Bayesian Intervals

在经典的区间估计中, $\mathsf{P}(\theta \in [0.262, 1.184])$ 没有意义.

置信区间的含义为:

置信水平为90%的同等置信区间(的实现)$[\widehat{\theta}_L(\tilde{x}), \widehat{\theta}_U(\tilde{x})]$ 意味着在一串同样(是指, 独立重复)的置信区间的实现中, 平均来讲, 有90% 的区间包含未知参数θ, 从而这一个(实现)$[\widehat{\theta}_L(\tilde{x}), \widehat{\theta}_U(\tilde{x})]$ 有90% 的机会包含未知参数θ.

而在Bayes 统计理论中, θ是随机变量, 我们可以说θ 落入区间$[0.262, 1.184]$的概率是多少.

设$\pi(\theta|\widetilde{x})$是给定$\widetilde{X}=\widetilde{x}$后, θ的后验分布, 称

$$\mathsf{P}(\theta \in A|\widetilde{x}) = \int_A \pi(\theta|\widetilde{x})d\theta$$

为A关于θ的可信概率(credible probability).

Definition

设参数θ的后验分布为$\pi(\theta|\tilde{x})$. 对给定的$1-\alpha$, 若存在$\theta_L=\theta_L(\tilde{x})$与$\theta_U=\theta_U(\tilde{x})$, 使得

$$\mathsf{P}(\theta_L\le\theta\le\theta_U|\tilde{x})\ge 1-\alpha,$$

则称区间$[\theta_L,\theta_U]$为参数θ的可信水平为$1-\alpha$的可信区间(Credible Interval)(注意区分Confidence Interval). 若

$$\mathsf{P}(\theta\ge\theta_L|\tilde{x})\ge 1-\alpha,$$

则称θ_L为参数θ的可信水平为$1-\alpha$的单侧可信下限.

同样可以定义单侧可信上限.

Example

在截尾寿命试验中，设$s_r = t_{(1)} + \cdots + t_{(r)} + (n-r)t_{(r)}$为观察到的总试验时间. 取倒gamma分布$\Gamma^{-1}(a,\lambda)$为平均寿命$\theta$的先验分布，
求θ的$(1-\alpha)*100\%$可信下限.

记$\tilde{t} = (t_{(1)}, \cdots, t_{(r)})$，则

$$\theta|\tilde{t} \sim \Gamma^{-1}(a+r, \lambda+s_r),$$

即

$$\theta^{-1}|\tilde{t} \sim \Gamma(a+r, \lambda+s_r).$$

所以

$$2(\lambda+s_r)\theta^{-1}|\tilde{t} \sim \Gamma(a+r, 1/2) = \chi^2(2(a+r)).$$

取

$$\theta_L = \frac{2(\lambda + s_r)}{\chi^2_\alpha(2(a+r))},$$

则有

$$\mathsf{P}\left(\theta \geq \theta_L | \widetilde{t}\right) = \mathsf{P}\left(2(\lambda + s_r)\theta^{-1} \leq \chi^2_\alpha(2(a+r)) | \widetilde{t}\right) = 1 - \alpha.$$

θ_L即为所求的单侧可信下限.

设在彩电寿命试验中，取若干台彩电同时开始试验，共试验了40000小时，还没有发现有失效的彩电．这时，$r = 0$，$s_r = 40000$．而由先验信息知$a = 1.956$，$\lambda = 2868$．从而θ的90%可信下限为

$$\theta_L = \frac{2(2868 + 40000)}{\chi^2_{0.1}(3.912)} \approx \frac{2 \times 42868}{\chi^2_{0.1}(4)} = \frac{2 \times 42868}{7.779} \approx 11021(\text{小时}).$$

置信区间与Bayes 可信区间含义不同:

- 90% 置信区间$[\widehat{\theta}_L(\tilde{x}), \widehat{\theta}_U(\tilde{x})]$ 意味着在一串同样(是指，独立重复)的置信区间的实现中，平均来讲，有90% 的区间包含未知参数θ，从而这一个(实现)$[\widehat{\theta}_L(\tilde{x}), \widehat{\theta}_U(\tilde{x})]$ 客观上有90% 的机会包含未知参数θ;
- 90% 可信区间$[\widehat{\theta}_L(\tilde{x}), \widehat{\theta}_U(\tilde{x})]$ 意味着实验者结合先验信息和试验信息后，主观上有90%的把握说，未知参数θ落入这一个区间$[\widehat{\theta}_L(\tilde{x}), \widehat{\theta}_U(\tilde{x})]$中.

Example

设$\widetilde{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是取自两点分布$B(1,p)$的样本，取beta分布$Beta(a,b)$为先验分布，求$p$的$(1-\alpha)*100\%$的可信区间.

解： 记$T=\sum_{i=1}^n X_i$, $t=\sum_{i=1}^n x_i$. 我们要取$\widehat{p}_L^B<\widehat{p}_U^B$使得

$$\mathsf{P}\left(\widehat{p}_L^B\le p\le \widehat{p}_U^B\middle|\widetilde{x}\right)=1-\alpha,$$

其中

$$p\big|_{\widetilde{x}}\sim Beta(t+a,n-t+b).$$

注意到

$$\frac{2(n-t+b)}{2(t+a)}\frac{p}{1-p}\Big|_{\tilde{x}} \sim F(2(t+a),2(n-t+b)).$$

所以只要取

$$\begin{aligned}\frac{2(n-t+b)}{2(t+a)}\frac{\widehat{p}_L^B}{1-\widehat{p}_L^B} =& F_{1-\alpha/2}(2(t+a),2(n-t+b)),\\ \frac{2(n-t+b)}{2(t+a)}\frac{\widehat{p}_U^B}{1-\widehat{p}_U^B} =& F_{\alpha/2}(2(t+a),2(n-t+b)),\end{aligned}$$

即得到$(1-\alpha)*100\%$可信区间$[\widehat{p}_L^B,\widehat{p}_U^B]$.

当先验分布为均匀分布$U(0,1)$时，

$$\frac{2(n-t+1)}{2(t+1)}\frac{\widehat{p}_L^B}{1-\widehat{p}_L^B} = F_{1-\alpha/2}(2(t+1), 2(n-t+1)),$$
$$\frac{2(n-t+1)}{2(t+1)}\frac{\widehat{p}_U^B}{1-\widehat{p}_U^B} = F_{\alpha/2}(2(t+1), 2(n-t+1)).$$

而$(1-\alpha)*100\%$置信区间$[\widehat{p}_L, \widehat{p}_U]$的上下限为

$$\frac{2(n-t+1)}{2t}\frac{\widehat{p}_L}{1-\widehat{p}_L} = F_{1-\alpha/2}(2t, 2(n-t+1)),$$
$$\frac{2(n-t)}{2(t+1)}\frac{\widehat{p}_U}{1-\widehat{p}_U} = F_{\alpha/2}(2(t+1), 2(n-t)).$$

可以验证

$$\widehat{p}_L < \widehat{p}_L^B < \widehat{p}_U^B < \widehat{p}_U.$$