m(s)]^2 \end{aligned}$$

(3) 顾客到达时刻与等待时间的分布

给定 $t > 0$, 由于 $S_1 > t \Leftrightarrow N(t) = 0$, 所以

$$P(S_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-m(t)},$$

即 $S_1 \sim \lambda(t)e^{-m(t)}$, 所以 S_1 不再服从指数分布.

类似地, 可以证明 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 不再独立同分布, 更不服从指数分布.

例 3.5.1 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为 $\lambda(t) = t^2$ 的非齐次 Poisson 过程. 计算

(1) $E(N(2))$.

(2) $P(N(1) = 1, N(2) = 2)$.

(3) $P(N(2) = 2 \mid N(1) = 1)$.

(4) $P(N(1) = 1 \mid N(2) = 2)$.

解 (1) $E(N(2)) = \int_0^2 \lambda(t)dt = \int_0^2 t^2 dt = \frac{8}{3}$.

(2) 计算得 $m(1) = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$, $m(2) = \int_0^2 t^2 dt = \frac{8}{3}$, 因此

$$P(N(1) = 1, N(2) = 2) = P(N(1) = 1)P(N(2) - N(1) = 1) = \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{7}{3}e^{-\frac{7}{3}} = \frac{7}{9}e^{-\frac{8}{3}}.$$

(3) $P(N(2) = 2 \mid N(1) = 1) = P(N(2) - N(1) = 1) = \frac{7}{3}e^{-\frac{7}{3}}.$

(4) $P(N(1) = 1 \mid N(2) = 2) = \frac{P(N(1) = 1, N(2) = 2)}{P(N(2) = 2)} = \frac{\frac{7}{9}e^{-\frac{8}{3}}}{(\frac{8}{3})^2 e^{-\frac{8}{3}} / 2} = \frac{7}{32}.$

下面定理给出了非齐次 Poisson 过程到达时刻的条件分布.

定理 3.5.1 令 $t > 0, n \geq 1$. 假设 V_1, V_2, \dots, V_n 独立同分布, 密度函数为 $\frac{\lambda(u)}{m(t)}, 0 \leq u \leq t$. 那么

$$(S_1, S_2, \dots, S_n \mid N(t) = n) \stackrel{d}{=} (V_{(1)}, V_{(2)}, \dots, V_{(n)}),$$

其中 $V_{(1)}, V_{(2)}, \dots, V_{(n)}$ 是 V_1, V_2, \dots, V_n 的次序统计量.

下面定理给出了非齐次 Poisson 过程的合并与分解.

定理 3.5.2 (非齐次 Poisson 过程的合成) 设 $\{N_1(t)\}$ 和 $\{N_2(t)\}$ 分别是强度为 $\lambda_1(t)$ 和 $\lambda_2(t)$ 的 Poisson 过程, 且相互独立, 则 $\{N_1(t) + N_2(t)\}$ 是强度为 $\lambda_1(t) + \lambda_2(t)$ 的 Poisson 过程.

定理 3.5.3 (非齐次 Poisson 过程的分解) 设 $\{N(t)\}$ 是强度为 $\lambda(t)$ 的 Poisson 过程, 在 t 时刻发生的事件独立地 (也独立于过程 $\{N(t)\}$) 以概率 $p(t)$ 为类型 1, 以 $1 - p(t)$ 为类型 2. 令 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别表示到 t 为止类型 1 和类型 2 发生的个数, 则 $\{N_1(t)\}$ 和 $\{N_2(t)\}$ 分别是强度为 $\lambda(t)p(t)$ 和 $\lambda(t)(1 - p(t))$ 的 Poisson 过程, 且相互独立.

例 3.5.2 [无穷条服务线的排队问题 $M/G/\infty$] 顾客按速率 λ 的 Poisson 过程到达服务站, 到达后马上接受服务, 服务时间独立同服从分布 G . 令 $X(t)$ 表示到 t 为止完成服务的顾客数, $Y(t)$ 表示 t 时在接受服务的顾客数. 问: $X(t)$ 和 $Y(t)$ 分别服从何分布?

解 固定 $t > 0$, 令 $N(t)$ 表示 $(0, t]$ 内到达的顾客数, 则 $N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$. 对于在 $s \leq t$ 时到达的顾客, 独立地以概率 $p(s) = G(t - s)$ 到 t 为止完成服务 (称为类型 1), 以概率 $1 - p(s)$ 到 t 时还在接受服务 (称为类型 2).

在 $N(t) = n$ 的条件下, 在 $(0, t]$ 到达的这 n 个顾客 (不考虑到达先后顺序) 到达时刻独立同服从 $U(0, t)$, 所以每个事件独立地以概率

$$q = \int_0^t p(s) \frac{1}{t} ds = \frac{1}{t} \int_0^t G(s) ds$$

为类型 1, 以概率 $1 - q$ 为类型 2. 因此

$$X(t) \sim \mathcal{P}\left(\lambda \int_0^t G(s) ds\right), \quad Y(t) \sim \mathcal{P}\left(\lambda \int_0^t (1 - G(s)) ds\right)$$

且二者相互独立.

(ii) 时间变换

定理 3.5.4 设 $N = (N(t), t \geq 0)$ 是强度为 1 的 Poisson 过程, 令 $\lambda(u)$ 是 $[0, \infty)$ 上非负的在任何有界区间上可积的函数, 令

$$m(t) = \int_0^t \lambda(u) du, \quad M(t) = N(m(t)),$$

则 $M = (M(t), t \geq 0)$ 是强度为 $\lambda(t)$ 的非齐次 Poisson 过程.

定理 3.5.5 假设 $\tilde{N} = (\tilde{N}(t), t \geq 0)$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次 Poisson 过程, 并且 $\lambda(t)$ 是严格正的函数, $m(t)$ 是严格单调增的正函数, 其逆函数存在, 记为 $m^{-1}(t)$. 定义一个新过程

$$N(0) = 0, \quad N(t) = \tilde{N}(m^{-1}(t)), \quad t > 0,$$

则 $N = (N(t), t \geq 0)$ 是强度为 1 的齐次 Poisson 过程.

四、Markov 链

4.1 Markov 链及例子

定义 4.1.1 (Markov 链) 如果 $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ 是离散状态的随机过程, 并且具有 Markov 性, 即对任何 $k \geq 1$, 任何状态 $i_0, \dots, i_{k-1}, i, j$, 有

$$P(X_{k+1} = j \mid X_0 = i_0, \dots, X_{k-1} = i_{k-1}, X_k = i) = P(X_{k+1} = j \mid X_k = i),$$

则称 $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ 是 Markov 链.

令 $A = \{X_0 = i_0, \dots, X_{k-1} = i_{k-1}\}$ 表示过去, $B = \{X_k = i\}$ 表示现在, $C = \{X_{k+1} = j\}$ 表示未来, 则 Markov 性意味着

$$P(C | AB) = P(C | B).$$

也就是说, 在已知现在状态的条件下, 过去与将来相互独立.

对 $n \geq m \geq 0$ 和状态 i, j , 记

$$p_{ij}(m, n) = P(X_n = j | X_m = i),$$

表示在 m 时处于状态 i 的条件下, 到 n 时转移到状态 j 的概率. 显然, 转移概率具有如下性质:

$$p_{ij}(m, n) \geq 0, \quad \sum_{j \in I} p_{ij}(m, n) = 1,$$

其中 I 是 Markov 链的状态空间.

定义 4.1.2 如果对任何状态 i, j , $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ 不依赖于 n , 则称 $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ 是**时齐的 Markov 链**. 在时齐 Markov 链中, 称 $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ 为从 i 到 j 的一步转移概率, $\mathbf{P} = (p_{ij})_{I \times I}$ 为一步转移矩阵.

例 4.1.1 [0-1 传输系统] 在只传输 0 和 1 的串联系统中, 设每一级的传真率为 p , 误码率为 $1-p$. 以 X_0 表示第 1 级的输入, X_n 表示第 n 级的输出 ($n \geq 1$). 于是 $\{X_n\}$ 是一时齐的 Markov 链, 状态空间 $I = \{0, 1\}$,

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} p, & j = i, \\ 1-p, & j \neq i, \end{cases} \quad i, j = 0, 1.$$

故一步转移矩阵为 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$.

例 4.1.2 [排队模型] 有一修理店, 每天只能修好一个机器, 并且不修当天送来的机器. 假定第 n 天有 ξ_n 个机器损坏, 则第 $n+1$ 天把这 ξ_n 个机器送往此店维修. 令 X_n 表示第 n 天结束时此店中机器的个数. 于是

$$X_{n+1} = \max(X_n - 1, 0) + \xi_n.$$

如果 ξ_1, ξ_2, \dots 独立同分布, 且与 X_0 独立, 则 $\{X_n; n \geq 0\}$ 是时齐的 Markov 链, 状态空间 $I = \{0, 1, 2, \dots\}$. 令 $P(\xi_1 = k) = a_k, k \geq 0$, 则一步转移概率

$$p_{ij} = \begin{cases} a_j, & i = 0, \\ a_{j-i+1}, & i > 0 \text{ 且 } j \geq i-1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

例 4.1.3 [爬梯子模型] 考虑某人患某种病的情况. 对 $n \geq 0$, 令 $\xi_n = \begin{cases} 0, & \text{第 } n \text{ 天没患病,} \\ 1, & \text{第 } n \text{ 天患病.} \end{cases}$

假设 $\{\xi_n; n \geq 0\}$ 是时齐 Markov 链, 状态空间 $I = \{0, 1\}$, 一步转移矩阵 $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$.

令 $X_n = \begin{cases} \max\{1 \leq k \leq n+1 : \xi_n \xi_{n-1} \cdots \xi_{n-k+1} = 1\}, & \xi_n = 1, \\ 0, & \xi_n = 0 \end{cases}$ 表示第 n 天时连续患病的天数, 则

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1, & \xi_{n+1} = 1, \\ 0, & \xi_{n+1} = 0. \end{cases}$$

于是 $\{X_n; n \geq 0\}$ 是时齐 Markov 链, 状态空间 $I = \{0, 1, 2, \dots\}$, 转移概率为

$$p_{0,0} = 1-p, \quad p_{0,1} = p, \quad p_{i,i+1} = 1-q, \quad p_{i,0} = q, \quad \forall i \geq 1.$$

例 4.1.4 [Polya 罐子模型] 设一罐子装有 r 个红球, b 个黑球. 现随机从罐中取出一球, 记录其颜色后将其放回, 并加入 a 个相同颜色的球. 持续进行这一过程, 令 X_n 表示第 n 次试验结束时罐中的红球数, 则 $\{X_n; n \geq 0\}$ 是一 Markov 链, 状态空间 $I = \{r, r+a, r+2a, \dots\}$, 它的一步转移概率为

$$p_{ij}(n, n+1) = \begin{cases} \frac{i}{r+b+na}, & j = i+a, \\ 1 - \frac{i}{r+b+na}, & j = i, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

所以该 Markov 链不是时齐的.

例 4.1.5 独立重复地掷骰子, 以 X_n 记第 n 次掷出的点数, 令 $Y_n = X_{n+1} + X_{n+2}$, $n \geq 0$. 计算 $P(Y_2 = 12 | Y_0 = 2, Y_1 = 7)$, $P(Y_2 = 12 | Y_1 = 7)$ 并判断 $\{Y_n\}$ 是否是 Markov 链.

解 由定义

$$P(Y_2 = 12 | Y_0 = 2, Y_1 = 7) = P(X_3 = 6, X_4 = 6 | X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 6) = \frac{1}{6}.$$

$$P(Y_2 = 12 | Y_1 = 7) = \frac{P(X_2 = 1, X_3 = X_4 = 6)}{P(X_2 + X_3 = 7)} = \frac{(\frac{1}{6})^3}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{36}.$$

二者不想等, 因此 $\{Y_n\}$ 不是 Markov 链.

4.2 Markov 链的有限维分布

定义 4.2.1 (初始分布) 令 $p_0(i) = P(X_0 = i)$, 并记 $\mathbf{p}_0 = (p_0(1), p_0(2), \dots, p_0(N))$, 称 \mathbf{p}_0 为 Markov 链的初始分布.

引理 4.2.1 (Chapman-Kolmogorov(C-K) 方程) 对 $\forall n \geq 0, m, l \geq 1, i, j \in I$,

$$p_{ij}(n, n+m+l) = \sum_k p_{ik}(n, n+m) p_{kj}(n+m, n+m+l).$$

事实上, 该方程也可以写成矩阵形式:

$$\mathbf{P}(n, n+m+l) = \mathbf{P}(n, n+m) \mathbf{P}(n+m, n+m+l).$$

因此对时齐 Markov 链 $\{X_n\}$, 由 C-K 方程可知 $\mathbf{P}^{(m)} \triangleq \mathbf{P}(n, n+m) = \mathbf{P}^m$.

\mathbf{p}_0 描述着随机系统的初始状态分布规律, 它和转移概率矩阵 \mathbf{P} 共同决定 Markov 的分布. 由 C-K 方程, Markov 链在第 n 时刻处于各个状态的概率分布

$$\mathbf{p}_n = (p_n(1), p_n(2), \dots, p_n(N)) = \mathbf{p}_0 \mathbf{P}^n, \quad \forall n \geq 1.$$

进一步, 利用条件概率的链式法则可知, 对 $\forall n_1 < n_2 < \dots < n_k$,

$$P(X_{n_1} = i_1, \dots, X_{n_k} = i_k) = P(X_{n_1} = i_1) p_{i_1 i_2}^{(n_2 - n_1)} \dots p_{i_{k-1} i_k}^{(n_k - n_{k-1})},$$

其中 $p_{ij}^{(m)} = p_{ij}(n, n+m)$.

例 4.2.1 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是具有三个状态 0,1,2 的时齐 Markov 链, 一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

且 $P(X_0 = 0) = P(X_0 = 1) = \frac{1}{2}$. 试求:

- (1) $P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_3 = 1)$;
- (2) $P(X_3 = 1, X_1 = 1 \mid X_0 = 0)$;
- (3) $P(X_3 = 1)$;
- (4) $P(X_0 = 0 \mid X_3 = 1)$.

解 经计算得

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{16} & \frac{7}{16} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{16} & \frac{3}{32} & \frac{15}{32} \\ \frac{3}{32} & \frac{45}{64} & \frac{13}{64} \end{pmatrix}.$$

所以 (1) $P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_3 = 1) = P(X_0 = 0) p_{01} p_{11}^{(2)} = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{7}{8} = \frac{7}{16}$.

(2) $P(X_3 = 1, X_1 = 1 \mid X_0 = 0) = p_{01} p_{11}^{(2)} = \frac{7}{8}$.

(3) $P(X_3 = 1) = P(X_0 = 0) p_{01}^{(3)} + P(X_0 = 1) p_{11}^{(3)} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{32} = \frac{31}{64}$.

(4) $P(X_0 = 0 \mid X_3 = 1) = \frac{P(X_3 = 1 \mid X_0 = 0) P(X_0 = 0)}{P(X_3 = 1)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{7}{8}}{\frac{31}{64}} = \frac{28}{31}$.

例 4.2.2 淘宝网上有 5 家店卖同一种产品. 设每位购买此种产品的顾客独立地任选一家网店购买. 问经过 5 名顾客购买后, 恰有 3 个网店被购买过的概率?

解 以 X_n 表示第 $n+1$ 个顾客购买后被购买过的网店数目, 则 $\{X_n\}$ 是以 1,2,3,4,5 为状态的 Markov 链, 转移概率

$$p_{i,i} = \frac{i}{5} = 1 - p_{i,i+1}.$$

所求概率即为 $p_{13}^{(4)}$.

由一步转移概率矩阵可得两步转移概率矩阵, 即

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.48 & 0.48 & 0 & 0 \\ 0 & 0.16 & 0.60 & 0.24 & 0 \\ 0 & 0 & 0.36 & 0.56 & 0.08 \\ 0 & 0 & 0 & 0.64 & 0.36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此

$$p_{13}^{(4)} = \sum_{i=1}^5 p_{1i}^{(2)} p_{i3}^{(2)} = 0.04 \times 0.48 + 0.48 \times 0.60 + 0.48 \times 0.36 = 0.48.$$

4.3 常返性和瞬时性

定义 4.3.1 (首中时) 称

$$\tau_i = \min\{n \geq 1 : X_n = i\}$$

为状态 i 的**首中时**, 并约定 $\min \emptyset = \infty$.

定义 4.3.2 (常返态与瞬时态) 若状态 i 满足 $P(\tau_i < \infty | X_0 = i) = 1$, 则称状态 i 为**常返态**, 否则 $P(\tau_i < \infty | X_0 = i) < 1$, 称状态 i 为**瞬时态**.

从定义中可以看出, 常返的意义是从状态 i 出发以概率 1 在有限时间内能返回状态 i , 而瞬时的意义是从状态 i 出发以正概率不再返回状态 i .

定义 4.3.3 (平均回转时) 若状态 i 是常返态, 定义

$$\mu_i = E(\tau_i | X_0 = i)$$

为状态 i 的**平均回转时**.

定义 4.3.4 (正常返与零常返) 若常返态 i 满足 $\mu_i < \infty$, 则称状态 i **正常返**, 否则 $\mu_i = \infty$, 称状态 i **零常返**.

从定义中可以看出, 正常返的意义是从状态 i 出发不但以概率 1 在有限时间内返回状态 i , 而且平均回转时有限, 而零常返的意义是从状态 i 出发虽然以概率 1 在有限时间内返回状态 i , 但平均回转时无限. 因此, 正常返态返回速度比零常返态快.

为判定 Markov 链中状态的常返性与瞬时性, 令

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_{n-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j | X_0 = i)$$

表示从状态 i 出发首次到达状态 j 的概率, 而 $f_{ij} = P(\tau_j < \infty | X_0 = i)$ 表示从状态 i 出发能到达状态 j 的概率, 因此

$$f_{ij} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f_{ij}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}.$$

定理 4.3.1 状态 i 是常返态当且仅当 $f_{ii} = 1$, 且有平均回转时 $\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$; 状态 i 是瞬时态当且仅当 $f_{ii} < 1$.

下面给出当 $n \geq 1$ 时, $p_{ij}^{(n)}$ 与 $f_{ij}^{(n)}$ 之间的关系: 由全概率公式

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= P(X_n = j \mid X_0 = i) = \sum_{k=1}^n P(\tau_j = k, X_n = j \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^n P(\tau_j = k \mid X_0 = i) P(X_n = j \mid \tau_j = k, X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} P(X_n = j \mid X_k = j, X_{k-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j, X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}. \end{aligned}$$

下面定理给出了常返性和瞬时性的等价概率含义.

定理 4.3.2 以 $N_i = \#\{n \geq 0; X_n = i\}$ 表示 X_0, X_1, X_2, \dots 中访问状态 i 的次数, 于是状态 i 是常返态 $\Leftrightarrow P(N_i = \infty \mid X_0 = i) = 1$; 状态 i 是瞬时态 $\Leftrightarrow P(N_i < \infty \mid X_0 = i) = 1$.

这一定理由 Markov 性即得. 更重要的是, 这一定理蕴含着“常返”和“瞬时”的直观含义. 更进一步, 有

$$P(N_i = 0 \mid X_0 = i) = 1 - f_{ii}, \quad P(N_i = n \mid X_0 = i) = (1 - f_{ii})f_{ii}^n, \quad n \geq 1.$$

即 N_i 是几何随机变量. 由此得到一个重要结论, 即

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = E(N_i \mid X_0 = i) = \begin{cases} \infty, & \text{状态 } i \text{ 是常返态,} \\ \frac{1}{1 - f_{ii}} < \infty, & \text{状态 } i \text{ 是瞬时态.} \end{cases}$$

事实上, 由于 $N_i = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=i\}}$, 所以

$$E(N_i \mid X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} E(\mathbf{1}_{\{X_n=i\}} \mid X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = i \mid X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}.$$

归纳成如下定理.

定理 4.3.3 状态 i 是常返态 $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$; 状态 i 是瞬时态 $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$, 进一步可推出 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} = 0$.

定义 4.3.5 (吸收态) 如果 $p_{ii} = 1$, 则称状态 i 为吸收态.

Markov 链一旦到达吸收态 i , 就永远待在状态 i , 从而 $f_{ii} = 1$, $\mu_i = 1$, 状态 i 是正常返态.

例 4.3.1 对状态空间 $I = \{0, 1\}$ 上, 状态转移矩阵 $P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的时齐 Markov 链, 判断状态 0 的常返性.

解 注意到 $f_{00}^{(1)} = p_{00} = 0.2$, 而对 $n \geq 2$ 都有 $f_{00}^{(n)} = 0$. 因此 $f_{00} = 0.2 < 1$, 故状态 0 是瞬时态.

例 4.3.2 对状态空间 $I = \{0, 1, 2, 3\}$ 上, 状态转移矩阵 $P = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$ 的时齐

Markov 链, 判断状态 0 和状态 3 的常返性.

解 首先讨论状态 0 的常返性. 计算得

$$f_{00}^{(1)} = 0, \quad f_{00}^{(2)} = p_{03}p_{30} = \frac{1}{4}, \quad f_{00}^{(3)} = p_{03}p_{33}p_{30} = \frac{1}{8},$$

而当 $n \geq 4$ 时,

$$f_{00}^{(n)} = p_{03}p_{33}^{n-2}p_{30} + p_{01}p_{12}p_{23}p_{33}^{n-4}p_{30} = \frac{5}{2^n}.$$

因此

$$f_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{5}{2^n} = 1, \quad \mu_0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{5n}{2^n} = 4 < \infty,$$

所以状态 0 是正常返态.

下面讨论状态 3 的常返性. 同样地, 计算得

$$f_{33}^{(1)} = \frac{1}{2}, \quad f_{33}^{(2)} = p_{30}p_{03} = \frac{1}{4}, \quad f_{33}^{(3)} = 0, \quad f_{33}^{(4)} = p_{30}p_{01}p_{12}p_{23} = \frac{1}{4},$$

而当 $n \geq 5$ 时, $f_{33}^{(n)} = 0$, 因此

$$f_{33} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{33}^{(n)} = 1, \quad \mu_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2 < \infty,$$

所以状态 3 是正常返态.

例 4.3.3 [爬梯子模型] 设 $\{X_n\}$ 是时齐 Markov 链, $I = \{0, 1, 2, \dots\}$, 转移概率

$$p_{i,i+1} = p_i, \quad p_{i,0} = 1 - p_i, \quad 0 < p_i < 1, i \geq 0.$$

讨论状态 0 的常返性.

解 因为 $f_{00}^{(1)} = p_{00} = 1 - p_0$, 而对 $n \geq 2$,

$$f_{00}^{(n)} = p_{01}p_{12} \cdots p_{n-2,n-1}p_{n-1,0} = p_0p_1 \cdots p_{n-2}(1 - p_{n-1}).$$

令 $u_0 = 1, u_n = p_0p_1 \cdots p_{n-1}, \forall n \geq 1$, 则

$$f_{00} = (1 - u_1) + (u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + \cdots + (u_{n-1} - u_n) + \cdots = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

所以状态 0 是常返态 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

进一步, 当状态 0 是常返态时,

$$\mu_0 = (1 - u_1) + 2(u_1 - u_2) + 3(u_2 - u_3) + \cdots + n(u_{n-1} - u_n) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

所以状态 0 是正常返态 $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty$.

下面考虑正常返与零常返的等价刻画.

定理 4.3.4 状态 i 是正常返态 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ii}^{(k)} = \frac{1}{\mu_i} > 0 \Leftrightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} > 0$; 状态 i 是零常返态 $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} = 0$.

例 4.3.4 [对称随机游动] 设 d 是正整数, $\mathbf{X} = (X_n, n \geq 0)$ 是 \mathbb{Z}^d 上的对称随机游动, 讨论状态 0 (原点) 的常返性.

解 若 $d = 1$, 则对任意整数 i 有 $p_{i,i-1} = p_{i,i+1} = \frac{1}{2}$. 于是有

$$p_{00}^{(2n-1)} = 0, \quad p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

由 Stirling 公式 $n! \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$ 得 $p_{00}^{(2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. 因此 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)} = \infty$ 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{00}^{(n)} = 0$. 所以状态 0 零常返.

若 $d = 2$, 则对每一对整数 (i, j) , 有

$$p_{(i,j),(i+1,j)} = p_{(i,j),(i-1,j)} = p_{(i,j),(i,j+1)} = p_{(i,j),(i,j-1)} = \frac{1}{4}.$$

于是有

$$p_{00}^{(2n)} = \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^n \binom{2n}{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n}^2 \sim \frac{1}{\pi n}.$$

因此 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)} = \infty$ 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{00}^{(n)} = 0$. 所以状态 0 零常返.

事实上, 对于 $d \geq 3$, 有 $p_{00}^{(2n-1)} = 0$, $p_{00}^{(2n)} = O(n^{-d/2})$, 此时状态 0 是瞬时态.

4.4 状态空间分解

定义 4.4.1 (可达与互达) 设 $i, j \in I$,

(1) 若存在 $n \geq 0$, 使得 $p_{ij}^{(n)} > 0$, 则称 i 可达 j , 记为 $i \rightarrow j$;

(2) 若 $i \rightarrow j$, 且 $j \rightarrow i$, 则称 i, j 互达, 记为 $i \leftrightarrow j$.

互达是等价关系 (满足对称性、传递性和自反性), 按等价关系可以将状态空间分成若干个 (有限或无穷) 等价类, 即将状态空间分成不交的互达等价类的并.

定义 4.4.2 (不可约) 如果 Markov 链的任意两个状态都是互达的, 则称之不可约.

定义 4.4.3 (周期) 假设 $i \in I$, 令

$$d_i = \gcd\{n \geq 1; p_{ii}^{(n)} > 0\},$$

其中 \gcd 表示最大公约数, 称 d_i 为状态 i 的周期, 并规定 $\gcd \emptyset = 0$.

如果 $d_i = 1$, 则称状态 i 是非周期的; 如果状态 i 是非周期正常返的, 则称其遍历.

如果 $\{X_n\}$ 的所有状态常返 (瞬时、正常返、零常返、非周期), 则称 $\{X_n\}$ 常返 (瞬时、正常返、零常返、非周期); 如果 $\{X_n\}$ 是不可约非周期正常返的, 则称其遍历.

下面定理表明互达等价类中各状态具有相同的周期和常返性.

定理 4.4.1 (互达等价类的同一性质) 如果 $i \leftrightarrow j$, 则

- (1) $d_i = d_j$;
- (2) i 是常返态 $\Leftrightarrow j$ 是常返态;
- (3) i 是正常返态 $\Leftrightarrow j$ 是正常返态.

证明 设 $i \leftrightarrow j, i \neq j$, 则存在正整数 m, n , 使得 $p_{ij}^{(m)} > 0, p_{ji}^{(n)} > 0$.

- (1) 如果 $p_{ii}^{(k)} > 0$, 则 $p_{jj}^{(k+m+n)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(m)} > 0$. 所以

$$d_j \mid k + m + n.$$

特别地, 有 $d_j \mid m + n$. 从而 $d_j \mid k$, 故 $d_j \mid d_i$. 同理有 $d_i \mid d_j$, 从而 $d_i = d_j$.

- (2) 如果状态 i 常返, 则 $\sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^{(k)} = \infty$. 所以

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^{(k+m+n)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(m)} \sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^{(k)} = \infty,$$

即状态 j 也常返.

- (3) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n)} = 0$, 则

$$p_{ii}^{(k)} \leq p_{jj}^{(k+m+n)} \div (p_{ji}^{(n)} p_{ij}^{(m)}) \rightarrow 0.$$

从而结论成立. □

有了上述定理, 我们可以更快地判断一个 Markov 链中各状态的周期和常返性. 在例 4.3.2 中, 我们已经判断了状态 0 和状态 3 是正常返态, 又注意到 $p_{33} > 0$, 因此 $d_3 = 1$. 结合所有状态互达可知, 这是一个遍历的 Markov 链. 在例 4.3.3 中, 我们已经判断了状态 0 的常返性, 又 $p_{00} > 0$, 因此 $d_0 = 1$. 所以所有状态非周期, 并且与状态 0 具有相同的常返性.

4.5 极限分布与平稳分布

(i) 极限分布

定义 4.5.1 (极限分布) 假设 $\{X_n\}$ 是 Markov 链, 转移概率矩阵为 P , 初始分布为 p_0 . 如果存在 I 上的一个概率分布 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ 使得对任意 $j \in I$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(j) = \mu_j,$$

则称 μ 是该 Markov 链的极限分布.

注意到

$$p_n(j) = \sum_{i=1}^N p_0(i) p_{ij}^{(n)},$$

所以如果对每个 $i \in I$, 存在 I 上一个概率分布 $\nu_i = (\nu_{i1}, \nu_{i2}, \dots, \nu_{iN})$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \nu_{ij}, j \in \mathcal{E}$.

令 $\mu_j = \sum_{i=1}^N p_0(i) \nu_{ij}, j \in I$, 则 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ 是该 Markov 链的极限分布.

根据上述分析, 要求极限分布, 实际上只要计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}$, 也就是计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$.

注意, 不是所有 Markov 链都一定有极限分布.

(ii) 平稳分布

假设 $\{X_n\}$ 是 Markov 链, 初始分布为 \mathbf{p}_0 , 转移概率矩阵为 \mathbf{P} . 则 \mathbf{X} 是强平稳过程当且仅当对任意 $n \geq 0, m \geq 1$,

$$(X_m, X_{m+1}, \dots, X_{m+n}) \stackrel{d}{=} (X_0, X_1, \dots, X_n).$$

由于转移概率不依赖于时间, 所以上式成立 $\Leftrightarrow \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \dots \Leftrightarrow \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_0 \mathbf{P}$. 一般情况下, 初始分布 \mathbf{p}_0 和转移概率矩阵 \mathbf{P} 不一定满足该式.

定义 4.5.2 (平稳分布) 如果存在 I 上的一个概率分布 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$ 使得,

$$\pi = \pi \mathbf{P},$$

称 π 是该 Markov 链的平稳分布.

如果确实存在平稳分布 π , 取 π 为初始分布, 就可以得到平稳 Markov 链. 为求平稳分布, 只需要解方程组

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \pi_i p_{ij} = \pi_j, & j = 1, 2, \dots, N, \\ \sum_{j=1}^N \pi_j = 1, \\ \pi_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, N. \end{cases}$$

注意, 有时候 Markov 链的平稳分布不一定唯一.

例 4.5.1 求例 4.3.2 中 Markov 链的平稳分布.

解 设平稳分布 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$, 则由平稳方程得

$$\begin{cases} \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1, \\ \pi_0 = \frac{1}{2}\pi_3, \\ \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_0, \\ \pi_2 = \pi_1. \end{cases} \Rightarrow \pi = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right).$$

例 4.5.2 求例 4.3.3 中 Markov 链的平稳分布.

解 设平稳分布为 π , 则

$$\pi_1 = p_0 \pi_1, \quad \pi_2 = p_1 \pi_1, \quad \dots, \quad \pi_n = p_{n-1} \pi_{n-1}, \quad \dots$$

因此 $\pi_n = u_n \pi_0$. 又 $\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$, 所以平稳分布存在当且仅当 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty$, 即当且仅当 $\{X_n\}$ 正常返.

命题 4.5.1 设状态 j 瞬时或零常返, 则

(a) 对所有状态 i , $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$;

(b) 不管初始分布如何, 恒有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = j) = 0$;

(c) 设 π 是 $\{X_n\}$ 的平稳分布, 则有 $\pi_j = 0$.

定理 4.5.1 假设 $\{X_n\}$ 是非周期不可约 Markov 链, 则 $\{X_n\}$ 存在平稳分布当且仅当 $\{X_n\}$ 正常返的, 并且此时平稳分布唯一, 同时

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_j}, \quad j \in I,$$

其中 μ_j 为状态 j 的平均回转时. 进一步, 对任何状态 i, j , 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ij}^{(k)} = \pi_j$.

特别地, 若 $\{X_n\}$ 遍历, 则对任何状态 i, j , 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$.

推论 4.5.1 (极限分布与平稳分布的关系) 假设 $\{X_n\}$ 是非周期不可约 Markov 链, 状态空间为 I , 转移概率矩阵为 P . 那么该 Markov 链存在极限分布当且仅当该 Markov 链存在平稳分布, 并且二者相等.

注意, 对周期 Markov 链, 推论不一定成立; 不可约零常返或瞬时 Markov 链没有平稳分布.

命题 4.5.2 若 $\{X_n\}$ 是有限 Markov 链, 则至少存在一个正常返态.

命题 4.5.3 若 $\{X_n\}$ 是不可约的有限 Markov 链, 则 $\{X_n\}$ 正常返.

定义 4.5.3 (闭集) 设 C 为状态空间 I 的子集, 若对于任意状态 $i \in C$ 和任意状态 $j \notin C$, 都有 $p_{ij} = 0$, 则称之为闭集.

闭集的定义告诉我们, 闭集是封闭的, 从 C 中的状态出发将永远不会跑出 C 以外.

定理 4.5.2 (1) 如果状态 i 常返且 $i \rightarrow j$, 则 $i \leftrightarrow j$ 且 $f_{ij} = f_{ji} = 1$.

(2) 如果状态 i 常返, 则状态 i 的互达等价类是闭的.

(3) 如果状态 i 的互达等价类是有限闭集, 则状态 i 正常返.

例 4.5.3 以 X_n 表示 n 时刻系统里的顾客数. 设 $\{X_n\}$ 是 Markov 链, $I = \{0, 1, 2, 3\}$, 一步转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 讨论各状态的周期和常返性;

(2) 计算正常返态的平均回转时;

(3) 计算相邻两次变空的平均时间间隔.

解 (1) 注意到 $\{0, 1, 2\}$ 是有限闭的互达等价类, $\{3\}$ 是不闭的. 因此状态 $0, 1, 2$ 正常返, 而状态 3 瞬时. 另一方面, 注意到 $p_{00}^{(2)} > 0, p_{00}^{(3)} > 0$, 因此 $d_0 = d_1 = d_2 = 1$; 而从状态 3 出发永不返回状态 3 , 所以 $d_3 = 0$.

(2) 将 Markov 链限制在 $\{0, 1, 2\}$ 上, 则该 Markov 链为非周期不可约的 Markov 链. 记其平稳分布为 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$, 由平稳方程可知

$$\begin{cases} \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1, \\ \pi_1 = 0.7\pi_2, \\ \pi_2 = \pi_0, \end{cases} \implies \pi = \left(\frac{10}{27}, \frac{7}{27}, \frac{10}{27}\right), \implies (\mu_0, \mu_1, \mu_2) = \left(\frac{27}{10}, \frac{27}{7}, \frac{27}{10}\right).$$

(3) 相邻两次变空的平均时间间隔为 $\mu_0 = 2.7$.

4.6 吸收概率与平均吸收时间

由定理 4.5.2, 我们可以对有限 Markov 链进行状态分解:

$$I = T \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k,$$

其中 C_1, C_2, \dots, C_k 是所有闭的互达等价类, T 是余下的状态. 完成分解后, C_1, C_2, \dots, C_k 中各状态正常返, T 中各状态瞬时. 也就是说, 如果 $X_0 \in T$, 则 Markov 链最终会进入某个 C_i 并将不再离开.

对状态 i , 令

$$T_i = \min\{n \geq 0 : X_n = i\}$$

表示首次访问状态 i 的时刻; 对 I 的子集 A , 令

$$T_A = \min\{n \geq 0 : X_n \in A\}$$

表示首次访问子集 A 的时刻; 规定 $\min \emptyset = \infty$.

例 4.6.1 [赌徒输光问题] 甲、乙两人独立重复玩游戏, 每一局甲赢 1 元和输 1 元的概率都是 $1/2$. 游戏一直到某人输光结束. 一开始甲带有 i 元钱, 乙带有 $m-i$ 元钱. 这里 i 与 $m-i$ 都是非负整数. 计算:

- (1) 游戏在有限时间内结束的概率;
- (2) 甲输光的概率;
- (3) 游戏平均持续时间.

解 (1) 以 S_n 表示 n 局游戏后甲所拥有的钱数, 则 $\{S_n; n \geq 0\}$ 是时齐 Markov 链, 状态空间 $I = \{0, 1, \dots, m\}$, 一步转移概率为

$$p_{00} = p_{mm} = 1, \quad p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2}, \quad \forall 0 < i < m.$$

于是 $C_1 = \{0\}$, $C_2 = \{m\}$, $T = \{1, 2, \dots, m-1\}$ 为状态空间的划分, 则 T 中状态均为瞬时态, 所以最终会进入 $C_1 \cup C_2$, 此时游戏结束. 因此游戏在有限时间内结束的概率为 1.

(2) 令 $h_i = P(\text{甲输光} | S_0 = i) = P(T_0 < \infty | S_0 = i)$, 则 $h_0 = 1$, $h_m = 1$, 且

$$\begin{aligned} h_i &= \sum_j P(\text{甲输光} | S_1 = j, S_0 = i) P(S_1 = j | S_0 = i) \\ &= \sum_j P(\text{甲输光} | S_0 = j) p_{ij} = \frac{1}{2}(h_{i+1} + h_{i-1}), \quad 0 < i < m. \end{aligned}$$

即 $h_{i+1} - h_i = h_i - h_{i-1}$, $0 < i < m$. 所以 $h_i = \frac{m-i}{m}$.

(3) 令 $C = \{0, m\}$, 则 T_C 为游戏结束时间. 令 $a_i = E(T_C | S_0 = i)$, 则 $a_0 = 0$, $a_m = 0$, 且

$$\begin{aligned} a_i &= \sum_j E(T_C | S_1 = j, S_0 = i) P(S_1 = j | S_0 = i) \\ &= \sum_j [1 + E(T_C | S_0 = j)] p_{ij} = 1 + \frac{1}{2}(a_{i+1} + a_{i-1}), \quad 0 < i < m. \end{aligned}$$

所以 $a_i = i(m-i)$.

上例告诉我们, 当 Markov 链有多个闭集时, 可以利用 Markov 性和全概率公式, 利用一步分析法建立方程, 计算被某个特定闭集吸收的概率或平均吸收时间.

例 4.6.2 以 X_n (单位: 元) 表示 n 时刻某股票的价格. 设 $\{X_n\}$ 是 Markov 链, 状态空间 $I = \{1, 2, 3, 4\}$, 一步转移矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

已知 $P(X_0 = 2) = P(X_0 = 3) = 1/2$, 计算:

- (1) 股票价格在涨到 4 元前不曾跌到 1 元的概率;
- (2) 股票价格到达 4 元的平均时间.

解 (1) 所求概率为 $P(T_4 < T_1)$, 这个值与到达状态 1 或状态 4 之后的过程没有关系, 所以可以将状态 1 和状态 4 看成吸收态. 令 $h_i = P(T_4 < T_1 | X_0 = i)$, 则 $h_1 = 0, h_4 = 1$, 且

$$h_2 = \frac{1}{3}h_1 + \frac{1}{3}h_2 + \frac{1}{3}h_3, \quad h_3 = \frac{1}{4}h_2 + \frac{1}{4}h_3 + \frac{1}{2}h_4.$$

可求得 $h_2 = \frac{2}{5}, h_3 = \frac{4}{5}$, 因此 $P(T_4 < T_1) = \sum_{i=1}^4 P(X_0 = i)h_i = \frac{3}{5}$.

(2) 所求概率为 $E(T_4)$, 这个值与到达状态 4 之后的过程没有关系, 所以可以将状态 4 看成吸收态. 令 $a_i = E(T_4 | X_0 = i)$, 则 $a_4 = 0$, 且

$$a_1 = 1 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2, \quad a_2 = 1 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_3, \quad a_3 = 1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{2}a_4.$$

可求得 $a_1 = \frac{23}{2}, a_2 = \frac{19}{2}, a_3 = \frac{9}{2}$, 因此 $E(T_4) = \sum_{i=1}^4 P(X_0 = i)a_i = 7$.

4.7 可逆 Markov 链

定义 4.7.1 (可逆 Markov 链) 假设 $\mathbf{X} = (X_n, n \geq 0)$ 是 Markov 链, 状态空间为 \mathcal{E} , 转移概率矩阵为 P , 初始分布为 p_0 . 假设 \mathbf{X} 是不可约 Markov 链, 对任意 $N \geq 0$, 令

$$Y_n = X_{N-n}, \quad 0 \leq n \leq N,$$

如果对任意 $N \geq 1$, 过程 $\mathbf{Y} = (Y_n, 0 \leq n \leq N)$ 是 Markov 链, 其中转移概率矩阵为 P , 初始分布为 p_0 , 那么称 \mathbf{X} 是可逆 Markov 链.

显然, 如果 \mathbf{X} 是可逆 Markov 链, 那么 $\forall N \geq 1, (Y_n, 0 \leq n \leq N) \stackrel{d}{=} (X_n, 0 \leq n \leq N)$.

另外, 如果 \mathbf{X} 是可逆 Markov 链, 那么 $X_N \stackrel{d}{=} X_0, \forall N \geq 1$, 所以该 Markov 链一定是平稳的, 初始分布 p_0 为平稳分布.

定理 4.7.1 假设平稳分布 π 存在, 选择 π 作为初始分布 p_0 , 则

$$\mathbf{X} \text{ 可逆 } \iff (X_1, X_0) \stackrel{d}{=} (X_0, X_1),$$

即 $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}, \forall i, j \in \mathcal{E}$.

定义 4.7.2 (可逆分布) 一个概率分布 π 称为可逆分布如果对所有 i, j 有 $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$.

定理 4.7.2 可逆分布一定是平稳分布.

另外, 如果对所有状态 i, j , 满足 $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$, 则 X 就是可逆的 Markov 链.

例 4.7.1 有 A, B 两只容器, 中间有一细管相连. 有 m 只跳蚤, 每次有一只随机地从一个容器跳到另一个容器. 以 X_n 表示 n 次后 A 中跳蚤数, 则 $\{X_n\}$ 是时齐 Markov 链, 转移概率为

$$p_{i,i+1} = \frac{m-i}{m}, \quad p_{i,i-1} = \frac{i}{m}, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

试问其平稳分布.

解 先尝试求其可逆分布 π , 则

$$\pi_i p_{i,i-1} = \pi_{i-1} p_{i-1,i}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

于是

$$\pi_i = \frac{m-i+1}{i} \pi_{i-1} = \dots = \frac{(m-i+1)(m-i+2) \cdots m}{i!} \pi_0 = \binom{m}{i} \pi_0, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

因此 $\pi_i = \frac{\binom{m}{i}}{2^m}$, $i = 0, 1, \dots, m$. 由于 $\{X_n\}$ 不可约, 因此这个可逆分布 π 也是唯一的平稳分布.

例 4.7.2 设 $\{X_n\}$ 是平稳的时齐 Markov 链, 状态空间 $I = \{1, 2\}$, 一步转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix},$$

问 $\{X_n\}$ 可逆吗?

解 设 $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ 是可逆分布, 则

$$\pi_1 p_{12} = \pi_2 p_{21}, \quad \text{即 } \pi_1 = 0.5 \pi_2.$$

又 $\pi_1 + \pi_2 = 1$, 所以 $\pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, 因此 $\{X_n\}$ 可逆.

例 4.7.3 设 $\{X_n\}$ 是平稳的时齐 Markov 链, 状态空间 $I = \{1, 2, 3\}$, 一步转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \end{pmatrix},$$

问 $\{X_n\}$ 可逆吗?

解 设 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ 是可逆分布, 则

$$\pi_2 p_{23} = \pi_3 p_{32}, \quad \text{即 } \pi_2 = 0,$$

$$\pi_1 p_{12} = \pi_2 p_{21}, \quad \text{得 } \pi_1 = 0,$$

$$\pi_1 p_{13} = \pi_3 p_{31}, \quad \text{得 } \pi_3 = 0.$$

所以不存在可逆分布, 因此 $\{X_n\}$ 不可逆.

定理 4.7.3 (Kolmogorov 准则) 假设 $X = (X_n, n \geq 0)$ 是不可约平稳 Markov 链, 转移概率矩阵为 P . 该 Markov 链是可逆的, 当且仅当对任意闭路径 $i_0, i_1, \dots, i_{N-1}, i_N = i_0$, 有

$$p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{N-1} i_0} = p_{i_0 i_{N-1}} \cdots p_{i_2 i_1} p_{i_1 i_0}.$$

根据上述定理也可以判断前面的例子中的 Markov 链是不可逆的.

五、 Galton-Watson 分枝过程

5.1 模型简介

令 ξ 是一个取非负整数值随机变量, 其分布如下:

$$P(\xi = k) = p_k, \quad k \geq 0,$$

其中 $p_0 < 1$. 如不加说明, 本章内容中出现的 ξ 均假设服从这一分布.

考虑某物种自然繁殖过程, 设祖先为 Z_0 , Z_1 为第一代个体个数, 其分布与 ξ 相同. 第一代 Z_1 个个体独立进行繁殖各自的后代, 并且与祖先繁殖后代的能力一样, 即每个个体繁殖后代的个数为随机变量, 与 ξ 同分布.

令 $(\xi_{1j}, j \geq 1)$ 为一列独立同分布随机变量, 与 ξ 同分布且与 Z_1 独立, 则第二代个体总数为

$$Z_2 = \sum_{j=1}^{Z_1} \xi_{1j}.$$

类似地, 令 Z_n 为第 n 代个体总数, 并假设 $(\xi_{nj}, j \geq 1)$ 为一列独立同分布随机变量, 与 ξ 同分布且与 $\{\xi_{ij}; 1 \leq i < n\}$ 相互独立, 则第 $n+1$ 代个体总数为

$$Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} \xi_{nj}.$$

定理 5.1.1 $Z = (Z_n, n \geq 0)$ 是 Markov 链, 状态空间为 \mathbb{Z}_+ , 转移概率

$$p_{ij} = P\left(\sum_{l=1}^i \xi_l = j\right), \quad i, j \geq 0,$$

其中 ξ_1, ξ_2, \dots 是一列独立同分布随机变量, 与 ξ 同分布.

例 5.1.1 设 $P(\xi = 1) = p, P(\xi = 0) = 1 - p, 0 < p < 1$, 则

$$P(Z_n = 1) = p^n, \quad P(Z_n = 0) = 1 - p^n.$$

例 5.1.2 设 $\xi \sim B(n, p)$, 则在 $Z_n = i$ 的条件下, $Z_{n+1} = \sum_{l=1}^i \xi_{nl} \sim B(ni, p)$, 所以

$$p_{ij} = \binom{ni}{j} p^j (1-p)^{ni-j}, \quad j = 0, 1, \dots, ni.$$

例 5.1.3 设 $\xi \sim P(\lambda)$, 则在 $Z_n = i$ 的条件下, $Z_{n+1} = \sum_{l=1}^i \xi_{nl} \sim P(i\lambda)$, 所以

$$p_{ij} = \frac{(i\lambda)^j}{j!} e^{-i\lambda}, \quad j = 0, 1, \dots$$

例 5.1.4 设 $\xi \sim G(p)$, 即 $P(\xi = k) = (1-p)^k p, k = 0, 1, \dots$, 则

$$p_{ij} = P\left(\sum_{l=1}^i \xi_{nl} = j\right) = \binom{i+j-1}{i-1} (1-p)^j p^i.$$

一般来说, 求转移概率并不是一件容易的事情, Z_n 的分布律也很难算.

命题 5.1.1 (数字特征) 假设随机变量 ξ 满足 $E(\xi) = \mu, \text{Var}(\xi) = \sigma^2$, 那么对每个 $n \geq 1$, 有

$$E(Z_n) = \mu^n, \quad \text{Var}(Z_n) = \sigma^2 \mu^{n-1} (1 + \mu + \dots + \mu^{n-1}).$$

这一结果告诉我们, 总体上 Z_n 以几何级数的方式增长 ($\mu > 1$) 或衰减 ($\mu < 1$).

5.2 生成函数

定义 5.2.1 (生成函数) 假设 ξ 是非负整数值随机变量, 定义

$$\phi(s) = E(s^\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

可以知道 $\phi(s)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛, 称 $\phi(s)$ 为随机变量 ξ 的生成函数.

正如特征函数一样, 非负整数值随机变量 ξ 的分布和其生成函数相互唯一确定.

命题 5.2.1 生成函数有许多良好的性质, 如

- (1) $\phi_0 = p_0, \phi(1) = 1, 0 \leq \phi(s) \leq 1$;
- (2) $\phi(s)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增且一致连续;
- (3) 如果 $E(\xi^k) < \infty$, 则

$$E[\xi(\xi-1)\cdots(\xi-k+1)] = \phi^{(k)}(1),$$

特别地, 当 $E(\xi^2) < \infty$ 时, $\phi'(1) = E(\xi), \phi''(1) = E(\xi^2) - E(\xi)$;

- (4) $\phi(s)$ 在 $s = 0$ 处无穷次可微, 并且

$$p_k = \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!}, \quad \forall k \geq 0,$$

其中约定 $\phi^{(0)}(0) = \phi(0)$;

- (5) 假设 ξ, η 为两个独立非负整数值随机变量, 那么 $\xi + \eta$ 的生成函数等于各自生成函数的乘积, 即

$$\phi_{\xi+\eta}(s) = \phi_\xi(s)\phi_\eta(s).$$

该性质可以推广到任意有限个独立随机变量和.

5.3 分枝过程的生成函数

记 ξ 的生成函数为 $\phi(s)$, Z_n 的生成函数为 $\phi_n(s)$, 显然有 $\phi_1(s) = \phi(s)$, 而对 $n \geq 1$, 有

$$\begin{aligned}\phi_{n+1}(s) &= E(s^{Z_{n+1}}) = E\left(s^{\sum_{j=1}^{Z_n} \xi_{nj}}\right) = \sum_{N=0}^{\infty} E\left(s^{\sum_{j=1}^N \xi_{nj}} \middle| Z_n = N\right) P(Z_n = N) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} E\left(s^{\sum_{j=1}^N \xi_{nj}}\right) P(Z_n = N) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} (\phi_n(s))^N P(Z_n = N) = \phi(\phi_n(s)).\end{aligned}$$

所以分枝过程的生成函数满足

$$\phi_{n+1}(s) = \phi_n(\phi(s)) = \phi(\phi_n(s)), \quad n \geq 1.$$

根据前面的讨论, 可以由 $\phi_n(s)$ 来计算 Z_n 的分布. 当然, 通常情况下 Z_n 的分布并不能详细给出, 因为即使容易算出 $\phi(s)$, 也很难得到 n 次复合函数 $\phi_n(s)$ 的解析表达式.

例 5.3.1 设 $P(\xi = k) = \frac{1}{2^{k+1}}$, $k = 0, 1, \dots$ 对 $n \geq 1$, 计算 $\phi_n(s)$ 及 Z_n 的分布律.

解 ξ 的生成函数

$$\phi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2-s}, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

所以

$$\phi_1(s) = \phi(s) = \frac{1}{2-s}, \quad \phi_2(s) = \phi(\phi_1(s)) = \frac{1}{2 - \frac{1}{2-s}} = \frac{2-s}{3-2s}.$$

若已算得 $\phi_n(s) = \frac{n - (n-1)s}{n+1 - ns}$, 则

$$\phi_{n+1}(s) = \phi(\phi_n(s)) = \frac{1}{2 - \frac{n - (n-1)s}{n+1 - ns}} = \frac{(n+1) - ns}{(n+2) - (n+1)s}.$$

由归纳法知, 对 $n \geq 1$, $\phi_n(s) = \frac{n - (n-1)s}{n+1 - ns}$.

注意到

$$\begin{aligned}\phi_n(s) &= \frac{n - (n-1)s}{n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{n}{n+1}s} \\ &= \frac{n - (n-1)s}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}s\right)^k \\ &= \frac{n}{n+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \frac{n^{k+1}s^{k+1}}{(n+1)^{k+1}} - \frac{n-1}{n+1} \frac{n^k s^{k+1}}{(n+1)^k}\right) \\ &= \frac{n}{n+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{(n+1)^{k+1}} s^k.\end{aligned}$$

所以 $P(Z_n = 0) = \frac{n}{n+1}$, $P(Z_n = k) = \frac{n^{k-1}}{(n+1)^{k+1}}$, $k \geq 1$.

5.4 生存与灭绝概率

Galton-Watson 分枝过程理论研究中, 一个基本问题是: 该物种是否一直生存下去? 最终灭绝的概率是多少? 显然, 如果存在 $n \geq 1$, 使得 $Z_n = 0$, 那么对所有 $m > n$ 都有 $Z_m = 0$, 即该物种完全灭绝.

根据前面有关生成函数的讨论, 物种在第 n 代灭绝的概率为 $P(Z_n = 0) = \phi_n(0)$. 注意到 $\phi_n(0)$ 是一个有界单调不减数列, 所以极限存在, 记

$$\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(0).$$

称 τ 为灭绝概率. 特别地, 如果 $\tau = 1$, 则该物种最终一定会灭绝.

利用生成函数的性质, 有

$$\phi_n(0) = \phi(\phi_{n-1}(0)),$$

两边取极限得到最终灭绝概率 τ 满足方程

$$\tau = \phi(\tau).$$

定理 5.4.1 假设 $E(\xi) = \mu$, $\mathbf{Z} = (Z_n, n \geq 0)$ 是 Galton-Watson 分枝过程.

- (1) 如果 $\mu \leq 1$, 那么 $\tau = 1$, 即该物种最终一定会灭绝;
- (2) 如果 $\mu > 1, 0 < p_0 < 1$, 那么灭绝概率 τ 为方程 $\tau = \phi(\tau)$ 的最小正解, 且 $0 < \tau < 1$;
- (3) 如果 $p_0 = 0$, 那么最终灭绝的概率为 0.

例 5.4.1 设 $P(\xi = k) = \frac{1}{2^{k+1}}, k = 0, 1, \dots$, 则 $\phi(s) = \frac{1}{2-s}, \mu = \phi'(1) = 1$, 因此 $\tau = 1$. 进一步, 令 $T_0 = \min\{n \geq 1 : Z_n = 0\}$ 为首次灭绝的时刻, 计算 T_0 的分布律.

解 已算得 $\alpha_n = P(Z_n = 0) = \frac{n}{n+1}$, 因此对 $n \geq 1$,

$$P(T_0 = n) = P(Z_n = 0, Z_{n-1} \neq 0) = P(Z_n = 0) - P(Z_{n-1} = 0) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

此即首次灭绝时刻的分布律.

例 5.4.2 设 $P(\xi = k) = (1-p)^k p, k = 0, 1, \dots$, 则 $\phi(s) = \frac{p}{1-(1-p)s}, \mu = \phi'(1) = \frac{1-p}{p}$. 讨论灭绝概率.

解 由方程

$$s = \phi(s) \iff (1-p)s^2 - s + p = 0 \iff (s-1)((1-p)s - p) = 0.$$

所以当 $p \geq \frac{1}{2}$ 时, $\tau = 1$; 当 $p < \frac{1}{2}$ 时, $\tau = \frac{p}{1-p}$.

六、平稳随机过程遍历性

6.1 时间平均

随机变量的数学期望实际上是一种加权平均: 按照其概率大小进行加权平均.

假设 $X, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 是一列独立同分布随机变量, $E|X| < \infty$ 并且 $E(X) = \mu$, 由 Khinchine 大数律得

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{P} \mu, \quad n \rightarrow \infty.$$

进而由 Kolmogorov 大数律, 上式可加强为几乎处处收敛. 基于这一事实, 有时称数学期望 μ 为 **样本平均**或**统计平均**.

下面考虑随机过程的时间平均.

假设 $\mathbf{X} = (X_n, n \geq 0)$ 是平稳随机过程, 前 n 个时刻观测值的平均值为

$$\bar{X}_n = \frac{X_0 + X_1 + \dots + X_{n-1}}{n}.$$

如果存在一个随机变量 τ , 使得 $(\bar{X}_n, n \geq 1)$ 在均方意义下收敛于 τ , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\bar{X}_n - \tau)^2 = 0,$$

则称 τ 为该随机过程的**时间平均**, 简记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \tau$.

假设 $\mathbf{X} = (X(t), t \geq 0)$ 是平稳随机过程, 定义 $[0, T]$ 内的过程平均值为

$$\bar{X}_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt.$$

假设对任何 $T > 0$, 上式积分存在且有限, 则定义其为 $[0, T]$ 上的时间平均. 如果存在一个随机变量 τ , 使得 $(\bar{X}_T, T > 0)$ 在均方意义下收敛于 τ , 即

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E(\bar{X}_T - \tau)^2 = 0,$$

则称 τ 为该随机过程的**时间平均**, 简记为 $\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{X}_T = \tau$.

事实上, 任意给定样本点 ω , $X(\omega, t)$ 是一条样本曲线, 但作为 t 的函数, 它不一定在 $[0, T]$ 内 Riemann 可积. 这里我们采用均方可积的概念: 将 $[0, T]$ 进行划分, 分点为 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, 在每个小区间 $[t_{k-1}, t_k]$ 内任取一点 t_k^* , 作和 $S_n = \sum_{k=1}^n X(t_k^*)(t_k - t_{k-1})$.

如果存在一个随机变量 ξ_T (不依赖于上述划分和取点), 使得

$$\lim_{\max_k (t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0} E(S_n - \xi_T)^2 = 0,$$

则称 $X(t)$ 在 $[0, T]$ 内均方可积, 积分为 ξ_T , 记为 $\int_0^T X(t) dt = \xi_T$.

下面定理给出均方可积的充分条件.

定理 6.1.1 假设 $\mathbf{X} = (X(t), t \geq 0)$ 是二阶矩过程, $E(X(t))^2 < \infty$. 给定 $T > 0$, 如果

$$\int_0^T \int_0^T E(X(s)X(t)) ds dt < \infty,$$

那么 $X(t)$ 在 $[0, T]$ 内均方可积.

推论 6.1.1 如果 $\mathbf{X} = (X(t), t \geq 0)$ 是弱平稳过程, 那么对任何 $[a, b] \subseteq T$, $X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方可积.

6.2 均值遍历性

定义 6.2.1 令 $\mathbf{X} = (X(t), t \in T)$ 是平稳随机过程, $E[X(t)] = \mu$, 如果时间平均等于样本平均, 即

$$\tau = \mu, \quad \text{a.s.},$$

则称 $\mathbf{X} = (X(t), t \in T)$ 满足**均值遍历性**.

定理 6.2.1 假设 $\mathbf{X} = (X_n, n \geq 0)$ 是离散时间平稳随机过程, $E(X_n) = \mu$, 那么 $\mathbf{X} = (X_n, n \geq 0)$ 满足均值遍历性当且仅当

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (n-k)(E(X_0 X_k) - \mu^2) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

推论 6.2.1 在上述定理的假设下, $\mathbf{X} = (X_n, n \geq 0)$ 满足均值遍历性当且仅当

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (E(X_0 X_k) - \mu^2) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

推论 6.2.2 在上述定理的假设下, 如果

$$E(X_0 X_k) \rightarrow \mu^2, \quad k \rightarrow \infty,$$

那么 $\mathbf{X} = (X_n, n \geq 0)$ 满足均值遍历性.

该推论意味着随机过程渐近不相关. 特别地, 如果 $\mathbf{X} = (X_n, n \geq 0)$ 是平稳白噪声序列, 即 $E(X_n) = 0$ 且对 $\forall k \geq 1, E(X_0 X_k) = 0$, 那么 $\mathbf{X} = (X_n, n \geq 0)$ 满足均值遍历性.

下面考虑连续时间随机过程.

定理 6.2.2 假设 $\mathbf{X} = (X(t), t \geq 0)$ 是连续时间平稳随机过程, $E X(t) = \mu$, 那么 $\mathbf{X} = (X(t), t \geq 0)$ 满足均值遍历性当且仅当

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T (T-t)(E(X(0)X(t)) - \mu^2) dt \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

推论 6.2.3 在上述定理的假设下, $\mathbf{X} = (X(t), t \geq 0)$ 满足均值遍历性当且仅当

$$\frac{1}{T} \int_0^T (E(X(0)X(t)) - \mu^2) dt \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

推论 6.2.4 在上述定理的假设下, 如果

$$E(X(0)X(t)) \rightarrow \mu^2, \quad t \rightarrow \infty,$$

那么 $\mathbf{X} = (X(t), t \geq 0)$ 满足均值遍历性.

例 6.2.1 判断随机相位余弦波过程 $X(t) = a \cos(\omega t + \Theta)$, $\Theta \sim U(0, 2\pi)$ 是否具有均值遍历性.

解 时间平均

$$\tau_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a \cos(\omega t + \Theta) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a[\sin(\omega T + \Theta) - \sin(-\omega T + \Theta)]}{2T\omega} = 0.$$

样本平均

$$\mu_X = \int_0^{2\pi} a \cos(\omega t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = \frac{a[\sin(\omega t + 2\pi) - \sin(\omega t)]}{2\pi} = 0.$$

因此 $\tau_X = \mu_X$, 具有均值遍历性.

例 6.2.2 考虑随机电报信号 $P(X(t) = \pm I) = \frac{1}{2}$, 而正负号在区间 $(t, t + \tau]$ 内变化的次数服从参数为 $\lambda\tau$ 的 Poisson 分布. 证明: $X(t)$ 是弱平稳过程, 并判断是否有均值遍历性.

解 首先 $\mu_X = E[X(t)] = 0$ 为常数; 其次, 设 $\tau > 0$, 则

$$\begin{aligned} \rho(t, t + \tau) &= E[X(t)X(t + \tau)] \\ &= I^2 P(X(t)X(t + \tau) = I^2) - I^2 P(X(t)X(t + \tau) = -I^2) \\ &= I^2 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda\tau} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!} e^{-\lambda\tau} \right\} \\ &= I^2 e^{-\lambda\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda\tau)^k}{k!} = I^2 e^{-2\lambda\tau}. \end{aligned}$$

若 $\tau < 0$, 则 $\rho(t, t + \tau) = \rho(t + \tau, t) = I^2 e^{2\lambda\tau}$; 另外 $\rho(t, t) = E[X^2(t)] = I^2$.

综合上述, $\rho(t, t + \tau) = I^2 e^{-2\lambda|\tau|}$ 仅与 τ 有关, 因此 $X(t)$ 是弱平稳过程. 又因为

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \rho(t, t + \tau) = 0 = \mu_X^2.$$

所以具有均值遍历性.

例 6.2.3 设 $X(t) = e^{-\frac{\alpha t}{2}} B(e^{\alpha t})$, 其中 $\alpha > 0$, $B = (B(t), t \geq 0)$ 是标准 Brown 运动.

(1) 证明: $\mathbf{X} = (X(t), t \geq 0)$ 是强平稳过程;

(2) \mathbf{X} 具有均值遍历性吗? 为什么?

解 (1) 首先 $\mu_X = E[X(t)] = e^{-\frac{\alpha t}{2}} E[B(e^{\alpha t})] = 0$ 为常数; 其次, 设 $t, \tau \geq 0$, 则

$$\begin{aligned} \rho(t, t + \tau) &= E[X(t)X(t + \tau)] \\ &= e^{-\frac{\alpha t}{2}} e^{-\frac{\alpha(t+\tau)}{2}} E[B(e^{\alpha t})B(e^{\alpha(t+\tau)})] \\ &= e^{-\frac{\alpha t}{2}} e^{-\frac{\alpha(t+\tau)}{2}} e^{\alpha t} = e^{-\frac{\alpha \tau}{2}}. \end{aligned}$$

所以对所有的 τ , $\rho(t, t + \tau) = e^{-\frac{\alpha|\tau|}{2}}$ 仅与 τ 有关, 因此 \mathbf{X} 是弱平稳过程. 又由于它是正态过程, 所以它也是强平稳过程.

(2) 因为

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \rho(t, t + \tau) = 0 = \mu_X^2.$$

所以具有均值遍历性.

例 6.2.4 设 X_0 具有密度函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

对 $n \geq 0$, 在已知 X_0, \dots, X_n 的条件下, X_{n+1} 服从 $(1 - X_n, 1]$ 上的均匀分布.

(1) 证明: $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ 是弱平稳过程;

(2) 判断当 $N \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$ 是否依概率收敛? 如果收敛, 收敛到何值?

解 (1) 首先有 $E(X_0) = \int_0^1 x(2x)dx = \frac{2}{3}$, $E(X_0^2) = \int_0^1 (x^2)(2x)dx = \frac{1}{2}$. 对 $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} E(X_{n+1} | X_0, X_1, \dots, X_n) &= \frac{1}{2}(1 - X_n + 1) = 1 - \frac{X_n}{2}, \\ E(X_{n+1}^2 | X_0, X_1, \dots, X_n) &= \frac{1}{12}X_n^2 + \left(1 - \frac{X_n}{2}\right)^2 = \frac{X_n^2}{3} - X_n + 1. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}) &= E[E(X_{n+1} | X_0, X_1, \dots, X_n)] = 1 - \frac{E(X_n)}{2}, \\ E(X_{n+1}^2) &= E[E(X_{n+1}^2 | X_0, X_1, \dots, X_n)] = \frac{E(X_n^2)}{3} - E(X_n) + 1. \end{aligned}$$

由归纳法可知, $E(X_n) = \frac{2}{3}$, $E(X_n^2) = \frac{1}{2}$ 对所有 n 成立.

对 $n, m \geq 0$, 因为

$$E(X_n X_{n+m+1} | X_0, X_1, \dots, X_{n+m}) = X_n \left(1 - \frac{X_{n+m}}{2}\right),$$

所以

$$E(X_n X_{n+m+1}) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}E(X_n X_{n+m}).$$

由归纳法可知,

$$\rho(n, n+m) = E(X_n X_{n+m}) = \frac{4}{9} + \frac{(-1)^m}{18 \times 2^m}, \quad \forall m \geq 0.$$

所以 $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ 是弱平稳过程;

(2) 当 $m \rightarrow \infty$ 时,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(n, n+m) = \frac{4}{9} = \mu_X^2,$$

因此具有均值遍历性. 从而当 $N \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \xrightarrow{P} \mu_X = \frac{2}{3}$.

七、Brown 运动

7.1 Brown 运动及基本性质

定义 7.1.1 (Brown 运动) 令 $B = (B(t), t \geq 0)$ 是实数值随机过程, 如果满足

1° 初始值: $B(0) = 0$;

2° 增量独立: 假设 $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$, 那么 $B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_k) - B(t_{k-1})$ 相互独立;

3° 增量平稳: 假设 $s < t$, 那么 $B(t) - B(s)$ 与 $B(t-s)$ 同分布, 即分布仅依赖于 $t-s$;

4° 正态分布: 对任何 $t > 0$, 有 $B(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$,

则称 $B = (B(t), t \geq 0)$ 是参数为 σ^2 的 **Brown 运动**. 当 $\sigma^2 = 1$ 时, 称为标准 **Brown 运动**.

以下总假定 $B = (B(t), t \geq 0)$ 为标准 Brown 运动.

命题 7.1.1 (数字特征) 设 $B = (B(t), t \geq 0)$ 是标准 Brown 运动, 则

(1) 均值函数 $\mu(t) = E[B(t)] = 0, t \geq 0$;

(2) 方差函数 $\sigma^2(t) = \text{Var}[B(t)] = t, t \geq 0$;

(3) $m(\geq 1)$ 阶矩 $E[B(t)^m] = \begin{cases} t^k(2k-1)!!, & m = 2k, \\ 0, & m = 2k+1; \end{cases}$

(4) 协方差函数 $r(s, t) = \text{Cov}(B(s), B(t)) = \min\{s, t\} \triangleq s \wedge t$.

例 7.1.1 设 $B = (B(t), t \geq 0)$ 是标准 Brown 运动, 求:

(1) $B(1) + 3B(2)$ 的分布;

(2) $\text{Cov}(B(1) + B(3), B(3) - B(2))$;

(3) $P(B(7) \leq 3 \mid B(1) = 1, B(3) = 2)$.

解 (1) 注意到 $B(1) + 3B(2) = 4B(1) + 3[B(2) - B(1)]$, 而 B 增量独立, 因此

$$B(1) + 3B(2) \sim N(0, 25).$$

或直接计算其方差为

$$\text{Var}(B(1) + 3B(2)) = \text{Var}(B(1)) + 9\text{Var}(B(2)) + 6\text{Cov}(B(1), B(2)) = 25.$$

(2)

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B(1) + B(3), B(3) - B(2)) &= \text{Cov}(B(1) + B(2) + [B(3) - B(2)], B(3) - B(2)) \\ &= \text{Var}[B(3) - B(2)] = 1. \end{aligned}$$

或直接计算得

$$\text{Cov}(B(1) + B(3), B(3) - B(2)) = \text{Cov}(B(1), B(3)) - \text{Cov}(B(1), B(2)) + \text{Var}(B(3)) - \text{Cov}(B(3), B(2)) = 1.$$

(3)

$$\begin{aligned} P(B(7) \leq 3 \mid B(1) = 1, B(3) = 2) &= P(B(7) - B(3) \leq 1 \mid B(1) = 1, B(3) = 2) \\ &= P(B(7) - B(3) \leq 1) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

这里用到了 Brown 运动的 Markov 性.

Brown 运动的样本轨道极其特殊, 具有以下性质.

命题 7.1.2 设 $B = (B(t), t \geq 0)$ 是标准 Brown 运动, 则

(1) 样本轨道几乎处处连续

$$P(\omega \in \Omega : B(\omega, t) \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 上连续}) = 1.$$

(2) 样本轨道几乎无处可导

$$|B(t) - B(s)| \asymp |t - s|^{\frac{1}{2}},$$

其中 \asymp 表示近似. 所以 Brown 运动样本轨道极其不正则.

(3) 样本轨道的刻画: 通常采用简单随机游动的折线去近似 Brown 运动的样本轨道.

考虑 $T = [0, 1]$, $\mathbf{B} = (B(t), 0 \leq t \leq 1)$ 是连续时间取实值的 Brown 运动. 令 $n \geq 1$, S_0, S_1, \dots, S_n 为简单随机游动, 构造 $[0, 1]$ 上连续函数 $X_n(t)$ 如下:

$$X_n(t) = \begin{cases} \frac{S_k}{\sqrt{n}}, & t = \frac{k}{n}, \\ \text{线性插值}, & \frac{k}{n} < t < \frac{k+1}{n}. \end{cases}$$

则 $\mathbf{X}_n = (X_n(t), 0 \leq t \leq 1)$ 是 $[0, 1]$ 区间上的折线, 称为部分和过程. 可以证明, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$(X_n(t), 0 \leq t \leq 1) \Rightarrow (B(t), 0 \leq t \leq 1),$$

其中 “ \Rightarrow ” 表示过程依分布收敛.

下面命题给出了 Brown 运动的分布规律.

命题 7.1.3 设 $\mathbf{B} = (B(t), t \geq 0)$ 是标准 Brown 运动, 则

(1) **1-维分布**: $B(t) \sim N(0, t)$, 密度函数为 $p(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$, $x \in \mathbb{R}$.

(2) **2-维分布**: 假设 $s < t$, 有 $(B(s), B(t)) \sim N\left(0, s; 0, t; \left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$, 矩阵形式为

$$(B(s), B(t)) \sim N\left((0, 0), \begin{pmatrix} s & s \wedge t \\ s \wedge t & t \end{pmatrix}\right).$$

在给定 $B(s) = x$ 的条件下, $B(t)$ 的条件密度函数为

$$p_{t|s}(y|x) = P(B(t) = y | B(s) = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

在给定 $B(t) = y$ 的条件下, $B(s)$ 的条件密度函数为

$$p_{s|t}(x|y) = P(B(s) = x | B(t) = y) = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi s(t-s)}} e^{-\frac{(tx-sy)^2}{2st(t-s)}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(3) **n -维分布**

$$(B(t_1), B(t_2), \dots, B(t_n)) \sim N\left((0, 0, \dots, 0), \begin{pmatrix} t_1 & t_1 \wedge t_2 & \cdots & t_1 \wedge t_n \\ t_1 \wedge t_2 & t_2 & \cdots & t_2 \wedge t_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_n \wedge t_1 & t_2 \wedge t_n & \cdots & t_n \end{pmatrix}\right).$$

这表明 Brown 运动是正态过程, 均值为 0, 任意两个时刻的协方差为 $s \wedge t$.

定理 7.1.1 样本轨道连续的随机过程 $\mathbf{B} = (B(t), t \geq 0)$ 是 Brown 运动当且仅当它是正态过程, 且满足 $E(B(t)) = 0$, $E(B(t)B(s)) = s \wedge t$.

推论 7.1.1 假设 $B = (B(t), t \geq 0)$ 是标准 Brown 运动, 则下列三个过程也是标准 Brown 运动:

(1) 给定 $t_0 \geq 0$, $\tilde{B}(t) = B(t + t_0) - B(t_0)$, $t \geq 0$;

(2) 给定常数 $a \neq 0$, $\tilde{B}(t) = \frac{1}{a}B(a^2t)$, $t \geq 0$;

(3) $\tilde{B}(t) = \begin{cases} tB(t^{-1}), & t > 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$

例 7.1.2 设 $B = (B(t), t \geq 0)$ 是标准 Brown 运动, 求 $P(B(0.5) \leq 1 \mid B(1) = 1, B(2) = 2)$.

解 由 Brown 运动的性质, $\tilde{B} = (\tilde{B}(t), t \geq 0)$ 是标准 Brown 运动, 其中 $B(t) = t\tilde{B}(t^{-1})$. 所以

$$\begin{aligned} P(B(0.5) \leq 1 \mid B(1) = 1, B(2) = 2) &= P(0.5\tilde{B}(2) \leq 1 \mid \tilde{B}(1) = 1, 2\tilde{B}(0.5) = 2) \\ &= P(\tilde{B}(2) \leq 2 \mid \tilde{B}(1) = 1, \tilde{B}(0.5) = 1) \\ &= P(\tilde{B}(2) - \tilde{B}(1) \leq 1 \mid \tilde{B}(1) = 1, \tilde{B}(0.5) = 1) \\ &= P(\tilde{B}(2) - \tilde{B}(1) \leq 1) = \Phi(1) = 0.8413. \end{aligned}$$

这里用到了 0 与 ∞ 的对称性.

7.2 与 Brown 运动相关的过程

(i) Brown 桥

定义 7.2.1 设 $B^0(t) = B(t) - tB(1)$, 称 $B^0 = (B^0(t), 0 \leq t \leq 1)$ 为 **Brown 桥过程**.

边界 $B^0(0) = B^0(1) = 0$. 可以证明 B^0 是均值为 0 的正态过程, 自相关函数为

$$E(B^0(s)B^0(t)) = s \wedge t(1 - s \vee t), \quad 0 \leq s, t \leq 1.$$

于是 1-维分布 $B^0(t) \sim N(0, t(1-t))$.

条件分布: 在 $B(1) = 0$ 的条件下, $B(t)$ 的分布密度函数为

$$p_{t|1}(x|0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t(1-t)}} e^{-\frac{x^2}{2t(1-t)}}.$$

这表明 $B^0(t) \stackrel{d}{=} (B(t) \mid B(1) = 0)$.

(ii) 反射 Brown 运动

定义 7.2.2 设 $X(t) = |B(t)|$, 称 $X = (X(t), t \geq 0)$ 为 **反射 Brown 运动**.

反射 Brown 运动不再是一个正态过程, 其数字特征

$$E[X(t)] = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}, \quad E[X^2(t)] = t, \quad t \geq 0.$$

给定 $t > 0$, 其分布

$$P(X(t) \leq x) = 2\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - 1, \quad p(t, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, \quad x \geq 0.$$

(iii) 几何 Brown 运动

定义 7.2.3 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 记 $X(t) = e^{\alpha t + \beta B(t)}$, 称 $\mathbf{X} = (X(t), t \geq 0)$ 是几何 Brown 运动.

几何 Brown 运动不再是一个正态过程, 其数字特征

$$E[X(t)] = e^{\alpha t + \beta^2 t/2}, \quad E[X^2(t)] = e^{2\alpha t + 2\beta^2 t}, \quad t \geq 0.$$

给定 $t > 0$, $X(t)$ 的密度函数

$$p(t, x) = \frac{1}{\beta x \sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(\ln x - \alpha t)^2}{2\beta^2 t}}, \quad x > 0.$$

(iv) 积分过程

对 Brown 运动而言, 几乎处处每一条样本曲线都连续, 即存在一个零概率事件 Ω_0 , 对每一个 $\omega \in \Omega \setminus \Omega_0$, $B(\omega, t)$ 作为 t 的函数在 $[0, +\infty)$ 连续. 定义

$$X(\omega, t) = \begin{cases} \int_0^t B(\omega, s) ds, & \omega \in \Omega \setminus \Omega_0, \\ 0, & \omega \in \Omega_0. \end{cases}$$

这个积分是一个 Riemann 积分, 它存在并有限.

定义 7.2.4 设 $X(t) = \int_0^t B(s) ds$, 称 $\mathbf{X} = (X(t), t \geq 0)$ 为积分过程.

积分过程是一个正态过程, 这是因为

$$\int_0^t B(s) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (s_i - s_{i-1}) B(s_i),$$

而 B 是一个正态过程. 积分过程 \mathbf{X} 的数字特征

$$E[X(t)] = 0, \quad t \geq 0; \quad \text{Cov}(X(s), X(t)) = \frac{s^2 t}{2} - \frac{s^3}{6}, \quad s \leq t.$$

7.3 最大值与首中时分布

定义 7.3.1 (首中时) 设 $\mathbf{B} = (B(t), t \geq 0)$ 是标准 Brown 运动, $a \neq 0$, 令

$$T_a = \inf\{t > 0 : B(t) = a\},$$

表示首次击中 a 的时刻, 称为 a 的首中时.

定理 7.3.1 (反射原理) 固定实数 a , 令

$$\tilde{B}(t) = \begin{cases} B(t), & t < T_a, \\ 2a - B(t), & t \geq T_a, \end{cases}$$

则 $\tilde{\mathbf{B}} = (\tilde{B}(t), t \geq 0)$ 也是 Brown 运动.

证明 对 $t \geq 0$, 令

$$Y(t) = B(t)\mathbf{1}_{\{t \leq T_a\}}, \quad Z(t) = B(t + T_a) - a.$$

则 $Z = (Z(t), t \geq 0)$ 是独立于 $Y = (Y(t), t \geq 0)$ 的 Brown 运动. 因而 $-Z$ 也是独立于 Y 的 Brown 运动, 所以 (Y, Z) 与 $(Y, -Z)$ 具有相同的有限维分布.

$$\varphi: (Y, Z) \rightarrow \{Y(t)\mathbf{1}_{t \leq T_a} + (a + Z(t - T_a))\mathbf{1}_{t > T_a}, t \geq 0\}$$

生成一个连续过程, $\varphi(Y, -Z)$ 也是一个连续过程, 且两者具有相同的有限维分布. 又 $\varphi(Y, Z) = B$, $\varphi(Y, -Z) = \tilde{B}$, 所以 \tilde{B} 也是 Brown 运动. \square

命题 7.3.1 (最大值分布) 设 $B = (B(t), t \geq 0)$ 是标准 Brown 运动, 定义

$$M(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} B(s), \quad t \geq 0,$$

那么 $M(t) \stackrel{d}{=} |B(t)|$.

证明 当 $x < 0$ 时, $P(M(t) \leq x) = 0$. 首先由反射定理知, 对 $\forall a, y, t \geq 0$,

$$P(M(t) \geq a, B(t) \leq a - y) = P(B(t) \geq a + y).$$

当 $x \geq 0$ 时, 考虑

$$\begin{aligned} P(M(t) > x) &= P(M(t) > x, B(t) > x) + P(M(t) > x, B(t) < x) + P(M(t) > x, B(t) = x) \\ &= P(B(t) > x) + P(B(t) > x) + 0 = 2P(B(t) > x) = P(|B(t)| > x). \end{aligned}$$

因此 $M(t) \stackrel{d}{=} |B(t)|$. \square

注意到 $T_a \leq t \Leftrightarrow M(t) \geq a$, 因此首中时 T_a 的密度函数为

$$p_{T_a}(t) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}}, \quad t > 0.$$

更进一步, 给定 $a \in \mathbb{R}$, 有 $P(T_a < \infty) = 1$, $E(T_a) = \infty$. 这一结论告诉我们, $|a|$ 无论多大, 从 0 点出发的 Brown 运动总会在有限时间内到达 a ; 另一方面, $|a|$ 无论多么靠近 0, Brown 运动到达 a 所需要的平均时间为 ∞ .

定理 7.3.2 令 $a < 0 < b$, 那么

$$P(T_a < T_b) = \frac{b}{b-a}, \quad P(T_a > T_b) = \frac{-a}{b-a}.$$

例 7.3.1 设 $B = (B(t), t \geq 0)$ 是标准 Brown 运动. 设 $X(t) = \left| \min_{0 \leq s \leq t} B(s) \right|$, 求 $X(t)$ 的分布函数.

解 注意到

$$X(t) = \left| \min_{0 \leq s \leq t} B(s) \right| = -\min_{0 \leq s \leq t} B(s) = \max_{0 \leq s \leq t} B_1(s),$$

其中 $B_1(s) = -B(s)$. 因此, 当 $y > 0$ 时,

$$P(X(t) \leq y) = 1 - P\left(\max_{0 \leq s \leq t} B_1(s) > y\right) = 1 - 2P(B_1(t) > y) = 2\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right) - 1.$$

$$\text{所以 } F_{X(t)}(y) = \begin{cases} 2\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right) - 1, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

例 7.3.2 以 $X(t)$ 表示 t 时刻的股票价格 (单位: 元). 设 $X(t) = 2^{B(t)}$, 其中 $\{B(t); t \geq 0\}$ 是标准 Brown 运动. 求 $[0, 4]$ 内股票价格不曾达到 8 元的概率.

解 由题意

$$P(\max_{0 \leq t \leq 4} X(t) < 8) = P(\max_{0 \leq t \leq 4} B(t) < 3) = 1 - 2P(B(4) \geq 3) = 2\Phi(1.5) - 1 = 0.8664.$$

注意这里利用了几何 Brown 运动与 Brown 运动的单调性.

7.4 随机积分 (Itô 积分)

(i) 有界变差与无界变差

定义 7.4.1 (有界变差) 假设 G 是 $[a, b]$ 上的实值函数. 对 $[a, b]$ 进行分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 如果

$$\sup_{\Delta} \sum_{i=1}^n |G(x_i) - G(x_{i-1})| < \infty,$$

则称 G 在 $[a, b]$ 上具有有界变差.

假设 G 是 $[0, +\infty)$ 上的实值函数. 如果

$$\sup_{t > 0} \sup_{\Delta} \sum_{i=1}^n |G(x_i) - G(x_{i-1})| < \infty,$$

其中 Δ 是 $[0, t]$ 上的分割, 则称 G 在 $[0, +\infty)$ 上具有有界变差.

可以证明, 任何有界变差函数都可以写成两个单调增函数的差, 都几乎处处可微; 另外, $[a, b]$ 上具有有界导函数的函数是有界变差函数, $[a, b]$ 上的单调函数是有界变差函数.

命题 7.4.1 假设 f 是 $[a, b]$ 上的连续函数, G 是 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 那么 Riemann-Stieltjes 积分 $\int_a^b f(x) dG(x)$ 存在.

如果对所有连续函数 f , 积分 $\int_a^b f(x) dG(x)$ 都存在, 则 G 一定是 $[a, b]$ 上的有界变差函数.

下面定理表明标准 Brown 运动 $B = (B(t), t \geq 0)$ 是无界变差函数.

定理 7.4.1 仅考虑 $t \in [0, 1]$. 将该区间进行 2^n 等分, 则和式

$$S_n = \sum_{i=1}^{2^n} \left| B\left(\frac{i}{2^n}\right) - B\left(\frac{i-1}{2^n}\right) \right| \rightarrow \infty, \quad \text{a.s.,} \quad n \rightarrow \infty.$$

证明 注意到

$$\begin{aligned} E(S_n) &= \sum_{i=1}^{2^n} E \left| B\left(\frac{i}{2^n}\right) - B\left(\frac{i-1}{2^n}\right) \right| = 2^n E \left| N\left(0, \frac{1}{2^n}\right) \right| = 2^n \left(\frac{2}{\pi 2^n} \right)^{1/2}. \\ \text{Var}(S_n) &= \sum_{i=1}^{2^n} \text{Var} \left| B\left(\frac{i}{2^n}\right) - B\left(\frac{i-1}{2^n}\right) \right| = 2^n \text{Var} \left| N\left(0, \frac{1}{2^n}\right) \right| = 2^n \frac{t}{2^n} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) = \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) t. \end{aligned}$$

所以

$$P\left(S_n < \frac{E(S_n)}{2}\right) \leq P\left(|S_n - E(S_n)| \geq \frac{E(S_n)}{2}\right) \leq \frac{4\text{Var}(S_n)}{[E(S_n)]^2} \rightarrow 0.$$

所以 $S_n \xrightarrow{P} \infty$, 又 S_n 单调递增, 所以 $S_n \rightarrow \infty$, a.s..

□

(ii) 随机积分

假设 $f = (f(t), t \geq 0)$ 是非随机、有界变差函数, 定义

$$\int_0^t f(s)dB(s) = f(t)B(t) - \int_0^t B(s)df(s),$$

其中 $\int_0^t B(s)df(s)$ 是 Brown 运动关于 f 的 Riemann-Stieltjes 积分.

假设 $f = (f(t), t \geq 0)$ 是随机过程, 如何定义 $\int_0^t f(s)dB(s)$?

由于 Brown 运动具有无界变差, 按 Riemann-Stieltjes 积分方式定义可能会引起麻烦. 以 $f(s) = B(s)$ 为例, 可以证明, 将 $[0, t]$ 进行划分, 分点记为 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$, 在均方收敛的意义下, 取左端点计算积分值为 $(B(t)^2 - t)/2$, 取右端点计算积分值为 $(B(t)^2 + t)/2$.

(iii) Itô 积分

假设 $B = (B(t), t \geq 0)$ 是标准 Brown 运动, $f = (f(t), t \geq 0)$ 是一个关于 B 适应的随机过程, 即 $f(t)$ 仅依赖于 $\{B(s), 0 \leq s \leq t\}$. 进一步假设

$$\int_0^\infty E[f(s)^2]ds < \infty.$$

对任意 $t > 0$, 将 $[0, t]$ 进行划分, 分点记为 $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = t$, 使得 $\Delta = \max_{1 \leq i \leq n} |s_i - s_{i-1}| \rightarrow 0$, 选择 $\xi = s_{i-1}$ (区间的左端点), 作 Riemann-Stieltjes 和

$$S_n(t) = \sum_{i=1}^n f(s_{i-1})(B(s_i) - B(s_{i-1})).$$

一定存在一个随机变量 $X(t)$, 使得 $E(S_n(t) - X(t))^2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

定义 $\int_0^t f(s)dB(s) = X(t)$, 称 $X(t)$ 是 f 关于 B 的 Itô 积分.

下面命题给出了 Itô 积分运算性质.

命题 7.4.2 设 $X(t) = \int_0^t f(s)dB(s)$ 是 f 关于 B 的 Itô 积分, 则

(1) 数学期望: $E[X(t)] = 0$;

(2) 方差: $\text{Var}[X(t)] = E[X^2(t)] = \int_0^t E[f^2(s)]ds$;

(3) 线性性: $\int_0^t (af(s) + bg(s))dB(s) = a \int_0^t f(s)dB(s) + b \int_0^t g(s)dB(s)$;

(4) 可加性: $\int_0^T f(s)dB(s) = \int_0^t f(s)dB(s) + \int_t^T f(s)dB(s)$.

(iv) Itô 公式

前面给出了 Itô 积分的定义计算, 但通常需要一个基本公式帮助计算.

引理 7.4.1 假设 $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 是一个二次可微分函数, 那么

$$f(B(t)) = f(B(0)) + \int_0^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B(s))ds.$$

需要指出的是, 该公式与 Newton-Lebinitz 公式相比多了最后一个二阶导数项. 这是由于 Brown 运动无界变差引起的, 称作变差项.

由上面的引理, 可以得到 Itô 积分的一个计算公式:

$$\int_0^t f'(B(s))dB(s) = f(B(t)) - f(B(0)) - \frac{1}{2} \int_0^t f''(B(s))ds.$$

例 7.4.1 计算 $\int_0^t B(s)dB(s)$.

解 由上述计算公式, $\int_0^t B(s)dB(s) = \frac{1}{2}B^2(t) - \frac{1}{2} \int_0^t 1ds = \frac{B^2(t) - t}{2}$.

例 7.4.2 计算 $\int_0^t \cos B(s)dB(s)$.

解 由上述计算公式, $\int_0^t \cos B(s)dB(s) = \sin B(t) + \frac{1}{2} \int_0^t \sin B(s)ds$.

例 7.4.3 计算 $\int_0^t e^{B(s)}dB(s)$.

解 由上述计算公式, $\int_0^t e^{B(s)}dB(s) = e^{B(t)} - 1 - \frac{1}{2} \int_0^t e^{B(s)}ds$.

引理 7.4.2 假设 $f(t, x)$ 是二元函数, 关于 t 和 x 的二阶偏导数存在并且连续, 那么

$$f(t, B(t)) = f(0, 0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} f(s, B(s))ds + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(s, B(s))dB(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, B(s))ds.$$

例如, 对几何 Brown 运动有

$$f(t, B(t)) = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B(t)} = 1 + \mu \int_0^t f(s, B(s))ds + \sigma \int_0^t f(s, B(s))dB(s).$$

(v) Itô 过程

定义 7.4.2 假设 $B = (B(t), t \geq 0)$ 是标准 Brown 运动, $a(t, x)$ 和 $b(t, x)$ 是两个二元函数, 称满足下列方程

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t b(s, X(s))dB(s)$$

的随机过程 $X = (X(t), t \geq 0)$ 为 Itô 扩散过程, 称 $a(t, x)$ 为漂移系数, $b(t, x)$ 为扩散系数.

Itô 扩散过程 \mathbf{X} 通常简记为如下的随机微分方程

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dB(t).$$

引理 7.4.3 假设 $\mathbf{X} = (X(t), t \geq 0)$ 是 Itô 扩散过程, 具有漂移系数 $a(t, x)$ 和扩散系数 $b(t, x)$; $f(t, x)$ 是二元函数, 关于 t 和 x 的二阶偏导数存在并且连续, 那么

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) &= f(0, X(0)) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} f(s, X(s))ds + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(s, X(s))dX(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, X(s))b^2(s, X(s))ds \end{aligned}$$

命题 7.4.3 (分部积分公式) 假设 $\mathbf{X} = (X(t), t \geq 0), \mathbf{Y} = (Y(t), t \geq 0)$ 是两个 Itô 扩散过程:

$$\begin{aligned} dX(t) &= a_1(t, X(t))dt + b_1(t, X(t))dB(t) \\ dY(t) &= a_2(t, Y(t))dt + b_2(t, Y(t))dB(t) \end{aligned}$$

那么 $\mathbf{Z} = (Z(t) = X(t)Y(t), t \geq 0)$ 也是 Itô 扩散过程, 并且

$$d(X(t)Y(t)) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + b_1(t, X(t))b_2(t, Y(t))dt.$$

7.5 Black-Scholes 公式

现有欧式买入期权, 规定持有人在 T 时刻以指定价格 K 购买股票, 但不具有义务. 假定在 $(0, T)$ 内任意时刻可以买卖该期权, Black-Scholes 公式给出了 t 时刻欧式买入期权的合理价格为

$$V(t) = S(t)\Phi(d_1(t, S(t))) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2(t, S(t))),$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, $S(t) = e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B(t)}$ 为 t 时刻 1 单位股票的价格, 并且

$$d_1(t, x) = \frac{\ln x - \ln K + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma(T - t)^{1/2}}, \quad d_2(t, x) = \frac{\ln x - \ln K + (r - \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma(T - t)^{1/2}}.$$