第一次作业

> 本文采用Markdown编写，数学公式均是用Latex手敲而成，代码文件采用`c++`编写，均与本文件一起放在压缩包里。

Problem1

1. 不妨有$f(x_1) \leq f(x_2)$,构造$g(x) = f(x) - \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则有，$g(x)$是$[x_1, x_2]$上的连续函数，且$f(x_1) \leq 0, f(x_2) \geq 0$,由零点存在定理，必存在$\zeta \in [x_1, x_2]$，满足$f(\zeta) = 0,$ 即$f(\zeta) = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 证毕。
2. 不妨有$f(x_1) \leq f(x_2)$,构造$g(x) = f(x) - \frac{c_1 f(x_1)+c_2 f(x_2)}{c_1+c_2}$, 则有，$g(x)$是$[x_1, x_2]$上的连续函数，且$f(x_1) \leq 0, f(x_2) \geq 0$,由零点存在定理，必存在$\zeta \in [x_1, x_2]$，满足$f(\zeta) = 0,$ 即$\frac{c_1 f(x_1)+c_2 f(x_2)}{c_1+c_2}$, 证毕。
3. 给出一个例子：
   $f(x) = x, x_1 = -2, x_2 = 1, c_1 = -2, c_2 = 1,$ 则$\frac{c_1 f(x_1)+c_2 f(x_2)}{c_1+c_2} = \frac{-2f(-2)+1f1)}{-1} = -5,$ 而$f(x) \in [-2, 1]$,显然找不出这样的ζ。

Problem2

a.

1. $|f(x_0) - \tilde{f}(x_0)| = f'(\zeta)(x_0 + \epsilon - x_0) = f'(\zeta)\epsilon \quad (\zeta \in [x_0, x_0 + \epsilon])$
2. $\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(x_0)|}{f(x_0)} = f'(\zeta)(x_0 + \epsilon - x_0)/f(x_0) = \frac{f'(\zeta)\epsilon}{f(x_0)} \quad (\zeta \in [x_0, x_0 + \epsilon])$

b.

1. **absolute** = $f'(\zeta)\epsilon \in [5 \times 10^{-6} e, 5 \times 10^{-6} e^{1+5\times10^{-6}}]$

   ralative = $\frac{f'(\zeta)\epsilon}{f(x_0)} = \in [5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6} e^{5\times10^{-6}}]$
2. **absolute** = $f'(\zeta)\epsilon \in [5 \times 10^{-6} cos(1 + 5 \times 10^{-6}), 5 \times 10^{-6} cos(1)]$

   ralative = $\frac{f'(x_0)\epsilon}{f(x_0)} \in [5 \times 10^{-6} \frac{cos(1+5\times10^{-6})}{sin(1)}, 5 \times 10^{-6} \frac{cos(1)}{sin(1)}]$

Problem 3

a.

1. exact： $\frac{17}{15}$
2. chopping: 1.13
3. rounding: 1.13
4. ralative errors: $2.94 * 10^{-3}$

b.

1. exact: $\frac{301}{660}$
2. chopping: 0.333+0.272-0.150=0.455
3. rounding: 0.333+0.273-0.150=0.456
4. relative errors: chopping: 2.33×10^{-3} rounding: 1.33×10^{-4}

Problem 4

A.

$$\text{由于}\gamma = min(\alpha, \beta), x\text{趋向于}0$$
$$\text{有：}O(x^\alpha) + O(x^\beta) = O(x^\gamma)$$
$$|F(x) - c_1L_1 - c_2L_2| = |c_1(L_1 + O(x^\alpha)) + c_2(L_2 + O(x^\beta)) - c_1L_1 - c_2L_2|$$
$$= |c_1O(x^\alpha) + c_2O(x^\beta)| = O(x^\alpha) + O(x^\beta) = O(x^\gamma)$$
$$\text{于是有：}F(x) = c_1L_1 + c_2L_2 + O(x^\gamma)$$

B.

$$G(x) = F_1(c_1x) + F_2(c_2x)$$
$$G(x) = L_1 + L_2 + O(c_1^\alpha x^\alpha) + O(c_2^\beta x^\beta)$$
$$\text{由于}: O(c_1^\alpha x^\alpha) = c_1^\alpha O(x^\alpha) = O(x^\alpha)$$
$$\text{得到}: G(x) = L_1 + L_2 + O(x^\alpha) + O(x^\beta)$$
$$= L_1 + L_2 + O(x^\gamma)$$

Problem 5

(相关程序见文件夹中的`cpp`文件)

a:

```
i=0 0.5
i=1 0.25
i=2 0.375
i=3 0.3125
i=4 0.28125
i=5 0.265625
i=6 0.257812
i=7 0.253906
i=8 0.255859
i=9 0.256836
i=10 0.257324
i=11 0.257568
i=12 0.257446
i=13 0.257507
i=14 0.257538
i=15 0.257523
i=16 0.25753
```

b:

在0.2-0.3之间寻根

```
i=0 0.25
i=1 0.275
i=2 0.2875
i=3 0.29375
i=4 0.296875
i=5 0.298438
i=6 0.297656
i=7 0.297266
i=8 0.297461
i=9 0.297559
i=10 0.29751
```

```
i=11 0.297534
i=12 0.297522
i=13 0.297528
```

在1.2-1.3之间寻根

```
i=0 1.25
i=1 1.275
i=2 1.2625
i=3 1.25625
i=4 1.25937
i=5 1.25781
i=6 1.25703
i=7 1.25664
i=8 1.25645
i=9 1.25654
i=10 1.25659
i=11 1.25662
i=12 1.25663
i=13 1.25662
```

Problem 6

(相关程序见文件夹中的`cpp`文件)

a. $2sin\pi x + x = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2sin\pi x + x + x^2}$ （将此作为迭代方程）

```
p1 = 1.41421
p2 = 1.21918
p3 = 1.19779
p4 = 1.21169
p5 = 1.20237
```

b.$3x^2 - e^x = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{e^x}{3}}$

分别让$p_0 = -1$和1，得到以下结果。

```
p1 = 0.95189
p2 = 0.929265
p3 = 0.918812
p4 = 0.914022
```

```
p1 = -0.350181
p2 = -0.484617
p3 = -0.453113
p4 = -0.460307
```

Problem 7

$$\text{由中值定理：}|P_n - P| = |g(p_{n-1}) - g(p)| = g'(\xi)|p_{n-1} - p|$$
$$\text{由于}g'(\xi) > 1, |p_n - p| > |p_{n-1} - p| \ldots > |p_0 - p|$$
$$\text{因此无法找到}p_0\text{使得不动点迭代收敛}$$