§5.2 正态分布总体参数的假设检验

一、单个正态总体

设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\widetilde{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自该总体的样本. 并记

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

1、正态总体均值μ的假设检验

(A) σ^2已知时

(1) $H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$

由于$\overline{X}$是μ的极大似然估计且为其无偏估计量，故可取它做检验统计量. 相对于备择假设当H_1而言，当原假设H_0为真时，$\overline{X}$的值不应该太大. 而当$\overline{X}$过大(比μ_0大很多)时，应拒绝H_0. 于是拒绝域应有如下形式:

$$D = \{\tilde{x} : \overline{x} > C\} \quad (\text{有时常简写为}D = \{\overline{x} > C\}),$$

其中C为待定的临界值. (下根据NP原则来确定临界值)

由于$\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$，故当$H_0$为真时，$\overline{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2/n)$. 所以犯第一类错误的概率为

$$\alpha(\mu) = \mathsf{P}_\mu\left(H_0\text{被拒绝}\middle| H_0\text{为真}\right) = \mathsf{P}_\mu\left(\widetilde{X} \in D\middle| H_0\text{为真}\right) = \mathsf{P}_\mu\left(\overline{X} > C\middle| H_0\text{为真}\right)$$

$$= \mathsf{P}_\mu\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{C-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\middle| \mu = \mu_0\right) = 1 - \Phi\left(\frac{C-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right).$$

从而对给定的显著性水平α，要求C满足

$$\sup_{\mu=\mu_0} \alpha(\mu) = 1 - \Phi\left(\frac{C-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha.$$

此时，有$\frac{C-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = u_\alpha$，即$C = \mu_0 + u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. 所以，拒绝域为

$$D = \{\widetilde{x} : \overline{x} > \mu_0 + u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}$$

的检验就是所要求的显著性水平为α的检验.

而

$$\{\widetilde{x} : \overline{x} > \mu_0 + u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\} = \left\{\widetilde{x} : \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > u_\alpha\right\}.$$

所以，可取

$$u = u(\widetilde{X}) = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{\mu=\mu_0\text{时}}{\sim} N(0,1)$$

为检验统计量，拒绝域写为$D = \{\widetilde{x} : u(\widetilde{x}) > u_\alpha\}$，简写为$D = \{u > u_\alpha\}$.

—-称为u-检验法.

(2) $H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu < \mu_0$

仍取

$$u = u(\widetilde{X}) = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{\mu=\mu_0\text{时}}{\sim} N(0,1)$$

为检验统计量. 这时拒绝域形为$D = \{u < C\}$. 检验犯第一类错误的概率为

$$\begin{aligned}\alpha(\mu) =& \mathsf{P}_\mu(\widetilde{X} \in D | H_0\text{为真}) = \mathsf{P}_\mu(u < C | H_0\text{为真}) \\ =& \mathsf{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < C \middle| \mu = \mu_0\right) = \Phi\left(C\right).\end{aligned}$$

从而对给定的显著性水平α, 要求C满足

$$\sup_{\mu=\mu_0} \alpha(\mu) = \Phi(C) = \alpha.$$

那么得$C = -u_\alpha$. 故拒绝域为$\{u < -u_\alpha\}$的检验就是所要求的水平为α的检验.

(3) $H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$

仍取

$$u = u(\widetilde{X}) = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{\mu=\mu_0\text{时}}{\sim} N(0,1)$$

为检验统计量. 当H_0为真时, $\overline{X}$与μ_0相差不应太大, 也就是说$|u|$不应太大.于是取检验的拒绝域形为$D = \{|u| > C\}$. 检验犯第一类错误的概率为

$$\begin{aligned}\alpha(\mu) =& \mathsf{P}_\mu(\widetilde{X} \in D | H_0\text{为真}) = \mathsf{P}_\mu(|u| > C | \mu = \mu_0) \\ =& \mathsf{P}_\mu(|\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}| > C | \mu = \mu_0) = 2\left(1 - \Phi(C)\right).\end{aligned}$$

对于给定的显著性水平α, 要求C满足$2\left(1 - \Phi(C)\right) = \alpha$. 所以拒绝域为$\{|u| > u_{\alpha/2}\}$的检验就是所要求的水平为$\alpha$的检验.

Example

例: 某洗涤剂厂有一台瓶装洗洁精的灌装机，在生产正常时，每瓶洗洁精的净重服从正态分布，均值为454g，标准差为12g．为检查近期机器工作是否正常，从中抽出16瓶，称得其净重的平均值为$\bar{x} = 456.64$g，试对机器工作正常与否作出判断(取$\alpha = 0.01$，并假定分布类型和σ不变)．

解: 设目前工作状态下每瓶洗洁精的净重服从$N(\mu, 12^2)$, 则这里需检验的假设为:

$$H_0 : \mu = 454 \longleftrightarrow H_1 : \mu \neq 454.$$

取检验统计量为

$$u = u(\widetilde{X}) = \frac{\overline{X} - 454}{12/\sqrt{16}},$$

则拒绝域为$D = \{|u| > u_{\alpha/2}\}$. 在$\alpha = 0.01$时, $u_{\alpha/2} = u_{0.005} = 2.575$, 从而拒绝域为

$$D = \{|u| > 2.575\}.$$

现在由样本求得检验统计量的观测值为

$$u = u(\widetilde{x}) = \frac{456.64 - 454}{12/4} = 0.88,$$

由于$|u| < 2.58$, 即样本未落入拒绝域中, 故不能拒绝H_0, 从而认定机器工作是正常的.

补: 若已知$\mu = 450$, 求上述检验犯第二类错误的概率.

$$\mathsf{P}(\text{取伪}) = \mathsf{P}(\text{接受}H_0|H_0\text{为假}) = \mathsf{P}(\widetilde{X} \in A|H_0\text{为假}) = \mathsf{P}(|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}| \le 2.575|\mu = 450),$$

其中$\mu_0 = 454$. 而在$\mu = 450$时, $\overline{X} \sim N(450, \frac{\sigma^2}{n})$, 故

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\text{取伪}) &= \mathsf{P}(-2.575 \le \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le 2.575|\mu = 450) \\
&= \mathsf{P}(-2.575 + \frac{454-450}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{\overline{X}-450}{\sigma/\sqrt{n}} \le 2.575 + \frac{454-450}{\sigma/\sqrt{n}}|\mu = 450) \\
&= \Phi(2.575 + \frac{454-450}{12/\sqrt{16}}) - \Phi(-2.575 + \frac{454-450}{12/\sqrt{16}}) \\
&\approx 1 - \Phi(-1.242) = \Phi(1.242) = 0.893.
\end{aligned}$$

解二： 这里需检验的假设为:

$$H_0 : \mu = 454 \longleftrightarrow H_1 : \mu \neq 454$$

取检验统计量为

$$u = u(\widetilde{X}) = \frac{\overline{X} - 454}{12/\sqrt{16}}.$$

且拒绝域的形式为

$$D = \{|u| > C\}.$$

由于$u = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{\mu=\mu_0=454\text{时}}{\sim} N(0,1)$,且由样本求得

$$u = u(\widetilde{x}) = \frac{456.64 - 454}{12/4} = 0.88,$$

故

$$p\_\text{值} = 2\mathsf{P}_{\mu=\mu_0}\{\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq 0.88\} = 2 * 0.19 = 0.38 > 0.01$$

假设检验问题:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \longleftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0, \tag{1}$$

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 \longleftrightarrow H_1 : \mu < \mu_0, \tag{2}$$

$$H_0 : \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1 : \mu \neq \mu_0, \tag{3}$$

其中μ_0为一个已知常数.

(1) 和(2)是单边假设检验问题, (3)是双边假设检验问题.

(A) σ^2已知时

(2) $H_0: \mu \geq \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu < \mu_0$

此类问题仍属于正态总体下，检验μ，当σ已知时，故仍然取检验统计量为

$$u = u(\widetilde{X}) = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{\mu=\mu_0\text{时}}{\sim} N(0,1)$$

且拒绝域的形式为

$$D = \{u < C\}.$$

下面要确定临界值C. 由于犯第一类错误的概率为

$$\alpha(\mu) = \mathsf{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < C \Big| H_0\text{为真}\right) = \mathsf{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < C \Big| \mu \geq \mu_0\right).$$

那么就要求

$$\sup_{\mu\geq\mu_0} \mathsf{P}_\mu\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}<C\right)\leq\alpha.$$

注意到

$$LHS=\sup_{\mu\geq\mu_0} \mathsf{P}_\mu\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<C+\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=\sup_{\mu\geq\mu_0}\Phi(C+\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}})$$

而在$\mu\geq\mu_0$时，$\alpha(\mu)$是μ的严格减函数，故其最大值在$\mu=\mu_0$时达到.从而对给定的显著性水平α，要求C满足

$$\sup_{\mu\geq\mu_0}\alpha(\mu)=\Phi\left(C\right)=\alpha.$$

此时，有$C=u_{1-\alpha}=-u_\alpha$. 拒绝域为

$$D=\{\widetilde{x}:u(\widetilde{x})<-u_\alpha\}=\{\widetilde{x}:\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}<-u_\alpha\}.$$

(与$H_0:\mu=\mu_0\longleftrightarrow H_1:\mu<\mu_0$的拒绝域是一样的)

(1) $H_0: \mu \le \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$

仍取

$$u = u(\widetilde{X}) = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

为检验统计量. 这时拒绝域形为$D = \{u > C\}$. 检验犯第一类错误的概率为

$$\begin{aligned}
\alpha(\mu) =& \mathsf{P}_\mu(u > C | H_0\text{为真}) \\
=& \mathsf{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > C + \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
=& 1 - \Phi\left(C + \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right), \ \mu \le \mu_0.
\end{aligned}$$

在$\mu \le \mu_0$时, $\alpha(\mu)$是μ的严格增函数, 故其最大值在$\mu = \mu_0$时达到.从而对给定的显著性水平α, 要求C满足

$$\sup_{\mu \le \mu_0} \alpha(\mu) = \alpha(\mu_0) = 1 - \Phi(C) = \alpha$$

那么得$C = u_\alpha$. 故拒绝域为$\{u > u_\alpha\}$的检验就是所要求的水平为α的检验.
(与$H_0 : \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0$的拒绝域是一样的)

(3) $H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$

仍取

$$u = u(\widetilde{X}) = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

为检验统计量. 当H_0为真时, $\overline{X}$与μ_0相差不应太大, 也就是说$|U|$不应太大.于是取检验的拒绝域形为

$$D = \{|u| > C\}.$$

检验犯第一类错误的概率为

$$\mathsf{P}_{\mu}(|U| > C | \mu = \mu_0) = \mathsf{P}_{\mu_0}(|U| > C) = 2\left(1 - \Phi(C)\right).$$

对于给定的显著性水平α, 要求C满足$2\left(1 - \Phi(C)\right) = \alpha$. 所以拒绝域为$\{|u| > u_{\alpha/2}\}$的检验就是所要求的水平为$\alpha$的检验.

(B) σ^2未知时

当σ^2已知时，检验统计量为

$$u = u(\widetilde{X}) = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

而现在不能用$u(\widetilde{X})$作为检验统计量，因为它含有未知参数σ.

一个自然的想法就是用σ^2的无偏估计

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

代替σ^2，得检验统计量为

$$t = t(\widetilde{X}) = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}.$$

(1) $H_0: \mu \geq \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu < \mu_0$

取检验统计量为

$$t = t(\widetilde{X}) = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}.$$

那么拒绝域形为: $D = \{t(\widetilde{x}) < C\}$. 而检验犯第一类错误的概率为

$$\alpha(\mu) = \mathsf{P}_{\mu,\sigma^2}(\widetilde{X} \in D | H_0\text{为真}) = \mathsf{P}_{\mu,\sigma^2}(t(\widetilde{X}) < C), \quad \mu \geq \mu_0.$$

我们要取临界值C使得

$$\sup_{\mu \geq \mu_0} \mathsf{P}_{\mu,\sigma^2}(t(\widetilde{X}) < C) = \alpha.$$

Lemma

引理 设T服从自由度为n，非中心参数为δ的非中心的t分布，则对任意的常数C，$P_\delta(T<C)$是δ的严格单调减函数.

证明：设ξ和χ^2相互独立，$\xi\sim N(\delta,1)$，$\chi^2\sim\chi^2(n)$. 那么$\frac{\xi}{\sqrt{\chi^2/n}}$与$T$同分布，都服从$t(n,\delta)$.

记$p_1(x,\delta)$, $p_2(y)$分别表示ξ与χ^2的密度函数, 则

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_\delta(T<C) =& \mathsf{P}_\delta\left(\frac{\xi}{\sqrt{\chi^2/n}}<C\right) = \iint_{x/\sqrt{y/n}\le C} p_1(x;\delta)p_2(y)dxdy \\
&= \int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{C\sqrt{y/n}} p_1(x;\delta)dx\right)p_2(y)dy \\
&= \int_0^{+\infty} \mathsf{P}\{\xi\le C\sqrt{y/n}\}p_2(y)dy \\
&= \int_0^{+\infty} \mathsf{P}\{\xi-\delta\le C\sqrt{y/n}-\delta\}p_2(y)dy \\
&= \int_0^{+\infty} \Phi(C\sqrt{y/n}-\delta)p_2(y)dy = \mathsf{E}\left[\Phi(C\sqrt{\chi^2/n}-\delta)\right].
\end{aligned}$$

而$\Phi(C\sqrt{y/n}-\delta)$关于δ严格单调递减,故$\mathsf{P}_\delta(T<C)$是δ的严格单调减函数.

另一种写法:

$$\mathsf{P}_\delta(T < C) = \mathsf{P}_\delta\left(\frac{\xi}{\sqrt{\chi^2/n}} < C\right),$$

而

$$\begin{aligned} & \mathsf{P}_\delta\left(\frac{\xi}{\sqrt{\chi^2/n}} < C \Big| \chi^2 = y\right) \\ = & \mathsf{P}_\delta\left(\xi - \delta < C\sqrt{y/n} - \delta \Big| \chi^2 = y\right) = \Phi(C\sqrt{y/n} - \delta) \end{aligned}$$

所以

$$\mathsf{P}_\delta(T < C) = \mathsf{E}\left[\Phi(C\sqrt{\chi^2/n} - \delta)\right].$$

而$\Phi(C\sqrt{\chi^2/n} - \delta)$关于$\delta$严格单调递减,故$\mathsf{P}_\delta(T < C)$是$\delta$的严格单调减函数.

(继续检验问题)

现在

$$t(\widetilde{X}) = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)/\sigma}{S/\sigma} \sim t(n-1, \frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}).$$

所以

$$\sup_{\mu\geq\mu_0} \mathsf{P}_{\mu,\sigma^2}(t(\widetilde{X})<C) = \mathsf{P}_{\mu_0,\sigma^2}(t(\widetilde{X})<C) = \mathsf{P}(t(n-1)<C).$$

取$C=t_{1-\alpha}(n-1)=-t_\alpha(n-1)$，得问题(1)的水平为$\alpha$的检验的拒绝域为

$$D=\{\widetilde{x}: t(\widetilde{x})<t_{1-\alpha}(n-1)\}=\{\widetilde{x}: t(\widetilde{x})<-t_\alpha(n-1)\},$$

简记为$D=\{t<-t_\alpha(n-1)\}$.

类似地，假设检验问题

$$H_0 : \mu \le \mu_0 \longleftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0 \tag{2}$$

的水平为α的检验的拒绝域为

$$D = \{t > t_\alpha(n-1)\}.$$

假设检验问题

$$H_0 : \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1 : \mu \ne \mu_0 \tag{3}$$

的水平为α的检验的拒绝域为

$$D = \{|t| > t_{\alpha/2}(n-1)\}.$$

这些检验称为t-检验.

2、正态总体方差σ^2(或标准差σ)的假设检验

假设检验问题:

$$H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2, \tag{1}$$

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2, \tag{2}$$

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2, \tag{3}$$

其中σ_0为一个已知正常数.

(A) μ已知时

这时$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$是$\sigma^2$的充分完备统计量，且$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2/\sigma^2\sim\chi^2(n)$. 令

$$\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,$$

则$\widehat{\sigma^2}$是σ^2的UMVUE.

(1) $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$

取检验统计量为$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2$. 考虑到$H_1$,则拒绝域形为

$$D=\{\tilde{x}: \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 < C\},$$

其中C 应由下式确定

$$\begin{aligned}\alpha &= \sup_{\sigma^2\geq\sigma_0^2} \mathsf{P}_{\sigma^2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2 < C\right)\\ &= \sup_{\sigma^2\geq\sigma_0^2} \mathsf{P}_{\sigma^2}\left(\chi^2(n) < nC/\sigma^2\right) = \mathsf{P}\left(\chi^2(n) < nC/\sigma_0^2\right)\end{aligned}$$

取$C=\frac{\sigma_0^2\chi_{1-\alpha}^2(n)}{n}$, 得

问题(1)的显著性水平为α的检验的拒绝域为

$$D = \{\widetilde{x} : \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2/\sigma_0^2 < \chi^2_{1-\alpha}(n)\}.$$

也可取

$$\chi^2 = \chi^2(\widetilde{X}) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2}$$

作为检验统计量，那么拒绝域为

$$D = \{\widetilde{x} : \chi^2(\widetilde{x}) < \chi^2_{1-\alpha}(n)\},$$

简记为$\{\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(n)\}$.

类似地，假设检验问题

$$H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \tag{2}$$

的显著性水平为α的检验的拒绝域为

$$D = \{\chi^2 > \chi^2_\alpha(n)\}.$$

假设检验问题

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1: \sigma^2 \ne \sigma_0^2 \tag{3}$$

的显著性水平为α的检验的拒绝域为

$$D = \{\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}(n) \text{ 或 } \chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}(n)\}.$$

这些检验称为χ^2-检验.

(B) μ未知时

当μ已知时，检验统计量为

$$\chi^2 = \chi^2(\widetilde{X}) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2}.$$

但此统计量不能作为μ未知时的检验统计量.一个自然的想法是：用μ的无偏估计量$\overline{X}$去代替，即取检验统计量为:

$$\chi^2 = \chi^2(\widetilde{X}) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{\sigma_0^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}.$$

(事实上,在μ未知时,

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$$

是σ^2的UMVUE，而且$\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$.)

(1) $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$

拒绝域为

$$D = \{\chi^2 < C\}.$$

C由下式确定

$$\alpha = \sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} \mathsf{P}_{\sigma^2,\mu}(\chi^2 < C) = \sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} \mathsf{P}_{\sigma^2,\mu}\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} < C\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right)$$

$$= \sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} \mathsf{P}_{\sigma^2,\mu}\left(\chi^2(n-1) < C\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right) = \mathsf{P}\left(\chi^2(n-1) < C\right).$$

所以问题(1)的显著性水平为α的检验的拒绝域为$\{\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\}$.

类似地，假设检验问题

$$H_0 : \sigma^2 \le \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \tag{2}$$

的显著性水平为α的检验的拒绝域为

$$D = \{\chi^2 > \chi^2_\alpha(n-1)\}.$$

假设检验问题

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma^2 \ne \sigma_0^2 \tag{3}$$

的显著性水平为α的检验的拒绝域为

$$D = \{\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}(n-1) \text{ 或 } \chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\}.$$

这些检验也称为χ^2-检验.

二、两个正态总体

$X_1, X_2, \cdots, X_m$是来自正态总体$N(\mu_X, \sigma_X^2)$的样本，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$是来自正态总体$N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$的样本，且两个样本相互独立. 并记

$$\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \quad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j.$$

1、比较均值的假设检验

假设检验问题:

$$H_0 : \mu_X \geq \mu_Y \longleftrightarrow H_1 : \mu_X < \mu_Y, \tag{1}$$

$$H_0 : \mu_X \leq \mu_Y \longleftrightarrow H_1 : \mu_X > \mu_Y, \tag{2}$$

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \longleftrightarrow H_1 : \mu_X \neq \mu_Y. \tag{3}$$

(A) σ_X^2和σ_Y^2均已知时

这时μ_X和μ_Y的MLE分别为$\overline{X}$和$\overline{Y}$. 与作为尺度参数的方差不同，均值是位置参数,位置可以平行移动，我们取

$$d = \overline{X} - \overline{Y}$$

作为检验统计量. 注意到

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n\right).$$

我们可取

$$U = U(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n}}$$

作检验统计量.

根据N-P原则，与单个正态总体的均值的u-检验类似计算，我们可得

$$H_0: \mu_X \geq \mu_Y \longleftrightarrow H_1: \mu_X < \mu_Y, \tag{1}$$

$$D = \{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) : U < -u_\alpha\};$$

$$H_0: \mu_X \leq \mu_Y \longleftrightarrow H_1: \mu_X > \mu_Y, \tag{2}$$

$$D = \{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) : U > u_\alpha\};$$

$$H_0: \mu_X = \mu_Y \longleftrightarrow H_1: \mu_X \neq \mu_Y, \tag{3}$$

$$D = \{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) : U < -u_{\alpha/2} \text{ 或 } U > u_{\alpha/2}\}.$$

(B) σ_X^2和σ_Y^2均未知情形

(a) $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$情形

这时,$S_w^2 = (Q_X^2 + Q_Y^2)/(m+n-2)$是$\sigma^2$的无偏估计，其中$Q_X^2 = \sum_{i=1}^m (X_i - \overline{X})^2$, $Q_Y^2 = \sum_{j=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2$. 用它代替$U$中的$\sigma_X^2$和$\sigma_Y^2$ 得

$$
\begin{aligned}
t =& \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{S_w^2/m + S_w^2/n}} \\
=& \sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}} \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{Q_X^2 + Q_Y^2}}.
\end{aligned}
$$

并且

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{S_w^2/m+S_w^2/n}} \sim t(n+m-2).$$

即

$$\begin{aligned} t \sim t(n+m-2,\delta), \quad \delta &= (\mu_X-\mu_Y)/\sqrt{\sigma_X^2/m+\sigma_Y^2/n} \\ &= (\mu_X-\mu_Y)/\sqrt{(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})\sigma^2}. \end{aligned}$$

取t作检验统计量，得

$$H_0 : \mu_X \geq \mu_Y \longleftrightarrow H_1 : \mu_X < \mu_Y, \tag{1}$$

$$D = \{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) : t < -t_\alpha(n+m-2)\};$$

$$H_0 : \mu_X \leq \mu_Y \longleftrightarrow H_1 : \mu_X > \mu_Y, \tag{2}$$

$$D = \{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) : t > t_\alpha(n+m-2)\};$$

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \longleftrightarrow H_1 : \mu_X \neq \mu_Y, \tag{3}$$

$$D = \{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) : t < -t_{\alpha/2}(n+m-2) \text{ 或 } t > t_{\alpha/2}(n+m-2)\}.$$

(b) $m=n$情形

记$Z_i=X_i-Y_i,\quad i=1,2,\cdots,n$.则$Z_i\sim N(\mu_X-\mu_Y,\sigma_X^2+\sigma_Y^2)$, 且相互独立.则

$$\overline{Z}\sim N(\mu_X-\mu_Y,\frac{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}{n}).$$

若记$\mu_Z=\mu_X-\mu_Y$,那么假设检验问题就转化成:

$$H_0:\mu_Z\geq 0\longleftrightarrow H_1:\mu_Z<0,$$

$$H_0:\mu_Z\leq 0\longleftrightarrow H_1:\mu_Z>0,$$

$$H_0:\mu_Z=0\longleftrightarrow H_1:\mu_Z\neq 0.$$

那么就变成了"单个正态总体均值的假设检验问题(σ^2未知)".

取检验统计量为

$$t = t(\widetilde{Z}) = \frac{\overline{Z}}{S_Z^*/\sqrt{n}},$$

其中$S_Z^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (Z_i - \overline{Z})^2$. 那么

$$H_0 : \mu_X \geq \mu_Y \longleftrightarrow H_1 : \mu_X < \mu_Y, \tag{1}$$

$$D = \{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) : t < -t_\alpha(n-1)\}$$

$$H_0 : \mu_X \leq \mu_Y \longleftrightarrow H_1 : \mu_X > \mu_Y, \tag{2}$$

$$D = \{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) : t > t_\alpha(n-1)\}$$

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \longleftrightarrow H_1 : \mu_X \neq \mu_Y, \tag{3}$$

$$D = \{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) : t < -t_{\alpha/2}(n-1) \text{ 或 } t > t_{\alpha/2}(n-1)\}$$

上面的这种处理方法也适用于"成对数据"情形的假设检验

(c) 一般情形.

取

$$U = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{{S_X^*}^2/m + {S_Y^*}^2/n}}$$

作检验统计量,其中${S_X^*}^2 = \frac{Q_X^2}{m-1}, {S_Y^*}^2 = \frac{Q_Y^2}{n-1}$.

(I)当m和n都很大时, U的分布近似于正态分布, 我们采用U-检验法,可以得到检验水平近似为α的检验.

(II) 当m和n都不是很大时, 由于

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{{S_X^*}^2/m+{S_Y^*}^2/n}}$$

近似服从$t(l)$分布, 其中

$$l=\frac{\{{S_X^*}^2/m+{S_Y^*}^2/n\}^2}{\frac{{S_X^*}^4}{m^2(m-1)}+\frac{{S_Y^*}^4}{n^2(n-1)}}.$$

那么取检验统计量为

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{{S_X^*}^2/m+{S_Y^*}^2/n}},$$

再采用t-检验法,可以得到检验水平近似为α的检验.

2、比较方差的假设检验

假设检验问题:

$$
\begin{aligned}
H_0 : \sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2 &\longleftrightarrow H_1 : \sigma_X^2 < \sigma_Y^2, \\
H_0 : \sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2 &\longleftrightarrow H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2, \\
H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 &\longleftrightarrow H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2.
\end{aligned}
$$

(A) μ_X和μ_Y都已知

这时σ_X^2和σ_Y^2的UMVUE分别为

$$\widehat{\sigma_X^2} = \frac{\sum_{i=1}^m (X_i - \mu_X)^2}{m}, \quad \widehat{\sigma_Y^2} = \frac{\sum_{j=1}^n (Y_j - \mu_Y)^2}{n}.$$

由于方差是尺度参数，取

$$F = \frac{\widehat{\sigma_X^2}}{\widehat{\sigma_Y^2}} = \frac{\sum_{i=1}^m (X_i - \mu_X)^2 / m}{\sum_{j=1}^n (Y_i - \mu_Y)^2 / n}$$

作为检验统计量.

问题

$$H_0 : \sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma_X^2 < \sigma_Y^2 \tag{1}$$

的水平为α的检验的拒绝域取为

$$\{F < C\}.$$

而其中C由下式确定

$$\sup_{\sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2} \mathsf{P}\left(F < C\right) = \alpha.$$

注意到

$$\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}\cdot F=\frac{\widehat{\sigma_X^2}/\sigma_X^2}{\widehat{\sigma_Y^2}/\sigma_Y^2}=\frac{\chi^2(m)/m}{\chi^2(n)/n}\sim F(m,n).$$

我们得

$$\begin{aligned}\sup_{\sigma_X^2\geq\sigma_Y^2}\mathsf{P}\left(F<C\right)&=\sup_{\sigma_X^2\geq\sigma_Y^2}\mathsf{P}\Big(\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}\cdot F<\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}\cdot C\Big)\\&=\sup_{\sigma_X^2\geq\sigma_Y^2}\mathsf{P}\Big(F(m,n)<\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}\cdot C\Big)=\mathsf{P}\Big(F(m,n)<C\Big).\end{aligned}$$

取$C=F_{1-\alpha}(m,n)$，得问题(1)的水平为α的检验的拒绝域为

$$\{F<F_{1-\alpha}(m,n)\}.$$

类似地，问题

$$H_0: \sigma_X^2 \le \sigma_Y^2 \longleftrightarrow H_1: \sigma_X^2 > \sigma_Y^2 \tag{2}$$

的水平为α的检验的拒绝域为

$$\{F > F_\alpha(m,n)\};$$

问题

$$H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \longleftrightarrow H_1: \sigma_X^2 \ne \sigma_Y^2 \tag{3}$$

的水平为α的检验的拒绝域为

$$\{F < F_{1-\alpha/2}(m,n) \text{ 或 } F > F_{\alpha/2}(m,n)\};$$

(B) μ_X和μ_Y都未知.

这时σ_X^2和σ_Y^2的UMVUE分别为

$$S_X^{*\,2} = \frac{\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2}{m-1}, \quad S_Y^{*\,2} = \frac{\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \overline{Y})^2}{n-1}.$$

取

$$F = \frac{S_X^{*\,2}}{S_Y^{*\,2}} = \frac{\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2/(m-1)}{\sum_{j=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2/(n-1)}$$

作检验统计量. 且

$$\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \cdot F = \frac{S_X^{*\,2}/\sigma_X^2}{S_Y^{*\,2}/\sigma_Y^2} = \frac{\chi^2(m-1)/(m-1)}{\chi^2(n-1)/(n-1)} \sim F(m-1, n-1).$$

与第一种情况类似:

$$H_0 : \sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma_X^2 < \sigma_Y^2 \tag{1}$$

$$\{F < F_{1-\alpha}(m-1, n-1)\};$$

$$H_0 : \sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2 \tag{2}$$

$$\{F > F_{\alpha}(m-1, n-1)\};$$

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2 \tag{3}$$

$$\{F < F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1) \text{ 或 } F > F_{\alpha/2}(m-1, n-1)\}.$$

这些检验均称为F-检验.

- 例：两台机床生产同一个型号的滚珠，从甲机床生产的滚珠中抽取8个，从乙机床生产的滚珠中抽取9个，测得这些滚珠的直径(毫米)如下：

甲机床	15.0	14.8	15.2	15.4	14.9	15.1	15.2	14.8	
乙机床	15.2	15.0	14.8	15.1	14.6	14.8	15.1	14.5	15.0

设两机床生产的滚珠直径分别为X,Y，且$X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right),Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$

检验假设$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2 \leftrightarrow H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2(\alpha=0.1)$

解： 当μ_1,μ_2未知时， 检验 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2 \leftrightarrow H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

取检验统计量为：$\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$， 拒绝域形为D= $\left\{\dfrac{s_1^2}{s_2^2}<C_1, 或 \dfrac{s_1^2}{s_2^2}>C_2\right\}$

由于$\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

故在原假设成立时，即$\sigma_1^2=\sigma_2^2$时， $\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

故得拒绝域为：$\left\{\dfrac{s_1^2}{s_2^2}<F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1), 或 \dfrac{s_1^2}{s_2^2}>F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\right\}$.

查表得：$F_{0.05}(7,8)=3.50, F_{0.95}(7,8)=\dfrac{1}{F_{0.05}(8,7)}=\dfrac{1}{3.73}=0.268,$

故拒绝域为：$\left\{\dfrac{s_1^2}{s_2^2}<0.268, 或 \dfrac{s_1^2}{s_2^2}>3.50\right\}$

本题中 $n_1=8$, $\bar{x}=15.05$, $s_1^2=0.0457$; $n_2=9$, $\bar{y}=14.9$, $s_2^2=0.0575$

计算得： $0.268\le\dfrac{s_1^2}{s_2^2}=0.795\le3.50$,因此样本未落入拒绝域.

故接受原假设，认为两机床生产的滚珠直径的方差没有显著差异。

有关正态分布总体的参数的假设检验的总结

一、U检验

1. 单个正态总体均值μ的假设检验(方差已知)

取检验统计量为:

$$U=U(\widetilde{X})=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, \qquad (\text{当}\mu=\mu_0\text{时} \quad \sim N(0,1)).$$

那么

$$H_0:\mu\geq\mu_0 \longleftrightarrow H_1:\mu<\mu_0, \quad \text{拒绝域为} D=\{\widetilde{x}:u(\widetilde{x})<-u_\alpha\}$$

$$H_0:\mu\leq\mu_0 \longleftrightarrow H_1:\mu>\mu_0, \quad \text{拒绝域为} D=\{\widetilde{x}:u(\widetilde{x})>u_\alpha\}$$

$$H_0:\mu=\mu_0 \longleftrightarrow H_1:\mu\neq\mu_0, \quad \text{拒绝域为} D=\{\widetilde{x}:|u(\widetilde{x})|>u_{\alpha/2}\}.$$

2. 两个正态总体比较均值的假设检验(σ_X^2和σ_Y^2均已知)

取检验统计量为:

$$U = U(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n}} \quad (\text{当}\mu_X = \mu_Y\text{时} \quad \sim N(0,1)).$$

那么

$$H_0 : \mu_X \geq \mu_Y \longleftrightarrow H_1 : \mu_X < \mu_Y, \quad D = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) : u(\tilde{x}, \tilde{y}) < -u_\alpha\}$$

$$H_0 : \mu_X \leq \mu_Y \longleftrightarrow H_1 : \mu_X > \mu_Y, \quad D = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) : u(\tilde{x}, \tilde{y}) > u_\alpha\}$$

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \longleftrightarrow H_1 : \mu_X \neq \mu_Y, \quad D = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) : |u| > u_{\alpha/2}\}.$$

3. 两个正态总体比较均值的假设检验(σ_X^2和σ_Y^2均未知, 但m和n都很大)

取

$$U(\widetilde{X},\widetilde{Y})=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{{S_X^*}^2/m+{S_Y^*}^2/n}}$$

作检验统计量. 我们采用U-检验法,可以得到检验水平近似为α的检验.

二、t检验

1. 单个正态总体均值μ的假设检验(方差未知)

取检验统计量为:

$$t = t(\widetilde{X}) = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S_n^*/\sqrt{n}} \quad (\text{当}\mu = \mu_0\text{时} \quad \sim t(n-1)).$$

那么

$$H_0: \mu \geq \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu < \mu_0, \quad D = \{\widetilde{x} : t(\widetilde{x}) < -t_\alpha(n-1)\}$$

$$H_0: \mu \leq \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu > \mu_0, \quad D = \{\widetilde{x} : t(\widetilde{x}) > t_\alpha(n-1)\}$$

$$H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0, \quad D = \{\widetilde{x} : |t(\widetilde{x})| > t_{\alpha/2}(n-1)\}.$$

2. 两个正态总体比较均值的假设检验(σ_X^2和σ_Y^2均未知,但$\sigma_X^2=\sigma_Y^2=\sigma^2$)

取检验统计量为:

$$t=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{S^{*2}_{X+Y}/m+S^{*2}_{X+Y}/n}}=\sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}}\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{Q_X^2+Q_Y^2}}$$

$$(\text{当}\mu_X=\mu_Y\text{时}\quad\sim t(n+m-2)).$$

那么

$$H_0:\mu_X\ge\mu_Y\longleftrightarrow H_1:\mu_X<\mu_Y,\ D=\{(\tilde{x},\tilde{y}):t<-t_\alpha(n+m-2\}$$

$$H_0:\mu_X\le\mu_Y\longleftrightarrow H_1:\mu_X>\mu_Y,\ D=\{(\tilde{x},\tilde{y}):t>t_\alpha(n+m-2)\}$$

$$H_0:\mu_X=\mu_Y\longleftrightarrow H_1:\mu_X\ne\mu_Y,$$

$$D=\{(\tilde{x},\tilde{y}):t<-t_{\alpha/2}(n+m-2)\text{ 或 }t>t_{\alpha/2}(n+m-2)\}.$$

3. 两个正态总体比较均值的假设检验(σ_X^2和σ_Y^2均未知，但$m=n$)

令$Z_i = X_i - Y_i$, $i=1,2,\cdots,n$. $\overline{Z}$及σ_Z^*相应定义. 取检验统计量为:

$$t = t(\widetilde{Z}) = \frac{\overline{Z}}{S_Z^*/\sqrt{n}} \quad (\text{当}\mu_X=\mu_Y\text{时} \quad \sim t(n-1)).$$

那么

$$H_0: \mu_X \geq \mu_Y \longleftrightarrow H_1: \mu_X < \mu_Y, \quad D=\{(\widetilde{x},\widetilde{y}): t < -t_\alpha(n-1)\}$$

$$H_0: \mu_X \leq \mu_Y \longleftrightarrow H_1: \mu_X > \mu_Y, \quad D=\{(\widetilde{x},\widetilde{y}): t > t_\alpha(n-1)\}$$

$$H_0: \mu_X = \mu_Y \longleftrightarrow H_1: \mu_X \neq \mu_Y,$$

$$D=\{(\widetilde{x},\widetilde{y}): t < -t_{\alpha/2}(n-1)\text{ 或 }t > t_{\alpha/2}(n-1)\}.$$

4. 两个正态总体比较均值的假设检验(σ_X^2和σ_Y^2均未知，当m和n都不是很大时)

由于

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{{S_X^*}^2/m+{S_Y^*}^2/n}}$$

近似服从$t(l)$分布，其中

$$l=\frac{\{{S_X^*}^2/m+{S_Y^*}^2/n\}^2}{\frac{{S_X^*}^4}{m^2(m-1)}+\frac{{S_Y^*}^4}{n^2(n-1)}}.$$

那么取检验统计量为

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{{S_X^*}^2/m+{S_Y^*}^2/n}},$$

再采用t-检验法,可以得到检验水平近似为α的检验.

三、χ^2检验

1. 单个正态总体方差σ^2(或标准差σ)的假设检验(μ已知时)

取检验统计量为:

$$\chi^2=\chi^2(\widetilde{X})=\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}\quad (\text{当}\ \ \sigma^2=\sigma_0^2\text{时}\quad \sim\chi^2(n).$$

那么

$$H_0:\sigma^2\ge\sigma_0^2\longleftrightarrow H_1:\sigma^2<\sigma_0^2,\quad D=\{\widetilde{x}:\chi^2(\widetilde{x})<\chi^2_{1-\alpha}(n)\}$$

$$H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2\longleftrightarrow H_1:\sigma^2>\sigma_0^2,\quad D=\{\widetilde{x}:\chi^2(\widetilde{x})>\chi^2_{\alpha}(n)\}$$

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2\longleftrightarrow H_1:\sigma^2\ne\sigma_0^2,$$

$$D=\{\chi^2<\chi^2_{1-\alpha/2}(n)\ \text{或}\ \chi^2>\chi^2_{\alpha/2}(n)\}.$$

2. 单个正态总体方差σ^2(或标准差σ)的假设检验(μ未知时)

取检验统计量为:

$$\chi^2 = \chi^2(\widetilde{X}) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{\sigma_0^2}, \quad (\text{当 } \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{时} \quad \sim \chi^2(n-1).$$

那么

$$H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2, \quad D = \{\widetilde{x} : \chi^2(\widetilde{x}) < \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\}$$

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2, \quad D = \{\widetilde{x} : \chi^2(\widetilde{x}) > \chi^2_{\alpha}(n-1)\}$$

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2,$$

$$D = \{\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \text{ 或 } \chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\}.$$

四、F检验

1. 两个正态总体比较方差的假设检验(μ_X和μ_Y均已知)

取检验统计量为:

$$F = F(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = \frac{\sum_{i=1}^{m}(X_i - \mu_X)^2/m}{\sum_{j=1}^{n}(Y_i - \mu_Y)^2/n} \quad (\text{当} \ \ \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \text{时} \quad \sim F(m,n)).$$

那么

$$H_0 : \sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma_X^2 < \sigma_Y^2, \quad D = \{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) : F(\widetilde{x}, \widetilde{y}) < F_{1-\alpha}(m,n)\}$$

$$H_0 : \sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2, \quad D = \{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) : F(\widetilde{x}, \widetilde{y}) > F_{\alpha}(m,n)\}$$

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2,$$

$$D = \{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) : F(\widetilde{x}, \widetilde{y}) < F_{1-\alpha/2}(m,n) \ \text{或} \ F(\widetilde{x}, \widetilde{y}) > F_{\alpha/2}(m,n)\}.$$

2. 两个正态总体比较方差的假设检验(μ_X和μ_Y均未知) 取检验统计量为:

$$
\begin{aligned}
F =& F(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = \frac{\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2/(m-1)}{\sum_{j=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2/(n-1)} \\
=& \frac{S_X^2}{S_Y^2}, \quad (\text{当 } \sigma_X^2=\sigma_Y^2 \text{时} \quad \sim F(m-1,n-1)).
\end{aligned}
$$

那么

$$H_0: \sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2 \longleftrightarrow H_1: \sigma_X^2 < \sigma_Y^2,$$

$$D = \{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) : F(\widetilde{x}, \widetilde{y}) < F_{1-\alpha}(m-1, n-1)\}$$

$$H_0: \sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2 \longleftrightarrow H_1: \sigma_X^2 > \sigma_Y^2,$$

$$D = \{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) : F(\widetilde{x}, \widetilde{y}) > F_{\alpha}(m-1, n-1)\}$$

$$H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \longleftrightarrow H_1: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2,$$

$$D = \{F(\widetilde{x}, \widetilde{y}) < F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1) \text{ 或 } F(\widetilde{x}, \widetilde{y}) > F_{\alpha/2}(m-1, n-1)\}.$$