控制论

Cybernetics

授课教师：吴俊 教授

浙江大学控制科学与工程学院

反馈与控制系统结构

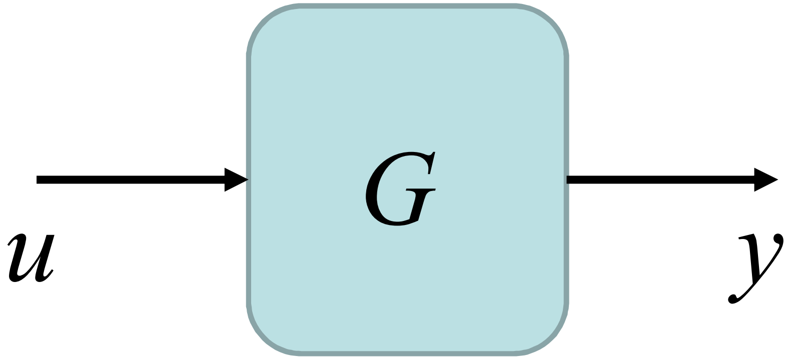
控制和系统的概念（回顾）

- **控制**的定义是：为了"改善"某个或某些受控对象的功能或性能，需要获得并使用信息，以这种信息为基础而选出的、施加于该对象上的作用，就叫作控制

- **系统**的定义是：处在环境之中相互作用和相互依赖的若干部分（因素）组成的、具有一定结构和确定功能的有机整体就称为系统。

开放系统的方框图描述

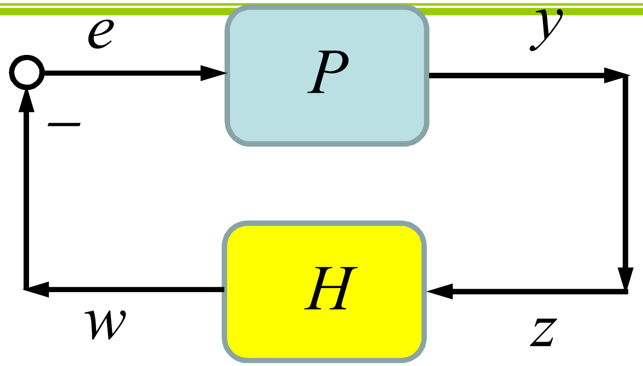
- 若系统G是一个开放系统，则可用方框图描述G



其中u称为输入、y称为输出

- 从因果关系上看输入和输出：u是因，y是果
  输入-系统-输出的关系可记为y=Gu

认识反馈结构

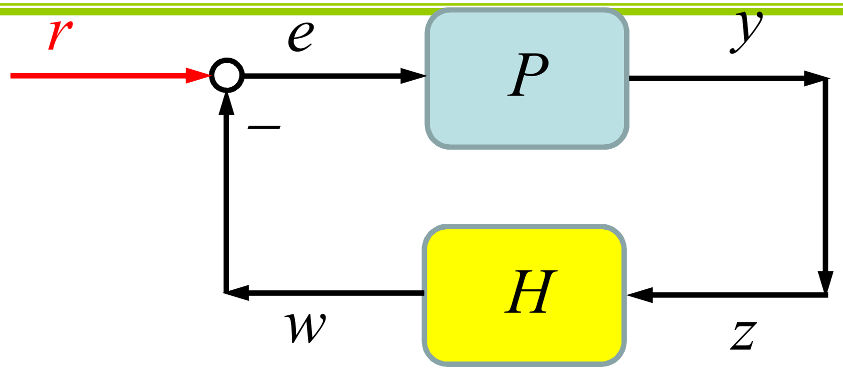


- 系统P：输入e是因，输出y是果，如y= –e–3
- 系统H：输入z是因，输出w是果，如w=11z
- 连接P和H，形成一个反馈系统：z=y， e= –w
- 上述反馈系统中，各信号相互影响，达到平衡，解

$$y = w - 3$$
$$w = 11y$$

可得平衡点 y=0.3,w=3.3

认识反馈结构



$y= -e-3$
$w=11z$
$z=y$
$e=r-w$

- 在反馈结构中增加外部输入r：$e=r-w$，则

$$y= -r+w-3$$
$$w=11y$$

解得

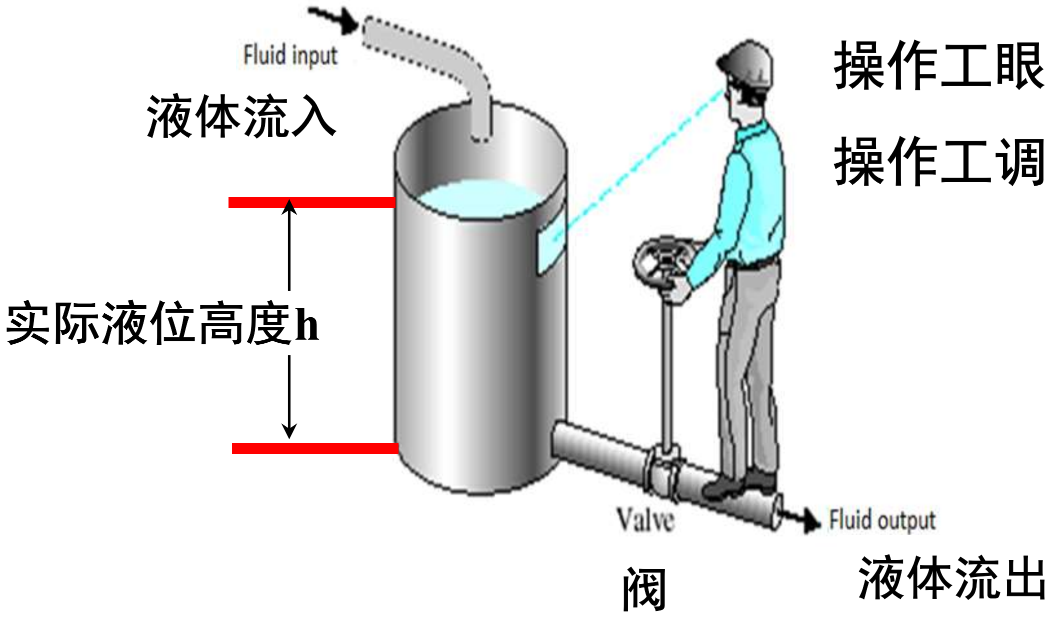
$$y=0.1r+0.3$$
$$w=1.1r+3.3$$

反馈的引入，改变了信号间的因果关系；
反馈合适时，反馈系统内部的信号相互影响，达到平衡；
合适反馈+外部输入，平衡点由外部输入唯一决定

反馈：控制的精髓

- **维纳给出操作工控制水箱液位例子**

控制目标：将水箱内液体的液位维持在期望的液位高度H上



操作工头脑中记住期望液位高度H的信息

操作工眼睛观察得到实际液位高度h的信息

操作工调节阀的开度

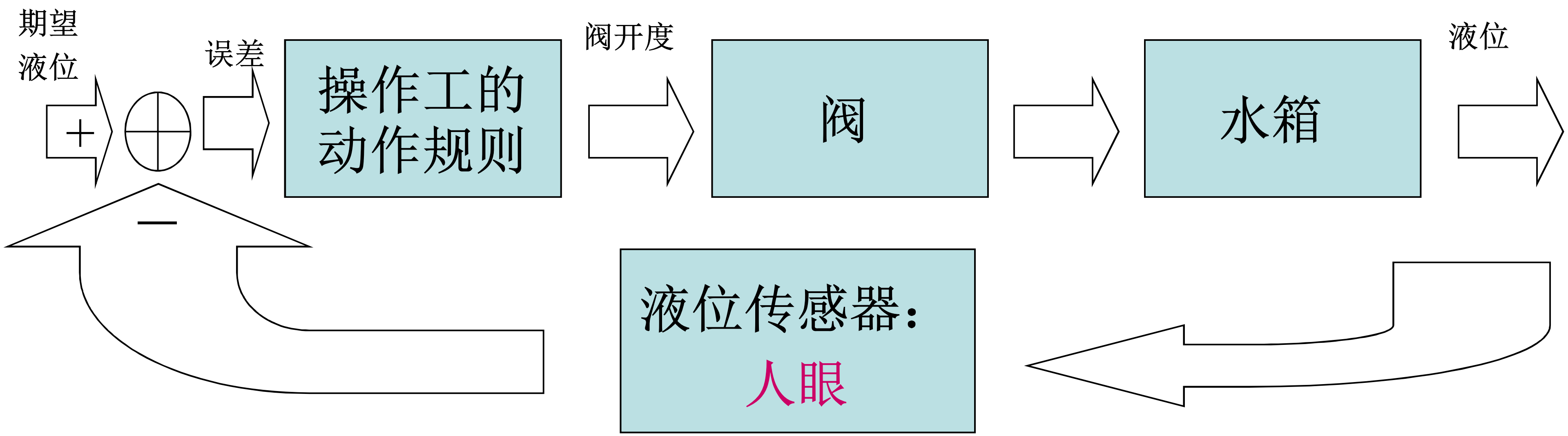
操作工的调节规则：

若h<H，减小阀的开度

若h>H，增大阀的开度

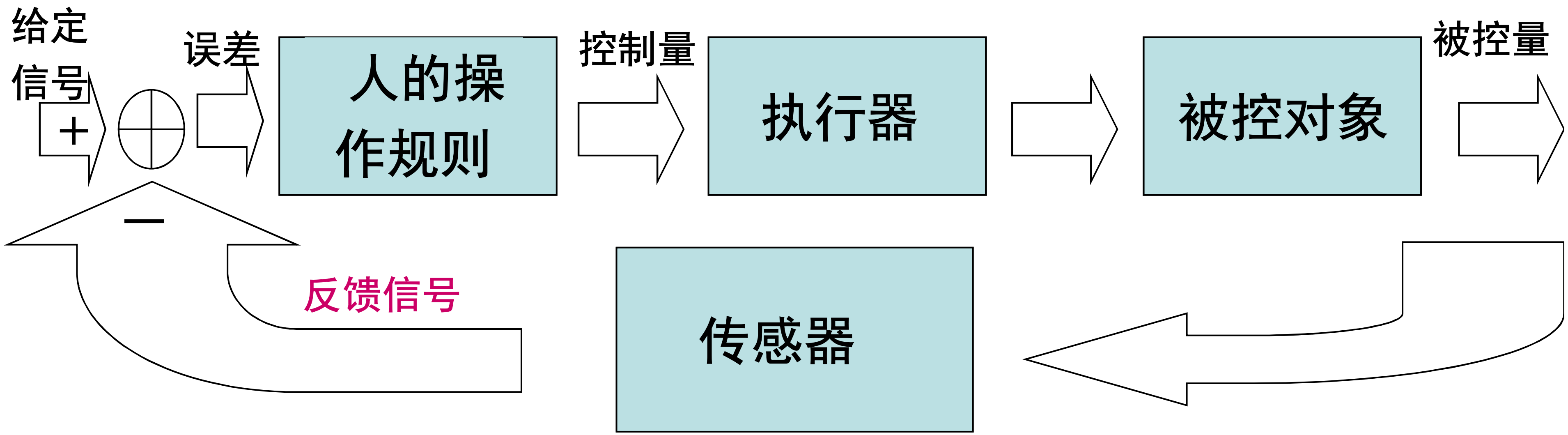
若h=H，阀的开度不变

反馈：控制的精髓



操作工控制水箱液位用的是反馈！

反馈：控制的精髓

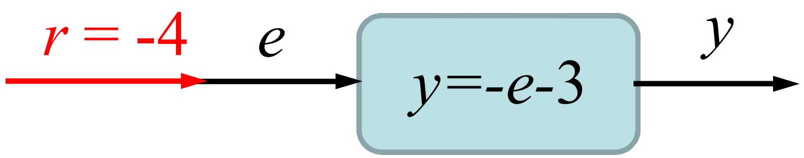


上图的控制方式称为反馈控制或闭环控制

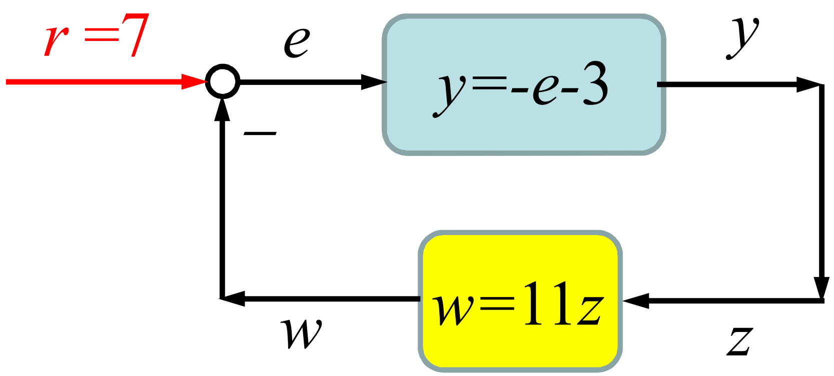
反馈：控制的精髓

- **控制中，用反馈比不用反馈好在哪里？**

例：期望y=-e-3的输出y=1



开环控制

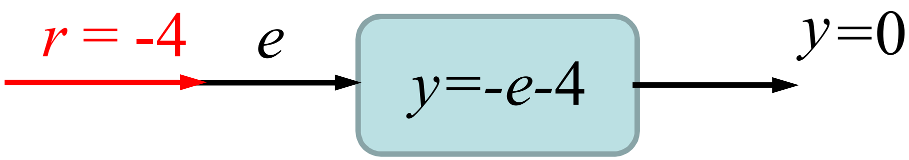


闭环控制

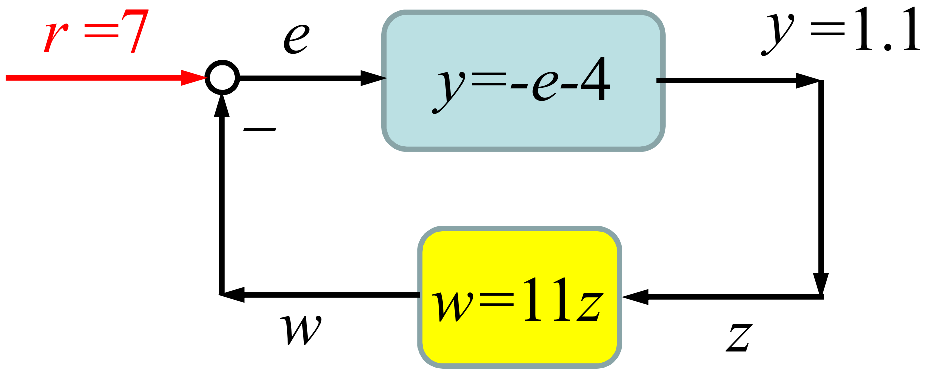
y=0.1r+0.3
w=1.1r+3.3

反馈：控制的精髓

例：期望y=-e-3的输出y=1



开环控制



闭环控制

若y=-e-3变为y=-e-4

开环控制的输出误差是1

闭环控制的输出误差是0.1

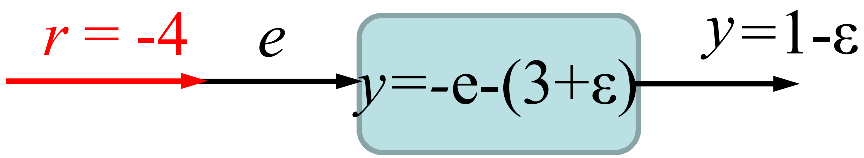
y=0.1r+0.4

w=1.1r+4.4

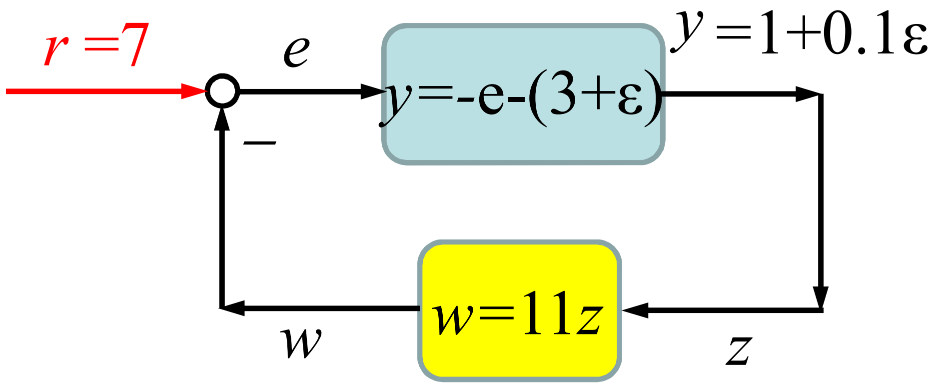
反馈：控制的精髓

实际中我们往往得不到系统的精准模型，因此更好的描述是

$$y=-e-(3+\varepsilon)$$



开环控制



闭环控制

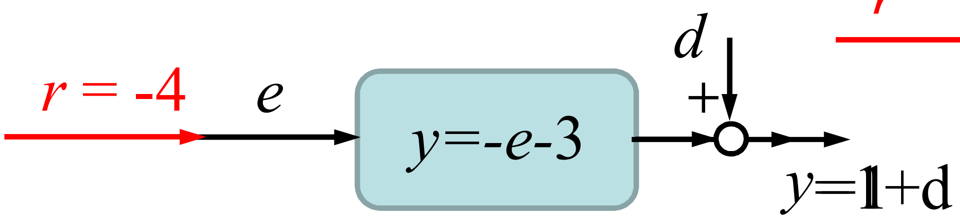
$$y=0.1r+0.3+0.1\varepsilon$$
$$w=1.1r+3.3+1.1\varepsilon$$

开环控制的输出误差是$|\varepsilon|$

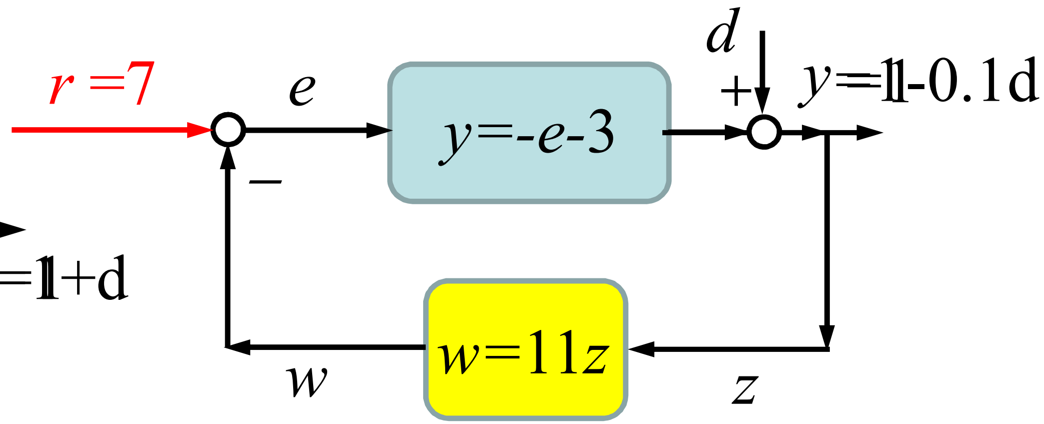
闭环控制的输出误差是$0.1|\varepsilon|$

反馈：控制的精髓

例：期望y=-e-3的输出y=1



开环控制



若存在外部干扰d

开环控制的输出误差是|d|

闭环控制的输出误差是|0.1d|

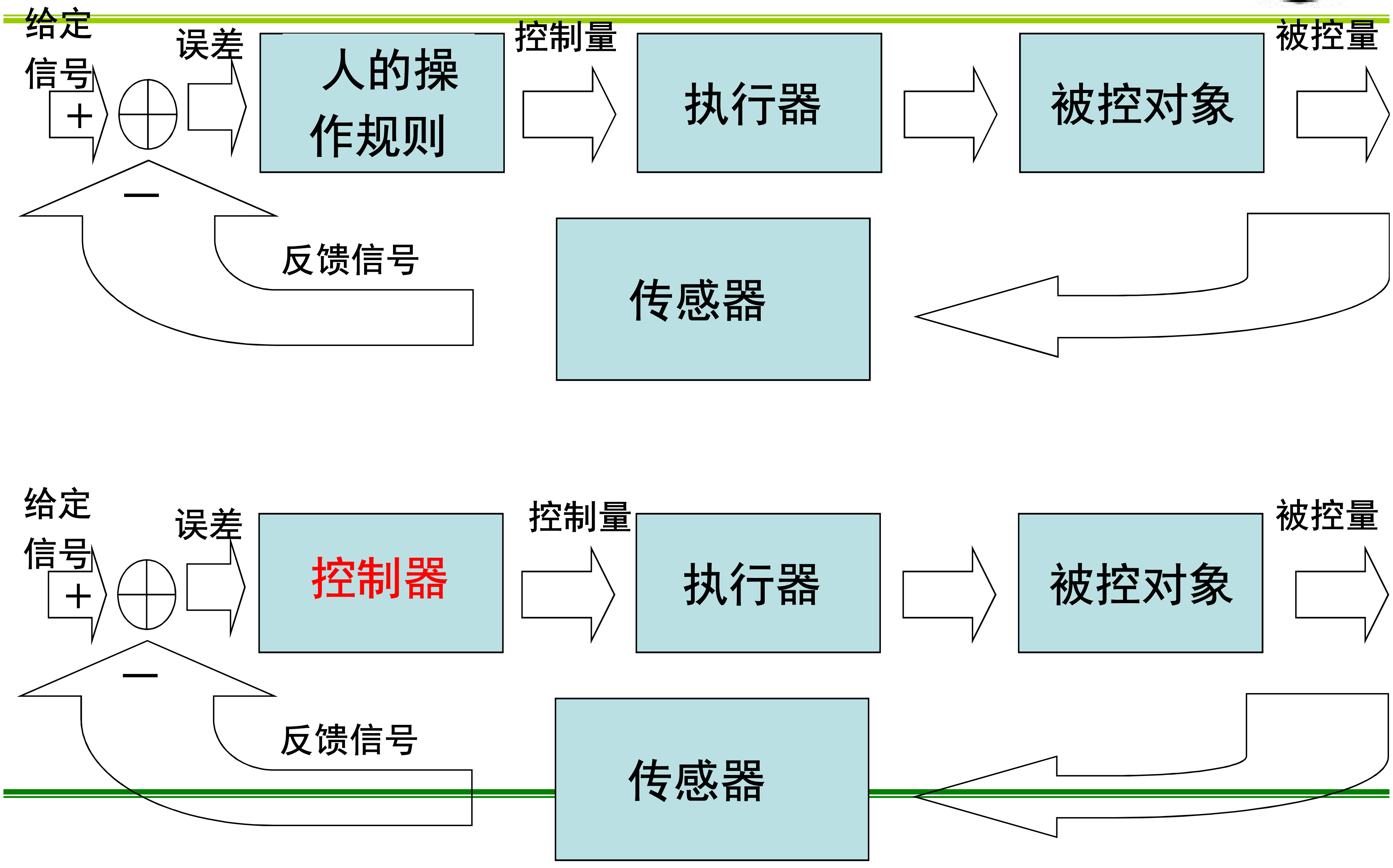
闭环控制 y=0.1r+0.3-0.1d

w=1.1r+3.3-1.1d

反馈：控制的精髓

- 合适的反馈控制（闭环控制）能有效抑制内部不确定性和外部不确定性对被控对象的影响
- 被控对象的不确定性在实际中是不可避免的，因此反馈成为控制的主要方式
- 反馈也广泛存在于自然界中
- “反馈”是控制论最重要的思想

自动控制

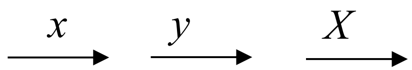


给定
信号
+
误差
人的操作规则
控制量
执行器
被控对象
被控量
−
反馈信号
传感器
给定
信号
+
误差
控制器
控制量
执行器
被控对象
被控量
−
反馈信号
传感器

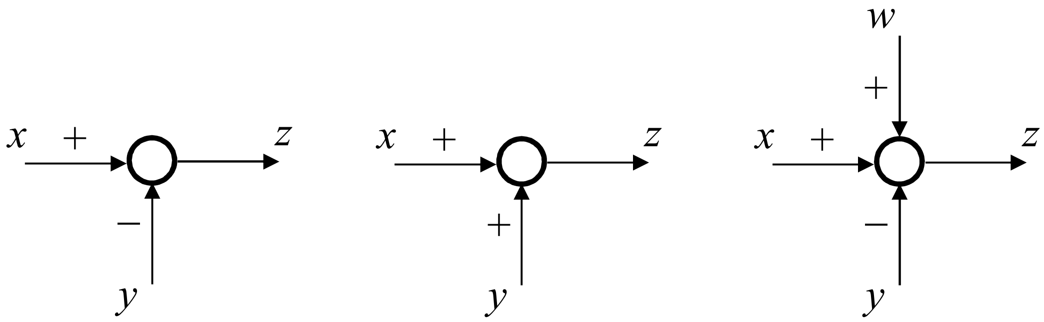
控制系统的结构——方块图表示法

- **方块图的基本元素**

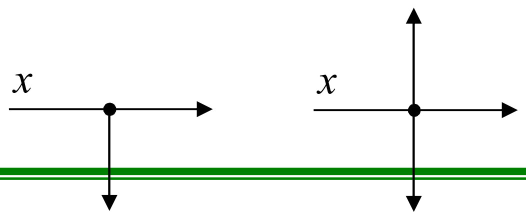
方框（环节）表示子系统



带单向箭头的线段（信号线）表示信号及其流向



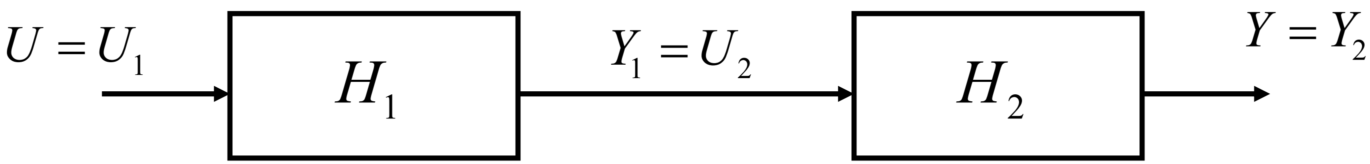
比较点（综合点）表示对两个或以上信号的加减运算



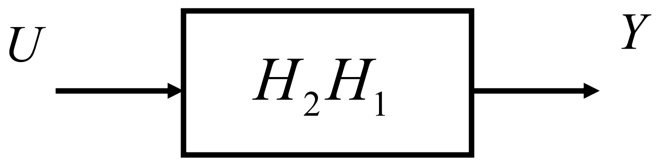
引出点表示同一个信号被引至多个不同的位置使用

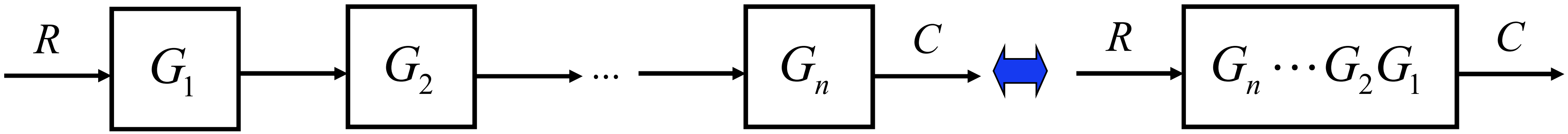
控制系统的结构——方块图表示法

- **串联系统**



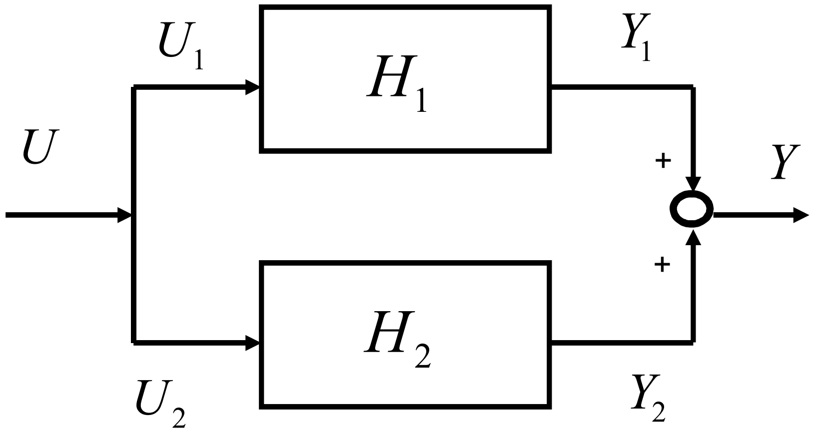
$$Y = Y_2 = H_2 U_2 = H_2 Y_1 = H_2 H_1 U$$



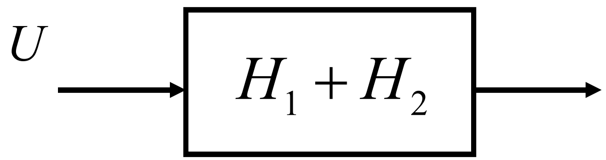


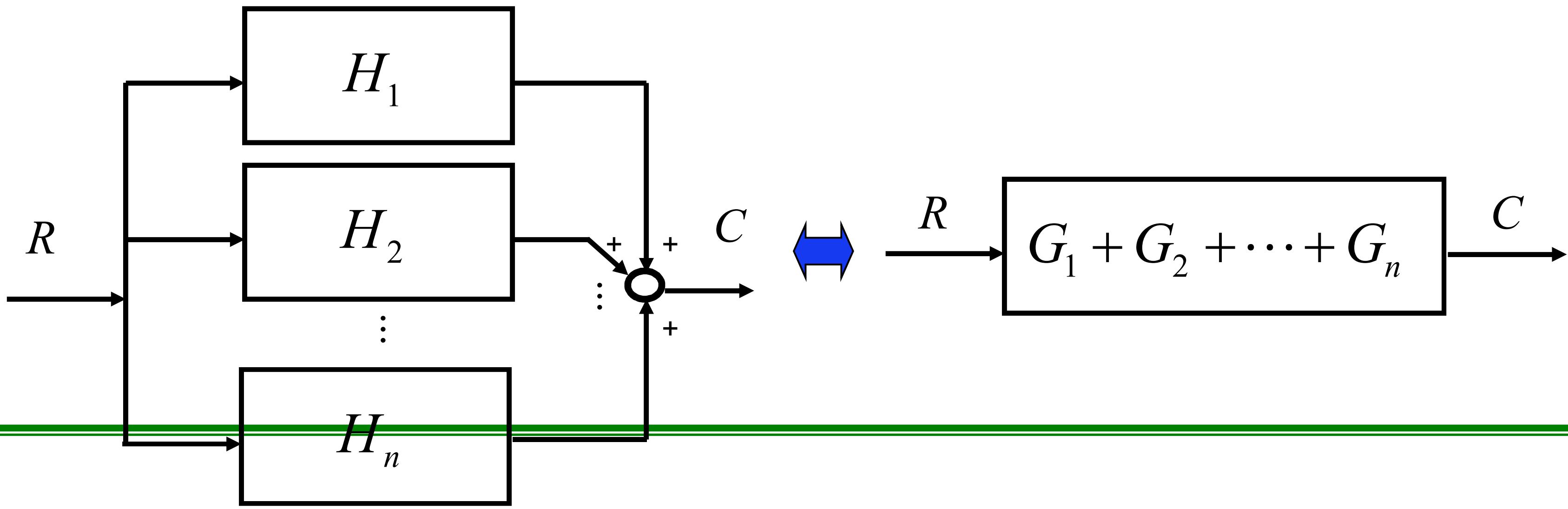
控制系统的结构——方块图表示法

- **并联系统**



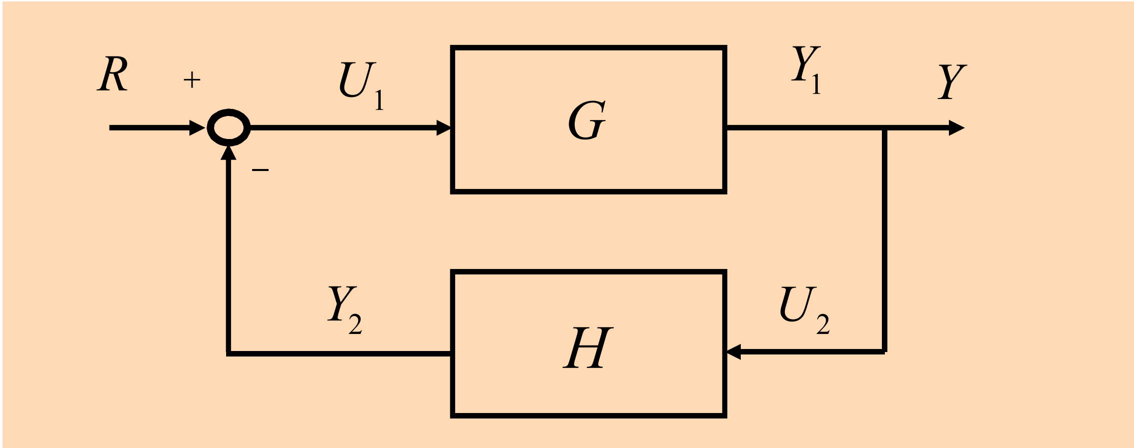
$$Y = Y_1 + Y_2 = H_1U_1 + H_2U_2 = \left(H_1 + H_2\right)U$$



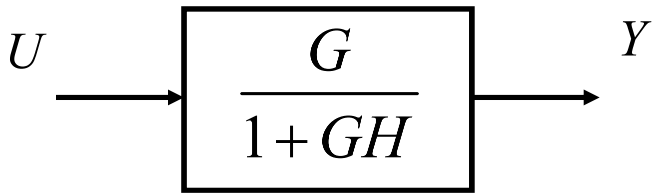


控制系统的结构——方块图表示法

- **负反馈系统**

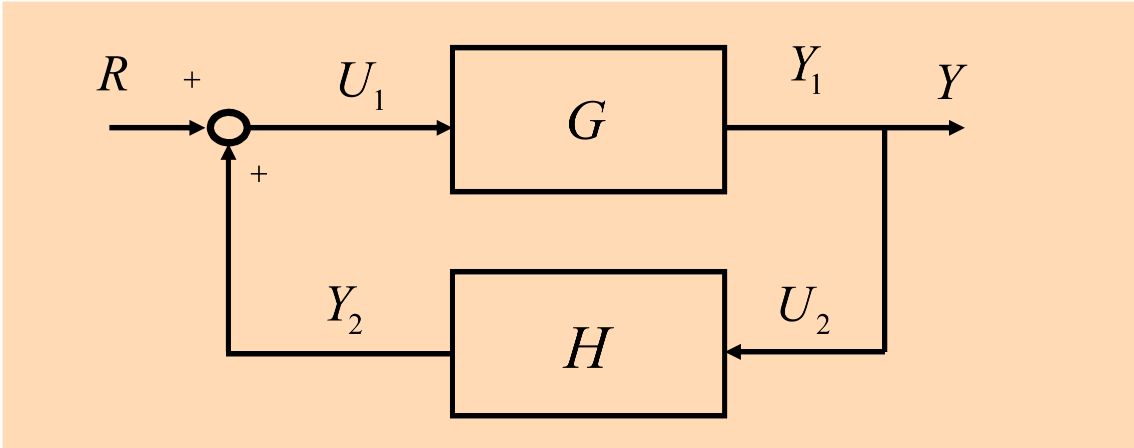


$$Y=\left(\frac{G}{1+GH}\right)U$$

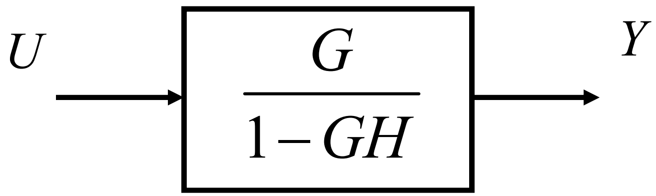


控制系统的结构——方块图表示法

- **正反馈系统**



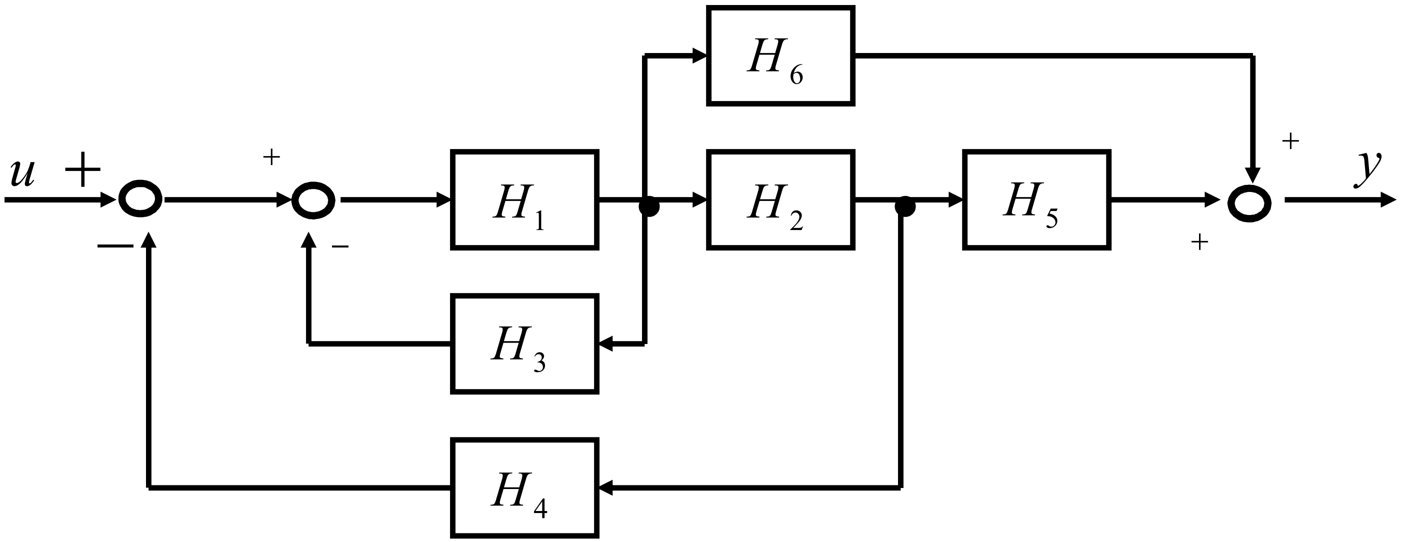
$$Y=\left(\frac{G}{1-GH}\right)U$$



控制系统的结构——方块图表示法

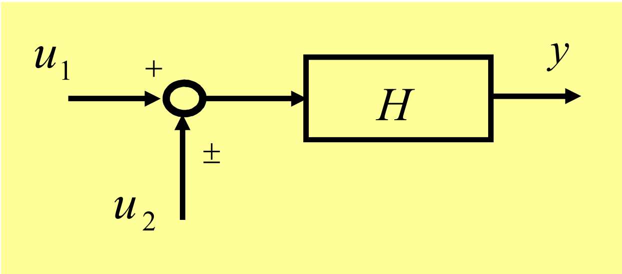
- **如何化简一个复杂的方块图?**

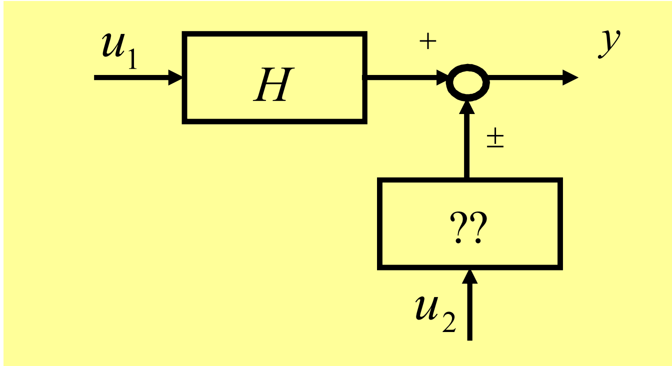
例：求系统输出y与系统输入u的关系



控制系统的结构——方块图表示法

求和点移动

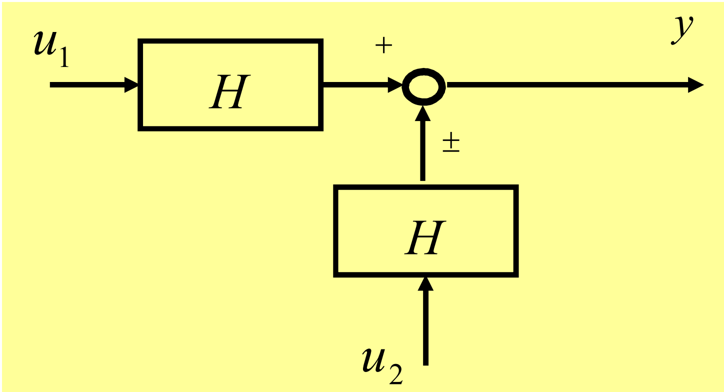




$$y = H(u_1 \pm u_2)$$
$$= Hu_1 \pm Hu_2$$

$$y = Hu_1 \pm ?? \cdot u_2$$

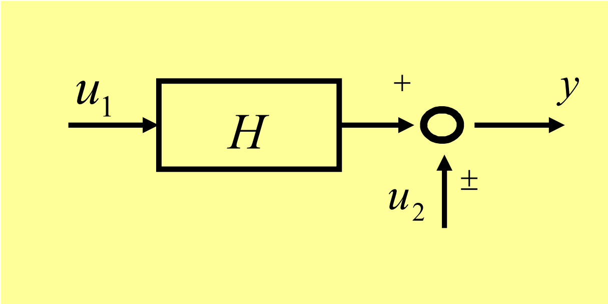
$$?? = H$$

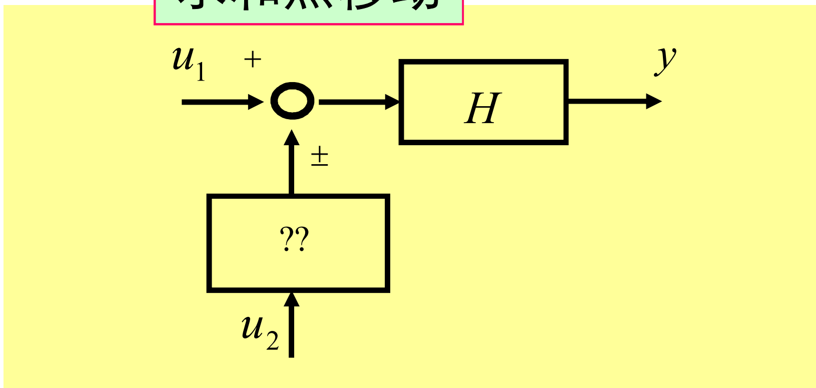


$$y = Hu_1 \pm Hu_2$$

控制系统的结构——方块图表示法

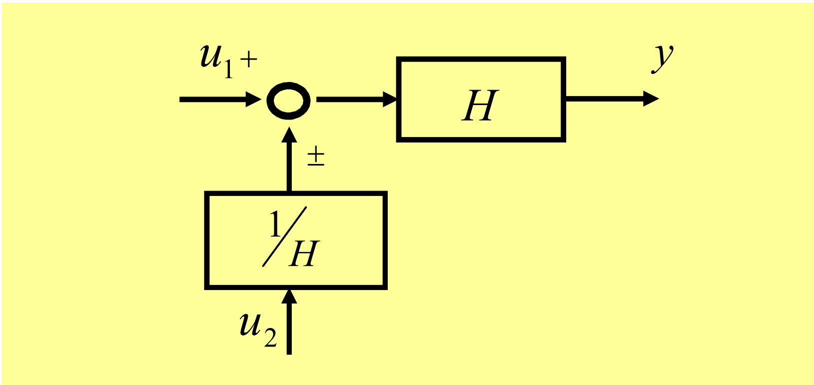
求和点移动





$$y = Hu_1 + u_2$$

$$y = H(u_1 + ?? \cdot u_2)$$

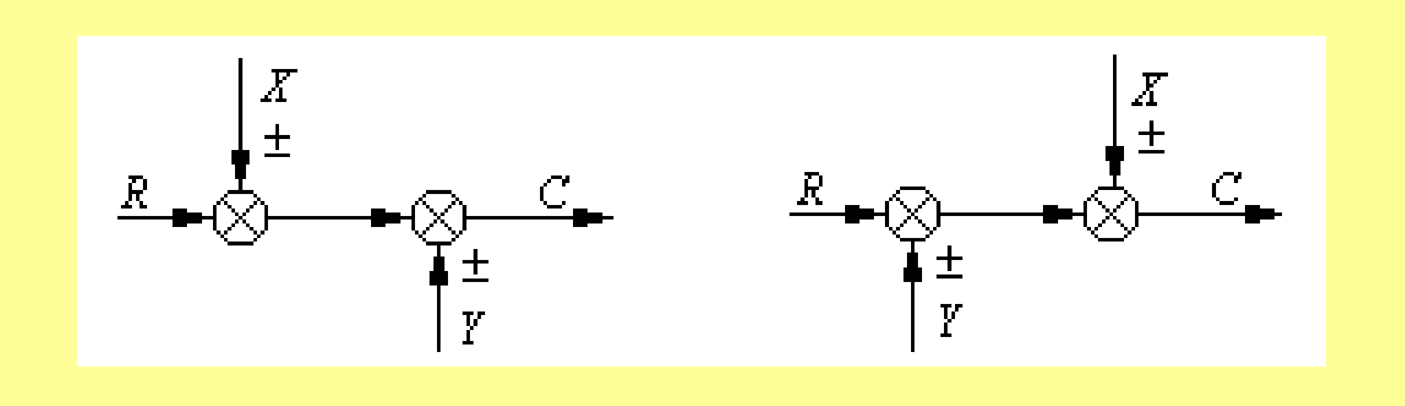


$$H ?? \cdot u_2 = u_2$$

$$?? = H^{-1}$$

控制系统的结构——方块图表示法

➢ **相邻两个求和点前后移动的等效变换**

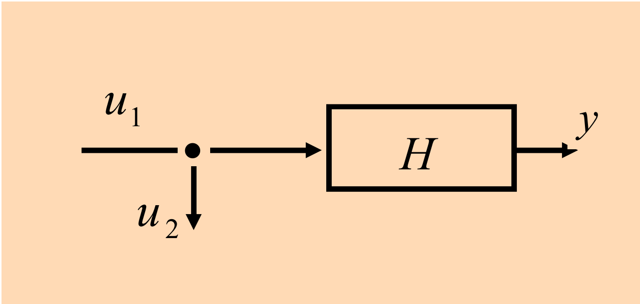


$$C = R \pm X \pm Y$$

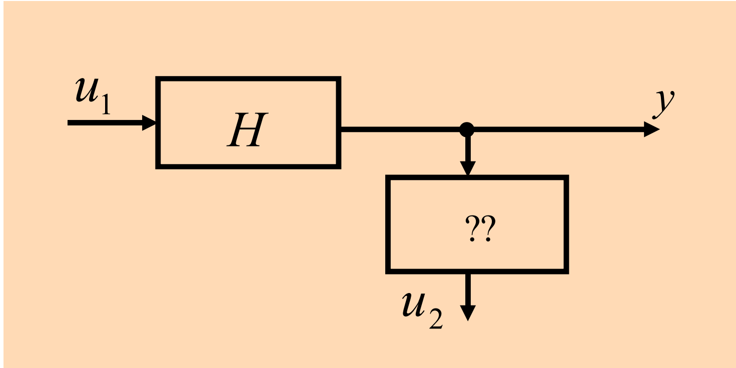
相邻多个求和点可以任意换位

控制系统的结构——方块图表示法

引出点移动



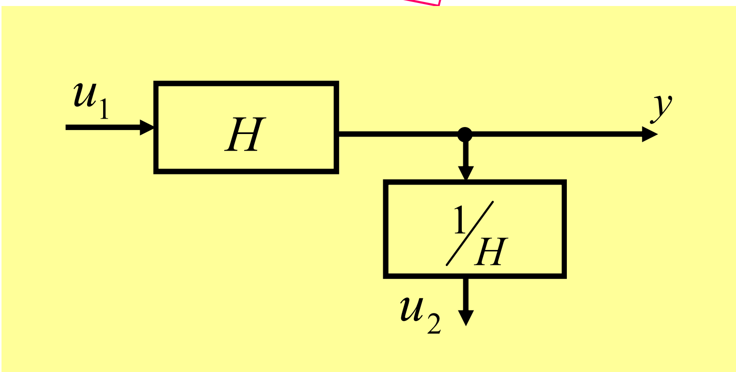
$$y = Hu_1; u_2 = u_1$$



$$y = Hu_1$$

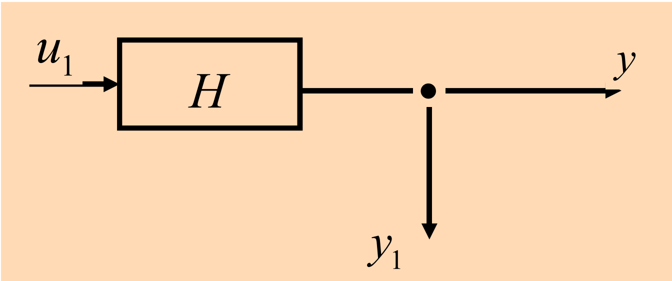
$$u_2 = ??\cdot Hu_1 = u_1$$

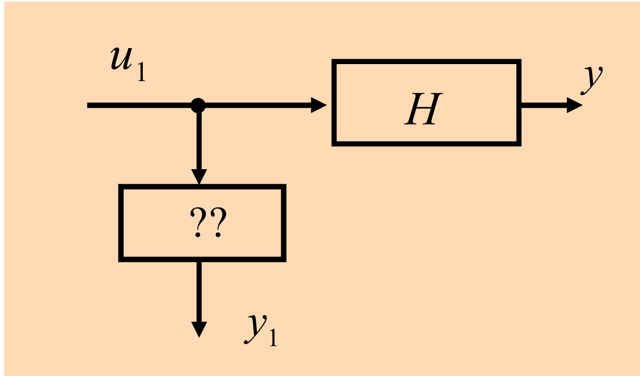
$$?? = H^{-1}$$



控制系统的结构——方块图表示法

引出点移动

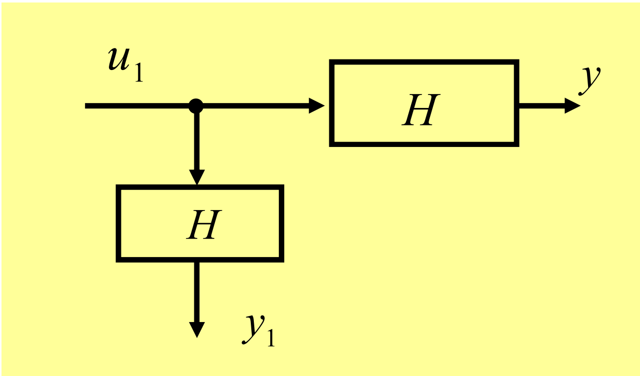




$$y = Hu_1; y_1 = y$$

$$y = Hu_1$$

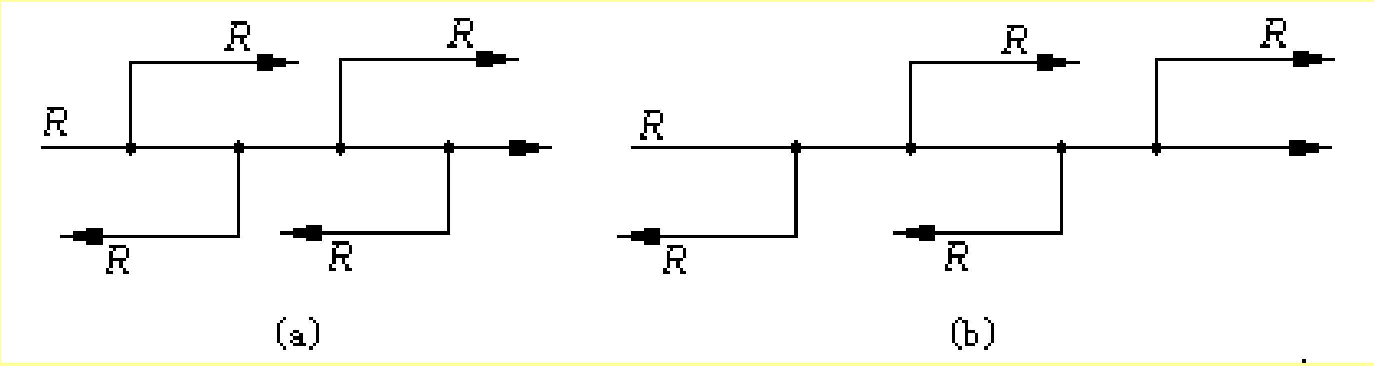
$$y_1 = ??\cdot u_1 = y$$



$$??=H$$

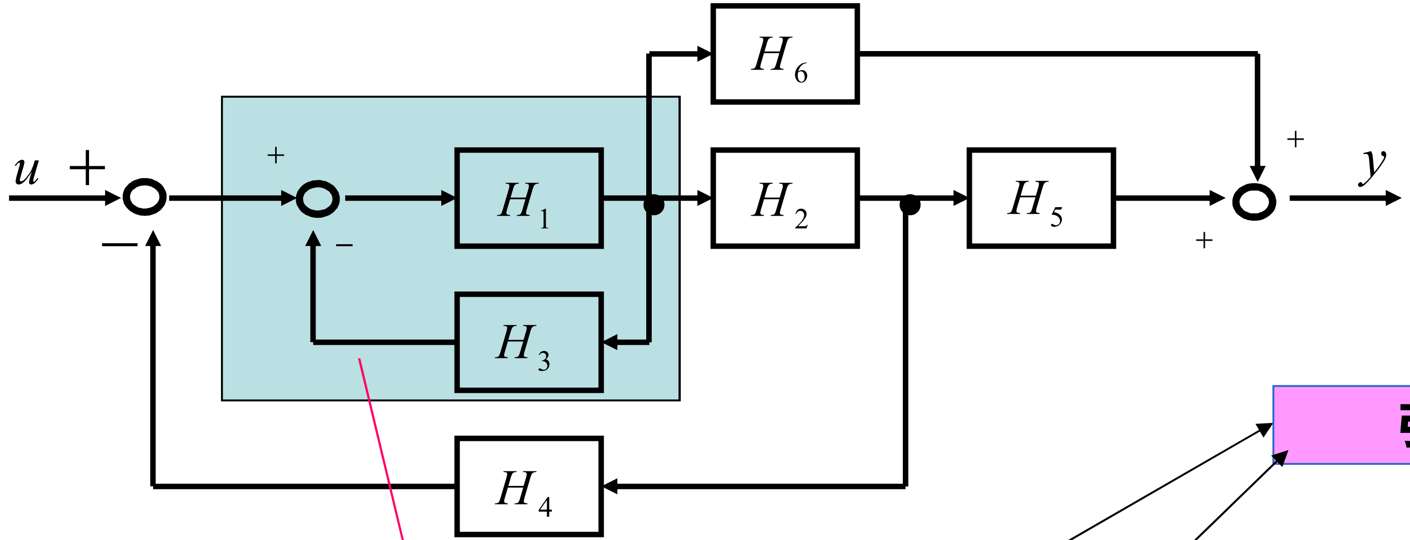
控制系统的结构——方块图表示法

➢ **相邻多个引出点可以任意换位**

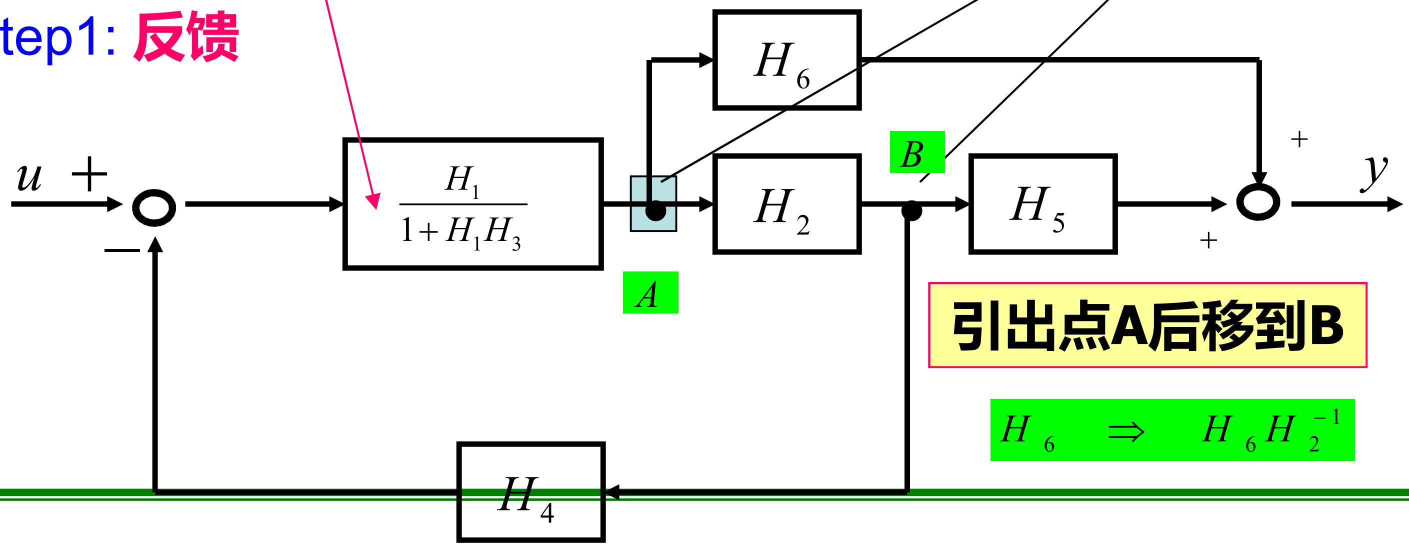


控制系统的结构——方块图表示法

例：求系统输出y与系统输入u的关系

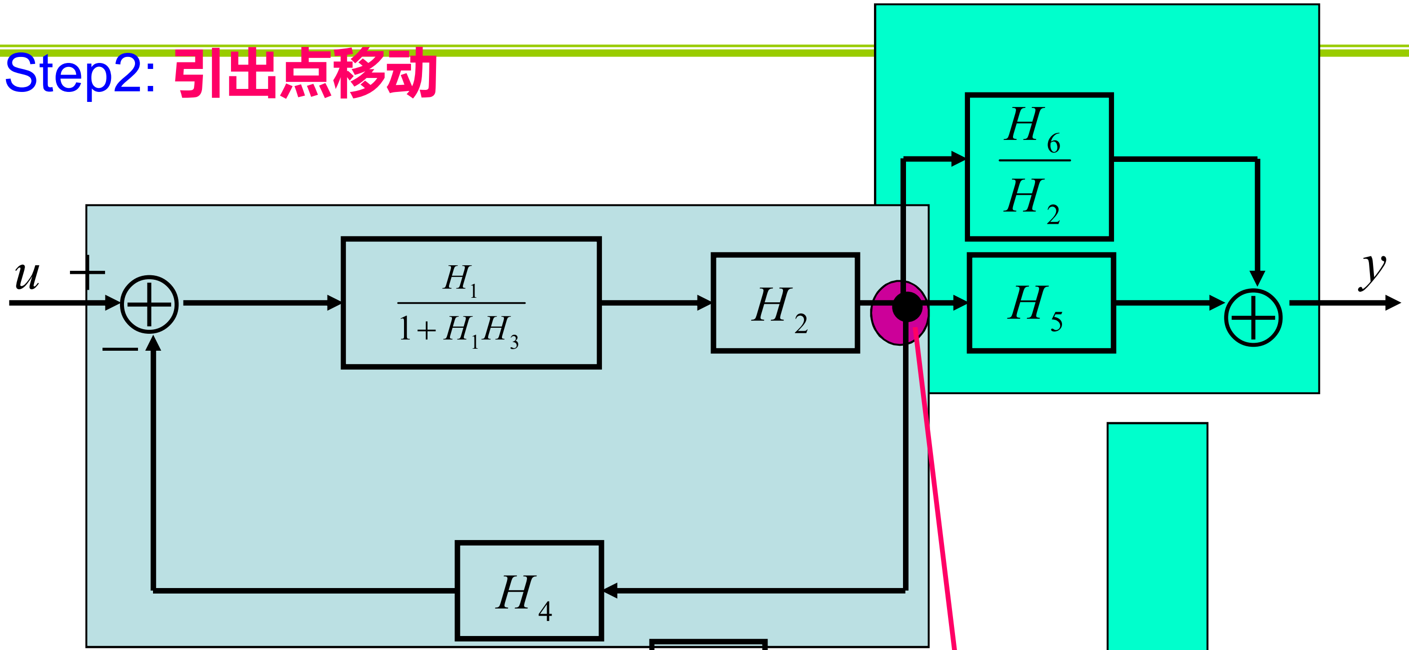


- Step1: 反馈

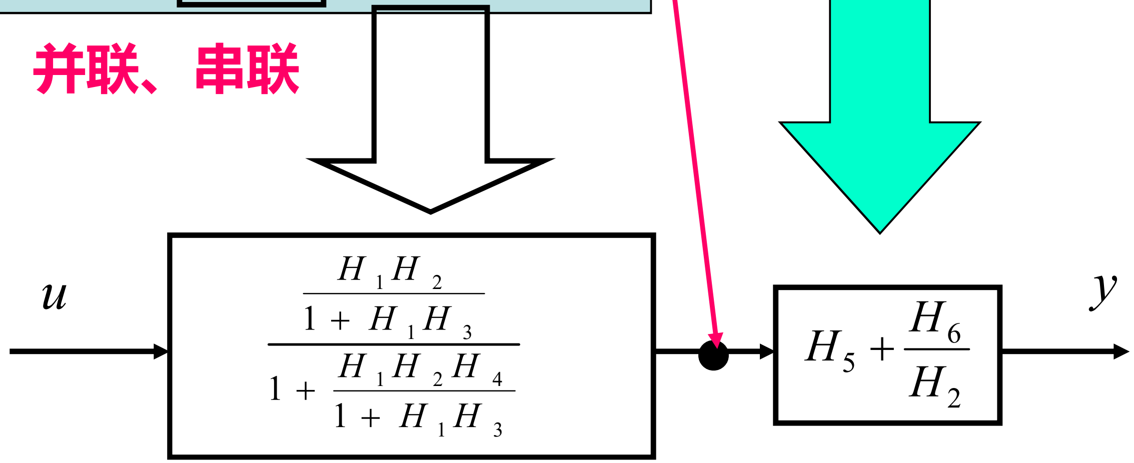


控制系统的结构——方块图表示法

- Step2: 引出点移动

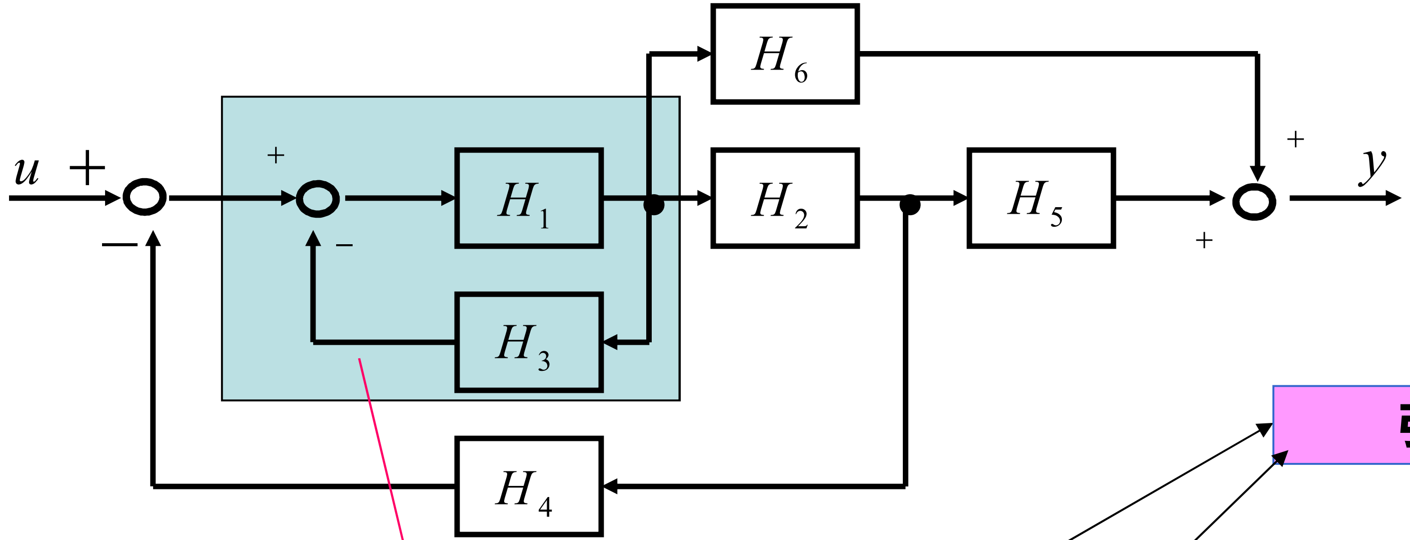


- Step3: 反馈、并联、串联



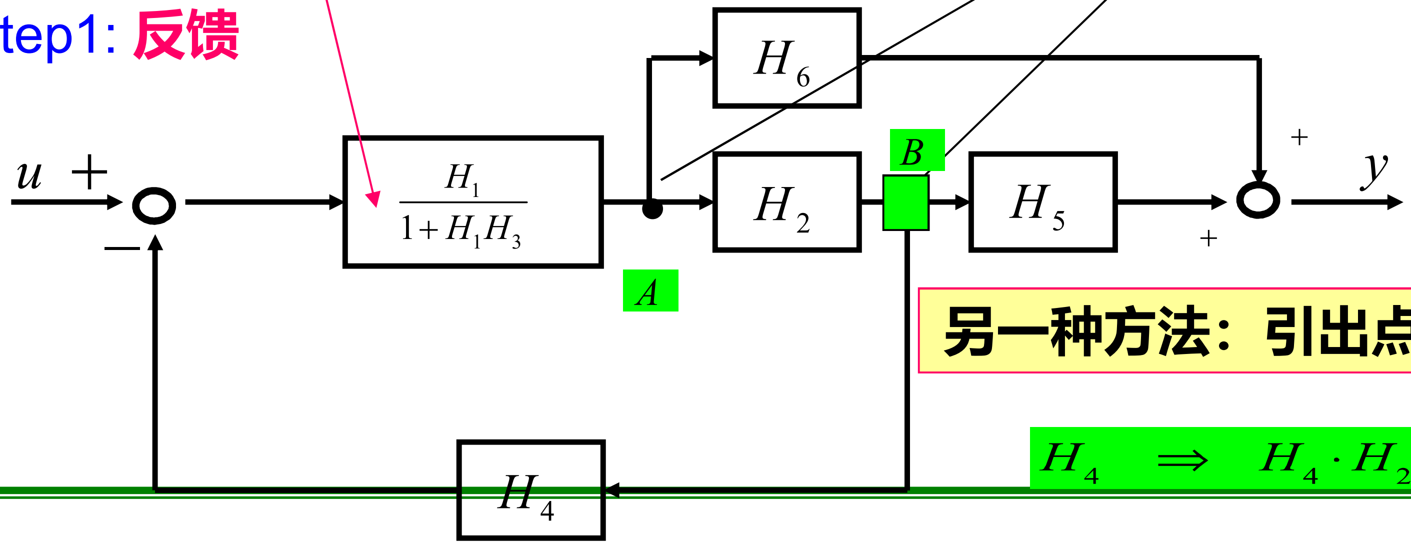
控制系统的结构——方块图表示法

例：求系统输出y与系统输入u的关系



引出点

- Step1: **反馈**

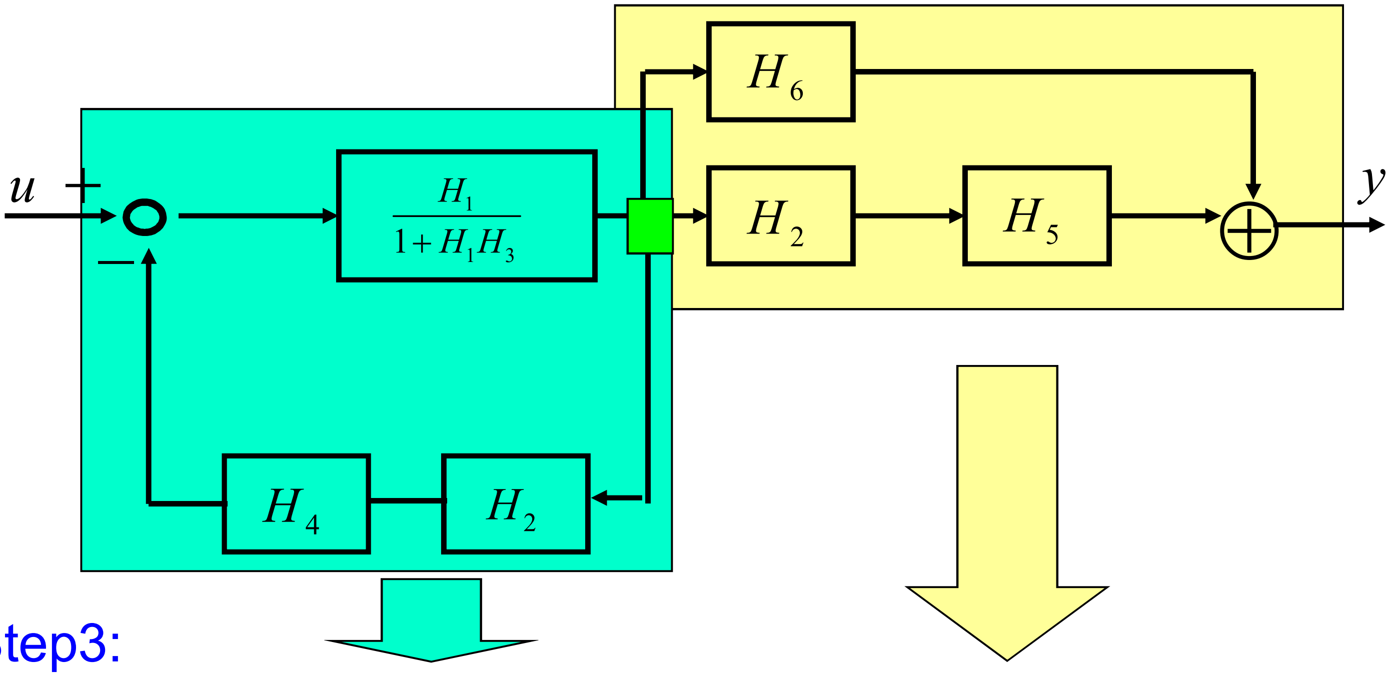


另一种方法：引出点B前移到A

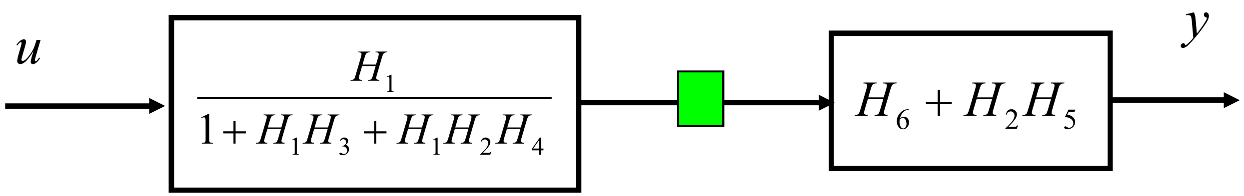
$$H_4 \Rightarrow H_4 \cdot H_2$$

控制系统的结构——方块图表示法

- Step2:



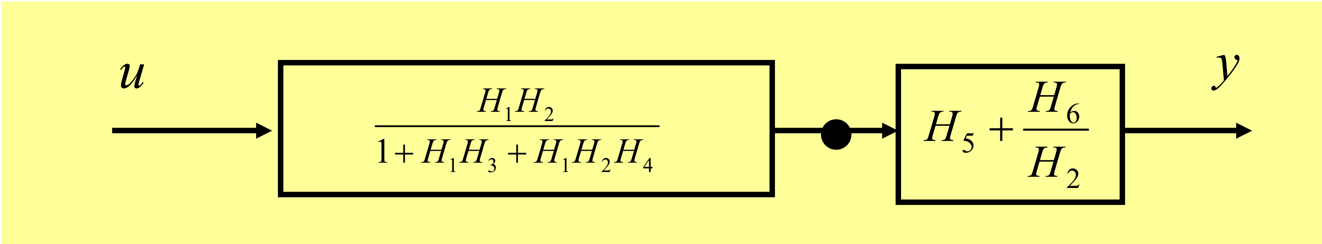
- Step3:



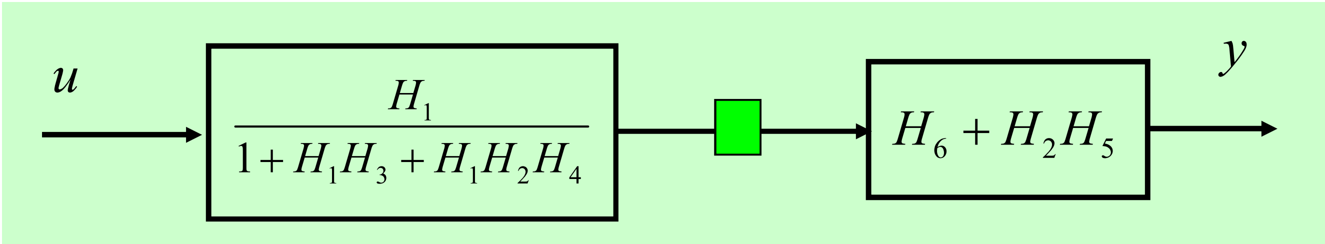
控制系统的结构——方块图表示法

◆ 获得输入输出关系

引出点A后移

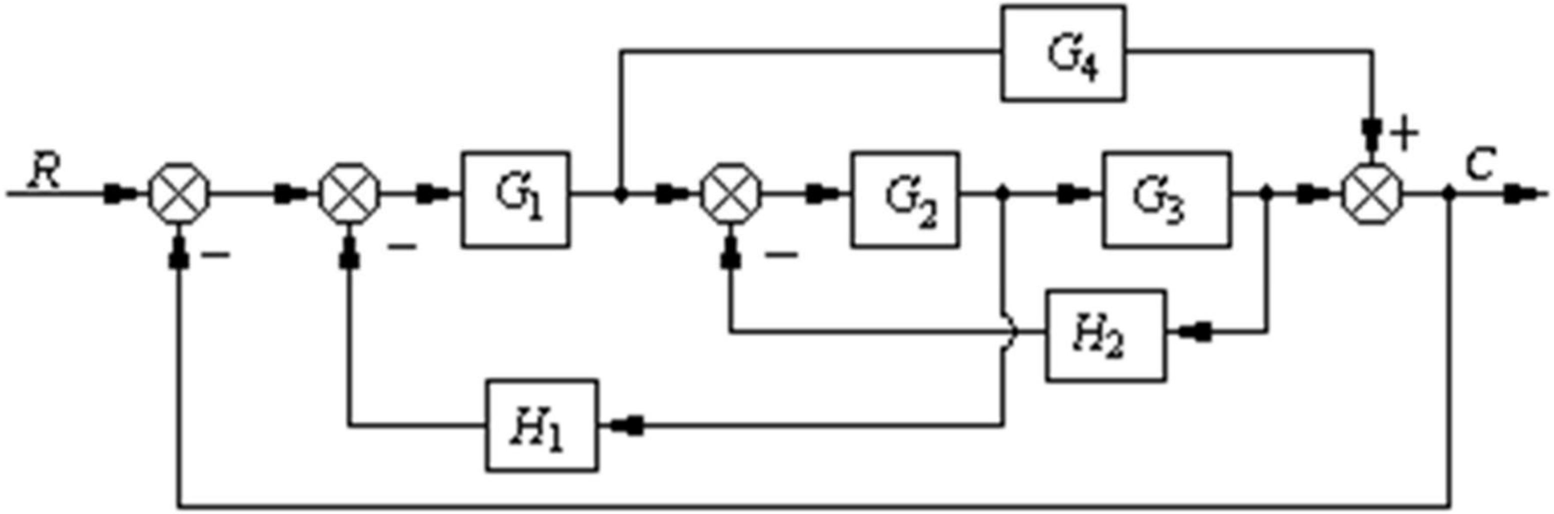


引出点B前移



$$y=\left(\frac{\dfrac{H_1H_2}{1+H_1H_3}}{1+\dfrac{H_1H_2H_4}{1+H_1H_3}}\right)\left(H_5+\frac{H_6}{H_2}\right)u=\left(\frac{H_1H_2H_5+H_1H_6}{1+H_1H_3+H_1H_2H_4}\right)u$$

控制系统的结构——信号流图表示法



需要研究系统化的代数方法

信号流图（SFG，Signal Flow Graph）
梅逊增益公式（简称梅逊公式）

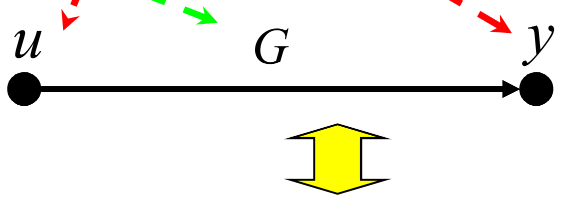
Samuel Jefferson Mason
（1921-1974）

Mason, Samuel J. (July 1956). "Feedback Theory - Further Properties of Signal Flow Graphs". *Proceedings of the IRE*: 920–926.

控制系统的结构——信号流图表示法

信号流图（SFG）定义

- 信号流图是由节点和支路组成的信号传递网络
  - 节点表示系统中的变量(信号)
  - 子系统可以由连接两个节点的有向支路表示



$$y = G u$$

•连接两个节点的支路相当于单向乘法器：方向由箭头表示；乘法运算增益置于相应的支路上

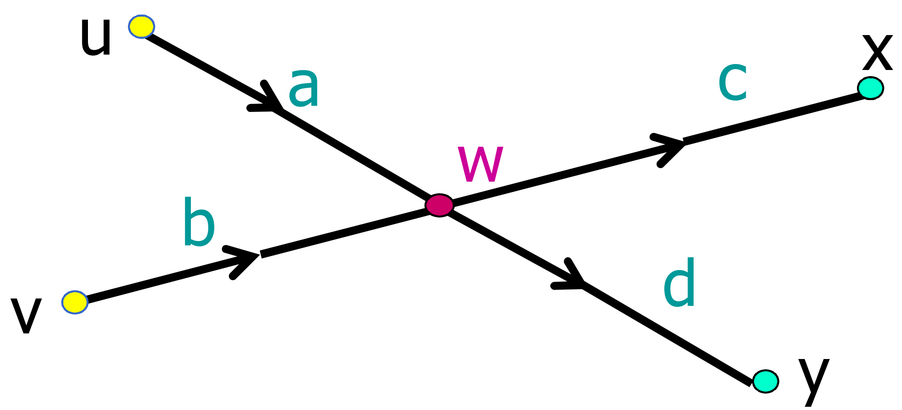
注意：增益可正可负

控制系统的结构——信号流图表示法

- 节点还具有两种作用：

  （1）　对所有来自于流入支路的信号作加法运算

  （2）　将流入信号之和传输给所有的流出支路



$$w = au + bv$$

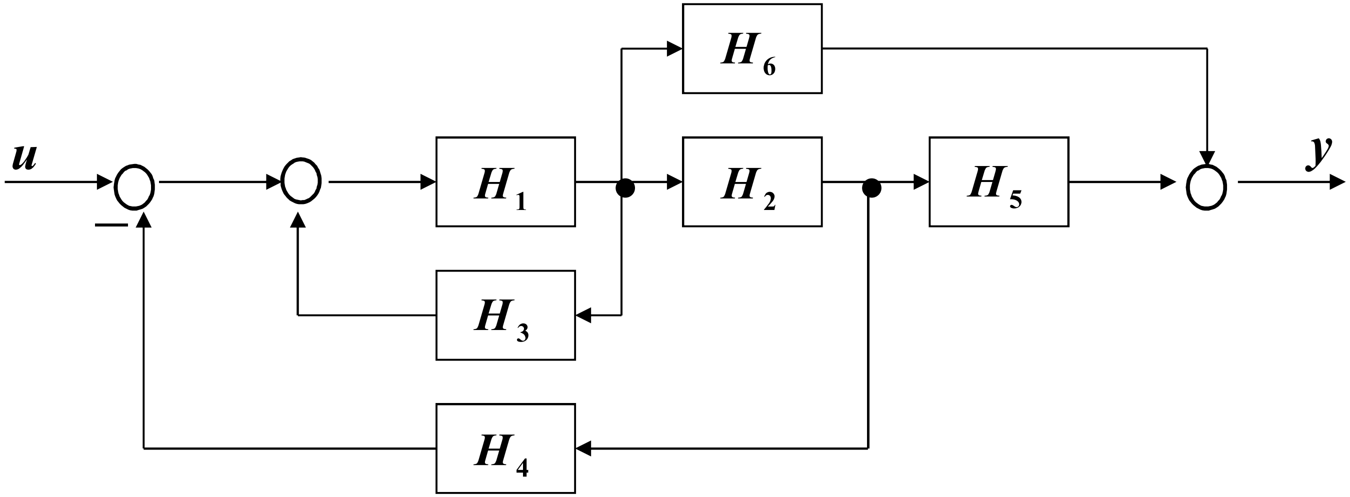
$$x = cw = c(au + bv)$$

$$y = dw = d(au + bv)$$

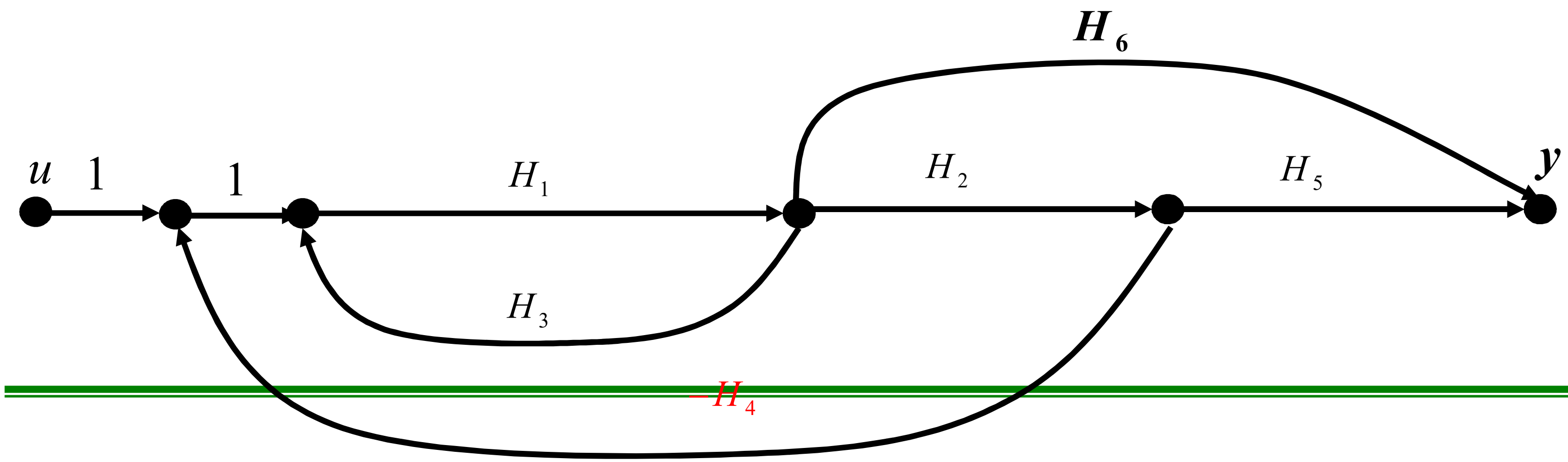
➢ 因此，可以利用 SFG 表示输入输出关系

控制系统的结构——信号流图表示法

例 ：试用信号流图表示如下系统



解:



控制系统的结构——信号流图表示法

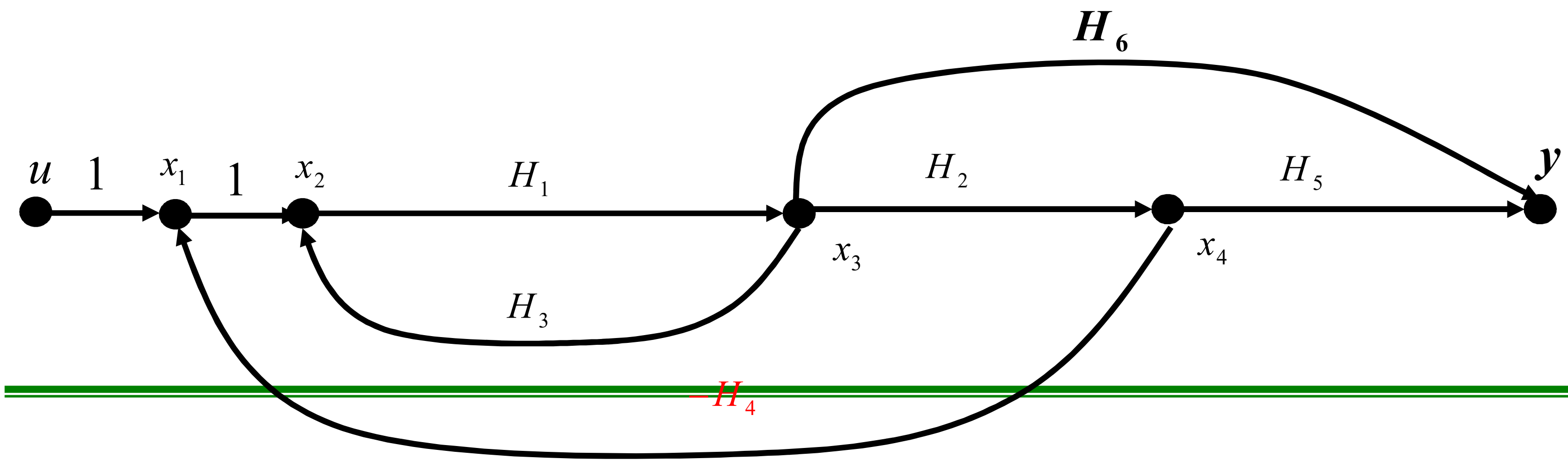
$$x_1 = u - H_4 x_4$$
$$x_2 = x_1 + H_3 x_3$$
$$x_3 = H_1 x_2$$
$$x_4 = H_2 x_3$$
$$y = H_6 x_3 + H_5 x_4$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -H_4 \\ 1 & 0 & H_3 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$x = Ax + bu$$
$$y = Cx$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_6 & H_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$x = (I - A)^{-1} bu$$
$$y = C(I - A)^{-1} bu$$



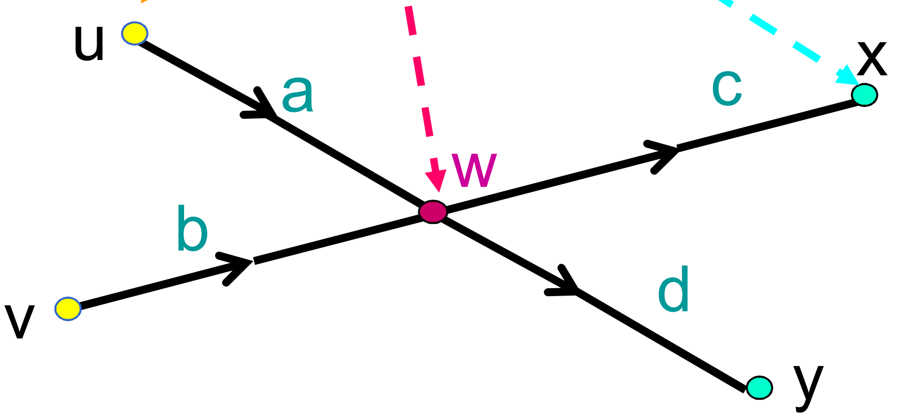
控制系统的结构——信号流图表示法

◆ 节点有三种类型

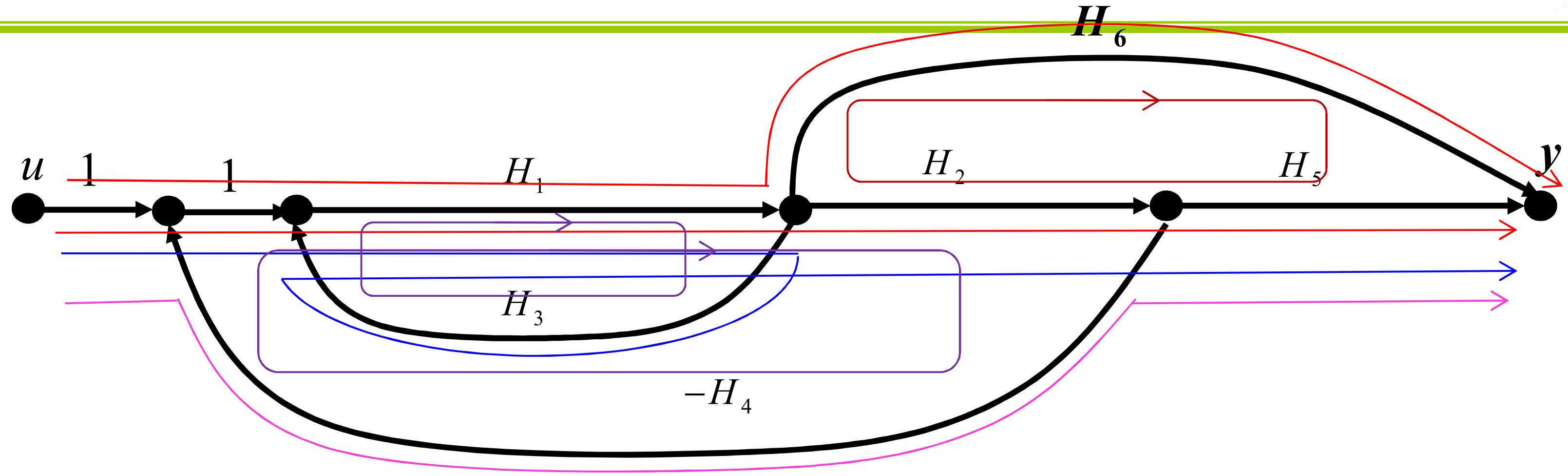
(1) 源节点 （独立节点、输入节点）：仅有流出支路

(2) 阱节点 （非独立节点、输出节点）：仅有流入支路

(3) 混合节点 （一般节点）



控制系统的结构——信号流图表示法



前向通路：从源节点到阱节点的一条可循箭头方向走通的有向路径，该路径与其上的节点相交不多于一次

前向通路增益：前向通路中各支路增益的乘积

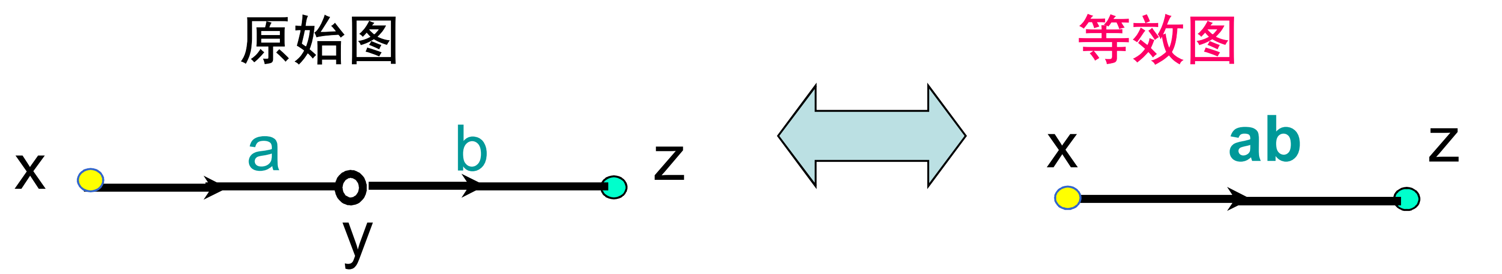
回路：一条可循箭头方向走通的闭合有向路径，该路径与其上的节点相交不多于一次

回路增益：回路中各支路增益的乘积

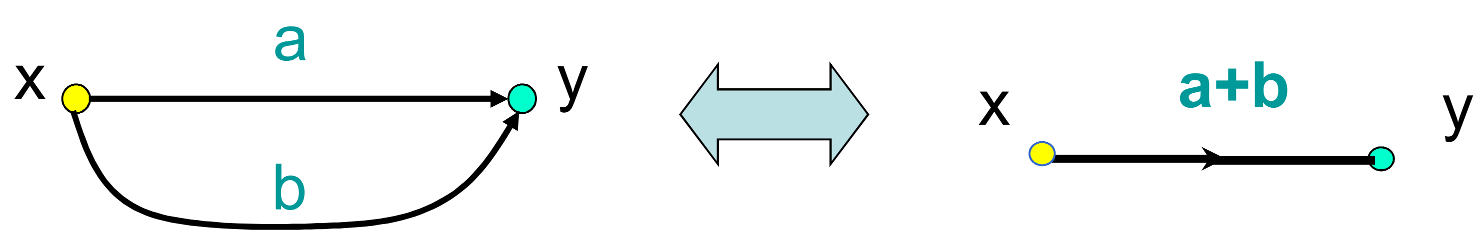
控制系统的结构——信号流图表示法

信号流图（SFG）的若干变换

- 串联通路

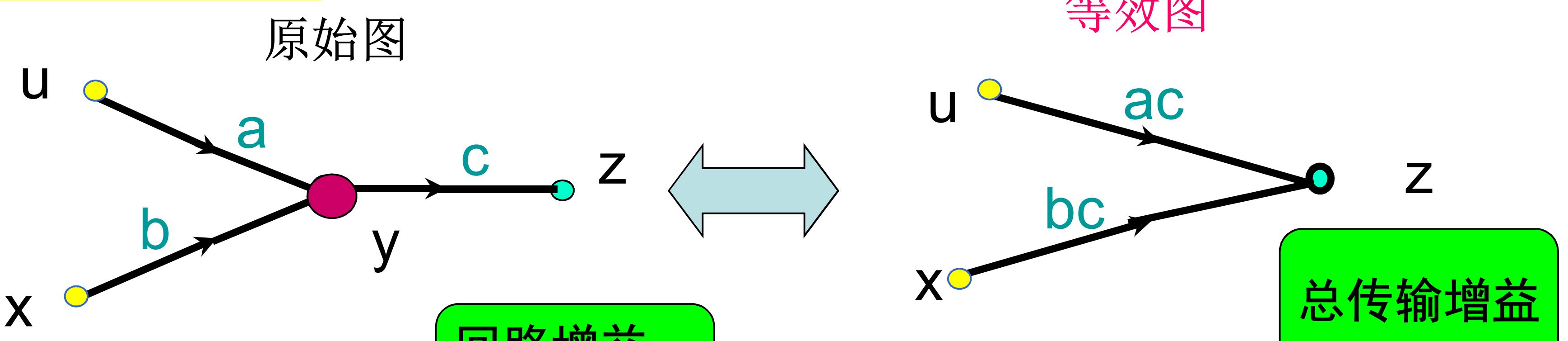


- 并联通路

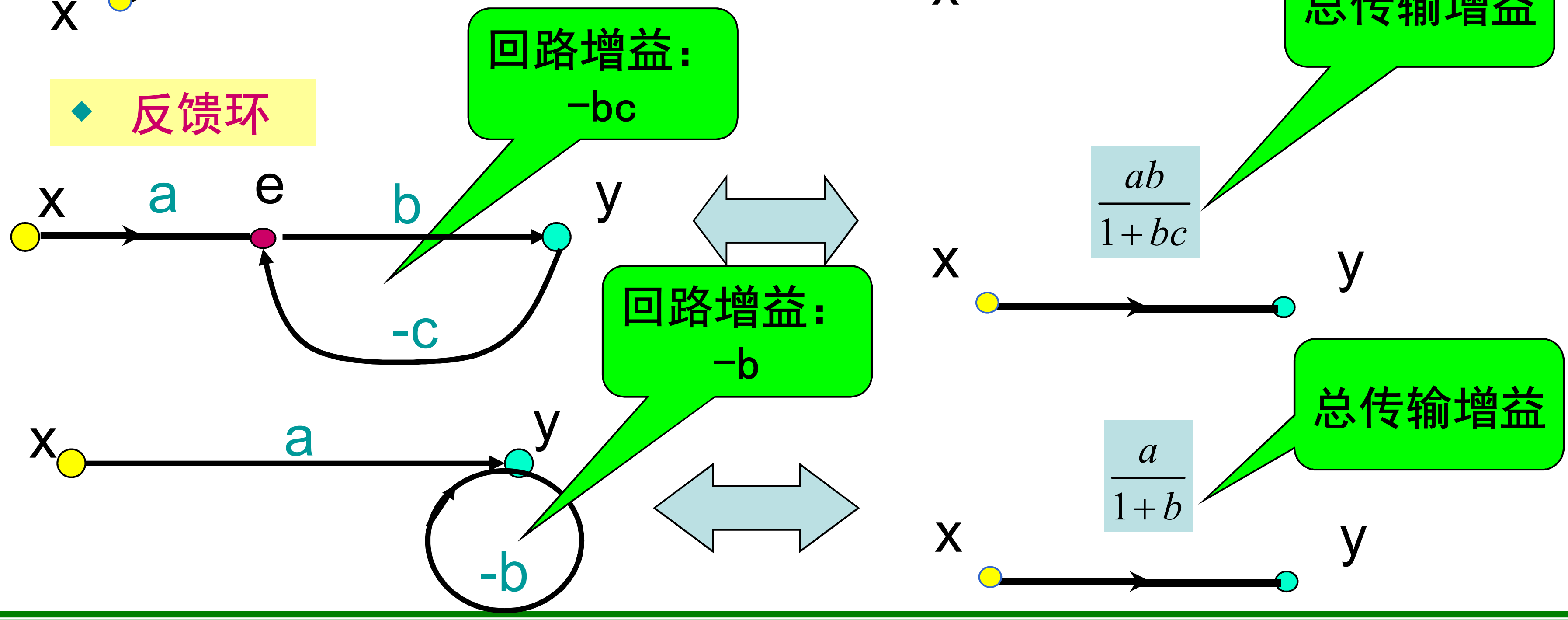


控制系统的结构——信号流图表示法

◆ 节点消除



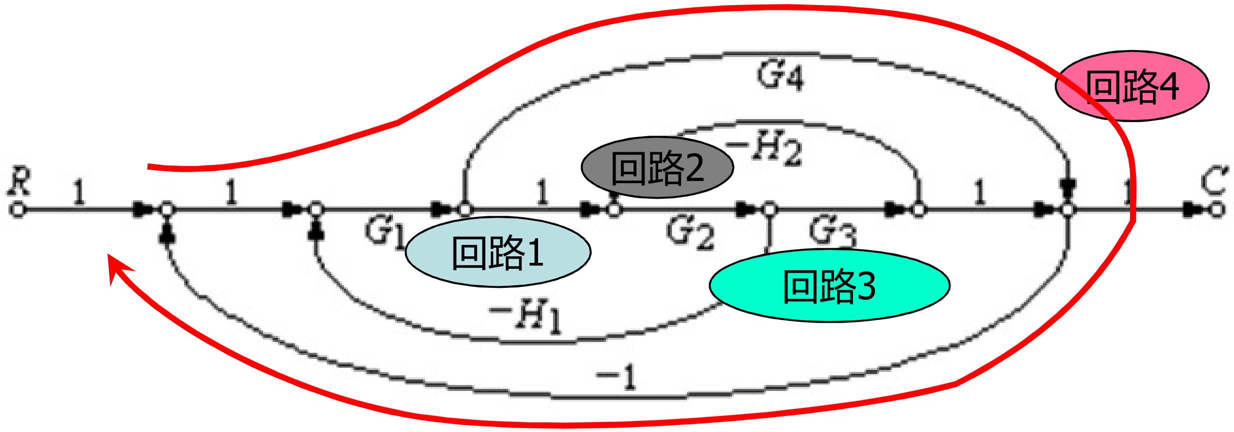
◆ 反馈环



控制系统的结构——信号流图表示法

梅逊增益公式

一个信号流图中的2个回路没有任何公共节点，则称这2个回路不接触，反之称这2个回路接触



回路2与回路4不接触
其它任意2个回路接触

$\sum L_1$ ： 所有不同回路的回路增益之和

$\sum L_2$ ： 每两个互不接触回路的回路增益乘积之和

$\sum L_3$ ： 每三个互不接触回路的回路增益乘积之和

………

信号流图的特征式 $\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \sum L_3 + \cdots\cdots$

控制系统的结构——信号流图表示法

n　从源节点到阱节点所有前向通路的条数

T_i　从源节点到阱节点的第i条前向通路的增益

一个信号流图中的1个回路和1条前向通路没有任何公共节点，则称它们不接触，反之称它们接触

Δ_i　在Δ中，将与第i条前向通路相接触的回路的增益置0后所得到的结果，称为余子式

T　从源节点到阱节点的总传输增益

梅逊增益公式

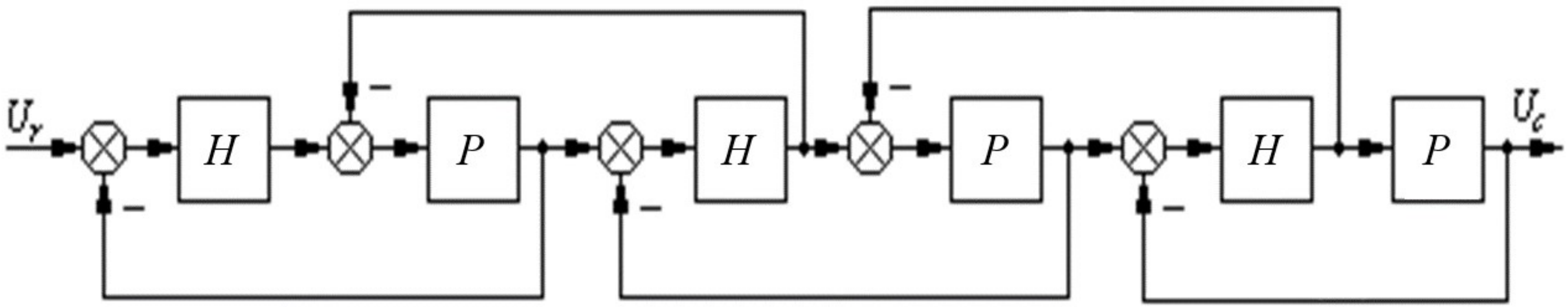
$$T = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{n} T_i \Delta_i$$

$$\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \sum L_3 + \cdots\cdots$$

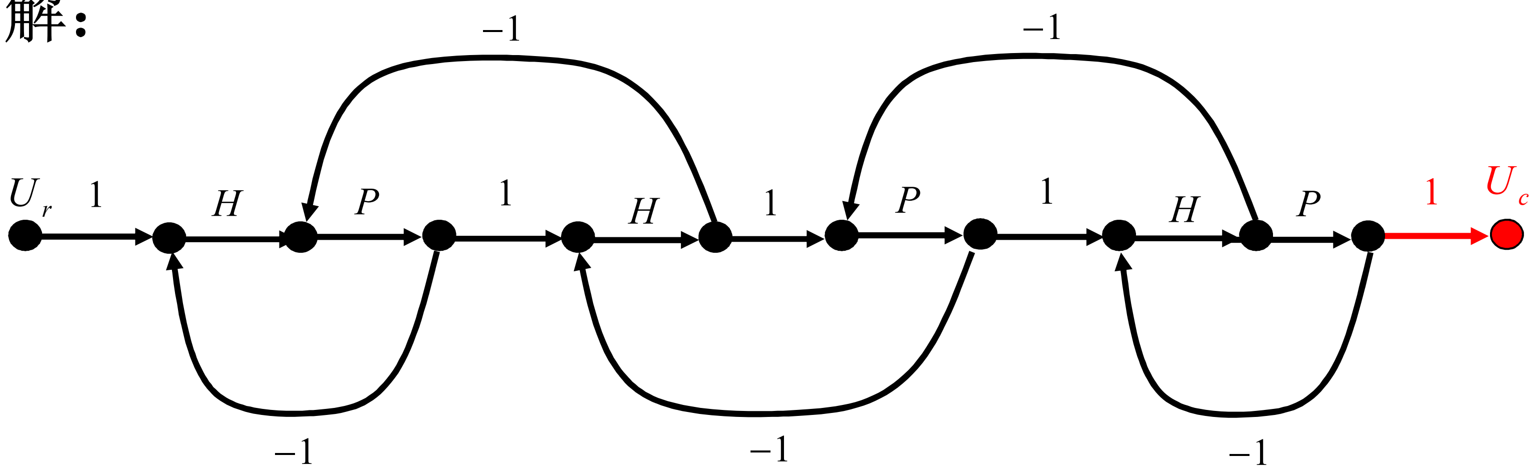
注意：当前向通道接触所有的回路时，Δ_i　等于 1

控制系统的结构——信号流图表示法

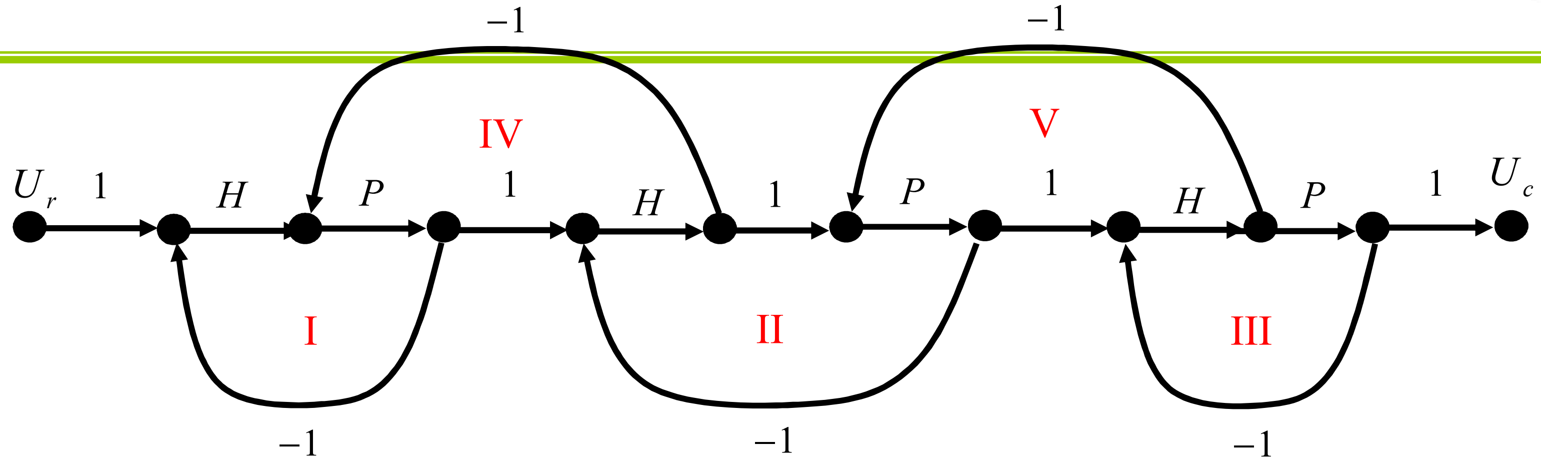
例：针对如下图所示系统，求取Uc/Ur



解：



控制系统的结构——信号流图表示法



5 个回路 $W_1 = W_2 = \cdots = W_5 = -HP$ $\sum L_1 = -5HP$

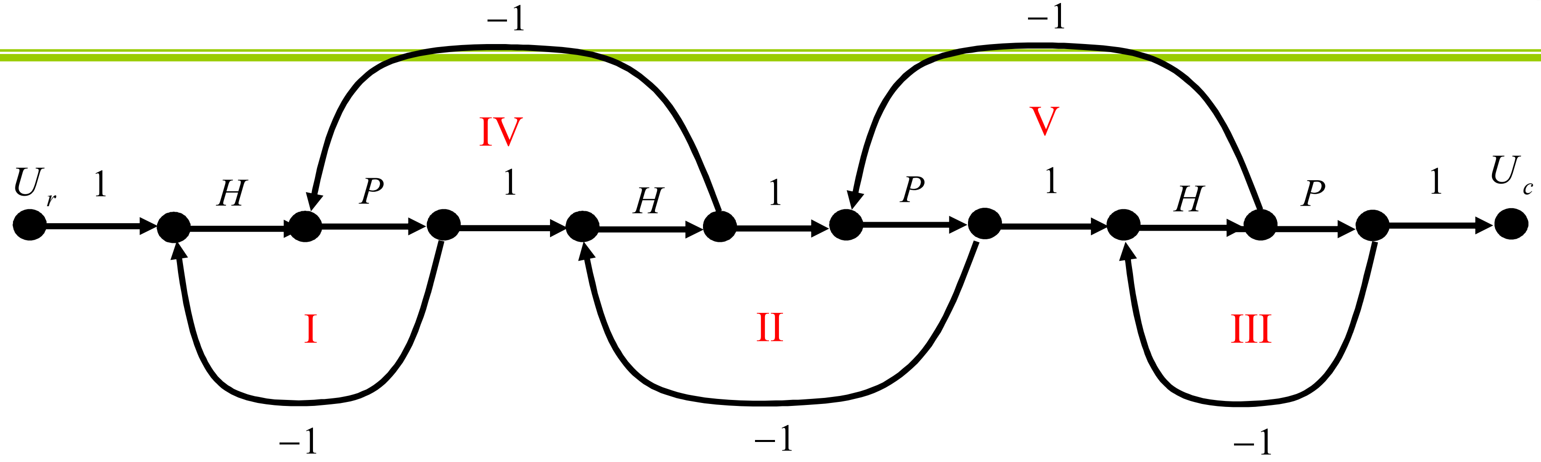
6 组两两互不接触回路， Ⅰ-Ⅱ、Ⅰ-Ⅲ、Ⅰ-Ⅴ、Ⅱ-Ⅲ、Ⅲ-Ⅳ 及 Ⅳ-Ⅴ

$$\sum L_2 = 6(-HP)(-HP) = 6H^2P^2$$

1组三个互不接触的回路， Ⅰ-Ⅱ-Ⅲ

$$\sum L_3 = (-HP)(-HP)(-HP) = -H^3P^3$$

控制系统的结构——信号流图表示法



$$\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \sum L_3 = 1 + 5HP + 6H^2P^2 + H^3P^3$$

1 条前向通道，n=1 $T_1 = H^3P^3$ **该前向通道接触所有回路，Δ_1=1**

$$\frac{U_c}{U_r} = \frac{T_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{H^3P^3}{1 + 5HP + 6H^2P^2 + H^3P^3}$$

谢 谢！