金融数学

第3章 效用理论

第3章 效用理论

本章内容概览

1. 确定性条件下的偏好与效用

2. 不确定条件下的偏好关系与效用

3. 投资者的风险偏好和风险度量

引言

- 理性个人的决策行为几乎是所有微观经济分析的起点。经济学的传统是把个人、家庭的存在，以及他们所具有的偏好形式和资源禀赋，视为独立于经济体系的外生因素；而经济组织的行为和作用则在经济体系中内生决定，因而一开始往往会去考察个人的选择行为进而演绎出经济组织的功能和市场的均衡，微观金融学也不例外。
- 要解构整个金融体系，要理解金融产品、资本市场、金融中介在跨期资源配置中的所具有的功能作用及其实现形式，**投资者行为**就是一个自然的起点。

个人生存过程中，必须反复面对以下3 个选择问题：

- （1）选择积累的财富在消费和投资之间进行分割的比例；
- （2）选择消费品种类和数量，在现有消费基金预算约束下，当期效用（utility）最大化；
- （3）选择投资品种类和数量，在现有投资基金预算约束下，未来（期望）效用最大化。不断进行选择的总过程的目的就在于：个人终生效用极大化。

考虑第二个选择问题时，我们称个人为**消费者（consumer）**；考虑第三个问题时为**投资者（investor）**；

一起考虑时为面临抉择的**个人（individual）或者决策者（decision maker）**。

- 我们对投资者行为的研究就从第三个选择问题开始。
- 金融学的重点就是考察**在理性个人特定要求和现有投资基金预算约束下，如何通过选择投资品种类和数量（资产组合），来最大限度的优化个人未来的消费或者财富**。
- 我们也研究**这种个体的投资行为的汇总是否会产生市场均衡和相应的均衡价格体系。**

1. 确定性条件下的偏好与效用

1. 确定性条件下的偏好与效用

- 1.1 偏好关系
- 1.2 确定性环境下的效用函数

1. 确定性条件下的偏好与效用

- 日常生活中，我们时常要比较不同商品或者服务给我们生理、心理上带来的感受或者说**效用**（**utility**）。
- 例如，看一场电影还是吃一块鸡腿，是需要经过激烈思想斗争的，尤其是当荷包里所剩无几的时候。
- 这便涉及到效用大小比较的问题。

在18世纪的古典经济学家眼中，效用和黄油、大炮一样是看得见、摸得着的，他们把效用视为快乐的代名词，看做是一个人的整体福利的指数。

但是，古典经济学家实际上从来没有阐述过如何去度量效用；以及除了人们要实现效用最大化外，效用的概念是否还有别的独立意义。

现代效用理论认为，**效用来源于偏好，并仅仅认为是描述偏好的方法之一。**

1.1 偏好关系

效用是一种纯主观的心理感受，因人因地因时而异。

偏好是建立在消费者可以观察的选择行为之上的。

偏好关系（**preference relation**)是指消费者对不同商品或商品组合偏好的顺序。它可以用一种二元关系表述出来。

偏好关系的表述

令X为商品束（或者消费束）集合，也称**选择集**。X中有n种可供选择的商品。它是n维实数空间中的一个非负子集，它总是被假定为 R^n 闭集和凸集。x、y、z……是它的元素，或者称之为**商品束**（**commodity bundle**）或者**消费束**（**consume boundle**）。

我们可以在消费束的集合X上建立下面的**偏好关系**（**preference relation**）或者**偏好顺序**（**preference ordering**）。

设 X 是 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的凸集，在 X 中引入一个二元关系，记为“$\succeq$”，称之为偏好关系（**preference relation**），如果它具有：

(1)（自返性）若 $x \in X$，则 $x \succeq x$；

(2)（可比较性）若 $x, y \in X$，则 $x \succeq y$ 或者 $y \succeq x$；

(3)（传递性）若 $x, y, z \in X$，如果 $x \succeq y$，$y \succeq z$，则 $x \succeq z$。

注: 若$x, y \in X$, $x \succeq y$, 则认为x比y好，或者x不比y差。

若$x \succeq y$与$y \succeq x$同时成立，则x和y偏好无差异，记作$x \sim y$。

若$x \succeq y$但$y \succeq x$不成立，则x严格地比y好，记作$x \succ y$。

自返性保证了消费者对同一商品的偏好具有明显的一贯性；

可比较性假定保证了消费者具备选别判断的能力；

传递性保证了消费者在不同商品之间选择的首尾一贯性。

通常认为这三条并没有给消费者施加过分严格的限制条件，只要是消费者是理性的都可以做到这一点。

1.2 确定性环境下的效用函数

（1）效用函数定义

如果对于 $\forall x, y \in X$ 有

$$x \succ y \Leftrightarrow u(x) > u(y)$$

和

$$x \sim y \Leftrightarrow u(x) = u(y)$$

成立，则函数关系 $u: X \to R$ 是一个代表了偏好关系的效用函数。

- 效用函数是表示个体偏好关系的一种可行的方法。
- 效用函数一般要求是一个**连续**的实函数。
- 效用函数可以说是唯一的，除了对它作严格正的仿射变换。

（2）基数效用与序数效用

- **基数效用**：19 世纪的一些经济学家如英国的杰文斯、奥地利的门格尔等认为，人的福利或满意可以用他从享用或消费过程中所获得的效用来度量。对满意程度的这种度量叫做基数效用。
- **序数效用**：20 世纪意大利的经济学家帕累托等发现，效用的基数性是多余的，消费理论完全可以建立在序数效用的基础上。所谓序数效用是以效用值的大小次序来建立满意程度的高低，而效用值的大小本身并没有任何意义。

（3） 序数效用函数存在定理

仅在前面三个理性偏好的假定下，连续的效用函数是不一定存在的，字典序偏好就是一个反例：

设选择集 $B_2=\{(x,y)\,|\,x\in[0,\infty),y\in[0,\infty)\}$

显然B_2是$\mathbb{R}^2$中的凸集，在B_2上，定义二元关系$\succeq$如下所述：

若 $(x_1,y_1)\in B_2,(x_2,y_2)\in B_2$，

如果$x_1>x_2$,或者$x_1=x_2,y_1\geq y_2$,定义 $(x_1,y_1)\succeq(x_2,y_2)$。

偏好关系的三条重要公理

公理1（序保持性）

$$对任意 x, y \in X, x \succ y, 及 \alpha, \beta \in [0,1]$$

$$[\alpha x + (1-\alpha) y] \succ [\beta x + (1-\beta) y]$$

当且仅当 $\alpha > \beta$

公理2（中值性）

对任意$x, y, z \in X$, 如果$x \succ y \succ z$,

那么存在惟一的$\alpha \in$（0，1）

使$\alpha x + (1-\alpha) z \sim y$。

公理3（有界性）

存在$x^*, y^* \in X$，使对任意$z \in X$，有$x^* \preceq z \preceq y^*$。

定理3. 1

设选择集X上的偏好关系“$\succeq$”具有公理1～公理3(序保持性、中值性、有界性)，则存在效用函数U：$X \to \mathrm{R}_+$使得

（1）$x \succ y$当且仅当$U(x) > U(y)$;

（2）$x \sim y$当且仅当$U(x) = U(y)$。

证明：首先构造效用函数$U(x)$。

由性质3，存在$x^*, y^* \in X$使对任意$x \in X$

有$x^* \succeq x \succeq y^*$。

如果$x^* \sim y^*$，此时对任意$x \in X$， 有$x^* \sim x \sim y^*$，

我们定义$U(x) = c$（常数）。此时定理显然成立。

若$x^* \succ y^*$，对任意$x \in X$，

因为X存在偏好关系，只有3种情况：

情况1. 当x$\sim x^*$时，定义$U(x)=1$;

情况2. 当x$\sim$y*时，定义$U(x)=0$;

情形3：当$x^*\succ x\succ y^*$，由公理2，存在唯一的$\alpha\in(0,1)$

使$x\sim\alpha x^*+(1-\alpha)y^*$,

此时我们定义$U(x)=\alpha$。

（1）证明$x \succ y$ 当且仅当$U(x) > U(y)$;

必要性 设$x \succ y$

如果$x \sim x^* \succ y \succ y^*$， 此时$U(x) = 1$,

由于$x^* \succ y \succ y^*$，则存在唯一$\alpha \in (0,1)$

使$y \sim \alpha x^* + (1-\alpha) y^*$， 按定义$U(y) = \alpha < 1$,

所以$U(x) > U(y)$。

当$x^{*} \succ x \succ y \sim y^{*}$，此时，按定义$U(y)=0$,

由于$x^{*} \succ x \succ y^{*}$，则存在唯一$\alpha \in (0,1)$

使$\alpha x^{*}+(1-\alpha) y^{*} \sim x$，此时$U(x)=\alpha>0$,

即$U(x)>U(y)$成立。

如果 $x^* \succ x \succ y \succ y^*$,

则存在 α_1, α_2, 使

$\alpha_1 x^* + (1-\alpha_1) y^* \sim x$, 按定义 $U(x) = \alpha_1$,

$\alpha_2 x^* + (1-\alpha_2) y^* \sim y$, 按定义 $U(y) = \alpha_2$,

由公理1（序保持性）,由于 $x \succ y$,必有 $\alpha_1 > \alpha_2$,

故 $U(x) > U(y)$。

（1）证明$x \succ y$ 当且仅当$U(x) > U(y)$;

充分性

假设已知$x, y \in X$, 且$U(x) > U(y)$，证$x \succ y$。

若$U(x) = 1, U(y) = \alpha_2 \in (0,1)$,

此时$x \sim 1x^* + (1-1)y^*$，$y \sim \alpha_2 x^* + (1-\alpha_2)y^*$,

由于$\alpha_2 < 1$，由保序性，$x \succ y$。

若$U(x) = 1$，$U(y) = 0$时，按定义$x \sim x^* \succ y^* \sim$ y，

故$x \succ y$。

充分性　若$U(x)=\alpha_1 \in (0,1)$，$U(y)=0$，此时

$$y \sim y^* = 0x^* + (1-0)y^*,\quad x \sim \alpha_1 x^* + (1-\alpha_1)y^*$$

由于$\alpha_1 > 0$，故$x \succ y$。

若$1 > U(x) > U(y) > 0$，此时令$\alpha_1 = U(x), \alpha_2 = U(y)$，

由U的定义，$x \sim \alpha_1 x^* + (1-\alpha_1)y^*$，$y \sim \alpha_2 x^* + (1-\alpha_2)y^*$

因为$\alpha_1 = U(x) > U(y) = \alpha_2$，由公理1

必有$x \succ y$。

（2）证明：$x \sim y$ 当且仅当$U(x)=U(y)$。

必要性

任取$x, y \in X$，设$x \sim y$，证$U(x)=U(y)$。

若不然，　$U(x) \neq U(y)$。

不妨设$U(x)>U(y)$，　由结论1，此时有$x \succ y$，

这与$x \sim y$矛盾。

（2）证明：$x \sim y$ 当且仅当$U(x)=U(y)$。

充分性

若$U(x)=U(y)$，而$x \sim y$不成立，

此时有两种可能：$x \succ y$，或者$y \succ x$。

由结论（1)，必有$U(x) \neq U(y)$，

矛盾，所以$x \sim y$，证毕。

说明

注1 **序数效用函数不是唯一的，**

但是都具有如下性质：

1. $U(x) > U(y)$ 的充要条件是：$x \succ y$
2. $U(x) = U(y)$ 的充要条件是：$x \sim y$

注2 一个效用函数可以通过正单调变换而获得另一个效用函数与原来的效用函数具有同样的偏好关系：

$V(x) \equiv f[U(x)]$ 且 $f(\bullet)$ 是严格单调递增函数，则有

$$V(x) \geq V(y) \quad \Leftrightarrow \quad U(x) \geq U(y)$$

2. 不确定性条件下的偏好与效用

2. 不确定条件下的偏好与效用

- **2.1 不确定性环境下的行为选择**
- **2.2 不确定性下理性决策的两种原则**
- **2.3 期望效用函数**
- **2.4 期望效用准则矛盾**

引言

- 在第1节中，我们讨论了当选择对象是确定的，且满足偏好关系的三条公理（序保持性、中值性和有界性）的条件下，序数效用函数的存在性定理。
- 本节将把效用概念推广到选择对象包含不确定（风险）的情形。

2.1不确定性环境下的行为选择

经济分析中的不确定性是与风险相联系的。两个概念的密切关系导致大家对其认识的不一致。

很多文献认为，**不确定性是指经济行为结果虽然是不确定的，但是各种结果出现的概率是确定的。**

也有一些经济学家认为**各种可能出现的结果存在一个确定概率的经济行为是具有风险性的；可能出现结果的概率是未知的才能称为具有不确定性，**例如奈特（F·Knight）。

2.2 不确定性下理性决策的两种原则

- 数学期望最大化原则
- 期望效用最大原则

数学期望最大化原则

数学期望收益最大化准则是指使用不确定性下各种可能行为结果的预期值比较各种行动方案优劣。这一准则有其合理性，它可以对各种行为方案进行准确的优劣比较，同时这一准则还是收益最大准则在不确定情形下的推广。

问题：是否数学期望最大化准则是一最优的不确定性下的行为决策准则?

圣彼德堡悖论（Saint Petersbury Paradox）

考虑一个投币游戏，如果第一次出现正面的结果，可以得到1元，第一次反面，第二次正面得 2 元，前两次反面，第三次正面得 4 元，……如果前 n-1 次都是反面，第 n 次出现正面得 2^{n-1} 元。问：游戏的参加应先付多少钱，才能使这场赌博是“公平”的？

该游戏的数学期望值：

$$E(.)=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{8}\times 4+\cdots+\frac{1}{2^n}\times 2^{n-1}+\cdots=\infty$$

但实验的结果表明一般理性的投资者参加该游戏愿意支付的成本（门票）仅为2-3元。

圣彼德堡悖论：面对无穷的数学期望收益的赌博，为何人们只愿意支付有限的价格？

Daniel Bernoulli （**1700-1782**）是出生于瑞士名门著名数学家。其在1738 年发表《对机遇性赌博的分析》提出解决“圣彼德堡悖论”的“风险度量新理论”。

他指出：人们在投资决策时不是用“钱的数学期望”来作为决策准则，而是用“道德期望”来行动的。而道德期望并不与得利多少成正比，而与初始财富有关。穷人与富人对于财富增加的边际效用是不一样的。

Daniel Bernoulli
（1700-1782)

期望效用最大原则

即人们关心的是最终财富的效用，而不是财富的价值量，而且，财富增加所带来的边际效用（货币的边际效用）是递减的。

伯努利选择的道德期望函数为对数函数，即对投币游戏的期望值的计算应为对其对数函数期望值的计算：

$$E(.)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\alpha\log 2^n\approx 1.39\alpha$$

其中，$\alpha>0$ 为一个确定值。

另外， Crammer（1728）采用幂函数的形式的效用函数对这一问题进行了分析。假定：

$$u(x)=\sqrt{x}$$

则

$$E[u(x)]=\sum_{x=1}^{\infty}p(x)u(x)=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{2^{x}}\sqrt{2^{x-1}}=\frac{1}{2-\sqrt{2}}$$

$$x=\{E[u(x)]\}^2=2.914$$

因此，期望收益最大化准则在不确定情形下可能导致不可接受的结果。而贝努利提出的用期望效用取代期望收益的方案，可能为我们的不确定情形下的投资选择问题提供更好的解决方案。

根据期望效用，20%的收益不一定和2倍的10%的收益一样好；20%的损失也不一定与2倍的10%损失一样糟 。

2.3 期望效用函数

- 期望效用函数理论是20世纪50年代，冯·诺依曼和摩根斯坦(Von Neumann and Morgenstern)在公理化假设的基础上，运用逻辑和数学工具，建立了不确定条件下对理性人选择进行分析的框架。不过，该理论是将个体和群体合而为一的。
- 后来，阿罗和德布鲁（Arrow and Debreu）将其吸收进瓦尔拉斯均衡的框架中，成为处理不确定性决策问题的分析范式，进而构筑起现代微观经济学并由此展开的包括宏观、金融、计量等在内的宏伟而又优美的理论大厦。

（上）**John von Neumann (1903-1957)**

（下）**Oskar Morgenstern (1902-1977)**

- **1944** 年在巨著《博弈论与经济行为》中用数学公理化方法提出期望效用函数。这是经济学中首次严格定义风险

- 所谓**期望效用函数**是定义在一个随机变量集合上的函数，它**在一个随机变量上的取值等于它作为数值函数在该随机变量上取值的数学期望**。
- 用它来判断有风险的利益就是比较**"钱的函数的数学期望"**（**"而不是钱的数学期望"**）。

随机计划集合上的偏好关系

- 不确定性下的选择问题是其效用最大化的决定不仅是对自己行动的选择，也取决于自然状态本身的选择或随机变化。
- 第一步的任务是要明确：什么是在不确定情况下的“商品”和“商品空间。
- 不确定下的选择对象被人们称为**随机计划（Random scheme）**或**彩票、抽奖（Lottery）**或**未定商品（contingent commodity）**。

随机计划

设想消费者参加一次抽奖（lottery），所有可能产生的结果假设用n个状态变量$x_1, x_2,\ldots, x_n$表示。

随机变量 $\tilde{x}$ 的概率分布可用向量表示为

$$P=(p_1, p_2,\ldots p_n) \qquad p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

我们称

$$\tilde{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots p_n)=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{P})$$

为一个随机计划。

若抽奖选择的结果又构成一个抽奖时，称为**复合随机计划**。比如，有两个随机计划

$$\tilde{x}_1 = (p_1, \cdots, p_n; x_1, \cdots, x_n)$$

$$\tilde{x}_2 = (q_1, \cdots, q_n; x_1, \cdots;, x_n)$$

则 $\tilde{x} = (\alpha; \tilde{x}_1, \tilde{x}_2), 0 < \alpha < 1$ 就构成一个复合随机计划。

简单随机计划与复合随机计划的关系为：

$$\alpha \tilde{x}_1 \oplus (1-\alpha)\tilde{x}_2$$
$$= \left(\alpha p_1 + (1-\alpha) q_1, \alpha p_2 + (1-\alpha) q_2, \ldots \alpha p_{n|} + (1-\alpha) q_n\right)$$

一般情况的**复合随机计划**（**compound lottery**），其抽奖结果是众多的简单随机计划。复合随机计划记为：

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_K;\tilde{x}_1,\cdots\tilde{x}_K),(\alpha_i)_{i\in K}\geqslant 0,\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$$

其中，$\tilde{x}_K=(p_1^k,\cdots,p_N^k),k\in K$ 是一个简单随机计划。对于每一个复合随机计划，我们可以计算出它与简单随机计划的关系：

$$p_i=\alpha_1 p_i^1+\cdots+\alpha_K p_i^K,i\in N$$

- 所有类似的随机计划（或抽奖），就构成了不确定情况下的商品空间，我们记**随机计划集**（或彩票空间）为 $\boldsymbol{X_Z}$。
- 不同的随机计划（或抽奖）之间也应当存在着与普通商品之间类似的偏好顺序和关系。

二元关系$\succeq$是一个定义在随机计划集 X_Z上的偏好关系，满足：

自返性

传递性

完备性

公理4（独立性公理或替代公理）

对于$\forall \tilde{\boldsymbol{x}}_1$，$\tilde{\boldsymbol{x}}_2 \in \tilde{\mathrm{B}}$，$\tilde{\boldsymbol{x}}_1 \succ \tilde{\boldsymbol{x}}_2$，$\forall \alpha \in$（0，1），则对于$\forall \tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{X}_Z$，有

$$\alpha \tilde{\boldsymbol{x}}_1 \oplus (1-\alpha)\tilde{\boldsymbol{x}} \succ \alpha \tilde{\boldsymbol{x}}_2 \oplus (1-\alpha)\tilde{\boldsymbol{x}}$$

- **含义:**引入一个额外的不确定性的消费计划不会改变原有的偏好。

- **独立性公理假设是不确定环境下决策理论的核心**，它提供了把不确定性嵌入决策模型的基本结构。
- 通过独立性假设，消费者希望把复杂的概率决策行为分为相同和不同的两个独立部分，整个决策行为仅由其中不同的部分来决定。

公理5（阿基米德公理）

对于$\forall \tilde{\boldsymbol{x}}_1 \succ \tilde{\boldsymbol{x}}_2 \succ \tilde{\boldsymbol{x}}_3 \in X_Z$，$\exists \alpha$，$\beta \in$（0，1），使得

$$\alpha \tilde{\boldsymbol{x}}_1 \oplus (1-\alpha)\tilde{\boldsymbol{x}}_3 \succ \tilde{\boldsymbol{x}}_2 \succ \beta \tilde{\boldsymbol{x}}_1 \oplus (1-\beta)\tilde{\boldsymbol{x}}_3$$

- **含义:**没有哪一个消费计划 $\tilde{x}_1$ 好到使得对任意满足$\tilde{x}_2 \succ \tilde{x}_3$的消费计划$\tilde{x}_2, \tilde{x}_3$，无论概率 β 多么小，复合彩票 $\beta\tilde{x}_1 + (1-\beta)\tilde{x}_3$ 不会比 $\tilde{x}_2$差。
- 同样，没有哪一个消费计划$\tilde{x}_3$，差到使得对任意满足 $\tilde{x}_1 \succ \tilde{x}_2$ 的消费计划 $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ ，无论概率 α 多么大，复合彩票 $\alpha\tilde{x}_1 + (1-\alpha)\tilde{x}_3$ 不会比 $\tilde{x}_2$ 好。即**不存在无限好或无限差的消费计划**。(数学上有类似的阿基米德公理)

期望效用表述（expected utility representing)

- 对一个随机计划的期望效用表示为对随机计划结果的效用函数的数学期望:

$$H(\tilde{x})=\sum_{i=1}^{N} p_i u(\mathrm{x}_i)$$

- 其中，$u:Z\to R$是普通序数效用函数，而$H:X_Z\to R$ 称为**Von Neumann-Morgenstern效用函数**(简称**VNM效用函数)**。
- 其含义为：不确定状态下的消费得到的效用是每一可能状态下消费路径得到的效用的加权平均值，权重是相应状态发生的概率。

- 如果随机计划结果是无限的，附加一些不太重要的技术性条件，我们就有期望效用函数的连续形式：

$$H(\tilde{x}) = \int_X u(x) dF(x)$$

其中，$F(x)$为分布函数。

定理 3.2 X为随机计划集，$\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},\tilde{u}\in X$，$\geq$为其上的偏好关系，如果 $\geq$ 满足独立性公理和阿基米德公理，则以下性质成立：

a) 若 $\tilde{x}>\tilde{y}$ 且 $0\leq a<b\leq 1$，则 $b\tilde{x}+(1-b)\tilde{y}>a\tilde{x}+(1-a)\tilde{y}$

b) 若 $\tilde{x}\geq\tilde{y}\geq\tilde{z}$ 且 $\tilde{x}>\tilde{z}$，则 $\exists!a\in[0,1]$ 使得 $\tilde{y}\sim a\tilde{x}+(1-a)\tilde{z}$

c) 若 $\tilde{x}>\tilde{z},\tilde{y}>\tilde{u},a\in[0,1]$，则 $a\tilde{x}+(1-a)\tilde{y}>a\tilde{z}+(1-a)\tilde{u}$

d) 若 $\tilde{x}\sim\tilde{y},a\in[0,1]$，则 $\tilde{x}\sim a\tilde{x}+(1-a)\tilde{y}$

e) 若 $\tilde{x}\sim\tilde{y},a\in[0,1]$，则 $a\tilde{x}+(1-a)\tilde{z}\sim a\tilde{y}+(1-a)\tilde{z}$

期望效用函数的公理化陈述

定理3.3：Z 是有限集，X_Z为取值在有限集Z上的随机计划集。定义在 X_Z 上的偏好关系，若它满足公理4，公理5，则该偏好关系可以用von Neumann-Morgenstern期望效用函数表示，并且期望效用函数是唯一的。

- 一个定义在X_Z上的二元关系$\succeq$，当且仅当它满足上面的三个公理时才存在着期望效用表示：

$$\tilde{x} \succeq \tilde{x}' \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i u(\mathrm{x}_i) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i' u(\mathrm{x}_i)$$

- 为了给出定理证明，我们需要一个引理：

引理 设$\succeq$是$\boldsymbol{X_Z}$上的偏好关系，且满足独立性公理和阿基米德公理。则存在确定性计划$x_{\min}, x_{\max} \in X_Z$，使得 $\forall \tilde{x} \in X_Z$，满足

$$x_{\max} \succeq \tilde{x} \succeq x_{\min}.$$

证明：不妨设 $Z=\{z_1,\dots z_n\}$，且 $x_{z_1}\ge x_{z_2}\ge\dots\ge x_{z_n}$ 。

$\forall\tilde{x}\in X_Z$，取 $a_i=P(\tilde{x}=z_i)\in[0,1]$，则 $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$ 。因此

$$
\begin{aligned}
\tilde{x} &\sim a_1x_{z_1}+a_2x_{z_2}+\cdots+a_nx_{z_n}\\
&\sim a_1x_{z_1}+a_2x_{z_2}+\cdots+\left(1-\sum_{i=1}^{n-1}a_i\right)x_{z_n}\\
&\sim b_{n-1}\left(\frac{a_1}{b_{n-1}}x_{z_1}+\frac{a_2}{b_{n-1}}x_{z_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}x_{z_{n-1}}\right)+(1-b_{n-1})x_{z_n}
\end{aligned}
$$

其中 $b_{n-1}=\sum_{i=1}^{n-1}a_i$

注意到 $\frac{a_1}{b_{n-1}}x_{z_1}+\frac{a_2}{b_{n-1}}x_{z_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}x_{z_{n-1}}$ 的系数和为1，可以用和上面相同的方法分解出最后一项。重复进行这样的步骤，最后可以得到

$$\tilde{x}\sim b_{n-1}\left(b_{n-2}\left(\cdots\left(b_1x_{z_1}+\left(1-b_1\right)x_{z_2}\right)\cdots\right)+\left(1-b_{n-2}\right)x_{z_{n-1}}\right)+\left(1-b_{n-1}\right)x_{z_n}$$

其中 $b_i\in[0,1]$ 。因为 $x_{z_2}\leq x_{z_1}$ ，根据利用独立性公理，有

$$b_1x_{z_1}+\left(1-b_1\right)x_{z_2}\leq x_{z_1}$$

因为 $x_{z_n}, x_{z_{n-1}}, \ldots, x_{z_3} \le x_{z_1}$ 。重复利用独立性公理，得 $\tilde{x} \le x_{z_1}$。

同理可得 $\tilde{x} \ge x_{z_n}$。因此

$$x_{z_1} \ge \tilde{x} \ge x_{z_n}$$

取 $x_{max} = x_{z_1}, x_{min} = x_{z_n}$ 即可。

定理 3.3的证明：因为偏好关系 $\geq$ 满足独立性公理和阿基米德公理，根据引理，存在 x_{min}, x_{max} 使得

$$x_{max} \geq \tilde{x} \geq x_{min}, \forall \tilde{x} \in X_Z \text{。}$$

若$x_{max} \sim x_{min}$，则取H为常数，并取 $u \equiv H$ 即可。

若 $x_{max} > x_{min}$，根据定理3.2 b)，$\exists! a_{\tilde{x}} \in [0,1]$ 得

$$\tilde{x} \sim a_{\tilde{x}} x_{max} + (1 - a_{\tilde{x}}) x_{min}, \quad H(\tilde{x}) = a_{\tilde{x}}$$

则H 在X_Z 上有定义，且 $H(\tilde{x}) \in [0,1]$ 并且根据定理3.2 a)，易见 $H(\tilde{x}) \geq H(\tilde{y})$ 当且仅当 $\tilde{x} \geq \tilde{y}$ 成立，因此H描述了偏好关系$\geq$ 。

下面证明H 具有线性性。

根据H的定义和定理3.2 e)， $\forall \tilde{x}, \tilde{y} \in X_Z, a \in [0,1]$

$$
\begin{aligned}
a\tilde{x}+(1-a)\tilde{y} &\sim a\left(H(\tilde{x})x_{max}+\left(1-H(\tilde{x})\right)x_{min}\right) \\
&\quad +(1-a)\left(H(\tilde{y})x_{max}+\left(1-H(\tilde{y})\right)x_{min}\right) \\
&\sim \left(aH(\tilde{x})+(1-a)H(\tilde{y})\right)x_{max} \\
&\quad +\left(a\left(1-H(\tilde{x})\right)+(1-a)\left(1-H(\tilde{y})\right)\right)x_{min} \\
&\sim \left(aH(\tilde{x})+(1-a)H(\tilde{y})\right)x_{max} \\
&\quad +\left(1-aH(\tilde{x})-(1-a)H(\tilde{y})\right)x_{min}
\end{aligned}
$$

注意到上式右端项系数在0到1之间，且和为1，因此有意义。

根据H的定义，由上式可得

$$H(a\tilde{x}+(1-a)\tilde{y})=aH(\tilde{x})+(1-a)H(\tilde{y})$$

即H具有线性性。

最后证明期望效用表示的存在性。$\forall \tilde{x} \in X_Z$，

$$\tilde{x} \sim P(\tilde{x} = z_1)x_{z_1} + P(\tilde{x} = z_2)x_{z_2} + \cdots + P(\tilde{x} = z_n)x_{z_n}$$

根据H的线性性，并定义确定性计划集上的函数u使得

$u(x_{z_i}) = H(x_{z_i}), i = 1,\ldots,n$，则有

$$\begin{aligned}
H(\tilde{x}) = H[&P(\tilde{x} = z_1)x_{z_1} + P(\tilde{x} = z_2)x_{z_2} + \cdots + P(\tilde{x} = z_n)x_{z_n}] \\
&= P(\tilde{x} = z_1)H(x_{z_1}) + P(\tilde{x} = z_2)H(x_{z_2}) + \cdots + P(\tilde{x} = z_n)H(x_{z_n}) \\
&= P(\tilde{x} = z_1)u(x_{z_1}) + P(\tilde{x} = z_2)u(x_{z_2}) + \cdots + P(\tilde{x} = z_n)u(x_{z_n}) \\
&= E[u(\tilde{x})].
\end{aligned}$$

故H存在期望效用表示。

多期情形的期望效用表示

假设有$N+1$个时期：0,1,2,...N 时期。0 时期为当期，1,2,…,N 时期为不确定的将来，且消费或者投资发生在1,2,…,N 时期。一个随机计划$\tilde{x}$是其上的一个N维随机向量，即 $\tilde{x}=(\tilde{x}^{(1)},\tilde{x}^{(2)},\ldots,\tilde{x}^{(N)})$，其中 $\tilde{x}^{(j)}$， $j=1,2,\ldots,N$为j时期的消费或投资量。全体随机计划$\tilde{x}$的构成了随机计集 X^N 。确定性随机计x_c 为取值恒等于$c\in X^N$的随机计划。

$\succeq$是随机计划集X^N上的偏好关系，$H(\tilde{x}) = H(\tilde{x}^{(1)}, \tilde{x}^{(2)}, \ldots, \tilde{x}^{(N)})$是描述了 $\succeq$ 的效用函数。若存在确定性计划集上的函数u，使得

$$H(\tilde{x}) = \int_{B^N} u(x_y) dF_{\tilde{x}}(y),$$

则称H 存在期望效用表示。假设 Z 为有限集，$X_Z{}^N$表示取值于Z^N的随机计划全体，则类似定理3.2，如下定理成立：

定理 3.4（多期情形期望效用表示存在性）对于X_Z^N和其上的偏好关系$\succeq$来说，以下两者等价：

a）存在X_Z^N上描述了$\succeq$的效用函数H，并且H存在期望效用表示；

b）$\succeq$满足独立性公理和阿基米德公理。

在经济、金融建模中常常会用到一类特殊的VNM效用函数，它满足**时间分离性**（Time Separability）：

$$u(x_z^{(1)}, x_z^{(2)}, \dots x_z^{(N)}) = \sum_{i=1}^{N} u_i(x_z^{(i)})$$

其中 u_i 为个体在第i 期的效用函数。

例如，在考虑贴现的情况下，可以取 $u_i(x)=\delta^i\overline{u}(x)$ 其中 δ 为单期效用贴现因子，而 u 是与时间无关的效用函数。

时间分离效用函数将多期效用分解为单期效用之和，将多维问题变为一维问题，因此能为理论推导提供很大的便利。

但另一方面，时间分离性是一个很强的要求。它假设不同时期的效用互不影响，也就是说，你某一天消费得到的效用不影响另一天消费得到的效用：第一天消费得再多，第二天消费时所得到的乐趣也不会因为厌倦消费而减少。这个要求并不是在所有情况下都成立的。

2.4 期望效用准则矛盾

- 反对期望效用准则的最有趣和最相关的论证，通常包括几个这样的特例：**受试者经过深思熟虑之后，反而会选择不符合该准则的行动方案**。这种情况简单合理，人们的选择相当明确，因而选择与准则之间的矛盾似乎不可避免。
- 我们的结论只能是，或者**期望效用准则不是理性行为**，或者**人们有一种非理性的天生偏好，即使是在他思考最多的时候。**

“Allais 悖论” (1953)

- 期望效用函数似乎是相当人为、相当主观的概念。一开始就受到许多批评，其中最著名的是“Allais 悖论”(1953)。
- 由此引起许多非期望效用函数的研究，涉及许多古怪的数学。但大多不很成功。
- （法）Maurice Allais (1911-) 1986年诺贝尔经济奖获得者。

- 方案A：确定得到100万美元；
- 方案B： 得到500万美元的概率是0.1

  得到100万美元的概率是0.89

  得到0美元的概率是0.01

他发现，在A和B中，他的受试者偏好于A。

于是，他进一步要求受试者考虑一下情形：

- **方案C：以0.11的概率得到100万美元**
  以0.89的概率得到0美元
- **方案D:　以0.10的概率得到500万美元**
  以0.90的概率得到0美元

实验结果：绝大多数人选择D而非C

- 当A和B作为备选方案时选A，当C和D作为备选方案时选D，就违背了期望效用原则。

赌局A的期望值（100万元）虽然小于赌局B的期望值（139万元），但是A的效用值大于B的效用值，即

$$1.00U(1m) > 0.89U(1m) + 0.01U(0) + 0.1U(5m) \quad (1)$$

赌局C的期望值（11万元）小于赌局D的期望值（50万元），而且C的效用值也小于D的效用值，即

$$0.89U(0) + 0.11U(1m) < 0.9U(0)+ 0.1U(5m) \quad (2)$$

而由（2）式得

$$0.11U(1m) < 0.01U(0) + 0.1U(5m)$$

$$1.00U(1m) - 0.89U(1m) < 0.01U(0) + 0.1U(5m)$$

$$1.00U(1m) < 0.89U(1m) + 0.01U(0) + 0.1U(5m) \quad (3)$$

（3）与（1）式矛盾，即阿莱悖论。

- 显然，期望效用理论受到了“阿莱悖论”的严峻挑战。
- “阿莱悖论”实质上是要解释，许多建立在独立性假设上的期望效用，尤其是建立在追求期望效用最大化基石上的模型，都**忽略了人的心理因素对概率分布的影响**。
- 因此，在“阿莱悖论”提出后，许多学者包括经济学家和心理学家均尝试着对不确定性下的选择行为进行进一步探索，力图揭示其中的**心理因素**与**心理机制**。

"Ellsberg 悖论"

两个口袋各有100只球，其中第一个口袋内有40只白球，30只绿球，30只黄球；第二只口袋里有40只白球，60只黄球和绿球。

方案A：从第一个口袋中抽出一球，若为白球或黄球，得1000元。

方案B：从第二个口袋中抽出一球，若为白球或黄球，得1000元。

方案C：从第二个口袋中抽出一球，若为白球或绿球，得1000元。

请问：你会选择哪个方案？

A或B？　　**选A.**

$$0.7u(1000) > (0.4 + p(y))u(1000)$$

A或C？　　**选A.**

$$0.7u(1000) > (0.4 + p(g))u(1000)$$

于是有

$$p(y) + p(g) + 0.4 < 1$$

人们在判断主观概率时往往**偏重于清晰的事实而对模糊不清的事件不放心**，对其采用保守的、留有余地的态度，从而得出违反概率论基本规则 $\sum p_i = 1$ 的结论。

以上例子表明，虽然期望效用理论在形式上相当漂亮，但它在现实中并不成立。这其中可能有很多原因，其一便是数学模型与现实情况存在差异：模型中用公理的假设与严格的推导机械地做出选择，而现实中活生生的人却根据各种不同因素做出选择，其中还包括情感因素。两个在概率上完全相同的随机计划，在人们看来可能有相当大的区别，因为“我不喜欢复杂的选择”或者“我的直觉告诉我，选择前者肯定没错”。人并非机器；**人并不是“理性”的**。

为了解决期望效用理论出现的问题，研究者提出了不少理论。

Karmarkar（1978）提出了主观权重效用（Subjectively Weighted Utility）的方法尝试解决Allais 悖论。其中利用个体主观确定的权重来代替客观的线性概率，当概率在某个临界点之上时，主观认定的概率小于客观概率，反之，则主观概率大于客观概率。

Loomes 和Sugden（1982）提出了“后悔理论”（Regret Theory），其中引入了“后悔函数”（Regret-rejoice Function）的概念，利用过去决策的信息对当前决策的效用进行修正（因为对过去放弃某选择感到后悔，从而影响当前的主观效用）。

彭实戈（1997）通过倒向随机微分方程引入了g-期望，后来又引入了一种新的非线性期望-G期望，由此开创了非线性概率理论。该理论在金融数学，包括效用理论中有重要应用。

- 后悔理论在一定程度上解决了偏好的非传递性效应。
- 非可加效用函数（non additive utility）模型、非线性期望理论可以避免Ellsberg悖论。
- 最著名的要数Kahneman 和Tversky 提出的前景理论（Prospect Theory），由此也引出了一门全新的学科——行为金融学。行为金融学强调一种“描述性分析”，在分析过程中结合了当代心理学，在严格的数学理论基础上，更多地考虑了现实世界中多变的因素。

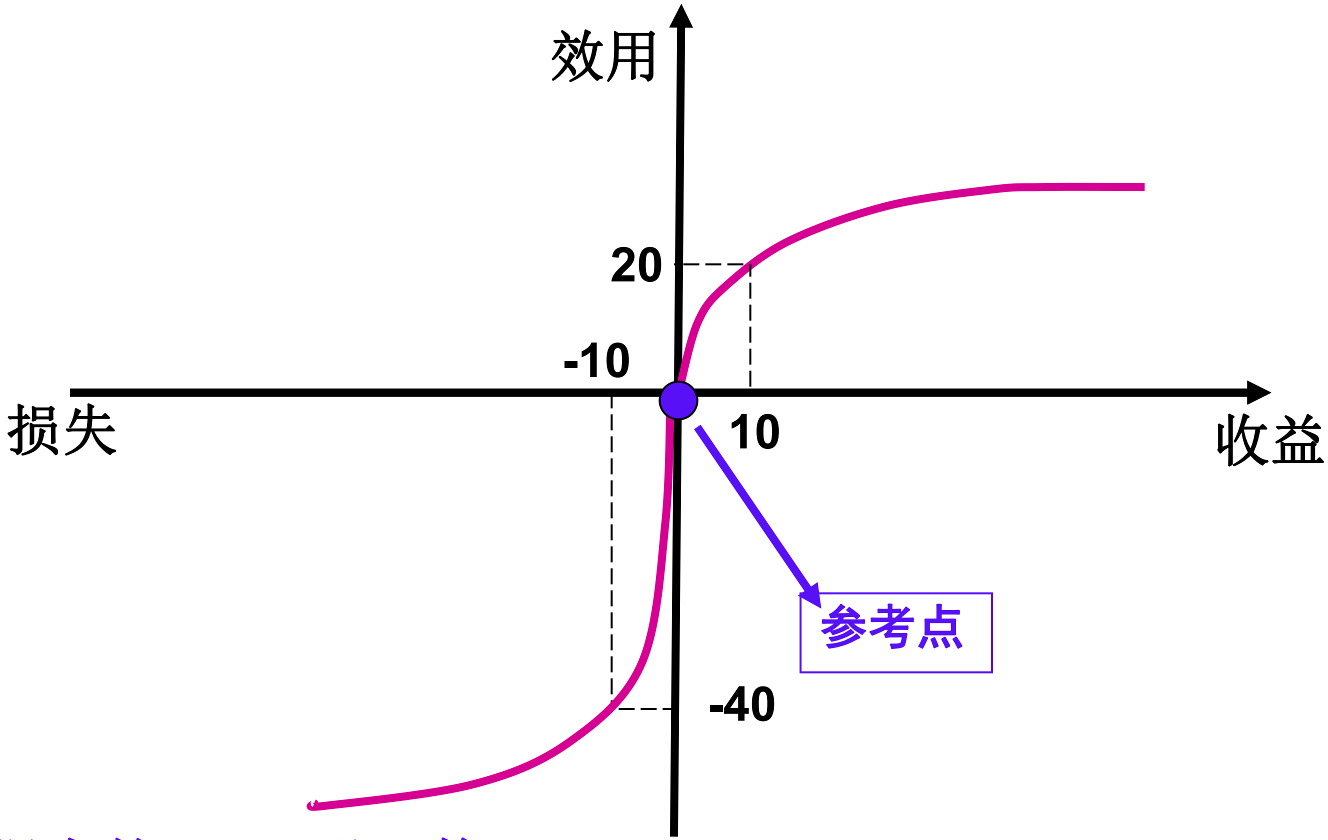
效用函数:

Kahneman和Tversky（1979）提出的指数形式:

$$v(x)=\begin{cases}x^{\alpha}, & x\geq 0\\ -\lambda(-x)^{\beta}, & x<0\end{cases}$$

阿尔法和贝塔分别表示收益和损失区域价值幂函数的凹凸程度。系数λ表示损失区域比收益区域更陡的特征，λ 大于1表示损失厌恶。

综合人们的“反射效应”、“敏感性递减”和“损失厌恶”三种心理效用，行为金融学将财富变化（损益）的效用价值函数画成如下图所示的情形 ：



以参考点为拐点的“S”形函数

3. 投资者的风险偏好及风险度量

3. 投资者的风险偏好及风险度量

- 3.1 投资者的风险类型
- 3.2 马科维茨风险溢价及常用的风险厌恶函数
- 3.3 Arrow-Pratt绝对风险厌恶函数

3.1 投资者的风险类型

假设1： 考虑一项随机计划（彩票或抽奖）只有两种状态 $\{h_1, h_2\}$，状态 h_1 发生的概率为 p，状态 h_2 发生的概率为 $1-p$。而且 $ph_1+(1-p)h_2=0$，表明是公平抽奖。

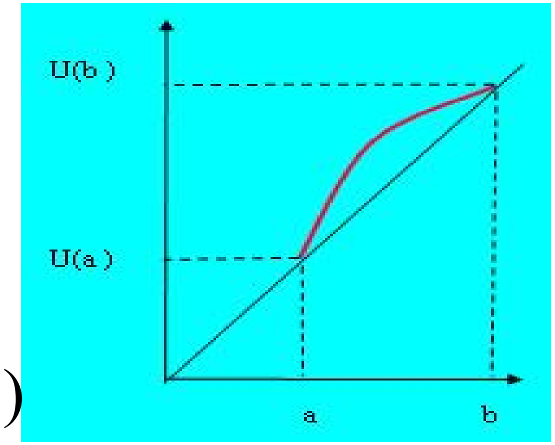
假设2： 投资者的初始财富为 W_0。

假设3： 投资者的*von Neumann-Morgenstern*效用函数为$U(x)$。

则投资者参加这项随机计划的期望效用为

$$pU(W_0+h_1)+(1-p)U(W_0+h_2)$$

(1) 风险厌恶型



如果$U(w_0)=U[p(w_0+h_1)+(1-p)(w_0+h_2)]$

$$\geq pU(w_0+h_1)+(1-p)U(w_0+h_2)$$

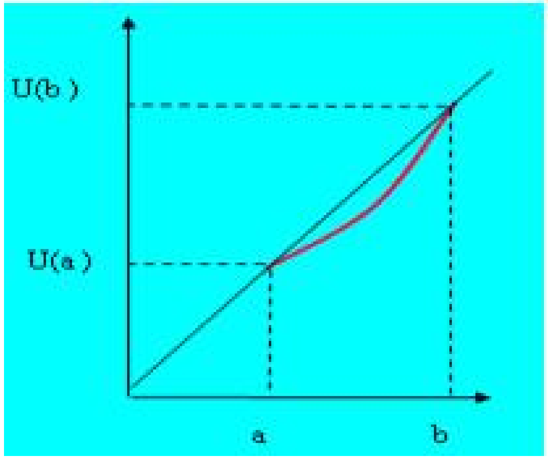
即投资者不参加赌博时的效用大于参加赌博时的效用，此时$U(x)$为凹函数。

定义 如果$U(x)$二次连续可微且$U'(x)>0, U''(x)\leq 0$,则

$$U(E\tilde{w})\geq E[U(\tilde{w})],\qquad 其中\ \tilde{w}=w_0+\tilde{h}.$$

称投资者为**风险厌恶型**。

(2) 风险爱好型



$$如果U(w_0)=U[p(w_0+h_1)+(1-p)(w_0+h_2)]$$
$$\le pU(w_0+h_1)+(1-p)U(w_0+h_2)$$

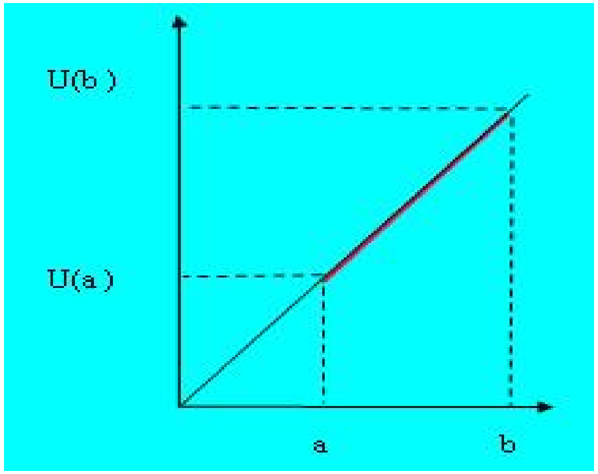
即投资者愿意参加赌博，此时$U(x)$为凸函数。

定义　如果$U(x)$二次连续可微且$U'(x)>0, U''(x)\ge 0$,则

$$U(E\tilde{w})\le E[U(\tilde{w})],\qquad 其中\tilde{w}=w_0+\tilde{h}.$$

称投资者为**风险爱好型**。

(3) 风险中性型



$$\text{如果} U(w_0) = U[p(w_0 + h_1) + (1-p)(w_0 + h_2)]$$
$$= pU(w_0 + h_1) + (1-p)U(w_0 + h_2)$$

此时效用函数为线性函数，称投资者为风险中性的。

定理 （风险态度的等价条件） 假设U是某个体的von Neumann – Morgenstern 效用函数，则

$$\begin{array}{lllll} \text{个体风险厌恶} & \Leftrightarrow & U\text{严格凹} & \Leftrightarrow & U''<0 \\ \text{个体风险中性} & \Leftrightarrow & U\text{是线性} & \Leftrightarrow & U''\equiv 0 \\ \text{个体风险爱好} & \Leftrightarrow & U\text{严格凸} & \Leftrightarrow & U''>0 \end{array}$$

3.2 马科维茨风险溢价

假定所有投资者都是风险厌恶者，但是不同投资者的风险厌恶程度不同，为度量投资者的风险厌恶程度，引入风险溢价的概念。

如果投资者厌恶风险，有

$$\begin{aligned} U(w_0) &= U[p(w_0+h_1)+(1-p)(w_0+h_2)] \\ &\geq pU(w_0+h_1)+(1-p)U(w_0+h_2) \end{aligned}$$

$$U(E\tilde{w}) \geq E(U(\tilde{w}))$$

设$\Theta(w_0,\tilde{h})$满足：

$$U(w_0-\Theta(w_0,\tilde{h}))=EU(\tilde{w})=pU(w_0+h_1)+(1-p)U(w_0+h_1).$$

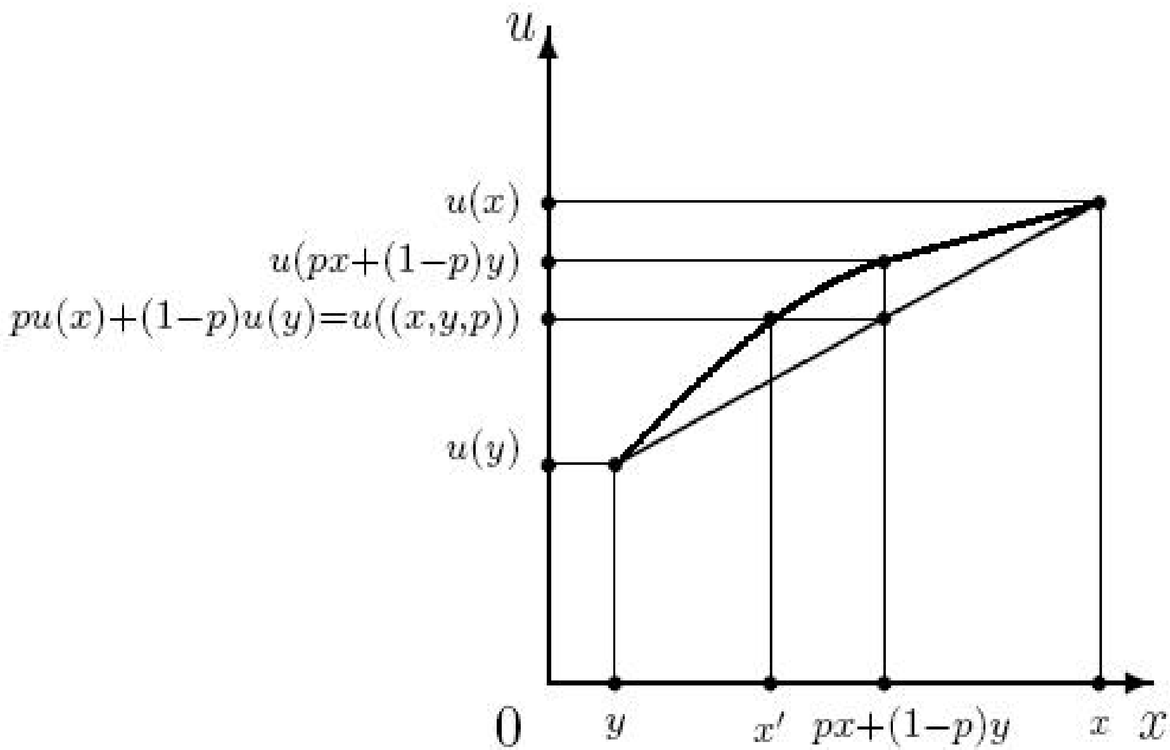
更一般：　$U(w_0-\Theta(w_0,\tilde{h}))=EU(\tilde{w})$　其中$\tilde{w}=w_0+\tilde{h}$

$\Theta(w_0,\tilde{h})$越大，表明越是厌恶风险。

则称$\Theta(w_0,\tilde{h})$为**马科维茨**($Markowitz$)**风险溢价**。

称$w_0-\Theta(w_0,\tilde{h})$或者$E\tilde{w}-\Theta(w_0,\tilde{h})$为确定性等价财富。

设$y=\omega_0+h_1, x=\omega_0+h_2$



例： 设投资者的效用函数为$U(x)=\ln x$，初始财富为$W_0=10$。若他进行某项投资，有20%的可能财富增加20，也有80%的可能财富减少5。求其马科维茨风险溢价和确定性等价财富。

解：
$$E(U(x)) = pU(W_0+h_1)+(1-p)U(W_0+h_2)$$
$$= 0.2\ln(10+20)+0.8\ln(10-5)=1.97$$

若$U(y)=E(U(\tilde{w}))$

$\Rightarrow \quad \ln y = 1.97$

$\Rightarrow \quad y = e^{1.97} = 7.17$

故

风险溢价为10-7.17=2.83；

确定性等价财富为7.17。

3.3 Arrow-Pratt绝对风险厌恶函数

下面讨论马科维茨风险溢价和效用函数的关系。

由风险溢价的定义可得：

$$U(E\tilde{w}-\Theta(\tilde{w}))=E[U(\tilde{w})]$$

等号左边可写成：

$$U(E\tilde{w}-\Theta(\tilde{w}))=U(E\tilde{w})-U'(E\tilde{w})\Theta(\tilde{w})+o(\Theta(\tilde{w})) \qquad (1)$$

将$U(\tilde{w})$在$E\tilde{w}$展开，得

$$U(\tilde{w})=U(E\tilde{w})+U'(E\tilde{w})(\tilde{w}-E\tilde{w})+\frac{U''(E\tilde{w})}{2}(\tilde{w}-E\tilde{w})^2$$

$$+o((\tilde{w}-E\tilde{w})^2) \qquad (2)$$

取期望，得$EU(\tilde{w})=U(E\tilde{w})+\dfrac{U''(E\tilde{w})}{2}Var(\tilde{w})+o((\tilde{w}-E\tilde{w})^2) \qquad (3)$

$$U(E(\tilde{w})-\Theta(\tilde{w}))=U(E(\tilde{w}))-U'(E(\tilde{w}))\Theta(\tilde{w})+o(\Theta(\tilde{w})) \qquad (1)$$

$$E(U(\tilde{w}))=U(E(\tilde{w}))+\frac{U''(E(\tilde{w}))}{2}\sigma^2(\tilde{w})+o(\tilde{w}-E(\tilde{w}))^2 \qquad (3)$$

由风险溢价的定义：$U(E\tilde{w}-\Theta(\tilde{w}))=E(U(\tilde{w}))$,

由式(1)和式(3)右端相等，推出

马科维茨风险溢价和效用函数之间的关系

$$\Theta(\tilde{w})\approx-\frac{U''\left(E\left(\tilde{w}\right)\right)}{U'\left(E\left(\tilde{w}\right)\right)}\frac{\sigma^2\left(\tilde{w}\right)}{2} \qquad (4)$$

绝对风险厌恶

称 $A(x) = -\dfrac{U''(x)}{U'(x)}$ 为$Arrow-Pratt$绝对风险厌恶函数。

对于小的风险来说，绝对风险厌恶是投资者风险厌恶倾向的一种度量。投资者的绝对风险厌恶越大，所要求的风险补偿就越大；反之亦然。

绝对风险厌恶实际上度量了效用函数的曲率性质。投资者是风险厌恶的，$U(\bullet)$是凹函数，则$U''(\bullet) \le 0$。所以，一定有绝对风险厌恶$A(x) \ge 0$，当然也就有风险溢价非负。很显然，要风险厌恶者承担风险，必须提供风险补偿。

- 如果绝对风险厌恶函数$A(x) > 0$, 表示风险厌恶的风险态度，因为效用函数为凹函数，即二阶导函数为负；
- 如果绝对风险厌恶函数$A(x) = 0$, 表示风险中性的风险 态度，因为效用函数为线性函数，即二阶导函数为零；
- 如果绝对风险厌恶函数$A(x) < 0$, 表示风险爱好的风险态度，因为效用函数为凸函数，即二阶导函数为正。

相对风险厌恶

称 $T(x)=A(x)^{-1}$ 为风险容忍函数。

称 $R(x)=xA(x)$为相对风险函数。

$$R(x)\equiv xA(x)=-\frac{U''(x)x}{U'(x)}$$

把这个式子作如下变形，以便理解它的经济涵义：

$$R(x)\equiv-\frac{U''(x)x}{U'(x)}=-\frac{dU''}{U'}\Big/\frac{dx}{x}$$

所以，$R(x)$实际上是效用函数的变化率U'对财富x变化的负弹性，

即财富x发生一个百分点的变化时，U'发生多少个百分点的相反变化。

绝对风险厌恶和相对风险厌恶的区别

$$A(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)} \qquad R(x) \equiv xA(x) = -\frac{U''(x)x}{U'(x)}$$

两者主要区别在于，绝对风险厌恶不考虑研究对象目前的财富程度。

相对风险厌恶加入了财富W_0，也就是说，后者认为比尔盖茨和街边要饭的对于风险厌恶程度的看法是不同的。

比如对于抢钱包这个有风险的回报，用绝对风险厌恶，两者只要效益函数也就是偏好相同，那得出结论就相同。如果用相对风险厌恶看，即使两者效用函数相同，但是如果一个人比较富裕，那他应该有更强烈的风险厌恶。

3.4 双曲绝对风险厌恶（HARA）效用函数

称形如：

$$U(x)=\frac{1-r}{r}\left(\frac{ax}{1-r}+b\right)^{r},\qquad b>0,\frac{ax}{1-r}+b>0$$

为双曲绝对风险厌恶效用函数。

$$U'(x)=a\left(\frac{ax}{1-r}+b\right)^{r-1},\qquad U''(x)=-a^2\left(\frac{ax}{1-r}+b\right)^{r-2}.$$

故 $$A(x)=-\frac{U''(x)}{U'(x)}=a\left(\frac{ax}{1-r}+b\right)^{-1}=\left(\frac{x}{1-r}+\frac{b}{a}\right)^{-1}.$$

$$T(x)=\frac{x}{1-r}+\frac{b}{a}.$$

因此称这类函数为双曲绝对风险厌恶函数。

常用的效用函数

(1) 线性效用函数 当 $r=1$ 时，则 $U(x)=ax$ 是风险中性者的效用函数。

(2) 二次效用函数 当$r=2$时，则

$$U(x)=-\frac{1}{2}(b-ax)^2$$

一般写成$U(x)=x+ax^2$。

(3) 指数效用函数。当$b=1, r\to\infty$时，则 $U(x)=-e^{-ax}$

$$A(x)=a，\quad R(x)=ax$$

它具有常绝对风险厌恶系数。

(4) 幂效用函数。当$r<1, b=0$时，有 $U(x)=\dfrac{x^r}{r}$

$$有A(x)=\frac{1-r}{\mathrm{x}}, R(x)=\frac{1}{1-r}$$

它具有常相对风险厌恶和递减绝对风险厌恶。

(5) 对数效用函数

$$\text{当}a=1, b=0, r\to 0\text{时}, \frac{1-r}{r}\left[\left(\frac{x}{1-r}\right)^{r}\right]\to \ln x$$

$$A(\mathrm{x})=\frac{1}{x}, R(x)=-\frac{U''(x)x}{U'(x)}=1$$