题 1. 设 $\boldsymbol{N}$ 是强度为 $\lambda(t)=t+0.5$ 的非齐次 Poisson 过程.

(1) 求 $P(N(1)=2,N(2)=3)$;

(2) 求 $P(N(1)=2|N(2)=3)$.

题 2. 设 $\boldsymbol{N}$ 是强度 $\lambda=3$ 的齐次 Poisson 过程, $S_1,S_2,\cdots$ 为顾客到达时刻.

(1) 求 $E\Big(\sum\limits_{i=1}^{N(t)+1}S_i\Big)$;

(2) 设每位顾客接受服务的时间服从 $[0,1]$ 上的均匀分布, 相互独立且和 $\boldsymbol{N}$ 独立, 求恰好有一位顾客在 $[1,2]$ 内结束服务的概率.

题 3. $\boldsymbol{X}$ 是 Markov 链, 转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/8 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

初始分布为 $P(X_0=1)=P(X_0=2)=\dfrac{1}{2}$.

(1) 求 $P(X_2=1)$;

(2) 求 $P(X_2=1,X_3=1)$;

(3) 记 $T=\min\{n:X_n=3\text{或}X_n=4\}$, 求 $E(T)$.

题 4. $\boldsymbol{X}$ 是 Markov 链, 转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0.7 & 0 \end{pmatrix}$$

(第一、五行数据记不清了, 但 0 的位置没错, 也不影响题目.)

(1) 求所有的互通等价类, 并指出哪些是闭集;

(2) 求出各状态的周期与常返性;

(3) 求所有正常返状态的平均返回时.

题 5. 设 $Z_0,Z_1,Z_2,\cdots$ 是分枝过程, $Z_0=1$, $Z_1\sim B(2,p)$(二项分布).

(1) 求 $E(Z_1Z_2)$;

(2) 求灭绝概率 $P(\text{存在}n\text{使}Z_n=0|Z_1=Z_2=2)$.

题 6. 设 $\boldsymbol{B}$ 是标准 Brown 运动.

(1) 求 $\mathrm{Var}(3B_3-B_1)$;

(2) 设 $M(1)$ 为 $B(t)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值, 计算条件分布函数 $P(M(1)\le x|B(1)\le 1)$;

(3) 设 $X(t)=\mathrm{e}^{B^2(t)}$, 求 $\mathrm{d}X(t)$.

题 7. 设 $X(t)=\cos(Wt+\Theta)$, 其中 $P(W=0)=P(W=1)=\dfrac{1}{2}$, $\Theta\sim U(0,2\pi)$, 且 W 和 Θ 独立.

(1) 求 $P(X(0)<0,X(\pi)<0)$;

(2) 计算 $\boldsymbol{X}$ 的均值函数和自相关函数;

(3) 计算 $\boldsymbol{X}$ 的时间平均;

(4) 判断 $\boldsymbol{X}$ 是否具有均值遍历性, 说明理由.