hw4

1

原问题等价于:

$$\begin{aligned} \min \ & -(x_1+1)^2-(x_2+1)^2 \\ s.t. \ & x_1^2+x_2^2-2\le 0, x_2-1\le 0. \end{aligned}$$

令拉格朗日函数为:

$$L=-(x_1+1)^2-(x_2+1)^2+\mu_1(x_1^2+x_2^2-2)+\mu_2(x_2-1)$$

列出KKT条件:

$$\begin{gathered} \nabla_{x_1}L=2(\mu_1-1)x_1=0 \\ \nabla_{x_2}L=2(\mu_1-1)x_2+\mu_2=0 \\ x_1^2+x_2^2-2\le 0 \\ x_2-1\le 0 \\ \mu_1,\mu_2\ge 0 \\ \mu_1(x_1^2+x_2^2-2)=0 \\ \mu_2(x_2-1)=0 \end{gathered}$$

我们分下面几种情况讨论:

1. 若$\mu_1=1$，则$\mu_2=0, x_1^2+x_2^2=2$, 此时 $-(x_1+1)^2-(x_2+1)^2=-4-2(x_1+x_2)\ge -8$
2. 若$\mu_1=0$，则$x_1=0, x_2=\frac{\mu_2}{2}\Rightarrow \mu_2^2\le 8$，若$\mu_2=0$，此时 $x_1=x_2=0$， $-(x_1+1)^2-(x_2+1)^2=$-2，若 $\mu_2\ne 0, x_2=1\Rightarrow -(x_1+1)^2-(x_2+1)^2=-5$
3. 若$\mu_1\ne 1$且$\mu_1\ne 0$, 则$x_1=0, x_2=\frac{\mu_2}{2(1-\mu_1)}, x_1^2+x_2^2=2\Rightarrow \mu_2^2=8(1-\mu_1)^2$

   且$\mu_2\frac{2\mu_1+\mu_2-2}{2(1-\mu_1)}=0\Rightarrow 2\mu_1+\mu_2-2=0$ (因为$\mu_1\ne 1\to \mu_2\ne 0$)

   解上述方程，发现无解。

综上，可知在$x=y=1$时，$(x+1)^2+(y+1)^2$取最大值8.

2

$$\begin{aligned} \min \ & f(x,y)=(x-1)^2+(y-2)^2 \\ s.t. \ & (x-1)^2=5y. \end{aligned}$$

(a)

令拉格朗日函数为：$L=(x-1)^2+(y-2)^2-\lambda((x-1)^2-5y)$

列出KKT条件:

$$\begin{gathered} \nabla_x L=2(1-\lambda)(x-1)=0 \\ \nabla_y L=2(y-2)+5\lambda=0 \\ (x-1)^2=5y \end{gathered}$$

1. 当$\lambda=1$时，无解

2. 当$\lambda \neq 1$时，$x=1, y=0$

   此时 $\nabla c(x_0)=\begin{bmatrix}2(x-1)\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-5\end{bmatrix}$所以是线性无关的（只有一个还非零）所以LICQ条件满足。

(b) $(x,y)=(1,0)^T$是上述优化问题的解。

(c)

将$(x-1)^2$代入，有$f(x,y)=5y+(y-2)^2=y^2+y+4$, 此时无约束优化的最小值就是在$y=-0.5$时取到，但是此时$(x-1)^2=5y$是无解的，所以这个解不是原来约束优化问题的解。

3

题目中的是max $-5x_1-x_2$，但是这样的话显然是(0,0)时取到最大，所以问了老师后跟我说用min，max都做一遍，过程如下

<u>当题目是原题时：</u>

$$\begin{aligned}&\min\ 5x_1+x_2+0x_3+0x_4\\&s.t. x_1+x_2+x_3=5,\\&\quad 2x_1+\frac{1}{2}x_2+x_4=8,\\&\quad x\geq 0\end{aligned}$$

第一步迭代：

选取初始的$B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, N=\begin{bmatrix}1&1\\2&0.5\end{bmatrix}, x_B=\begin{bmatrix}5\\8\end{bmatrix}$

结合$c_B=(0,0)^T, c_N=(-5,-1)^T$，计算$s_N=c_N-N^TB^{-T}c_B$

得到$s_N=(5,1)^T>0$.

所以在$x_1,x_2=(0,0)$时原函数取到最大，最大为0.

<u>当题目是min时：</u>

(a) 标准形态

$$\begin{aligned}&\min\ -5x_1-x_2+0x_3+0x_4\\&s.t. x_1+x_2+x_3=5,\\&\quad 2x_1+\frac{1}{2}x_2+x_4=8,\\&\quad x\geq 0\end{aligned}$$

(b)

第一步迭代：

选取初始的$B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, N=\begin{bmatrix}1&1\\2&0.5\end{bmatrix}, x_B=\begin{bmatrix}5\\8\end{bmatrix}$

结合$c_B=(0,0)^T, c_N=(-5,-1)^T$，计算$s_N=c_N-N^TB^{-T}c_B$

得到$s_N=(-5,-1)^T$.

计算目标函数值=0，选取q=1，$A_q=[1,2]^T$, 计算$Bd=A_q$, 得到$d=[1,2]^T$.

计算$x_4^+=\min_{i|d_i>0}\frac{(x_B)_i}{d_i}=4$，得到新的指标集$\mathcal{B}=\{3,1\}, \mathcal{N}=\{4,2\}$

第二步迭代:

$B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}, N=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0.5\end{bmatrix}, x_B=\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix}$

$c_B=(0,-5)^T, c_N=(0,-1)^T, \lambda=(0,-2.5)^T$

$s_N=c_N-N^T\lambda=(2.5,0.25)^T>0$

此时x值为$x_1,x_2=(4,0)$，目标函数值取到最小为-20.

4

$$\begin{aligned}\max\ \ &6x_1+4x_2-13-x_1^2-x_2^2,\\ s.t.\ \ &x_1+x_2\leq 3, x_1\geq 0, x_2\geq 0.\end{aligned}$$

等价于:

$$\begin{aligned}\min\ \ &-6x_1-4x_2+x_1^2+x_2^2,\\ s.t.\ \ &-x_1-x_2+3\geq 0, x_1\geq 0, x_2\geq 0.\end{aligned}$$

令$G=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}, c=\begin{bmatrix}-6\\ -4\end{bmatrix}$

假设迭代初始点为$x_0=(0,2)^T$，此时工作集$W_0=\{2\}$

此时$g_k=Gx_0+c=(-6,0)^T$ 求解子问题:

$$\begin{aligned}\min_p\ \ &\frac{1}{2}p^TGp+g_k^Tp\\ s.t.\ \ &a_i^Tp=0,\quad i\in\mathcal{W}_k.\end{aligned}$$

得到$p_0=0$ 这时候我们计算$\lambda_1=-6$，说明这个约束都不是活跃的，我们删掉约束2，即得到新的工作集$W_1=\text{空集}$.

这时候我们再求解子问题求解得到$p_1=(3,0)^T$, 在下降的方向上有 blocking constraint 的存在，因此计算得到的步长为0.5,得到新的迭代点$x_2=(1,5,1,5)$, 同时我们把blocking constraint 添加到工作集中得到更新后的工作集为$W_2=1$.

进入下一次迭代，得到下降方向$p_3=(0,5,-0,5)$，此时前进方向上没有blocking constraint，于是取步长为1，即得到$x_3=(2,1)$。

进入下一次迭代，计算$p_4=0$. 于是再计算$\lambda_1=2>0$，说明当前的迭代点已经是最优点。因此我们退出迭代，并得到问题的最优解:

$$x*=(2,1)^T$$