金融数学

第4章 投资组合理论

“不要把所有的鸡蛋都放在同一只篮子里。”

——**1981**年诺贝尔经济学奖公布后，记者要求获奖人、耶鲁大学的**James Tobin**教授尽可能简单、通俗地概括他的研究成果，教授即回答了这句话。

投资组合理论概述

- 现代投资理论的产生以1952年3月Harry.Markowitz发表的《投资组合选择》为标志
- 1962年，Willian Sharpe对资产组合模型进行简化，提出了资本资产定价模型（Capital asset pricing model，CAPM）
- 上述的几个理论均假设市场是有效的。人们对市场能够按照定价理论的问题也发生了兴趣，1965年，Eugene Fama在其博士论文中提出了有效市场假说（Efficient market hypothesis，EMH）。
- 1976年，Stephen Ross提出了替代CAPM的套利定价模型（Arbitrage pricing theory，APT）。

第4章 投资组合理论

注意！
本章内容具
挑战性——汇聚数
位诺贝尔奖得主
的研究成果

本章内容概览

1. 两种资产组合的有效集

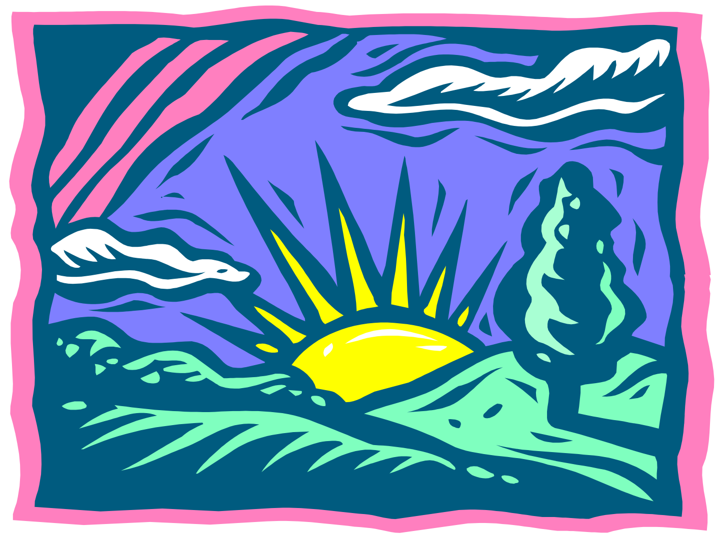
2. 多种资产组合的有效集

3. 多元化效应及其启示

4. 风险资产与无风险借贷的组合

5. C-VaR风险度量下的资产组合理论

从一则故事说起……



- 从前，一老妪膝下生有二女：长女嫁至城东染布店作妇、 小女许与城西雨伞店为媳。遇天雨，老妇就愁眉不展；逢天晴，老妇也唉声叹气，全年到头未尝舒心开颜。人怪之，或问其故，对曰：“阴天染布不得晒，晴天伞具无从卖。悲乎吾二女，苦哉老身命！” ……
- 故事本意劝人换个角度看问题，但其中也蕴含多元化减低风险的道理——

例4-1：多元化降低风险——Diversification Reduces Risk

投资	天气	概率	结果	加权结果
染布店	晴天	.40	￥600	￥240
（￥1,000）	下雨	.60	-200	-120
			预期结果	**￥120**

例4-1：多元化降低风险——Diversification Reduces Risk

投资	天气	概率	结果	加权结果
染布店	晴天	.40	￥600	￥240
（￥1,000）	下雨	.60	-200	-120
			预期结果	**￥120**
雨伞店	晴天	.40	-￥300	-￥120
（￥1,000）	下雨	.60	500	300
			预期结果	**￥180**

例4-1：多元化降低风险——Diversification Reduces Risk

投资	天气	概率	结果	加权结果
染布店	晴天	.40	￥600	￥240
（￥1,000）	下雨	.60	-200	-120
			预期结果	**￥120**
雨伞店	晴天	.40	-￥300	-￥120
（￥1,000）	下雨	.60	500	300
			预期结果	**￥180**
组合：	晴天	.40	￥300	￥120
染店＋伞店	下雨	.60	300	180
（￥2,000）			**预期结果**	**￥300**

多元化的效果

- 本例中，单独来看两项投资都有风险，但若将它们看成是包含在一个投资组合中的项目时，不确定性完全消失（不论阴晴皆稳赚￥300），风险为零。这是多元化（diversification）的一个特例：多元化完全消除风险
- *在其它大多数情况下，多元化只能部分消除风险。*但这已经够了——想想看，两个或多个风险项目组合在一起，风险不是相加，而是相抵！

单项资产的收益——

单项资产的预期收益率 (expected return)

- 即单项资产的收益率的平均数，计算方法：
  - 历史收益率的简单算术平均
  - 历史收益率的加权平均—根据历史预测未来投资前景，考虑各种可能情况及其出现的概率p_i、该种情况下的可能收益率R_i，并进行加权平均：

$$E(\tilde{R}) \text{ 或 } \bar{R} = \sum_{i=1}^{n} R_i p_i \qquad \textbf{(4-1)}$$

单项资产的风险——

单项资产收益率的方差(variance)/标准差(standard deviation)

$$\sigma^2\text{或}Var(\tilde{R}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left[R_i - E(R)\right]^2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

(4-2)

资产组合权数 portfolio weights

- 组合中每一单项资产投资占资产组合总价值的百分比，记作w_i

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n = \sum_{i=1}^{n} w_i = 1.0$$

资产组合的收益率是单一资产收益率的加权平均。

资产组合的收益——

组合的预期收益率 portfolio expected return

投资组合中的资产数目

$$E(R_P)=\sum_{i=1}^{n} w_i E(R_i) \qquad \textbf{(4-3)}$$

资产组合的预期收益率

第i项资产的预期收益率

第i项资产的投资组合权数

或记作：

$$\overline{R}_P=\sum_{i=1}^{n} w_i \overline{R}_i$$

资产组合的风险——
组合收益率的方差/标准差

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i \sigma_i^2$$
$$= 0.50 \times .1536 + .0.50 \times .1536$$
$$= .1536$$

切忌惯性思维。资产组合的风险非单个资产风险的加权。正如我们已看到，该组合不存在风险，故而组合的方差/标准差应该为**0**。正确的计算方法仍可从方差的定义出发——

收益率的协方差(Covariance)

- 衡量组合中一种资产相对于其它资产的风险，记作***Cov(R_A, R_B)*** 或$\boldsymbol{\sigma_{AB}}$
  - 协方差>0，该资产与其它资产的收益率正相关
  - 协方差<0，该资产与其它资产的收益率负相关

$$\sigma_{AB} = \sum p_i \left[R_{Ai} - E\left(\tilde{R}_A\right)\right]\left[R_{Bi} - E\left(\tilde{R}_B\right)\right] = \sigma_{BA} \qquad (4\text{-}4)$$

定理：组合的方差

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}.$$

证明：$\sigma_p^2 = E[(\tilde{R}_p - E[\tilde{R}_p])^2]$

$$= E[(\sum_{i=1}^{n} w_i \tilde{R}_i - \sum_{i=1}^{n} w_i E[\tilde{R}_i])^2]$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i (\tilde{R}_i - E[\tilde{R}_i])\right)^2\right]$$

将平方项展开得到

$$\sigma_p^2 = E[\{w_1(\widetilde{R}_1 - E[\widetilde{R}_1]) + w_2(\widetilde{R}_2 - E[\widetilde{R}_2]) + \cdots w_n(\widetilde{R}_n - E[\widetilde{R}_n])\}^2]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i^{\,2} E[(\widetilde{R}_i - E[\widetilde{R}_i])^2] + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} w_i w_j E[(\widetilde{R}_i - E[\widetilde{R}_i])(\widetilde{R}_j - E[\widetilde{R}_j])]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i^{\,2} \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i^{\,2} \sigma_i^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le n}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}.$$

用协方差计算组合的方差（两种资产）

- 若已知两种资产的协方差σ_{AB}和各自的方差σ_A^2、σ_B^2，则由这两种资产按一定权重构成的组合的方差为：

$$\sigma_P^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_{AB} \tag{4-5}$$

w_A、w_B为资产组合权数，$w_A + w_B = 1$

收益率的相关系数(Correlation)——将协方差标准化

- 协方差的数值大小难以解释，解决办法就是计算两种资产的相关系数——协方差除以各自标准差的乘积：

“rho”

$$\rho_{AB} = Corr\left(\tilde{R}_A, \tilde{R}_B\right) = \frac{Cov\left(\tilde{R}_A, \tilde{R}_B\right)}{\sigma_A \times \sigma_B} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \sigma_B} \qquad \textbf{(4-6)}$$

相关系数总是介于+1和-1之间，其符号取决于协方差的符号

多元化减少风险的原理

- 两种资产的协方差σ_{AB}可被定义为相关系数同每个单项资产标准差的乘积——$\sigma_{AB} = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B$，故两种资产组合的方差又可表示为

$$\sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_A w_B \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B \quad \textbf{(4-7)}$$

该式不仅为我们提供了另一种计算资产组合的方差的途径，更重要的是，它揭示了多元化效应产生的机理——

多元化减少风险的原理

- 若$\rho_{AB} = 1$，$\sigma_P = w_A\sigma_A + w_B\sigma_B$，组合的风险等于单个资产风险的加权平均数——***即若两种资产收益率完全正相关，多元化无助于消除风险***
- 若$-1 < \rho_{AB} < 1$，$\sigma_P < w_A\sigma_A + w_B\sigma_B$，组合的风险小于单个资产风险的加权平均数。亦即，**只要两种资产收益率不完全正相关，组合的多元化效应就会起作用**
- 当$\rho_{AB} = -1$，多元化将能完全消除风险

1. 两种资产组合的有效集

马科维茨投资组合理论的假设

1. **单期投资：**是指投资者在期初投资，在期末获得回报。单期模型是对现实的一种近似描述，如对零息债券、欧式期权等的投资。虽然许多问题不是单期模型，但作为一种简化，对单期模型的分析成为我们对多时期模型分析的基础。
2. **正态分布：**投资者事先知道投资收益率的概率分布，并且收益率满足正态分布的条件。

3. **二次效应函数：** 投资者的效用函数是二次的，即 $u(W)=a+bW+CW^2$。

（注意：假设2或3成立可保证期望效用仅仅是财富期望和方差的函数）

4. **期望收益率和方差。** 衡量投资者以期望收益率（亦称收益率均值）来衡量未来实际收益率的总体水平，以收益率的方差（或标准差）来衡量收益率的不确定性（风险），因而投资者在决策中只关心投资的期望收益率和方差。

5. **占优法则：** 投资者都是不知足的和厌恶风险的，遵循占优原则，即：在同一风险水平下，选择收益率较高的证券；在同一收益率水平下，选择风险较低的证券。

期望效用分析与均值一方差分析的关系

- 一般来说，**资产回报的均值和方差并不能完全包含个体做选择时所需的全部信息。**
- 但在一定条件下，个体的期望效用函数能够仅仅表示为资产回报的均值和方差的函数，从而投资者可以只把均值和方差作为选择的目标。
- 条件为：**预期效用函数为二次效用函数或者资产回报服从正态分布**（假设2或3）

下面两个定理证明了：**当预期效用函数为二次函数或者资产回报服从正态分布时，均值—方差与预期效用函数等价，可以完全刻画投资者的偏好特征。**

- **定理4.1** 如果 $u(\tilde{W}) = a + b\tilde{W} + c\tilde{W}^2$ 则期望效用仅仅是财富的期望和方差的函数
- **定理4.2** 如果期望财富服从正态分布，则期望效用函数仅仅是财富的期望和方差的函数。

$$E[\tilde{W} - E[\tilde{W}]]^j = \begin{cases} 0 & j\text{为奇数} \\ \dfrac{j!}{(\frac{j}{2})!} \dfrac{[Var(\tilde{W})]^{1/2}}{2^{1/2}} & j\text{为偶数} \end{cases}$$

二次效用函数的假设和正态分布的假设不符合实际的消费者投资情况

因为二次函数具有递增的绝对风险厌恶和满足性两个性质。满足性意味着在满足点以上，财富的增加使效用减少，递增的绝对风险厌恶意味着风险资产是劣质品。这与那些偏好更多的财富和将风险视为正常商品的投资者不符。此外，正态分布的中心轴对称与一般股票的有限责任不一致。

注：均值-方差模型不是一个资产选择的一般性模型。它在金融理论中之所以扮演重要的角色，是因为它具有数理分析的简易性和丰富的实证检验。

如何进行资产组合？

- 我们已经知道，只要组合中证券的两两相关系数绝对值<1，组合的多元化效应将发生作用
  ——这就回答了**为何要进行投资组合**的问题
- 但在组合内部，构成组合的风险资产之间的权重比例关系应该是多少——**应如何进行资产组合**？

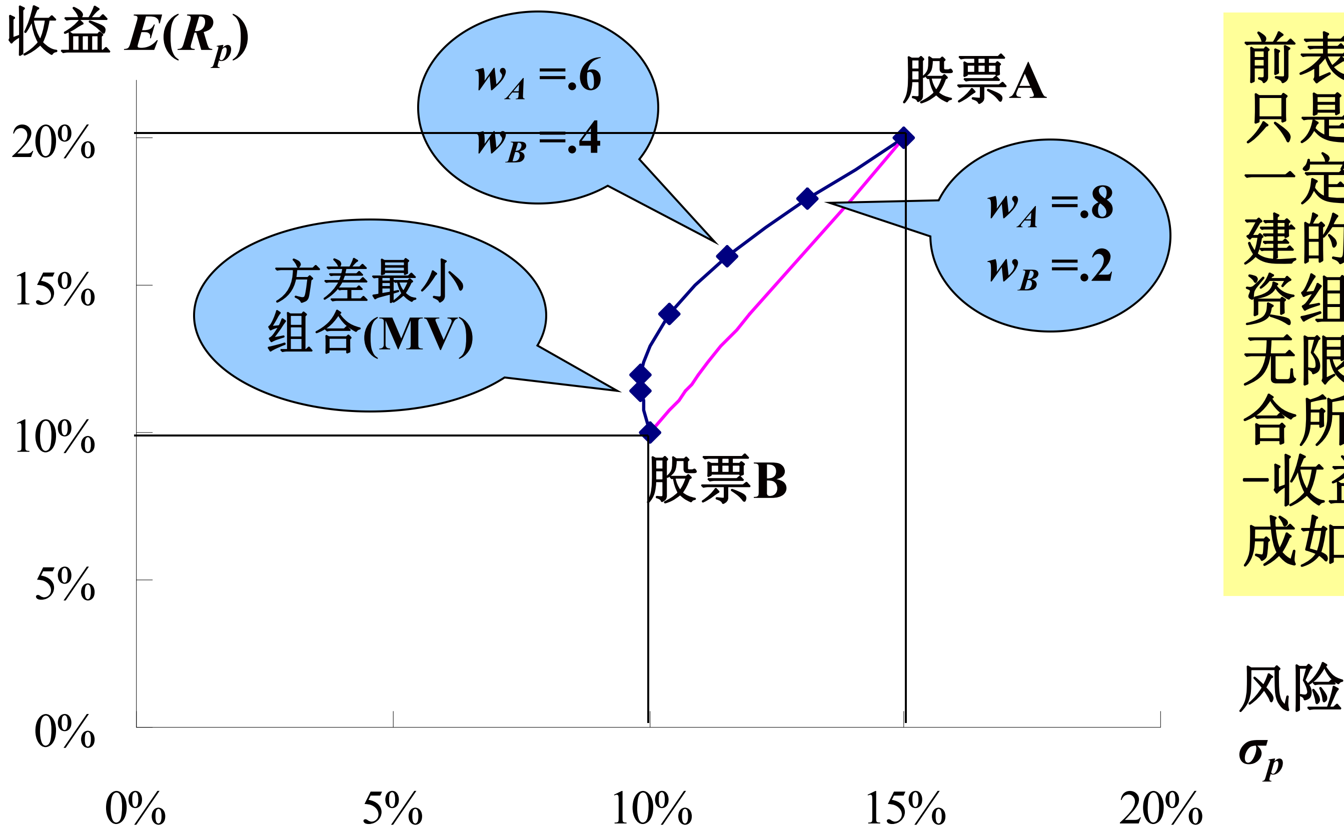
首先从两种资产的组合考察起——

例：改变权数时两种资产组合的预期收益率-标准差（收益-风险）的集合

单项资产	预期收益率 $E(R)$	标准差 σ	相关系数 ρ_{AB}
股票A	20%	15%	+0.5
股票B	10%	10%	

组合	1	2	3	4	5	6
w_A	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
w_B	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	0.0
$E(R_P)$	10.0%	12.0%	14.0%	16.0%	18.0%	20.0%
σ_P	10.0%	9.8%	10.4%	11.5%	13.1%	15.0%

图4-2：股票A与股票B投资组合的风险-收益集合（$\varrho_{AB} = +.5$）



前表计算的组合只是两种股票按一定比例所能构建的无限多个投资组合中的几个。无限多个投资组合所形成的风险–收益集合则形成如图的曲线

机会集 Opportunity Set

- 图4-2的曲线代表一个投资者考虑投资于由A股票和B股票所构成的各种可能组合，即面临着投资的“**机会集**”或“**可行集（feasible set）**”
  - 投资者可以通过合理地构建这两种证券的组合（视其个人的风险厌恶程度）而获得曲线上的任意一点
  - 但投资者不能获得曲线上方的任意一点，且预期收益率再高也高不过A股票的20%
  - 投资者也不能（也不愿）获得曲线下方的任意一点，且预期收益率再低也不会比B股票的10%低

曲线或直线

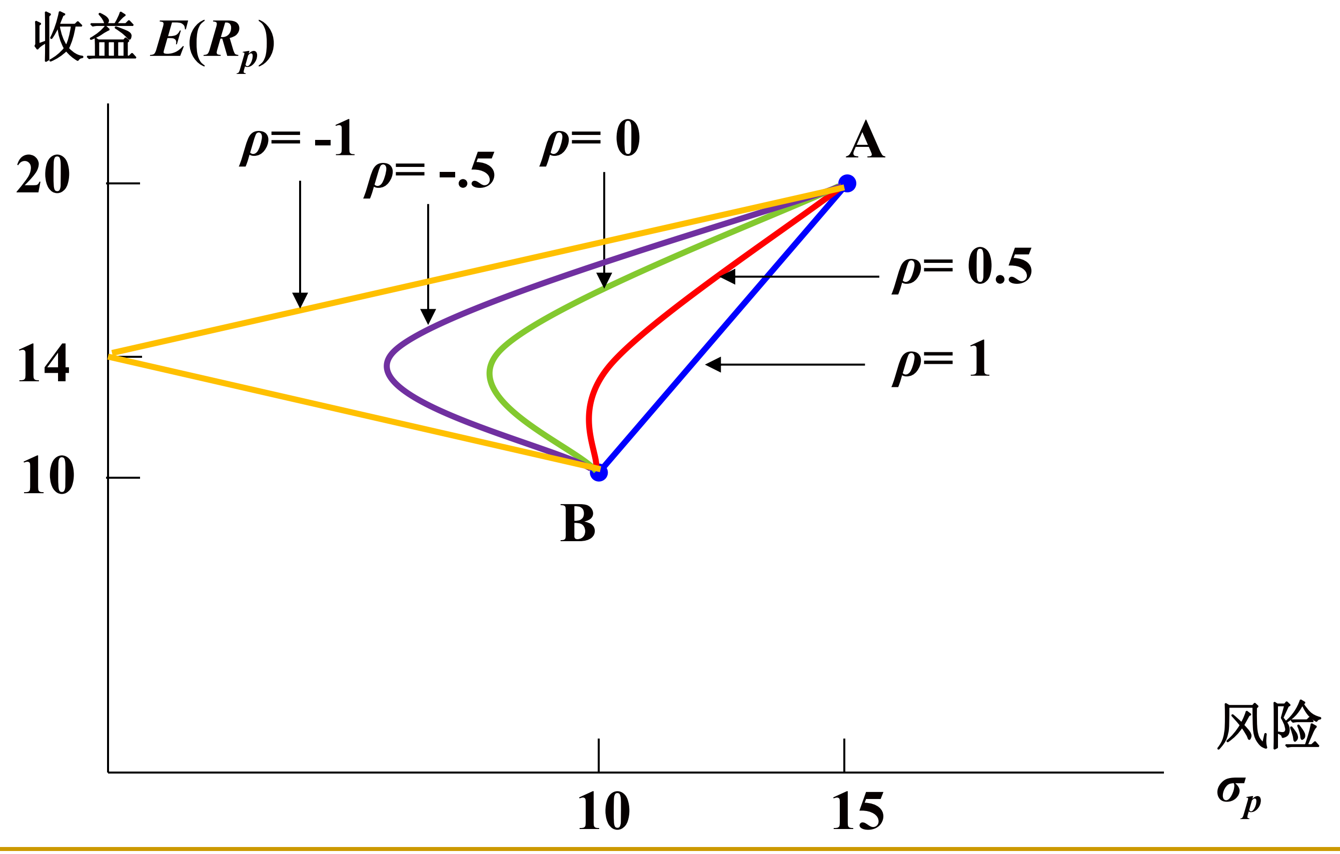
- 若组合中的证券的相关系数$|\rho_{AB}|<1$，则其各种可能的组合就将是一条曲线；若 $\rho_{AB}=1$，则两种证券的各种可能组合将是一条直线——直线AB
- 曲线总是位于直线的左边——相同的预期收益率，曲线具有更小的标准差。
  - 也就是说，***组合的多元化效应只存在于曲线***；而当 $\rho_{AB}=1$时，不存在组合多元化效应
- **曲线和直线不能同时存在**——一个投资者只能在同一条曲线上的不同的点之间进行选择，而不能在直线和曲线上的点之间作选择

不同相关系数下的机会集

- 当相关系数变化时，组合的收益-风险曲线随之不同：相关系数（程度）越低，曲线越弯，取得同等预期收益所担的风险越小（当ρ_{AB} = -1，弯曲度达到最大--折断了）

- *一对证券间只存在一个相关系数，所以现实中一对证券也只存在一个机会集——亦即只有一条曲（直）线，其它线只是供参照对比的假设情形*

图4-3： ϱ_{AB}取不同值时股票A与股票B投资组合的机会集



最小方差组合

- 由14.3%的股票A和85.7%的股票B构成的组合称作**最小方差（Minimum Variance, *MV*）组合**——该组合具有最小的风险

该权数如何推知？

最小方差组合中各资产的权数

$$\sigma_P^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_{AB}$$

设$w_A = x$，$w_B = 1 - x$，则：

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= x^2\sigma_A^2 + (1-x)^2\sigma_B^2 + 2x(1-x)\sigma_{AB} \\ &= \left(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{AB}\right)x^2 - 2\left(\sigma_B^2 - \sigma_{AB}\right)x + \sigma_B^2\end{aligned}$$

当$w_A = x = (\sigma_B^2 - \sigma_{AB}) / (\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{AB})$时，$\sigma_P^2$有最小值

例：股票A与股票B最小方差组合的权数及最小方差计算

使组合方差最小的股票A股票权数

$$w_A^* = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{AB}} = \frac{\sigma_B^2 - \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B} \quad \textbf{(4-8)}$$

$$= \frac{(10\%)^2 - (0.5)(15\%)(10\%)}{(15\%)^2 + (10\%)^2 - 2(0.5)(15\%)(10\%)} = 14.3\%$$

组合最小标准差

$$w_B^* = 1 - w_A^* = 1 - 14.3\% = 85.7\%$$

$$\sigma_P^* = \left[(w_A^*\sigma_A)^2 + (w_B^*\sigma_B)^2 + 2(w_A^*)(w_B^*)(\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B)\right]^{1/2}$$

$$= \cdots = 9.82\%$$

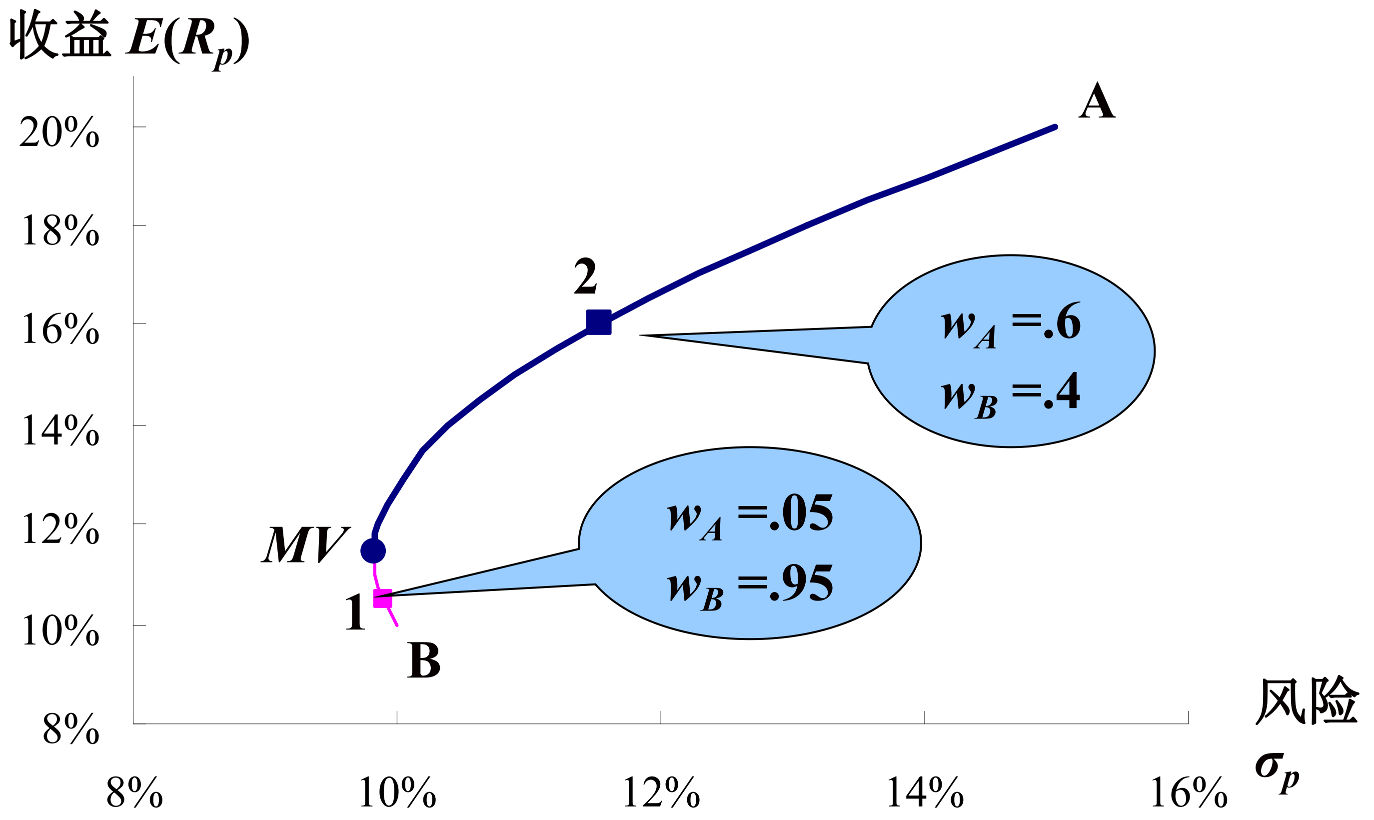
若ρ=－1，w_A^*和σ_P^*又是多少？

“反弓曲线”

- 从股票B到最小方差（MV）组合间有段“反弓曲线”：组合的预期收益率上升、标准差却下降——这一令人惊奇的发现是由于**组合的多元化效应**
- $\rho_{AB} \leq 0$，反弓曲线肯定出现；$\rho_{AB} > 0$，则反弓曲线可能出现也可能不出现
- 反弓曲线只出现一段，随着高风险资产投资比例的提高，组合的标准差终将上升

增加高风险资产（股票A）所占比例，组合的风险不升反降？！

图4-4：两种资产的有效集（$\varrho_{AB} = +.5$）
——将图4-2局部放大



有效集 Efficient Set

- **没有投资者愿意持有一个组合，其预期收益率小于最小方差（MV）组合的预期收益率**。例如，没有人会选择图4-4中的组合1（ 5%A+95%B，预期收益率和标准差分别为10.5%、9.9%）
- **MV组合未必是最理想组合**。有些投资者可能愿意多冒些风险以换取更高收益，比如图4-4中的组合2（60% A+40% B，预期收益率和标准差为16.0%、 11.5%）
- 因此，虽然整段曲线被称为“可行集”，但投资者只考虑从MV到股票A这段曲线，从而该段曲线被称为“**有效集**”或“**有效边界（efficient frontier）**”

2. 多种资产组合的有效集

多种资产组合的机会集

- 当投资者持有超过两种以上的证券时（现实常如此），这两种以上的证券按各种权重所构成的可供选择的组合同样是无穷的
- 不同于两种资产组合的机会集，**多种资产组合的机会集**不是线而是面——如图4-6中的阴影部分——多种资产组合的收益和风险的所有可能组合都将落入该区域内

图4-5：三种资产组合的收益-风险的1,000对可能组合之模拟

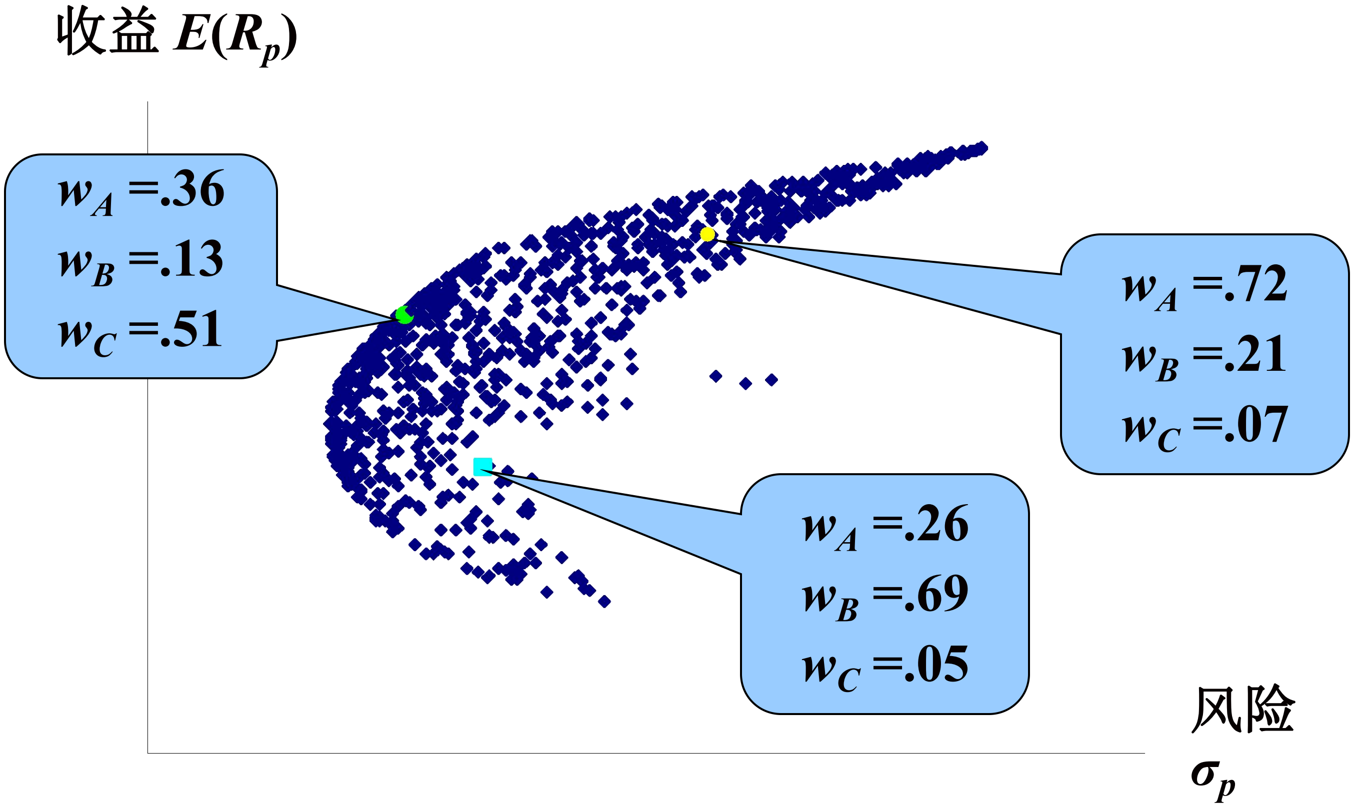
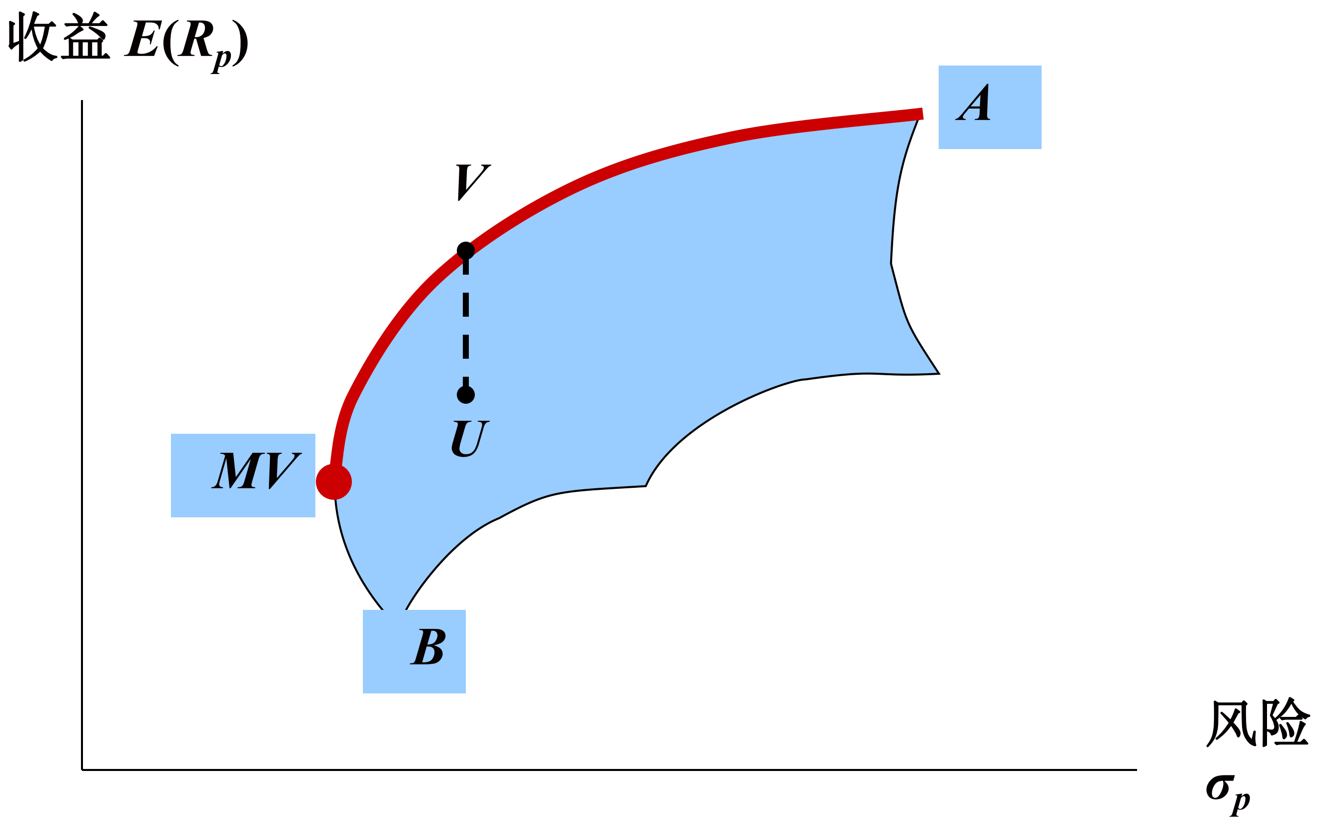


图4-6：多种资产投资组合的
机会集和有效集



多种资产组合的机会集（可行集）

- 任何人都不可能选择收益超过该阴影区的组合
- 任何人也不可能选择收益低于该阴影区的组合
  ——资本市场防止了自我伤害的投资者去投资一项肯定会造成损失的组合
- 任何人都不可能选择风险超过该阴影区的组合
- 任何人都不可能选择风险低于该阴影区的组合

多种资产组合的有效集

- 尽管整个阴影区都是可行集，但投资者只会考虑区域上方从MV到A的这段边线——即图4-6中红色加粗的曲线段——这就是我们所谓的“**多种资产组合的有效集**”，又称“**马科维茨有效边界**”

没有一位投资者愿意选择在有效边界下方的点（如图4-6中的U），因为其收益都小于有效集上相对应的点（V）、却有相同的风险

即便得出有效集，仍要由你做选择

- 马科维茨的“风险资产组合理论”为我们回答了*“如何进行投资组合”*的问题：***要沿“有效边界”构建投资组合***
- 但在现实工作中，随着证券种数的增加，绘制多种资产组合的有效集愈加困难——若组合中有100种证券，就需要估计每种证券的预期收益和标准差，并计算其两两之间的相关系数近5000对（$C_{100}^{2}=4{,}950$）——工程量极其浩大

即便得出有效集，仍要由你做选择

- 尽管该理论在上世纪50年代已经提出，但因为计算机使用时间昂贵而限制了其应用，直到计算机功能的增强才得以改善
- 如今，只要掌握构成组合的资产的收益率、标准差和相关系数等特征数字，我们就可以借助相应软件包相对容易地计算出某个资产组合的有效集
- 但是，在一个有效集内选哪个组合（在有效边界上选哪一点），则完全取决于投资者个人的风险偏好，要对风险与收益进行权衡。这已非电脑软件所能越俎代庖的。

N项风险资产组合有效前沿

1. 假定市场上存在$n \geq 2$种风险资产，令 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$

代表投资到这n种资产上的财富的相对份额，则有：

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

且卖空不受限制，即允许 $w_i \leq 0$

2. $\mathbf{e} = (\overline{r}_1, \overline{r}_2, \cdots, \overline{r}_n)^T$ 也是一个n维列向量，它表示每一种资产的期望收益率，则组合的期望收益

$$\overline{r}_p = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i = \mathbf{w}^T \mathbf{e}$$

3.使用矩阵$\sum$表示资产之间的方差协方差，有

$$\sum = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

注：方差协方差矩阵是**正定、非奇异矩阵**。所以，对于任何非0的向量a，都有 $a^T \sum a>0$，则

$$\boxed{\begin{aligned} &\min_{\mathbf{w}} \sigma_p^2 = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \\ &s.t. \quad \mathbf{w}^T \mathbf{e} = \bar{r}_p \\ &\qquad\ \ \mathbf{w}^T \mathbf{I} = 1 \end{aligned}} \Leftrightarrow \min_{\mathbf{w}} \frac{1}{2}\sigma_p^2 = \frac{1}{2}\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}$$

其中，$\mathbf{I} = (1,1,1,\cdots,1)^T$ 是所有元素为1的n维列向量。由此构造拉格朗日函数

$$\underset{w,\lambda_1,\lambda_2}{L} = \frac{1}{2}\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} + \lambda_1(\bar{r}_p - \mathbf{w}^T \mathbf{e}) + \lambda_2(1 - \mathbf{w}^T \mathbf{I})$$

注意到方差-协方差矩阵正定，二阶条件自动满足，故只要求一阶条件

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = \sum \mathbf{w}_p - \lambda_1 \mathbf{e} - \lambda_2 \mathbf{I} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \overline{r}_p - \mathbf{w}_p{}^T \mathbf{e} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 1 - \mathbf{w}_p{}^T \mathbf{I} = 0 \qquad (3)$$

其中， $\mathbf{0}=[0,0,\ldots,0]^T$

由（1）得到 $\sum \mathbf{w}_p = \lambda_1 \mathbf{e} + \lambda_2 \mathbf{I}$

$$\mathbf{w}_p = \lambda_1 \sum^{-1} \mathbf{e} + \lambda_2 \sum^{-1} \mathbf{I} \qquad (4)$$

把（4）代入（2），得到

$$\begin{aligned} \bar{r}_p = \mathbf{w}_p{}^T \mathbf{e} &= (\lambda_1 \sum^{-1} \mathbf{e} + \lambda_2 \sum^{-1} \mathbf{I})^T \mathbf{e} \\ &= \lambda_1 (\sum^{-1} \mathbf{e})^T \mathbf{e} + \lambda_2 (\sum^{-1} \mathbf{I})^T \mathbf{e} \\ &= \lambda_1 \mathbf{e}^T \sum^{-1} \mathbf{e} + \lambda_2 \mathbf{I}^T \sum^{-1} \mathbf{e} \qquad (5) \end{aligned}$$

把（4）代入（3）

$$1 = \mathbf{w}^T\mathbf{I} = (\lambda_1 \Sigma^{-1}\mathbf{e} + \lambda_2 \Sigma^{-1}\mathbf{I})^T\mathbf{I}$$

$$= \lambda_1 \mathbf{e}^T \Sigma^{-1}\mathbf{I} + \lambda_2 \mathbf{I}^T \Sigma^{-1}\mathbf{I} \qquad \text{（6）}$$

为简化，定义

$$A \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{I}^T \sum{}^{-1}\mathbf{e} = \mathbf{e}^T \sum{}^{-1}\mathbf{I}$$

$$B \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{e}^T \sum{}^{-1}\mathbf{e}$$

$$C \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{I}^T \sum{}^{-1}\mathbf{I}$$

$$D \triangleq BC - A^2 = C(\mathbf{e} - \frac{A}{C}\mathbf{I})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{e} - \frac{A}{C}\mathbf{I})$$

这样我们就可以将（5）和（6）改写为

$$\begin{cases} \overline{r}_p = \lambda_1 B + \lambda_2 A \\ 1 = \lambda_1 A + \lambda_2 C \end{cases}$$

解得

$$\lambda_1 = \frac{C\overline{r}_p - A}{BC - A^2} = \frac{C\overline{r}_p - A}{D} \qquad \textbf{（7）}$$

$$\lambda_2 = \frac{B - A\overline{r}_p}{BC - A^2} = \frac{B - A\overline{r}_p}{D} \qquad \textbf{（8）}$$

将（7）和（8）代入（4）得到，给定收益条件下的最优权重向量为

$$\mathbf{w}_p = \frac{C\overline{r}_p - A}{D}\sum^{-1}\mathbf{e} + \frac{B - A\overline{r}_p}{D}\sum^{-1}\mathbf{I} \qquad (9)$$

其中，

$$A \overset{\Delta}{=} \mathbf{I}^T\sum{}^{-1}\mathbf{e} = \mathbf{e}^T\sum{}^{-1}\mathbf{I}$$

$$B \overset{\Delta}{=} \mathbf{e}^T\sum{}^{-1}\mathbf{e}$$

$$C \overset{\Delta}{=} \mathbf{I}^T\sum{}^{-1}\mathbf{I}$$

$$D \triangleq BC - A^2$$

证券组合前沿的几何结构

对于任意两个前沿证券组合，其回报率的协方差为：

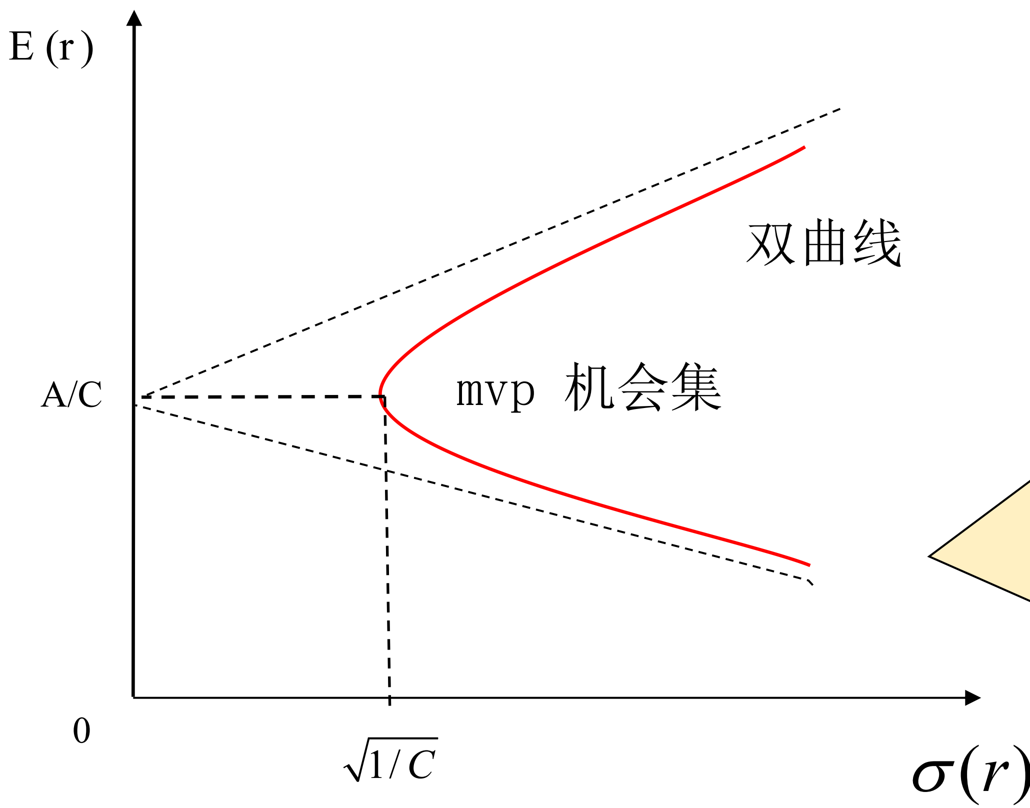
$$Cov(\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)=w_p^T\sum w_q=\frac{C}{D}\left(E[\tilde{r}_p]-\frac{A}{C}\right)\left(E[\tilde{r}_q]-\frac{A}{C}\right)+\frac{1}{C}$$

从而，对于任意前沿证券组合，其回报率和标准差满足如下方程：

$$\frac{\sigma^2(\tilde{r}_p)}{1/C}-\frac{\left[E[\tilde{r}_p]-A/C\right]^2}{D/C^2}=1$$

<u>因此证券组合前沿是以 **(0,A/C)** 为中心，以</u>$E[\tilde{r}_p]=\frac{A}{C}\pm\sqrt{\frac{D}{C}}\sigma(\tilde{r}_p)$<u>为渐近线的双曲线</u>

双曲线图形



说明：
1、MVP是一个特殊点，是一个全局最小方差点；
2、由无差异曲线形状可知，风险厌恶者将只在双曲线的上半支选择投资点。

最小方差证券组合mvp对应的点为$\left(\sqrt{1/C}, A/C\right)$

性质4.1:最小方差集是σ-r（标准差-收益率）平面上的双曲线

证明： 由于 $\mathbf{w}_p = \dfrac{C\bar{r}_p - A}{D}\Sigma^{-1}\mathbf{e} + \dfrac{B - A\bar{r}_p}{D}\Sigma^{-1}\mathbf{I}$

$$= \Sigma^{-1}[\mathbf{e} \quad \mathbf{I}]_{n\times 2}\frac{1}{D}\begin{bmatrix} C\bar{r}_p - A \\ B - A\bar{r}_p \end{bmatrix}$$

$$= \Sigma^{-1}[\mathbf{e} \quad \mathbf{I}]\frac{1}{D}\begin{bmatrix} C & -A \\ -A & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{r}_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

根据线性代数的性质有

$$\frac{1}{D}\begin{bmatrix} C & -A \\ -A & B \end{bmatrix} = \frac{1}{BC-A^2}\begin{bmatrix} C & -A \\ -A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & A \\ A & C \end{bmatrix}^{-1}$$

不妨令

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} B & A \\ A & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e} & \mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{I} \\ \mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{I} & \mathbf{I}^T \Sigma^{-1} \mathbf{I} \end{bmatrix} = [\mathbf{e} \quad \mathbf{I}]^T \Sigma^{-1} [\mathbf{e} \quad \mathbf{I}]$$

注意与$D = BC - A^2$区别

这样，由（9）得到的最优权重向量改写为

$$\mathbf{w}_p = \Sigma^{-1}[\mathbf{e} \quad \mathbf{I}]\mathbf{D}^{-1}\begin{bmatrix} \bar{r}_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

在得到最优权重的基础上，最小方差为

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= \mathbf{w}_p^T \Sigma \mathbf{w}_p \\
&= \{[\bar{r}_p \quad 1]\mathbf{D}^{-1}[\mathbf{e} \quad \mathbf{I}]^T \Sigma^{-1}\}\Sigma\{\Sigma^{-1}[\mathbf{e} \quad \mathbf{I}]\mathbf{D}^{-1}\begin{bmatrix} \bar{r}_p \\ 1 \end{bmatrix}\} \\
&= [\bar{r}_p \quad 1]\mathbf{D}^{-1}\boxed{[\mathbf{e} \quad \mathbf{I}]^T \Sigma^{-1}[\mathbf{e} \quad \mathbf{I}]}\mathbf{D}^{-1}\begin{bmatrix} \bar{r}_p \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= [\bar{r}_p \quad 1]\mathbf{D}^{-1}\begin{bmatrix} \bar{r}_p \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

由于 $\mathbf{D}^{-1}=\dfrac{1}{BC-A^2}\begin{bmatrix} C & -A \\ -A & B \end{bmatrix}$

所以 $\sigma_p^2=\mathbf{w}_p{}^T\sum\mathbf{w}_p$

$$=[\overline{r}_p \quad 1]\mathbf{D}^{-1}\begin{bmatrix} \overline{r}_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{B-2A\overline{r}_p+C\overline{r}_p^2}{BC-A^2}=\frac{1}{D}(C\overline{r}_p^2-2A\overline{r}_p+B)$$

对上式配方得到 $\sigma_p^2 = \frac{C}{D}(\bar{r}_p - A/C)^2 + 1/C$

即

$$\frac{\sigma_p^2}{1/C} - \frac{[\bar{r}_p - A/C]^2}{D/C^2} = 1$$

这是标准差-收益率二维空间中的双曲线，其中心是（0，A/C），渐近线为

$$\bar{r}_p = A/C \pm \sqrt{D/C}\,\sigma_p$$

- **性质4.2**：全局最小方差点的权重向量为

$$\mathbf{w}_{mvp} = \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{I}}{C}$$

- **证明**：由于mvp点是最小方差前沿的一个点，故它满足下式

$$\sigma_{mvp}^2(\overline{r}_{mvp}) = \frac{B - 2A\overline{r}_{mvp} + C\overline{r}_{mvp}^2}{BC - A^2}$$

对上式求驻点

$$\partial \sigma_{mvp}^2(\overline{r}_{mvp}) / \partial \overline{r}_{mvp} = 2(-A + C\overline{r}_{mvp}) = 0$$

所以,$\bar{r}_{mvp} = A / C$ 代入（10）得到

$$\mathbf{w}_{mvp} = \Sigma^{-1}[\mathbf{e} \quad \mathbf{I}]\mathbf{D}^{-1}\begin{bmatrix} \bar{r}_{mvp} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \Sigma^{-1}[\mathbf{e} \quad \mathbf{I}]\frac{1}{BC - A^2}\begin{bmatrix} C & -A \\ -A & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A / C \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \Sigma^{-1}[\mathbf{e} \quad \mathbf{I}]\frac{1}{BC - A^2}\begin{bmatrix} 0 \\ -A^2 / C + B \end{bmatrix} = \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{I}}{C}$$

两基金分离定理（two-fund separation theorem）

- **性质4.3(两基金分离定理)**：在均方有效曲线上任意两点的线性组合，都是具有均方有效组合。
- 假设w_a和w_b是在给定收益r_a和r_b（$r_a \neq r_b$）是具有均方效率的资产组合（基金），则
- **（1）**任何具有均方有效的资产组合都是由w_a和w_b的线性组合构成
- **（2）**反之，由w_a和w_b线性组合构成的资产组合，都是均方有效的。

证明(1)：对于给定 $\overline{r}_c = kr_a + (1-k)r_b, 0 \le k \le 1$ 条件下的资产组合满足均方效率最优权重为

$$\mathbf{w}_c = \Sigma^{-1}[\mathbf{e} \quad \mathbf{I}]\mathbf{D}^{-1}\begin{bmatrix} \overline{r}_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \Sigma^{-1}[\mathbf{e} \quad \mathbf{I}]\mathbf{D}^{-1}\begin{bmatrix} kr_a + (1-k)r_b \\ k + (1-k) \end{bmatrix}$$

$$= k\Sigma^{-1}[\mathbf{e} \quad \mathbf{I}]\mathbf{D}^{-1}\begin{bmatrix} r_a \\ 1 \end{bmatrix} + (1-k)\Sigma^{-1}[\mathbf{e} \quad \mathbf{I}]\mathbf{D}^{-1}\begin{bmatrix} r_b \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= k\mathbf{w}_a + (1-k)\mathbf{w}_b$$

即c是a和b的线性组合，命题1证毕。

- **证明(2)**：反过来，因为 $\mathbf{w}_c = k\mathbf{w}_a + (1-k)\mathbf{w}_b$

且已知$\mathbf{w}_i = [\mathbf{e} \quad \mathbf{I}]\mathbf{D}^{-1}\begin{bmatrix} r_i \\ 1 \end{bmatrix}, i = a, b,$则

$$\mathbf{w}_c = k\Sigma^{-1}[\mathbf{e} \quad \mathbf{I}]\mathbf{D}^{-1}\begin{bmatrix} r_a \\ 1 \end{bmatrix} + (1-k)\Sigma^{-1}[\mathbf{e} \quad \mathbf{I}]\mathbf{D}^{-1}\begin{bmatrix} r_b \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \Sigma^{-1}[\mathbf{e} \quad \mathbf{I}]\mathbf{D}^{-1}\begin{bmatrix} kr_a + (1-k)r_b \\ k + (1-k) \end{bmatrix}$$

$$= \Sigma^{-1}[\mathbf{e} \quad \mathbf{I}]\mathbf{D}^{-1}\begin{bmatrix} \overline{r}_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

即w_c满足均方效率的最优权重，命题证毕.

两基金分离定理的意义

- 定理的前提：两基金（有效资产组合）的期望收益是不同的，即两基金分离。
- 一个决定买入均方效率资产组合的投资者，只要投资到任何两个具有均方有效和不同收益率的基金即可。
  - 投资者无须直接投资于*n* 种风险资产，而只要线性地投资在两种基金上就可以了。
- 计算上的意义：要获得有效边界，我们只需要获得两个解，然后对解进行组合即可。

证券组合前沿的其它重要性质（不要求）

性质4.4 最小方差证券组合回报率与任意证券组合（不一定是前沿证券组合）回报率的协方差总等于最小方差证券组合回报率的方差。即

$$Cov(\overline{r}_p, \overline{r}_{mvp}) = Var(\overline{r}_{mvp}) = \frac{1}{C}$$

性质4.5 有效证券组合的任意凸组合仍为有效证券组合。

其中比MVP回报高的前沿证券组合称为**有效证券组合**；既不是有效证券组合又不是MVP的前沿证券组合称为**非有效证券组合**。

零一协方差证券组合

性质4.6 对于边界上的任意证券组合p，$p \neq mvp$，均存在唯一的前沿证券组合，以zc(p)表示，使得 $Cov(\overline{r}_p, \overline{r}_{zc(p)}) = 0$。该证券组合称为p的<u>零一协方差证券组合</u>

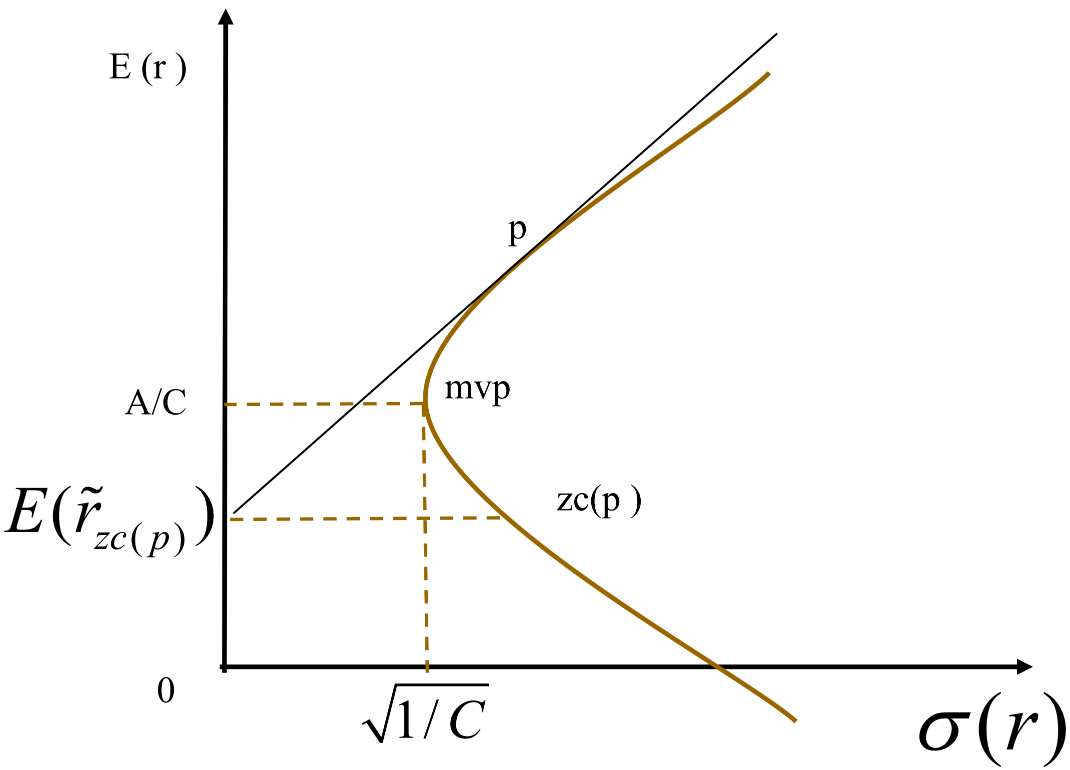
$$E[\tilde{r}_{zc(p)}] = \frac{A}{C} - \frac{D/C^2}{E[\tilde{r}_p] - A/C}$$

前沿证券组合zc(p)和p的地位是“对称的”

$$zc(zc(p)) = p$$

可以看出，二者不可能同时是有效组合

zc (p) 的几何含义



性质4.7：任意一个证券组合q的收益率期望值都可以表示成任意一个边界证券组合p（除mvp外）与其对应的边界证券组合zc(p)的收益率均值的线性组合

$$E(\tilde{r}_q)=(1-\beta_{qp})E(\tilde{r}_{zc(p)})+\beta_{qp}E(\tilde{r}_p)$$

因为zc(p)和p的地位是对称的，即zc(zc(p))＝p，所以将zc(p)和p互换，得到公式的另一种形式为

$$E(\tilde{r}_q)=\beta_{qp}E(\tilde{r}_p)+\beta_{qzc(p)}E(\tilde{r}_{zc(p)})$$

3. 多元化效应及其启示

N种资产组合的方差

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}$$

其中：$i \neq j$

(4-8)

- 资产组合的方差是构成资产方差的加权平均与每两种不同资产之间协方差的加权平均之和——

表4-10：N种资产组合协方差矩阵计算表

资产	1	2	3	…	N
1	$w_1^2\sigma_1^2$	$w_1w_2\sigma_{12}$	$w_1w_3\sigma_{13}$	…	$w_1w_N\sigma_{1N}$
2	$w_2w_1\sigma_{21}$	$w_2^2\sigma_2^2$	$w_2w_3\sigma_{23}$	…	$w_2w_N\sigma_{2N}$
3	$w_3w_1\sigma_{31}$	$w_3w_2\sigma_{32}$	$w_3^2\sigma_3^2$	…	$w_3w_N\sigma_{3N}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
N	$w_Nw_1\sigma_{N1}$	$w_Nw_2\sigma_{N2}$	$w_Nw_3\sigma_{N3}$	…	$w_N^2\sigma_N^2$

注：w_i为第i种资产的投资比例；矩阵对角线为每种资产方差，其它各项则为协方差；非对角线上的项数，大大超过对角线项数——资产组合种数

例：一个特殊的资产组合

资产	1	2	3	…	N
1	$(1/N^2)\overline{Var}$	$(1/N^2)\overline{Cov}$	$(1/N^2)\overline{Cov}$	…	$(1/N^2)\overline{Cov}$
2	$(1/N^2)\overline{Cov}$	$(1/N^2)\overline{Var}$	$(1/N^2)\overline{Cov}$	…	$(1/N^2)\overline{Cov}$
3	$(1/N^2)\overline{Cov}$	$(1/N^2)\overline{Cov}$	$(1/N^2)\overline{Var}$	…	$(1/N^2)\overline{Cov}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
N	$(1/N^2)\overline{Cov}$	$(1/N^2)\overline{Cov}$	$(1/N^2)\overline{Cov}$	…	$(1/N^2)\overline{Var}$

假设表中，(1)每种资产具有相同的方差（$\overline{Var}$）；(2)每对资产的协方差相同（$\overline{Cov}$）；(3)每种资产占组合比例相同（$1/N$）

特殊资产组合的方差

- 将上表的各项相加，得到该特殊资产组合的方差为：

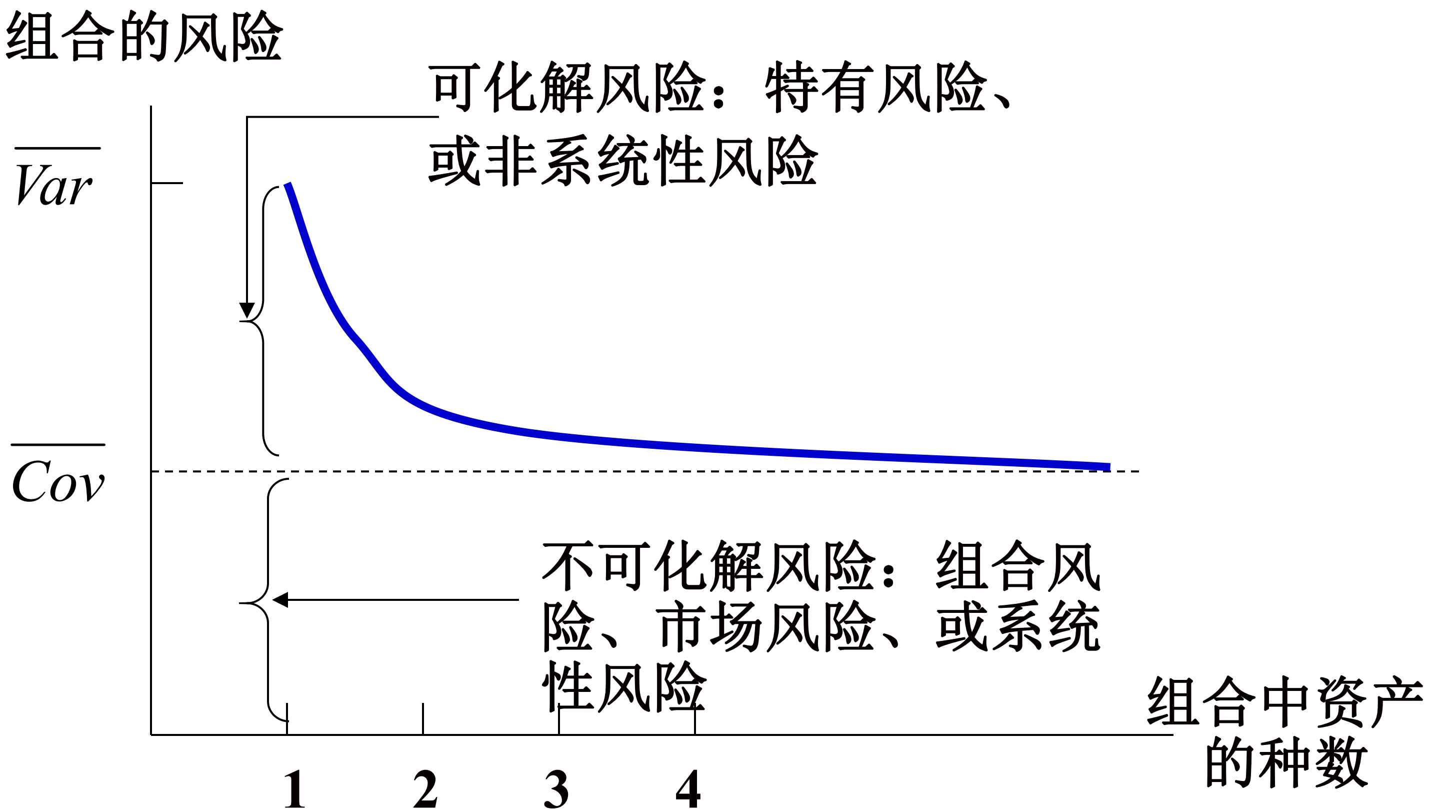
$$\sigma_P^2 = N \times \left(1/N^2\right)\overline{Var} + \left(N^2 - N\right) \times \left(1/N^2\right)\overline{Cov}$$

$$= \left(1/N\right)\overline{Var} + \left(1 - 1/N\right)\overline{Cov}$$

- 不断增加组合中资产的种数，$N \rightarrow \infty$

$$\sigma_P^2 = \overline{Cov}$$

特殊组合方差与组合中资产种数之间的关系



从特殊资产组合的方差看多元化效应

- 当组合中资产种数增加时，组合的方差逐步下降，这就是组合的多元化效应（可推广至协方差、标准差不相等的一般情形）
- 各种资产的方差会因组合被分散消失，但各对资产的协方差不因组合而被分散消失，组合的方差成为组合中各对资产的平均协方差
- **投资组合能分散和化解部分风险，但不能分散和化解全部风险**

上述结论对于现实证券投资的指导意义是——

多元化效应的启示

- 投资者可以通过增加证券品种，构建投资组合以化解个别证券的一些风险
- 存在一个不能仅仅通过分散化来化解的最低风险水平。即使投资者能买齐所有种类的证券（购买市场组合），仍有部分风险无法消除

从图中可见，通过增加证券个数来降低风险所获的好处，将随着证券数量的增多而越来越小（边际收益递减）；同时在现实生活中，多元化存在相应的成本（如佣金）。权衡多元化的得失，国外研究最优多元化需要由大约30种证券构成一个投资组合

多元化与非系统风险

- **非系统风险（unsystematic risk）**只影响某一证券或某一组证券，是个别公司或资产所特有的，又称**特有风险（unique risk）**，或**具体资产风险（asset-specific risk）**
- 多元化能使组合内个别资产之间的非系统风险相互抵消而被化解，一个相当大的投资组合几乎没有非系统风险，所以非系统风险又被称作**可分散风险（diversifiable risk）**

多元化与系统风险

- **系统风险（systematic risk）**作用于全体证券，不能通过多元化予以消除——“覆巢之下，安有完卵”。也称**市场风险（market risk）** 或**不可分散风险（nondiversifiable risk）**

- **某一证券的总风险＝系统性风险＋非系统性风险**
- 对于投资者来说，某一证券的总风险（方差）并不重要。
- 当增加一种证券于组合中，投资者关心的是该证券的系统风险（协方差）——即该种证券对整个投资组合风险的贡献

例：多元化效应的应用

假设你有￥10万，并有一个投资项目——由掷一枚均匀硬币来决定你是取得连本带利4倍的回报（正面），或是分文不归（反面）。有如下两种可供选择的投资策略：

a. 将￥10万尽数投入，一掷定输赢

b. 每次投入￥1万，掷10次硬币

两种策略的预期收益率相同，都是100%，你选哪一个？

- 作为风险厌恶者，当然选b。
- 因为两种投资策略的预期收益率都一样，且同样有一半的可能失败，但方案a是孤注一掷，方案b则不然——手气再怎么差，连着出10次反面概率极低——相反，出现正面的次数极可能在5次上下，每一次都可给你带来4倍的回报（其实10次中只需有正面3次及以上就可赚回原始投资￥10万）。
- 这正是分散投资的一个例子，在不改变预期收益率的前提下减少了投资风险（但不能全部消除风险）。
- 若可以分100次、1000次进行又将如何？

4. 风险资产组合与无风险借贷的结合

一种风险资产
与一种无风险资产的组合

无风险资产

Risk-Free Asset / Riskless Asset

- 马科维茨的理论中，构成组合的资产都是风险资产——所有构成有效集的证券都具有风险
- 但在现实中，投资者还有无风险资产可供选择，并很容易能将一个风险资产与一个无风险资产构成组合

无风险资产的代表，在美国为国库券（T-bills），在中国则为银行活期（短期）存款，或者以国库券作为参照

- 无风险债券，是指回报率确定的证券，通常将政府发行的国库券视为无风险证券；
- 买卖债券只不过是手段，本质是无风险的借贷行为；
- 投资于无风险资产又称作“*无风险贷出*”（risk-free lending），卖空无风险资产又称为“*无风险借入*”（risk-free borrowing）；
- 假定：无摩擦的证券市场；
- 当存在无风险证券时，可以得到更简单的结果。

例：一种风险资产与 一种无风险资产构成的组合

B女士考虑投资M公司的股票。并且，B女士可以按无风险利率进行借入或贷出。有关参数如下：

	M公司股票	无风险资产
预期收益率	14%	10%
标准差	0.20	0

若B女士的投资额为$1,000，其中$350投资M公司股票，$650投资无风险资产，问：该投资组合的预期收益率和标准差是多少？

一种风险资产与一种无风险资产所构成组合的预期收益率

解：由一种风险资产和一种无风险资产构成的投资组合的预期收益率为：

$$\boldsymbol{E(R_P) = 11.4\% = (0.65 \times 10\%) + (0.35 \times 14\%)}$$

组合的收益等于风险资产与无风险资产收益的加权平均——计算上实际是将其视同两种风险资产（其一是风险为0的“风险资产”）组合的收益，换言之，前述公式仍适用：

$$E(R_P) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(R_i) = wR_F + (1-w)E(R_M) \quad \textbf{(4-9)}$$

无风险资产的权数

无风险利率，即**$E(R_F)$**

风险资产的预期收益率

一种风险资产与一种无风险资产所构成组合的方差

套用两种风险资产组合的方差公式，由一种风险资产和一种无风险资产构成的组合的方差为

$$\sigma_P^2 = w^2\sigma_{RF}^2 + (1-w)^2\sigma_M^2 + 2w(1-w)\sigma_{RF,M} \quad \textbf{(4-10)}$$

其中，$\boldsymbol{\sigma_{RF}}$, $\boldsymbol{\sigma_{RF,M}} = 0$，上式仅有第二项为正值，其余为零，即：

解：

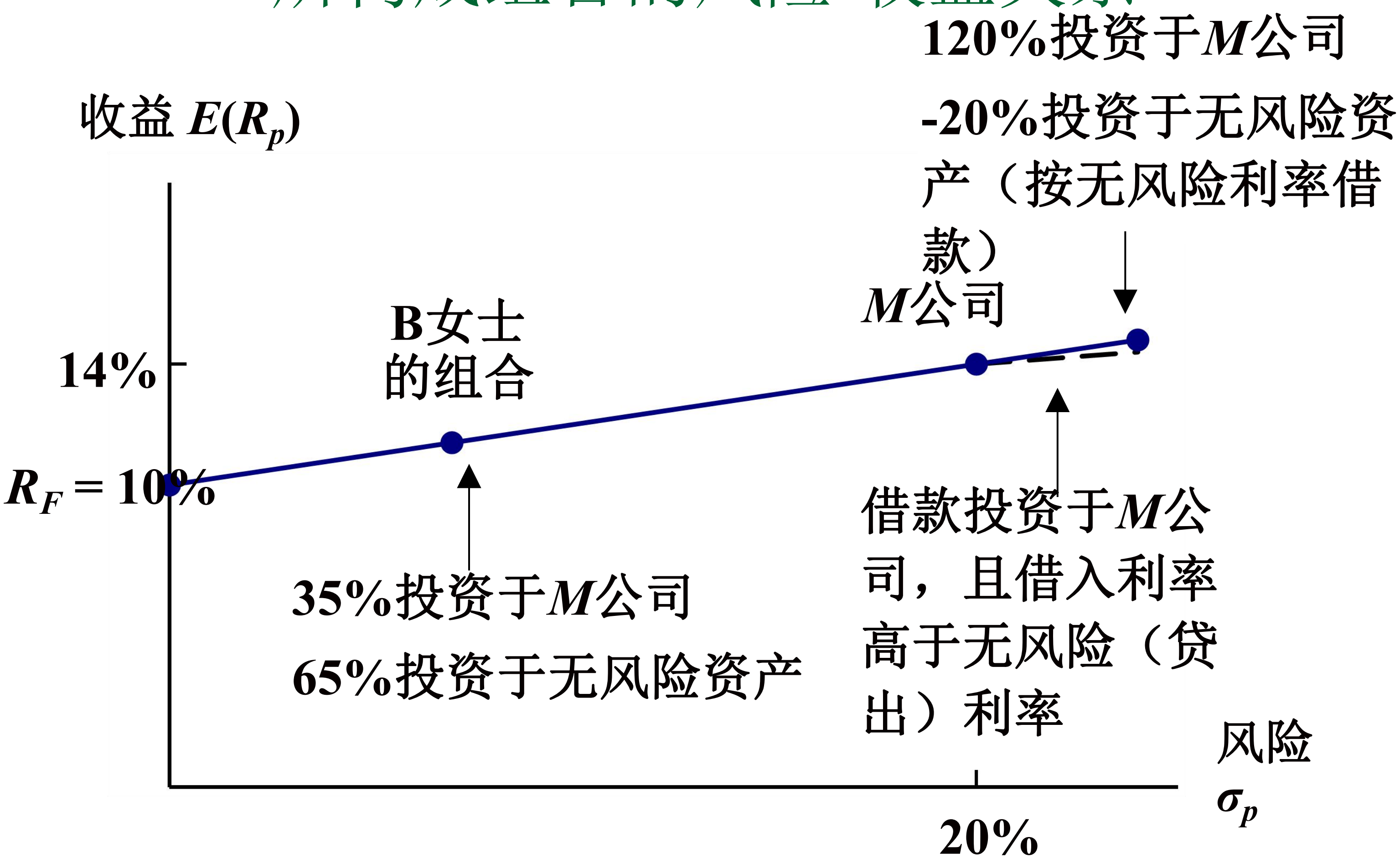
$$\sigma_P^2 = (1-w)^2\sigma_M^2 = (.35)^2 \times (.20)^2 = .0049$$

$$\sigma_P = (1-w)\sigma_M = (.35)\times(.20) = 7\%$$

表4-12：一种风险资产与一种无风险资产不同借贷组合下的风险与收益

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)×(3) + (2)×(4)	(2)×(5)
w	$1-w$	R_F	$E(R_M)$	σ_M	$E(R_P)$	σ_P
1.00	0.00	10%	14%	.20	10.0%	0%
0.65	0.35	10%	14%	.20	11.4%	7%
0.00	1.00	10%	14%	.20	14.0%	20%
-0.20	1.20	10%	14%	.20	14.8%	24%

图4-7：一种风险资产与一种无风险资产所构成组合的风险-收益关系



一种风险资产与一种无风险资产所构成组合的机会集

- 由一种风险资产与一种无风险资产构成的组合的收益和风险的关系是如图4-7所示的一条直线，亦即投资者的“机会集”或“可行集”：投资者可以通过调整资金分配比例，达到线上任意一点——如B女士选择的组合（35%风险资产+65%无风险资产）
- 与两种风险资产组合的机会集不同的是，这里的机会集不是弯曲的，而是直的
- 另外，机会集的一端并不止于0%无风险资产+ 100%风险资产的组合—不受投资者自有资金限制：

例：借款投资于风险资产所构成组合的收益与风险

若B女士能以无风险利率借入\$200，加上自己的\$1,000，总共投资\$1,200于M公司股票，则：

借款投资于风险资产构成的组合的预期收益率为：

$$E(R_P) = wR_F + (1-w)E(R_M)$$
$$= (-.20)\times 10\% + 1.20\times 14\% = 14.8\%$$

借款投资于风险资产所构成组合的标准差：

$$\sigma_P = (1-w)\sigma_M = [1-(-.20)]\times(.20) = 24\%$$

借款投资与借款利率

- 借款可以看成是负的投资，或可将借款利率视作负的收益率
- 通过借款投资，B女士可获得比全部投资于风险资产更高的预期收益率，延展了可选择的机会集，但也要冒更大的风险
- 此外，若借款利率大于无风险利率，则借款投资的机会集将如图4-7中虚线

只能借入无风险资产投资于风险资产，
反过来则不成立，为什么？

无风险资产
与风险资产组合的组合

无风险资产与风险资产组合的组合

我们已经讨论的组合是：

一种无风险资产
One riskless asset

+

一种风险资产
One risky asset

现实中，投资者更可能进行的组合是：

一种无风险资产
One riskless asset

+

风险资产组合
Portfolio of risky assets

具有无风险资产的有效证券组合前沿数学推导

设 w_p 是如下规划的解：

$$\begin{cases} \min \quad \frac{1}{2}\sigma_p^2 = \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\Sigma\mathbf{w} \\ s.t. \quad \mathbf{w}^T\mathbf{e} + (1-\mathbf{w}^T\mathbf{I})r_f = E(r_p) \end{cases}$$

$$\min \quad \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\Sigma\mathbf{w} + \lambda[\mathbf{w}^T\mathbf{e} + (1-\mathbf{w}^T\mathbf{I})r_f]$$

$$\mathbf{w}_p = \frac{E(\tilde{r}_p) - r_f}{H}\Sigma^{-1}(\mathbf{e} - r_f\mathbf{I}) \qquad (**)$$

$$H = (\mathbf{e} - r_f\mathbf{I})^T\Sigma^{-1}(\mathbf{e} - r_f\mathbf{I}) = B - 2Ar_f + Cr_f^2 \geq 0.$$

- 利用拉格朗日法求解，有以下有关投资组合的收益与风险的关系：

$$\sigma(r_p)=\frac{E(r_p)-r_f}{\sqrt{H}} \qquad \text{如果} \quad E(r_p)\ge r_f$$

$$\sigma(r_p)=-\frac{E(r_p)-r_f}{\sqrt{H}} \qquad E(r_p)< r_f$$

- 这里 $H=B-2Ar_f+Cr_f^2\ge 0.$
- A、B、C是推导Markowitz双曲线的变量

$$A=\vec{\mathbf{1}}^T\Sigma^{-1}\overline{\mathbf{r}}=\overline{\mathbf{r}}^T\Sigma^{-1}\vec{\mathbf{1}}$$

$$B=\overline{\mathbf{r}}^T\Sigma^{-1}\overline{\mathbf{r}}$$

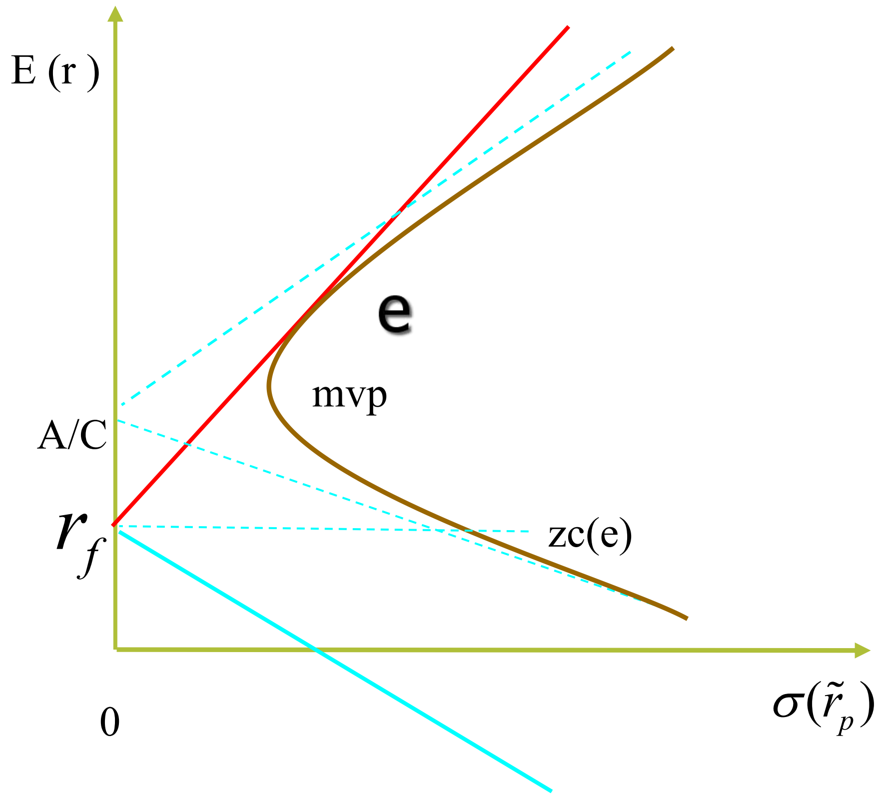
$$C=\vec{\mathbf{1}}^T\Sigma^{-1}\vec{\mathbf{1}}$$

即所有n+1种资产的证券组合前沿为过点（0，r_f)，斜率为$\pm\sqrt{H}$ 的 半 射 线 组 成 。

无风险证券情况下证券组合前沿的几何结构

- 无风险收益率的大小将会影响证券边界，具体是直线的“模样”，分三种情况
- $r_f < A/C$、$r_f > A/C$、$r_f = A/C$
- 其中A/C表示不存在无风险资产情况下*mvp*的收益率期望值
- 存在无风险资产之后，证券组合前沿由双曲线向左进行了扩张。可行集是由两条射线所“围成”的区域。

1. $r_f < A/C$



$r_f < A/C$的几何图形

正斜率直线与双曲线相切，切点是e点

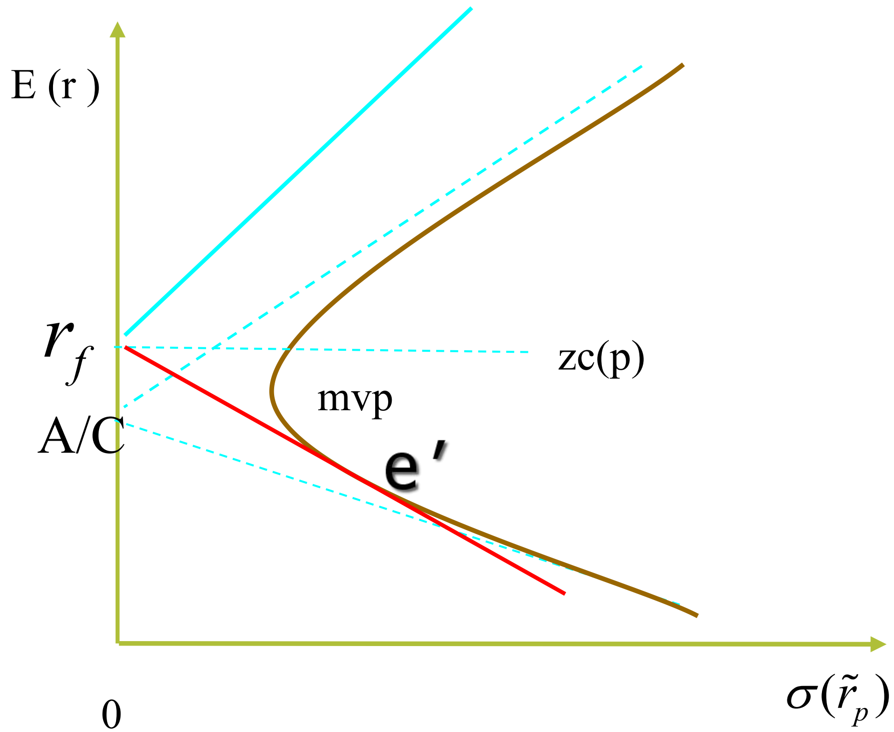
直线e左侧上的点是e和r_f的凸组合

直线e右侧上的点是卖空 r_f，买入e

负斜率直线不与双曲线相交

卖空e，买入r_f

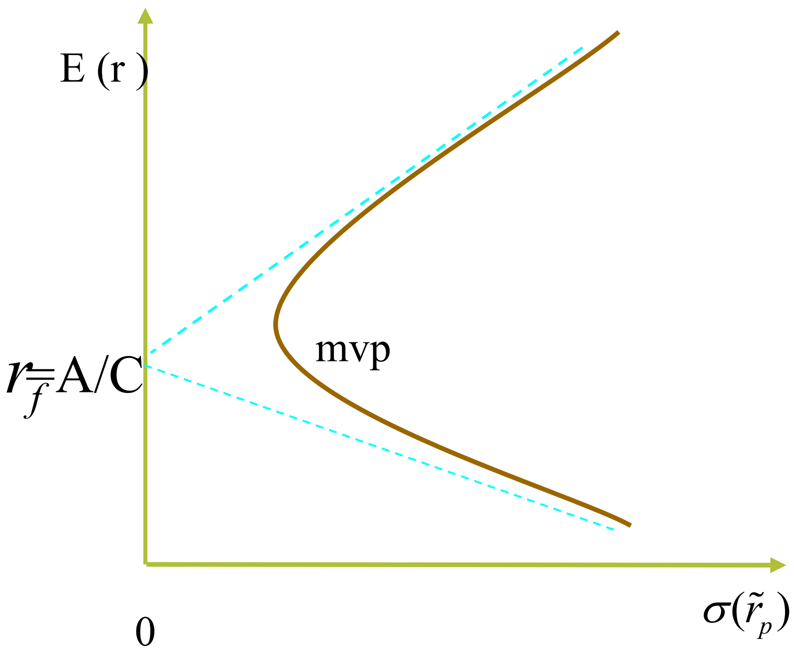
2. $r_f > A/C$



$r_f > A/C$的几何图形

- 正斜率直线不与双曲线相切
- 卖空e′，买入r_f
- 负斜率直线与双曲线相切于e′点
- e′左侧的点是e′和r_f的凸组合
- e′右侧的点是卖空r_f，买入e′

3. r_f=A/C



- 正、负斜率直线是双曲线的渐近线
- 直线上任何一点的投资权重之和＝0
- 将资产全部投资于r_f
- 持有的风险资产的投资比例之和＝0

r_f=A/C的几何图形

此时，由（**）式得

$$\mathbf{I}^T\mathbf{w}_p = \frac{E(\tilde{r}_p)-r_f}{H}\mathbf{I}^T\Sigma^{-1}(\mathbf{e}-r_f\mathbf{I})$$

$$= \frac{E(\tilde{r}_p)-r_f}{H}\left(A-\frac{A}{C}C\right)=0.$$

即任何边界证券组合都把所有的财富投资到无风险资产上，而在风险资产上的净投资为零。

存在无风险资产情况下定价问题

若设p为一边界证券组合（非mvp），q为任意一个证券组合，再由（**）式，二者之间的协方差为

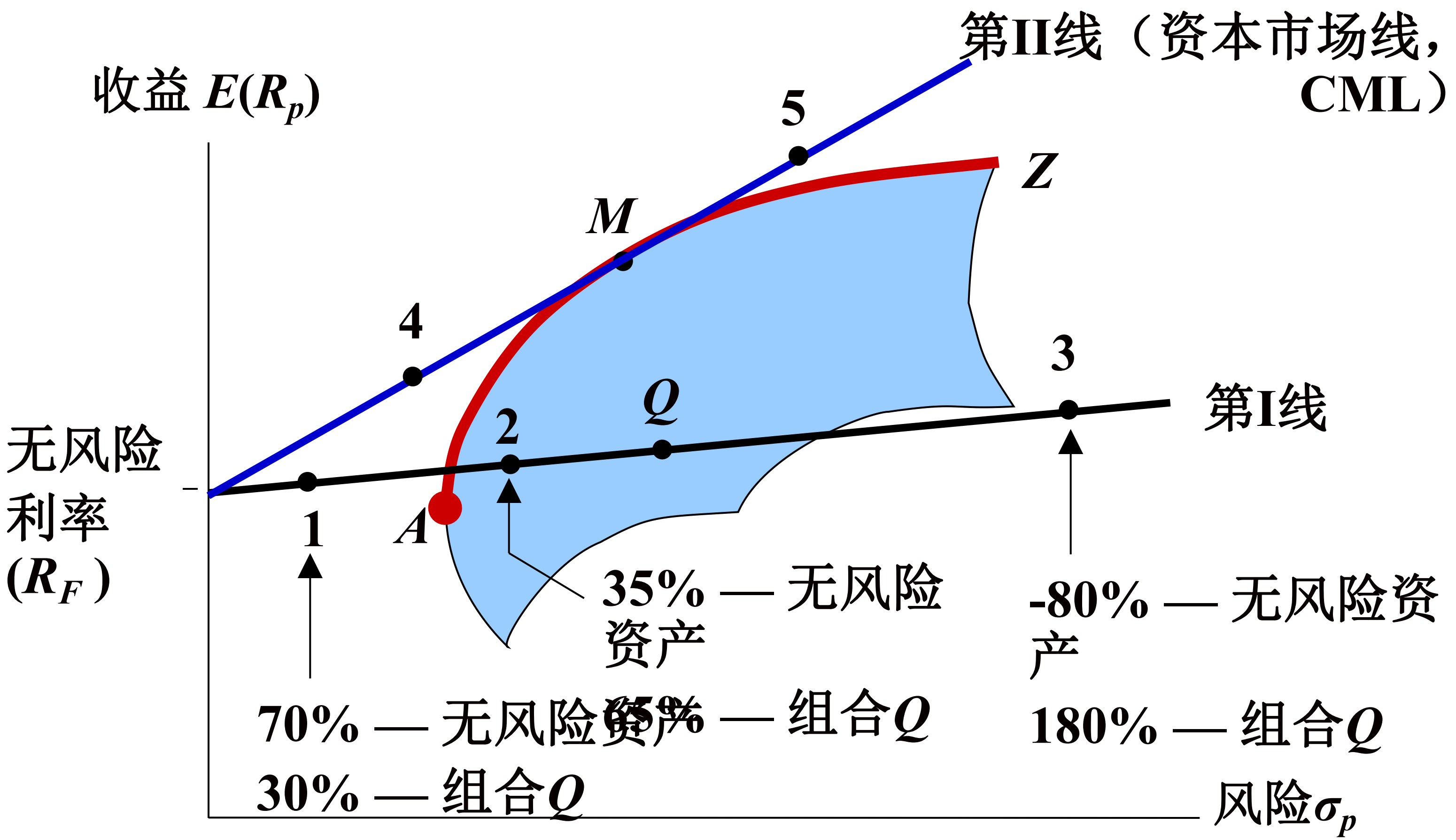
$$Cov(\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)=\mathbf{w}_p^T\Sigma\mathbf{w}_q=\frac{[E(\tilde{r}_p)-r_f][E(\tilde{r}_q)-r_f]}{H}.$$

又因 $\sigma^2(\tilde{r}_p)=[E(\tilde{r}_p)-r_f]^2/H$

$$E(\tilde{r}_q)-r_f=\frac{\operatorname{cov}(\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)}{\sigma^2(\tilde{r}_p)}\times(E(\tilde{r}_p)-r_f)=\beta_{qp}\times(E(\tilde{r}_p)-r_f)$$

注意：该定价关系式独立于r_f与A/C之间的大小关系

图4-8：无风险资产和风险资产组合所构成组合的收益与风险



无风险资产与风险资产组合所构成组合的机会集

- 图4-8中的点Q位于多种风险资产组合机会集的内部，代表若干风险资产的一种组合（如：30%四川长虹+45%青岛海尔+25%深发展）
- 将组合Q与一个无风险资产（R_F）投资相结合，形成一条从R_F到Q的直线，即图4-8中的直线I：该直线就代表投资者在**无风险资产与风险资产组合间进行资本配置的机会集之一**——投资者可以调整资金的分配比例，甚至通过借款投资，从而达到线上任意一点——这些点有些是仅凭风险资产组合所无法覆盖的点（如点1、3所代表的组合）

表：一位自有资本为￥100的投资者在无风险资产与组合Q间的三种资金配置

	点Q	点1（贷出￥70）	点3（借入￥80）
四川长虹	￥ 30	￥ 9	￥ 54
青岛海尔	45	13.50	81
深发展	25	7.50	45
无风险资产	0	70.00	- 80
总投资	￥ 100	￥ 100	￥ 100

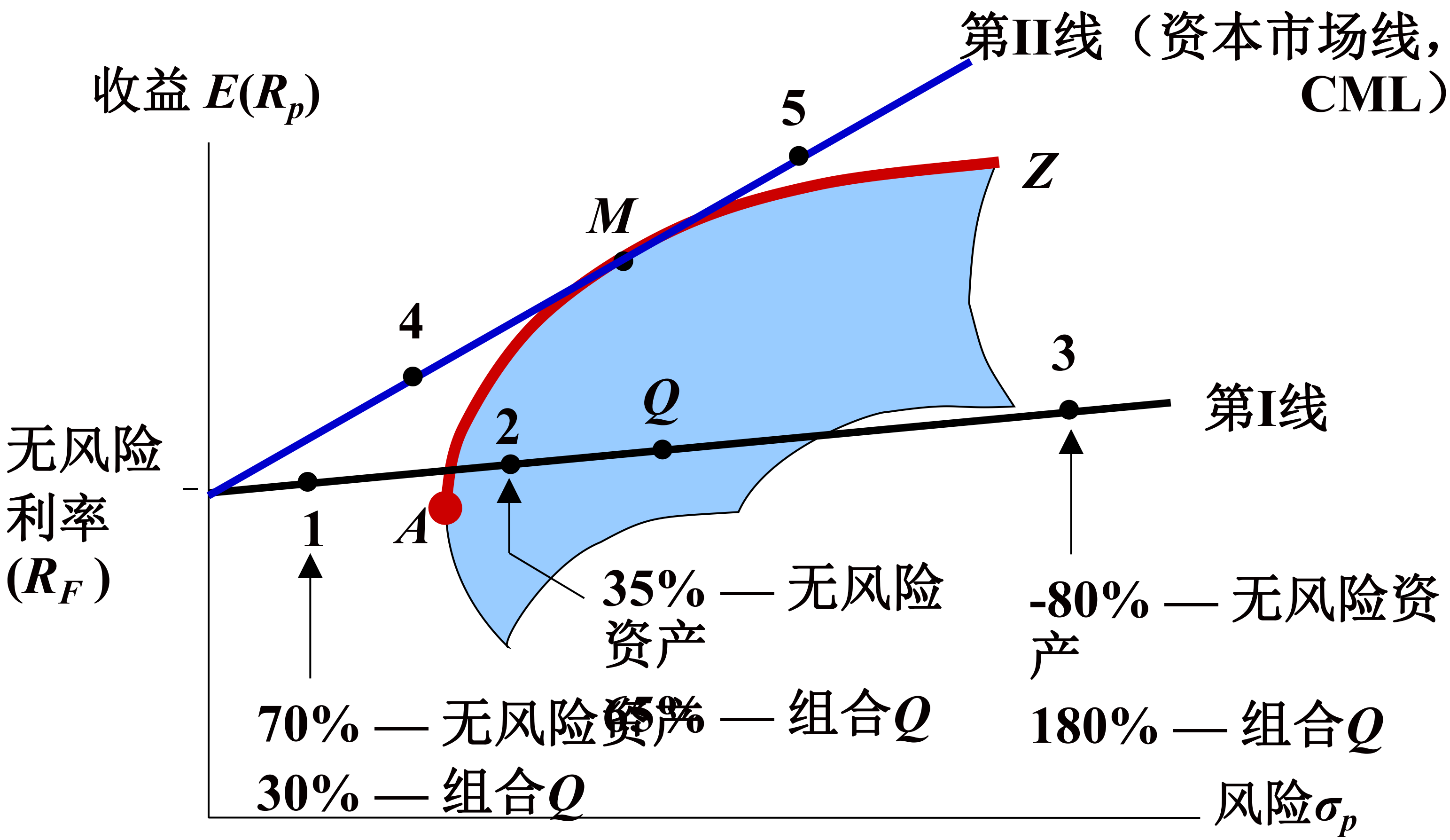
最优资产组合——无风险资产与风险资产组合所构成组合的有效集

- 虽然投资者可以获得直线I上的任意一点，但直线I上的点并非最优，请看直线II——
- 直线II是从R_F到风险资产组合有效集的切线，切点为M
  - M同样代表若干风险资产构成的一种组合
  - 从R_F到M的直线上的各点就是部分投资于无风险资产、部分投资于M所构成的各种投资组合，超过M的那部分直线是通过按无风险利率借钱、再来投资于M实现的
  - 该直线是投资者的最优机会集，原因是：

最优资产组合（续）

- 直线II上的投资组合，除去点*M*外，均优于仅由风险资产构成的最优投资组合（即以曲线*A-M-Z*为代表的有效集）：因为在给定的风险水平（标准差）下，前者的期望收益更高
- 直线II上的组合，也优于由无风险资产与风险资产组合所能构成的其它组合（如直线I）：理由同上
  - 实际上，从R_F向风险资产的机会集（包括有效集）上的任意一点引直线，与M点的连线斜率最大——承担每单位风险所能得到的报酬最高

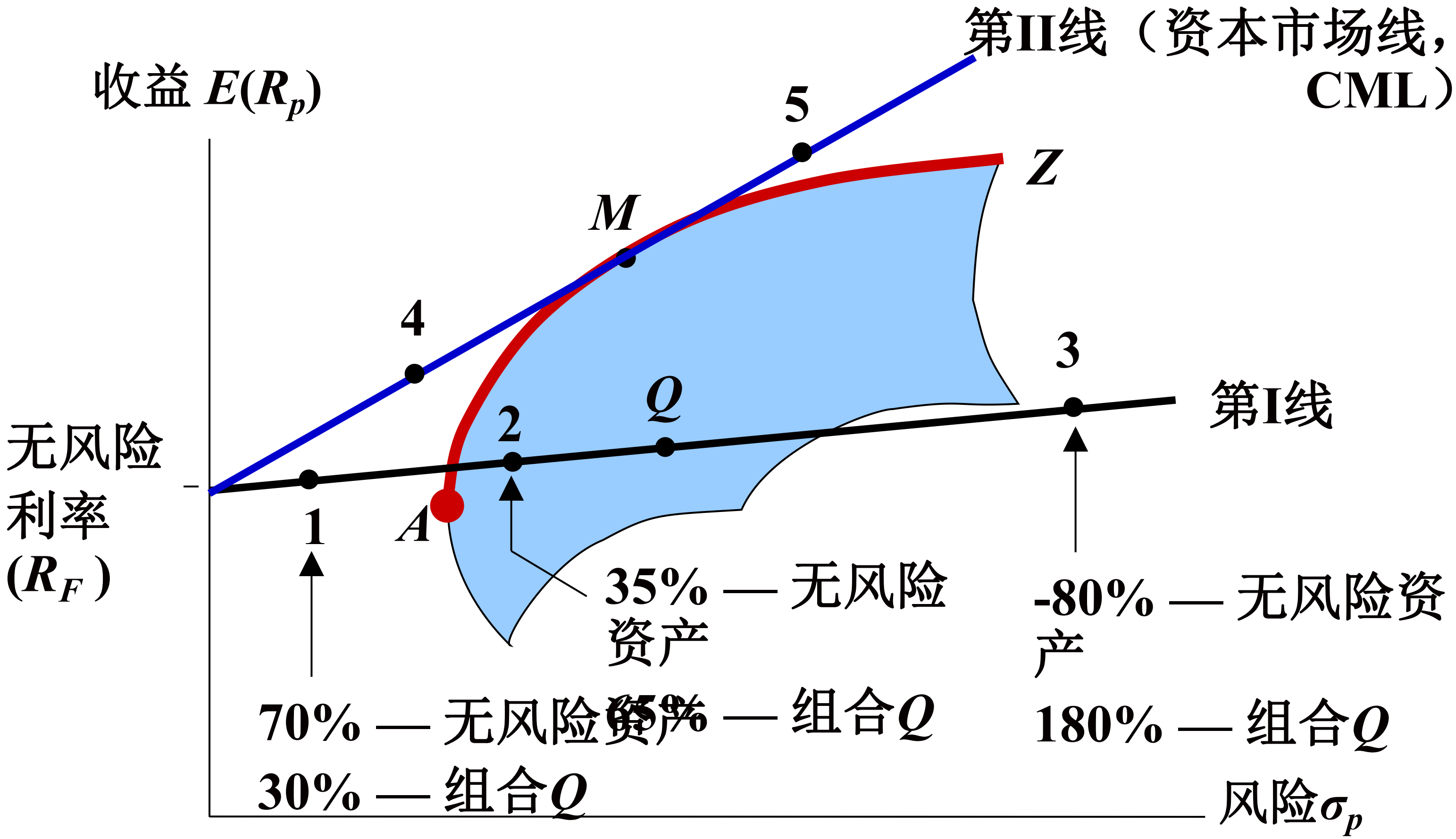
图4-8：无风险资产和风险资产组合所构成组合的收益与风险



资本市场线（capital market line, CML）

- 换言之，**投资者通过无风险资产的借入和贷出，把风险资产组合的“有效边界”变为直线II**
- 直线II就是“**资本市场线**”——**所有资产**（包括无风险资产和风险资产）**的有效集**
  - 一个具有普通风险厌恶程度的投资者可能选择直线R_F至M中的某一点（或许是点4）
  - 一个低风险厌恶程度的投资者则可能选择接近*M*、甚至超过*M*的点（如点5就是借钱增加对点*M*的投资而达到的）

图4-8：无风险资产和风险资产组合所构成组合的收益与风险



分离定理（separation principle）

- 投资者的投资决策是两个分离的步骤：
  1. 估计各种证券的预期收益率和方差、各对证券间的协方差；计算风险资产的有效集（图4-8中的*AMZ*曲线）；确定**点*M***——无风险利率与风险资产组合有效集的切点，这是投资者将持有的**最优风险资产组合**
  2. 决定如何构建点*M*与无风险资产的组合

分离定理（续）

- 步骤1确定点M的过程只涉及机械的计算，完全不掺入任何个人主观色彩
- 步骤2则需要投资者或是将资金在无风险资产和组合M间进行分配，从而在R_F和M之间选取一点；或是按无风险利率借款，加上自有资金，增加对点M的投资，从而在CML线上选择超过M的点——投资者对他在CML上所处位置的选择，取决于他的内部特征（如他的风险承受能力）

分离定理说明投资者对风险的规避程度与该投资者风险资产组合的最优构成是无关的。

分离定理对组合选择的启示

- 若市场是有效的，由分离定理，资产组合选择问题可以分为两个独立的工作，即**资本配置决策**（Capital allocation decision）和**资产选择决策**（Asset allocation decision）。
  - 资本配置决策：考虑资金在无风险资产和风险组合之间的分配。
  - 资产选择决策：在众多的风险证券中选择适当的风险资产构成资产组合。
- 由分离定理，基金公司可以不必考虑投资者偏好的情况下，确定最优的风险组合。

共同期望假设
Homogeneous expectations

- 市场上所有的投资者对预期收益率、方差和协方差的估计完全相同，或：所有投资者都有相同的信息来源

该假设虽不可能完全成立，但能得到近似满足

市场组合（Market portfolio）

- 若所有投资者具有相同的期望，则图4-8对所有投资者均相同：
  - 所有投资者处理相同的信息，绘制出相同的风险资产有效集*AMZ*
  - 由于无风险利率适用于每个人，任何投资者都将认同*M* 为他们将持有的风险资产组合
  - 所有投资者都面临同一条资本市场线，都将在无风险资产与组合*M*确定的直线上构建其投资组合

市场组合

- 所有投资者共同选择的风险资产组合*M* 就是所谓的“**市场组合**”，它又被定义为所有现存证券按照市场价值加权计算所得到的组合（market-value-weighted portfolio of all existing securities）——这是所有证券价格均衡的结果（存在即合理）

在实践中，常以S&P500指数来代表市场组合

资本市场线（CML）的方程

资本市场线（CML）可以用无风险利率、市场组合的预期收益率和标准差来描述：

$$E(R_P) = R_F + \frac{E(R_M) - R_F}{\sigma_M} \times \sigma_P \qquad \textbf{(4-11)}$$

分子：市场组合的风险报酬

分母：市场组合的风险

截距：无风险利率（对资金机会成本、通胀的补偿）

斜率：风险价格（price of risk），即承担单位风险所要求的回报率（对风险的补偿）

*CML方程的推导

$$
\begin{cases}
\sigma_P = (1-w)\sigma_M \Rightarrow 1-w = \dfrac{\sigma_P}{\sigma_M} & \textbf{(1)} \\[2em]
E(R_P) = wR_F + (1-w)E(R_M) \Rightarrow \\
E(R_P) = (1-w)\left[E(R_M) - R_F\right] + R_F & \textbf{(2)}
\end{cases}
$$

将(1)代入(2)，即得到资本市场线方程

例：1926~1999美国资本市场的风险价格与CML的方程

根据大公司股票在1926~1999年期间的数据（期望收益率13.3%，标准差20.1%），以之代表市场组合，并以同一时期国库券3.8%的平均收益率代表无风险利率，代入上式：

$$E(R_P)-R_F=\frac{13.3\%-3.8\%}{20.1\%}\sigma_P$$

$$E(R_P)=0.47\sigma_P+R_F$$

斜率大约为1/2——表明这期间若投资于市场组合，将得到9.5%的风险报酬，同时相应承担20.1%的风险；或者说，每担2%的风险约可获1%的收益

5. C-VaR风险度量下的资产组合理论

5.1 VaR的引进

- 自从Markowitz提出了均值-方差准则下的资产组合理论，方差作为风险的一种度量方式，已经应用到了很多方向，很多时候人们都愿意用方差来近似表示风险。虽然方差准则错误地将资产价格的正向变动也视为风险，但它在计算和应用上的方便性还是很具有吸引力。
- 随着金融活动的复杂化，金融风险构成危害的广度与深度也不断得以体现。
- 尤其是20世纪70年代后，随着"布雷顿森林体系"的崩溃，与美元挂钩的固定汇率制被浮动汇率制代替，利率波动频繁，幅度加大。
- 国际范围内的金融创新活动风起云涌，各国竞相放松金融管制，信息通讯技术飞速发展，这些因素既加大了金融风险，也为金融参与者有效管理风险提供了必要和可能。

- VaR技术（Value-at-risk)是1993年**J·P·Morgon,G30集团在考察衍生产品的基础上提出的一种风险测度方法**。
- VaR方法一经提出便受到广泛欢迎：巴塞尔银行监管委员会于1996年推出的巴塞尔协议的补充规定中，明确提出基于银行内部VaR值的内部模型法，并要求作为金融机构计量风险的基本方法之一。
- 美国证券交易委员会(SEC)1997年1月规定上市公司必须及时披露其金融衍生工具交易所面临风险的量化信息，指出VaR方法是可以采用的三种方法之一。
- 目前美国一些较著名的大商业银行和投资银行，甚至一些非金融机构已经采用VaR方法。

- VAR之所以具有吸引力是因为它**把银行的全部资产组合风险概括为一个简单的数字**，并以货币计量单位来表示**风险管理的核心——潜在亏损**。
- VaR的基本含义:**在某一特定的持有期内，在给定的置信水平下，给定的资产或资产组合可能遭受的最大损失值**。
- JP.Morgan定义为：**VaR是在既定头寸被冲销（be neutraliged）或重估前可能发生的市场价值最大损失的估计值**；
- Jorion把VaR定义为：**给定置信区间的一个持有期内的最坏的预期损失**。
- 其数学定义式为： $Prob(\triangle p \geq VaR)=1-\alpha$ 。其中:$\triangle p$ 表示在$\triangle t$时间内，某资产或资产组合的损失, α为给定的置信水平。

- VaR计算主要涉及两个因素：**目标时段**和**置信水平**。目标时段是指我们计算的是未来多长时间内的VaR，它的确定主要依赖于投资组合中资产的流动性而定,一般取为1天，1周，10天或1月.置信水平的确定主要取决于风险管理者的风险态度，一般取90％—99.9％。
- 例 J.P .M organ公司1994年年报披露，1994年该公司一天的95%VaR值为1500万美元。其含义是指:该公司可以以95%的可能性保证，1994年每一特定时点上的证券组合在未来24小时之内，由于市场价格变动而带来的损失不会超过1500万美元。

- VaR模型通常假设如下：
  1.市场有效性假设;
  2.市场波动是随机的，不存在自相关。

- 一般来说，利用数学模型定量分析社会经济现象，都必须遵循其假设条件，特别是对于我国金融业来说，由于市场尚需规范，政府干预行为较为严重，不能完全满足强有效性和市场波动的随机性，在利用VaR模型时，只能近似地处理。

5.2 数学基础

- 随机变量的分位数：
  - 设随机变量 ξ 的分布函数为$F(x)$,则对于任意给定的实数 $\alpha \in [0,1]$，定义 ξ 的 $\boldsymbol{\alpha}$ 分位数 Q_α 为

$$Q_\alpha = \inf\{x \mid F(x) \geq \alpha\}$$

  - 当 ξ 的分布函数为连续严格单调递增时

$$Q_\alpha = F^{-1}(\alpha\}$$

- 条件概率与条件期望
  - 对于事件A与事件B，$P(B)>0$。给定B发生条件下A发生的条件概率定义为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

  - 对于随机变量ξ与正概率事件B，ξ在给定事件B发生条件下的条件分布定义为

$$F(x|B)=P(\xi\le x|B)=\frac{P(\{\xi\le x\}\bigcap B)}{P(B)}$$

- 当 ξ 只取离散个值时， 条件概率密度为

$$P(x \mid A) = P(\xi = x \mid A) = \frac{P(\{\xi = x\} \cap A)}{P(A)}$$

- 当 ξ 为连续随机变量，满足如下式子的函数$p(x|A)$称为 ξ 在给定事件A发生条件下的条件概率密度函数

$$F(x \mid A) = \int_{-\infty}^{x} p(t \mid A) dt, \qquad \forall x \in R$$

- 此时， 条件期望定义如下

$$E(\xi \mid A)=\int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x \mid A)$$

- 令 I_A 为A的示性函数，则条件期望等于

$$E(\xi \mid A)=\frac{1}{P(A)} E(\xi I_A)$$

随机损失的VaR与C-VaR

- 假设市场上有n个基础风险资产，它们的收益率向量 $\tilde{\mathbf{r}}=(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2,\ldots,\ \tilde{r}_n)^T$,并且假设 $L=L(\boldsymbol{w},\boldsymbol{r})$ 为该资产组合的损失函数。
- 例如，可以令 $L(\boldsymbol{w},\boldsymbol{r})=1-\boldsymbol{w}^T(1+\boldsymbol{r})=-\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{r}$。

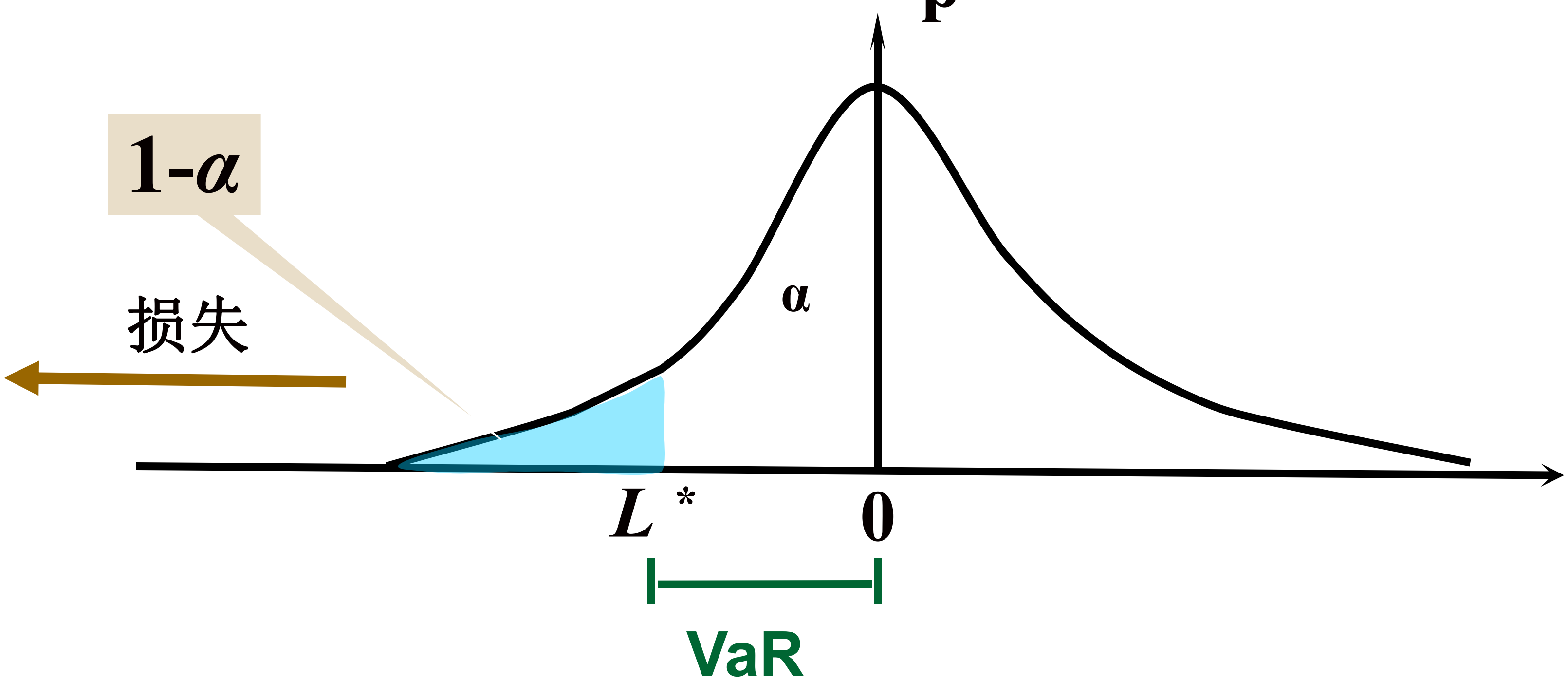
- 记收益率向量 $\boldsymbol{r}$ 的联合概率密度函数为$p(\boldsymbol{r})$，设随机损失 $L=L(\boldsymbol{w},\boldsymbol{r})$ 的分布函数为 $\Psi(\lambda)=P\{L(\boldsymbol{w},\boldsymbol{r})\le\lambda\}$。此时

$$\Psi(\lambda)=\int_{\{L(\mathbf{w},\mathbf{r})\le\lambda\}} p(\mathbf{r})d\mathbf{r}$$

- 给了上述符号与基本变量，可以用下列方式来定义 VaR：

定义 对于任意置信水平 $\alpha\in[0,1]$，组合在α置信水平下的VaR定义为随机损失$L(\boldsymbol{w},\boldsymbol{r})$ 的α分位数，即

$$VaR_{\alpha}=\inf\{\lambda\in R\mid\Psi(\lambda)\ge\alpha\}$$



p
1-α
损失
α
L *
0
VaR

- 置信水平的选取反映了投资主体对风险的厌恶程度。置信水平越高，风险厌恶的程度越大。
- 由*VaR*的定义可以看出，置信水平对*VaR*值有很大影响。同样的资产组合，由于选取的置信水平不同，计算出的*VaR*值也不同。
- 国外已将*VaR*值作为衡量风险的一个指标要求对外公布，因此各金融机构有选取不同的置信水平以影响*VaR*值的内在动力。
- 如美国银行和J.P.Morgan银行选择95%，花旗银行选择95.4%，大通曼哈顿银行选择97.5%，信孚银行选择99%。
- BASEL委员会要求99%置信水平。

- *VaR*实际上就是损失函数*L*的分位数。当知道*L*的具体分布时，特别是当*L*服从诸如正态分布等较好分布时，*VaR*的计算并不复杂。
- 如果*L*的具体分布并不具有正态分布那样好的性质，借助计算机也可以近似计算。
- 但是，实际中往往并不知道损失函数*L*的具体分布，或者说不知道向量 $\boldsymbol{r}$ 的联合分布，而且还不能简单假定它们服从联合正态分布。这种情况下的计算就变得比较复杂。

VaR计算之一：解析法

- 解析法（方差-协方差法、参数法）
  - 借助统计学，利用历史数据拟合回报率r的统计分布，如正态分布、t分布、广义误差分布（GED分布）等
  - 由分布的参数来估计回报率r在某个置信水平下的最小值

例 单个正态分布收益资产的*VaR*

首先考虑只有一个风险资产的情形，从而 $w=1$，并且假设资产收益率 $\tilde{r}$ 服从正态分布，即 $\tilde{r}\sim N(\mu,\sigma^2)$。仍然设损失函数为 $L=-w\tilde{r}=-\tilde{r}$。从而 VaR 满足 $P\{L\le VaR_\alpha\}=\alpha$，即：

$$P\{L\le VaR_\alpha\}=P\{-\tilde{r}\le VaR_\alpha\}=P\left\{\frac{-\tilde{r}+\mu}{\sigma}\le\frac{VaR_\alpha+\mu}{\sigma}\right\}=\alpha$$

由于 $\frac{-\tilde{r}+\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，所以可以得到 $\frac{VaR_\alpha+\mu}{\sigma}=Z_\alpha$，其中 Z_α 为标准正态分布的 α 分位数。由此可以解出 VaR 为：

$$VaR_\alpha=-\mu+\sigma Z_\alpha$$

例 多个联合正态分布收益率资产组合的*VaR*

- 考虑含有n个风险资产的情形，它们的收益率向量 $\tilde{\mathbf{r}}=(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2,\ldots,\ \tilde{r}_n)^T$ 服从联合正态分布，即假设

$$\tilde{\mathbf{r}} \sim N(\bar{\mathbf{r}},\Sigma)$$

其中 $\bar{\mathbf{r}}=\mathrm{E}(\tilde{\mathbf{r}})=(\bar{r}_1,\bar{r}_2,\cdots\bar{r}_{\mathrm{n}})^{\mathrm{T}}$ 为期望收益率向量，Σ为收益率的协方差矩阵。

- 设$\boldsymbol{w}$为资产组合在基础资产上的配置权重，组合收益率为 $\tilde{r}_p=\mathbf{w}^T\mathbf{r}$，损失函数 $L(\boldsymbol{w},\boldsymbol{r})=1-\boldsymbol{w}^T(1+\boldsymbol{r})=-\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{r}$。

- 由于正态随机向量的线性组合仍然服从正态分布，且 $\tilde{r}_p \sim N(w^T\bar{r}, w^T\sum w)$ 。并且VaR_α满足 $P\{L \le VaR_\alpha\} = \alpha$，由例3.5.1的结论可得：

$$VaR_\alpha = -\mathbf{w}^T\bar{\mathbf{r}} + \sqrt{\mathbf{w}^T\Sigma\mathbf{w}}Z_\alpha$$

例 含无风险资产时多个联合正态分布收益率资产组合的*VaR*

现在考虑含有n个风险资产$\vec{r}$和一个无风险资产r_f的情形，记基础资产的收益率向量为$\hat{r}=(r_f,\vec{r}^T)^T$，其中$\vec{r}$为风险资产收益率，其分布为$\vec{r}\sim N(e,\Sigma)$。并且设$\hat{w}=(w_0,w^T)^T$为资产组合的配置权重向量，其中$w$为在风险资产上的配置权重向量，$w_0$为无风险资产上的配置权重，组合收益率为$\hat{r}_p=\hat{w}^T\hat{r}=w_0r_f+w^T\vec{r}$，假设组合的损失函数为$L(\hat{w},\hat{r})=-\hat{w}^T\hat{r}$。

- 与上例同理可知 $\hat{r}_p$ 仍然为正态随机变量，且

$$\hat{r}_p \sim N(w_0 r_f + \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{r}}, \mathbf{w}^T \sum \mathbf{w}).$$

- VaR_α满足 $P\{L \le VaR_\alpha\} = \alpha$，由例3.5.1的结论可得：

$$VaR_\alpha = -w_0 r_f - \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{r}} + \sqrt{\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}} Z_\alpha.$$

VaR计算方法之二：历史模拟法

- 对资产的收益不作任何假设;
- 假定历史会再现，因此*VaR*的计算是基于历史经验分布，使用的是历史数据，这不同于蒙特卡罗方法使用的随机数;
- 在估计组合的价值时，使用的映射是按定价公式的全值估计，而不像参数方法那样使用定价公式的灵敏度来计算，因而，也没有参数方法中的一阶近似与二阶近似;
- 该方法的最大缺陷是认为未来是历史的再现，这不符合实际。

VaR计算方法之三：Monte Carlo模拟

- 蒙特卡洛模拟也是一种非参数方法，该方法最早于1942年由研制原子弹的科学家提出并加以应用。
- 其计算原理与历史模拟法相同，都是通过模拟资产回报的路径得到各种可能结果，从而在得到的组合损益分布的基础上，通过分位数来求得VaR。
- 与历史模拟不同的是，蒙特卡洛模拟法对资产价格分布的估计不是来自于历史的观测值，而是通过产生大量的随机数得到的。
  - 本质：把所有的可能列出

VaR风险度量方法的优点

- VaR方法在全球金融风险管理中得到了大力推广。较之以往的风险度量技术，VaR方法具有诸多的优点：
- ①VaR技术可以在事前计算投资组合的风险，而不像以往的风险管理方法都是在事后衡量投资组合风险的大小。
- VaR方法以其高度的综合、概括能力，为投资者提供了一个直观、全面的风险量化指标。
- 投资者可以运用VaR方法，动态地评估和计量其所持有的资产组合的风险，及时调整投资组合，以分散和规避风险，提高资产营运质量和运作效率。

- ②VaR方法可以涵盖影响金融资产的各种不同市场因素，同时该方法也可以测度非线性的风险问题。此外，VaR方法不仅能计算单个金融工具的风险，还能计算由多个金融工具组成的投资组合风险，对此以往的风险管理方法无法实现。

一致性风险度量

定义 所谓一致性风险度量 ρ，是指对于任意随机损失X,其风险大小记为 $\rho(X)$,并满足下列性质：

- 平移不变性。对于任意常数c,

$$\rho(X+c)=\rho(X)+c$$

- 次可加性。两个风险X、Y,

$$\rho(X+Y)\leq\rho(X)+\rho(Y)$$

- 正齐次性。对于任意正常数c,

$$\rho(cX)=c\rho(X)$$

- 单调性。 对任意的随机损失$X\leq Y$,

$$\rho(X)\leq\rho(Y)$$

从一致性风险度量的上述四条性质还可以进一步得到它的第五条性质——凸性。

风险度量的凸性（Convex）：

若$X_1 \le X_2, X_1 \in L^1, X_2 \in L^1$，$\lambda \in [0,1]$，则

$$\rho(\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2) \le \lambda \rho(X_1) + (1-\lambda)\rho(X_2).$$

VaR的单调性、正齐次性和平移不变性

性质1：VaR满足单调性、正齐次性和平移不变性。

单调性：对于随机损失 X 与 Y，若 $X \le Y$，则有：

$$\{Y \le \lambda\} \subset \{X \le \lambda\},\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \Psi_Y(\lambda) \le \Psi_X(\lambda),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

因此，$VaR_\alpha(X) = \inf\left\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \Psi_X(\lambda) \ge \alpha\right\}$

$$\le \inf\left\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \Psi_Y(\lambda) \ge \alpha\right\} = VaR_\alpha(Y)$$

正齐次性：对于随机损失 X 与正常数 λ，有：

$$VaR_\alpha(\lambda X) = \inf\left\{x \in \mathbb{R} \mid \Psi_{\lambda X}(x) \geq \alpha\right\}$$

$$= \inf\left\{x \in \mathbb{R} \mid \Psi_X(x/\lambda) \geq \alpha\right\}$$

$$= \lambda \cdot \inf\left\{x/\lambda \in \mathbb{R} \mid \Psi_X(x/\lambda) \geq \alpha\right\}$$

$$= \lambda \cdot \inf\left\{y \in \mathbb{R} \mid \Psi_X(y) \geq \alpha\right\} = \lambda \cdot VaR_\alpha(X)$$

平移不变性：对于随机损失 X 与常数 δ ，有：

$$VaR_\alpha(X+\delta)=\inf\left\{x\in\mathbb{R}\mid\Psi_{X+\delta}(x)\geq\alpha\right\}$$

$$=\inf\left\{x\in\mathbb{R}\mid\Psi_X(x-\delta)\geq\alpha\right\}$$

$$=\inf\left\{(x-\delta)\in\mathbb{R}\mid\Psi_X(x-\delta)\geq\alpha\right\}+\delta$$

$$=\inf\left\{y\in\mathbb{R}\mid\Psi_X(y)\geq\alpha\right\}+\delta=VaR_\alpha(X)+\delta$$

VaR风险度量方法的缺陷

- 虽然VaR方法在操作上的简便性以及它作为风险度量的含义非常直观，并且能够只对真正实现的损失度量风险，而不像方差那样把有利的波动也视作风险。VaR方法为各种金融机构所采用，应用领域广泛，但是种种研究结果和实践经验都表明VaR技术不是一种合理有效的风险计量方法，还存在着严重的缺陷：

- （1）VaR方法不满足次可加性，不符合一致性风险度量方法的要求。因此用VaR方法来度量风险就不再准确。
- 例如，资产组合的VaR值会大于组合中各项资产的VaR值之和，这不仅与投资上要求分散化以降低风险的要求背道而驰，进一步来说，也阻碍了金融机构进行总体风险的有效管理。

- (2)VaR方法没有考虑尾部风险。
- VaR本质上只是对应于某置信水平的分位点，故又称为分位点VaR。因此它无法考察分位点下方的信息，即所谓的左尾损失，这就是VaR尾部损失测量的非充分性。
- VaR方法的这一缺点使人们忽略了小概率发生的巨额损失事件甚至是金融危机，而这又恰恰正是金融监管部门所必须重点关注的。
- 另外，VaR方法衡量的主要是市场风险，如单纯依靠VaR方法，就会忽视其他种类的风险如信用风险。所以在金融风险管理中，VaR方法并不能涵盖一切，仍需综合使用各种其他的定性、定量分析方法。金融危机还提醒风险管理者：VaR方法并不能预测到投资组合的确切损失程度，也无法捕捉到市场风险与信用风险间的相互关系。

VaR的非次可加性

设有两个风险资产 A 和 B，其损失和概率分别如下：

	A		B		A+B		
损失	50	70	40	90	90	110	140
概率	98%	2%	96%	4%	94%	2%	4%

而且 $P\{A=70,B=90\}=0$，则可以得到 A+B 的损失和近似概率如上表。

现在考虑 $\alpha=0.95$ 时的 VaR，容易得到：

$VaR_{0.95}(A)=50$，$VaR_{0.95}(B)=40$，$VaR_{0.95}(A+B)=110$

则 $VaR_{0.95}(A+B)>VaR_{0.95}(A)+VaR_{0.95}(B)$，即 VaR 不满足可加性。

VaR的非凸性

设有两个风险资产 A 和 B，其损失和概率分别如下：

	A		B		$\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$		
损失	50	70	40	90	45	55	70
概率	98%	2%	96%	4%	94%	2%	4%

而且 $P\{A=70, B=90\}=0$，则 $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$ 的损失和近似概率如上表。计算 $\alpha=0.95$ 时的，容易得到：

$$VaR_{0.95}(A)=50，\ VaR_{0.95}(B)=40，\ VaR_{0.95}(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B)=55$$

则 $VaR_{0.95}(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)>\frac{1}{2}VaR_{0.95}(A)+\frac{1}{2}VaR_{0.95}(B)$，即 VaR 不满足凸性。

- 鉴于VaR在次可加性与凸性上的不良表现，需要对VaR度量进行适当的修正使得修正后的风险度量是一致的，进而自动地满足凸性。
- 直观上看，VaR_α表示在给定α-置信水平之下组合的最小可能损失，但并没有估计当损失超过这个阈值以后具体的损失水平是多少。而超过这个阈值VaR_α的损失是一个随机变量。
- 为了确切地度量超过VaR_α以上的总体损失水平，可以计算给定损失超过VaR_α阈值条件下的平均损失，即损失函数L关于事件$\{L \geq VaR_\alpha\}$的条件期望。这种风险度量称作**条件在险价值(Conditional Value-at Risk)**,记作**C-*VaR***。

C-VaR的概念和性质

定义 对于任意置信水平$\alpha \in [0,1]$，组合在α-置信水平下的$C\text{-}VaR$定义为在损失L不小于VaR_α条件下的期望损失，即

$$C-VaR_\alpha = E\{L \mid L \ge VaR_\alpha\}$$

从$C-VaR$的定义可以得到一个显然的性质是$C-VaR_\alpha \ge VaR_\alpha$，因为:

$$C-VaR_\alpha = E\{L \mid L \ge VaR_\alpha\} = \frac{1}{1-\alpha} E\{L \cdot I_{\{L \ge VaR_\alpha\}}\}$$

$$\ge \frac{1}{1-\alpha} E\{VaR_\alpha \cdot I_{\{L \ge VaR_\alpha\}}\} = VaR_\alpha \cdot \frac{P\{L \ge VaR_\alpha\}}{1-\alpha} = VaR_\alpha$$

性质2：*C-VaR*作为风险度量是一致的，即满足单调性、平移不变性、正齐次性和次可加性。

性质3：*C-VaR*作为风险度量具有凸性。

单个正态分布收益率资产的*C-VaR*

首先考虑只有一个风险资产的情形。*C-VaR*可以用下面的方法计算。

$$C-VaR_\alpha(L)=E\{L\,|\,L\geq VaR_\alpha\}=\frac{1}{1-\alpha}E\left\{-\tilde{r}\cdot I_{\{-\tilde{r}\geq VaR_\alpha\}}\right\}$$

$$=\frac{\sigma}{1-\alpha}E\left[\frac{-\tilde{r}+\mu}{\sigma}\cdot I_{\left\{\frac{-\tilde{r}+\mu}{\sigma}\geq\frac{VaR_\alpha+\mu}{\sigma}\right\}}\right]-\frac{\mu}{1-\alpha}E\left[I_{\{-\tilde{r}\geq VaR_\alpha\}}\right]$$

$$=\frac{\sigma}{1-\alpha}E\left[\frac{-\tilde{r}+\mu}{\sigma}\cdot I_{\left\{\frac{-\tilde{r}+\mu}{\sigma}\geq\frac{VaR_\alpha+\mu}{\sigma}\right\}}\right]-\mu$$

由于$\dfrac{-\tilde{r}+\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，所以可得：

$$E\left[\frac{-\tilde{r}+\mu}{\sigma}\cdot I_{\left\{\frac{-\tilde{r}+\mu}{\sigma}\geq\frac{VaR_{\alpha}+\mu}{\sigma}\right\}}\right]=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\cdot\exp\left\{-\frac{(VaR_{\alpha}+\mu)^{2}}{2\sigma^{2}}\right\}.$$

$$\begin{aligned}\text{从而}C-VaR_{\alpha}(L)&=-\mu+\frac{\sigma}{1-\alpha}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\cdot\exp\left\{-\frac{(VaR_{\alpha}+\mu)^{2}}{2\sigma^{2}}\right\}\\&=-\mu+\frac{\sigma}{1-\alpha}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\cdot\exp\left\{-\frac{(-\mu+\sigma Z_{\alpha}+\mu)^{2}}{2\sigma^{2}}\right\}\\&=-\mu+\frac{\sigma}{1-\alpha}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\cdot e^{-Z_{\alpha}^{2}/2}.\end{aligned}$$

多个联合正态分布收益率资产的*C-VaR*

- 考虑含有n个风险资产的情形，假设条件同例3.5.2，则损失函数 $L(\boldsymbol{w},\boldsymbol{r})$=-$\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{r}$且它服从正态分布：

$$\mathrm{L} \sim N(-\mathbf{w}^T\overline{\mathbf{r}}, \mathbf{w}^T\Sigma\mathbf{w}).$$

- 此时

$$C\text{-}VaR_\alpha(L) = -\mathbf{w}^T\overline{\mathbf{r}} + \frac{\sqrt{\mathbf{w}^T\Sigma\mathbf{w}}}{1-\alpha}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\cdot e^{-Z_\alpha^2/2}.$$

含无风险资产时多个联合正态分布收益率资产的C-VaR

- 考虑含有n个风险资产和一个风险资产的情形，假设条件同例3.5.3，则损失函数$L(\hat{\mathbf{w}},\hat{\mathbf{r}}) = -\hat{\mathbf{w}}^T\hat{\mathbf{r}} = w_0 r_f - \mathbf{w}^T\mathbf{r}$，且它服从正态分布：

$$\mathrm{L} \sim N(-w_0 r_f - \mathbf{w}^T\bar{\mathbf{r}}, \mathbf{w}^T\Sigma\mathbf{w}).$$

- 此时

$$C\text{-}VaR_\alpha(L) = -w_0 r_f - \mathbf{w}^T\bar{\mathbf{r}} + \frac{\sqrt{\mathbf{w}^T\Sigma\mathbf{w}}}{1-\alpha}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\cdot e^{-Z_\alpha^2/2}.$$

5.4 *VaR*与*C-VaR*准则下的资产组合理论

定理　假设有n个基础风险资产，收益率 $\tilde{\mathbf{r}}=(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2,\ldots,\ \tilde{r}_n)^T$，任意资产组合的配置权重为 $\mathbf{w}=(w_1,w_2\ ,\ldots,\ \ w_n)^T$，损失函数为 $L(\mathbf{w},\mathbf{r})=-\mathbf{w}^T\mathbf{r}$。并且假设 $\tilde{\mathbf{r}}$服从多元正态分布 $\tilde{\mathbf{r}}\sim N(\bar{\mathbf{r}},\Sigma)$。则对于任意给定置信水平$\alpha$，以下三个最优化问题得到的最优解相同：

$Min\sigma^2(L(w))$	$MinVaR_\alpha(L(w))$	$MinC-VaR_\alpha(L(w))$
$\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^n$	$\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^n$	$\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^n$
s.t. ①②	s.t. ①②	s.t. ①②

其中限制条件为：$E[L]=-\mathbf{w}^T\mathbf{e}=-R,\qquad (1)$

$$\sum_{i=1}^{n}w_i=\mathbf{w}^T\mathbf{I}=1\qquad (2)$$

证明： 关于三个优化问题的目标函数，我们得到：

$$\sigma^2(L(\mathbf{w})) = \mathbf{w}^T\Sigma\mathbf{w}$$

$$VaR_\alpha(L(\mathbf{w})) = -\mathbf{w}^T\mathbf{e} + \sqrt{\mathbf{w}^T\Sigma\mathbf{w}}Z_\alpha$$

$$C-VaR_\alpha(L(\mathbf{w})) = -\mathbf{w}^T\mathbf{e} + \sqrt{\mathbf{w}^T\Sigma\mathbf{w}}U_\alpha$$

其中Z_α为标准正态分布的α分位数，$U_\alpha = \dfrac{1}{1-\alpha}\sqrt{\dfrac{1}{2\pi}}e^{-\frac{Z_\alpha{}^2}{2}}$

它们关于$\mathbf{w}$为常数。

这三个目标函数的一阶导数分别为

$$\nabla\sigma^2(L(\mathbf{w})) = \nabla(\mathbf{w}^T\Sigma\mathbf{w}) = 2\Sigma\mathbf{w}$$

$$\nabla VaR_\alpha(L(\mathbf{w})) = \nabla(-\mathbf{w}^T\mathbf{e} + \sqrt{\mathbf{w}^T\Sigma\mathbf{w}}Z_\alpha) = -\mathbf{e} + \frac{Z_\alpha}{\sqrt{\mathbf{w}^T\Sigma\mathbf{w}}}\Sigma\mathbf{w}$$

$$\nabla C-VaR_\alpha(L(\mathbf{w})) = \nabla(-\mathbf{w}^T\mathbf{e} + \sqrt{\mathbf{w}^T\Sigma\mathbf{w}}U_\alpha) = -\mathbf{e} + \frac{U_\alpha}{\sqrt{\mathbf{w}^T\Sigma\mathbf{w}}}\Sigma\mathbf{w}$$

三个约束化问题对应的Lagrange函数的一阶条件分别为：

$$\begin{cases} \nabla \sigma^2(L(\mathbf{w})) + \lambda_1 \nabla(-\mathbf{w}^T\mathbf{e} + R) + \lambda_2 \nabla(-\mathbf{w}^T\mathbf{I} + 1) = 0 \\ \mathbf{w}^T\mathbf{e} = R \\ \mathbf{w}^T\mathbf{I} = 1 \end{cases}$$

(Problem 1)

$$\begin{cases} \nabla VaR_\alpha(L(\mathbf{w})) + \lambda_1 \nabla(-\mathbf{w}^T\mathbf{e} + R) + \lambda_2 \nabla(-\mathbf{w}^T\mathbf{I} + 1) = 0 \\ \mathbf{w}^T\mathbf{e} = R \\ \mathbf{w}^T\mathbf{I} = 1 \end{cases}$$

(Problem 2)

$$\begin{cases} \nabla C - VaR_\alpha(L(\mathbf{w})) + \lambda_1 \nabla(-\mathbf{w}^T\mathbf{e} + R) + \lambda_2 \nabla(-\mathbf{w}^T\mathbf{I} + 1) = 0 \\ \mathbf{w}^T\mathbf{e} = R \\ \mathbf{w}^T\mathbf{I} = 1 \end{cases}$$

(Problem 3)

首先，求解Problem 1：
$$\begin{cases} 2\Sigma\mathbf{w}-\lambda_1\mathbf{e}-\lambda_2\mathbf{I}=0 \\ \mathbf{w}^T\mathbf{e}=R \\ \mathbf{w}^T\mathbf{I}=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{w}=\frac{CR-A}{BC-A^2}\Sigma^{-1}\mathbf{e}-\frac{AR-B}{BC-A^2}\Sigma^{-1}\mathbf{I} \qquad (*)$$

其次，求解Problem 2：
$$\begin{cases} -\mathbf{e}+\dfrac{Z_\alpha}{\sqrt{\mathbf{w}^T\Sigma\mathbf{w}}}\Sigma\mathbf{w}-\lambda_1\mathbf{e}-\lambda_2\mathbf{I}=0 \\ \mathbf{w}^T\mathbf{e}=R \\ \mathbf{w}^T\mathbf{I}=1 \end{cases}$$

记$N_\alpha=Z_\alpha(\mathbf{w}^T\Sigma\mathbf{w})^{-1/2}$，则有$-\mathbf{e}+N_\alpha\Sigma\mathbf{w}-\lambda_1\mathbf{e}-\lambda_2\mathbf{I}=0$，

从而$\mathbf{w}=N_\alpha^{-1}((1+\lambda_1)\Sigma^{-1}\mathbf{e}+\lambda_2\Sigma^{-1}\mathbf{I})$。

在上述等式两边分别左乘$\mathbf{I}^T$和$\mathbf{e}^T$，可得：

$$\begin{cases} 1 = \mathbf{I}^T\mathbf{w} = N_\alpha{}^{-1}(1+\lambda_1)A + N_\alpha{}^{-1}\lambda_2 C \\ R = \mathbf{e}^T\mathbf{w} = N_\alpha{}^{-1}(1+\lambda_1)B + N_\alpha{}^{-1}\lambda_2 A \end{cases}$$

从上述方程组中可以解得：

$$N_\alpha{}^{-1}(1+\lambda_1) = \frac{CR-A}{BC-A^2} \quad 和 \quad N_\alpha{}^{-1}\lambda_2 = \frac{AR-B}{BC-A^2}$$

将二者代入$\mathbf{w}$的表达式，最终可以得到：

$$\mathbf{w} = \frac{CR-A}{BC-A^2}\Sigma^{-1}\mathbf{e} - \frac{AR-B}{BC-A^2}\Sigma^{-1}\mathbf{I}$$

同理，Problem 3也可得到一样的结果。

从而，已证明三个优化问题的最优解都是（*）。

其他风险度量：半方差

- 半方差方法 $$\sigma^2 = E\left[\left(\max(0, X-\mu_X)\right)^2\right]$$

$$样本半方差sv^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\max(x_i-\bar{x},0)^2\right]}{n}$$

$$门限半方差sv^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\max(x_i-\tau,0)^2\right]}{n}$$

其他风险度量：从收益与风险的关系出发

- Treynor度量方法，指风险溢价与 β_P的比值这里 β_P表示系统风险，为该投资组合收益与市场收益的协方差与市场组合方差的比值

$$\beta_P = \frac{Cov(R_P, R_M)}{\sigma_M^2}$$

$$Treynor度量方法 = \frac{E(R_P) - R_F}{\beta_P}$$

R_P投资组合的收益，R_M市场组合的收益

R_F无风险收益，σ_M^2市场组合的方差

其他风险度量：从收益与风险的关系出发

- Sharpe方法，指风险溢价与投资组合标准差的比值。

$$\text{Sharpe度量方法} = \frac{E(R_P) - R_F}{\sigma_P}$$

- Jensen’s alpha,指资产组合收益超出CAPM模型中预测的收益的部分

$$Jensen's \quad alpha = E(R_P) - \left[R_F + (E(R_M) - R_F)\beta_P\right]$$