

控制论

Cybernetics

授课教师：杨春节 教授

cjyang999@zju.edu.cn

浙江大学控制科学与工程学院



第六讲

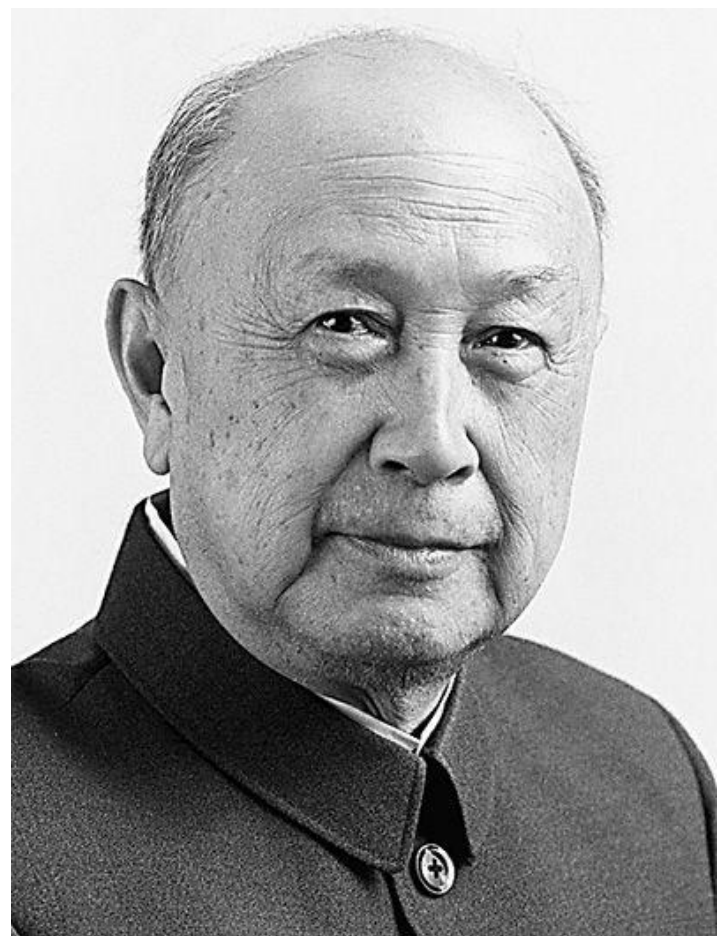
工程控制论： 控制系统时域分析法



一、工程控制论的产生



一代科学巨匠

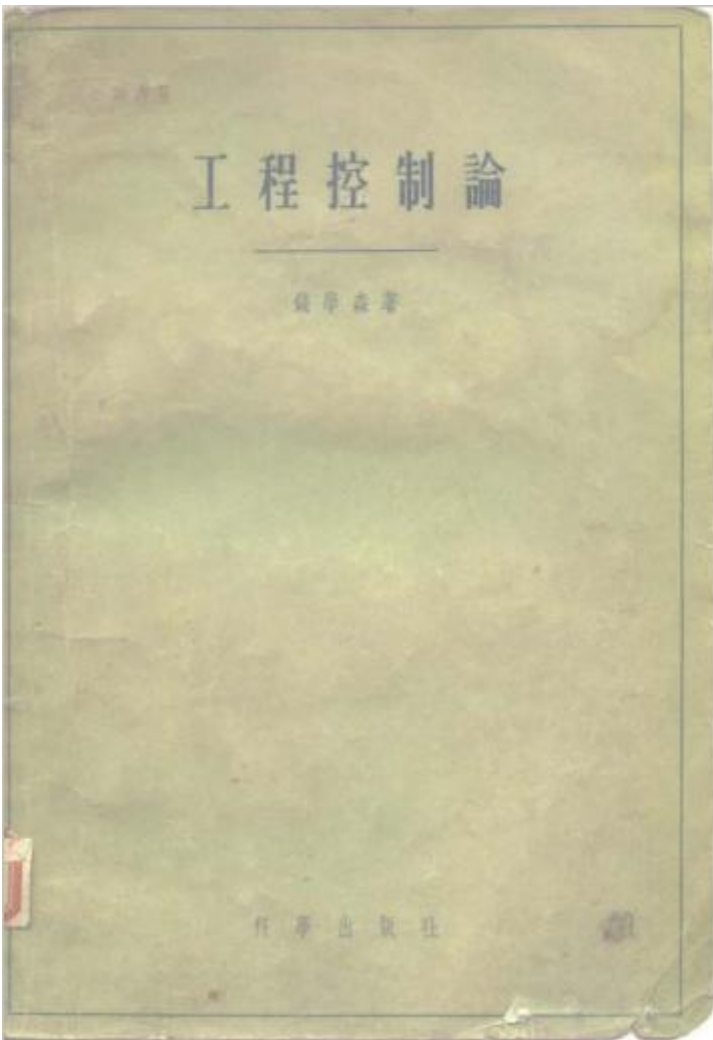


钱学森 (1911–2009)

- 钱学森先生出生于1911年12月11日
- 二十世纪最伟大的二十位科学家之一
- 我国航天科技事业的奠基人
- 被誉为中国航天之父和火箭之王
- 新中国爱国留学归国人员中最具代表性的国家建设者
- 工程控制论的创始人



工程控制论的诞生



- 1954年 《工程控制论》英文版出版，引起世界科学界的关注，认为《工程控制论》是这一领域的奠基式著作，是维纳控制论之后又一个辉煌的成就。
- 该书俄文版、德文版、中文版分别于1956年、1957年、1958年出版。
- 1980年《工程控制论》(修订版)出版。



工程控制论的产生背景



- 1943年-1955年，在美国加州理工学院、美国麻省理工学院任教，是当时美国处于领导地位的第一流火箭专家。
- 1950年开始争取回归祖国，当时美国海军次长金布尔说：“钱学森无论走到哪里，都抵得上5个师的兵力，我宁可把他击毙在美国也不能让他离开。”因此钱学森受到美国政府迫害，失去自由。
- 历经5年于1955年，经过周恩来总理外交上的不断努力，钱学森冲破种种阻力回国。



工程控制论的产生背景

- 在被美国政府软禁期间，钱学森将维纳《控制论》思想引入自己熟悉的航空航天系统的导航与制导系统，从而形成一门新学科：《工程控制论(Engineering Cybernetics)》。
- 关于《工程控制论》，当时美国专栏作家评论：“工程师偏重于实践，解决具体问题，不善于上升到理论高度；数学家则擅长理论分析，却不善于从一般到个别去解决实际问题。钱学森则集中两个优势于一身，高超地将两只轮子装到一辆战车上，碾出了工程控制论研究的一条新途径。”



工程控制论的产生背景

- 1955年，在钱学森即将离开美国返回中国时，他将《工程控制论》送给自己的导师冯·卡门。冯·卡门对钱学森说：
- “我为你感到骄傲，你创立的工程控制论学说，对现代科学事业的发展是巨大的贡献。你现在在学术上已经超过了我。”



工程控制论的重要意义

- **维纳的《控制论》**是一部哲学，是思想，是世界观，是认识论和方法论。哲学的晦涩使《控制论》难于理解。另外，维纳在《控制论》中将动物与机器相提并论，也引起了某些宗教人士的抗议。
- **钱学森的《工程控制论》**，系统地揭示了维纳控制论对自动化、航空、航天、电子通讯等科学技术的意义和影响。《工程控制论》未触及到人类这种动物的尊严问题，写的全是技术科学的事。因此，《工程控制论》很快为科学界所接受，同时，也促进了人们对维纳《控制论》的理解。



工程控制论的重要意义

- 《工程控制论》带来的控制论研究热潮。吸引了大批数学家和工程技术专家从事控制论的研究，形成了控制科学在50年代和60年代的研究高潮。庞特里亚金的极大值原理、卡尔曼的能控能观性定理和递推滤波器等，都是在这一时期产生的。
- 《工程控制论》改变了许多人对《控制论》的批判态度。前苏联不再将《控制论》称作“反动的伪科学”，反而积极参与《控制论》和《工程控制论》的研究。1956年，前苏联发行了俄文版的《工程控制论》，并将辞书中的《控制论》定义为：“研究信息和控制一般规律的新兴学科”。



工程控制论的重要意义

- 1957年，国际自动控制联合会(IFAC)筹委会在巴黎成立。缺席的钱学森当选为第一届理事会成员。1960年9月，IFAC第一届世界代表大会在莫斯科举行。维纳出席了本届大会，受到英雄般的接待。然而，由于国家对于钱学森安全问题的考虑，钱学森仍然缺席。与会代表为钱学森的缺席而遗憾。为表示对钱学森的敬意，与会代表齐声朗诵钱学森《工程控制论》序言中的名句：
- “建立这门技术科学，能赋予人们更宽阔、更缜密的眼光去观察老问题，为解决新问题开辟意想不到的新前景。”



工程控制论的重要意义

- **《工程控制论》与自动控制理论的关系**：《工程控制论》是自动控制理论的思想基础和方法学基础。自动控制理论皆由《工程控制论》衍生而来。《工程控制论》是自动化学科或“控制科学与工程”学科的基础和核心。
- **《工程控制论》与工程科学的关系**：“《工程控制论》是一门工程科学，……而工程科学的目标在于，将用于工程实践的设计原则组成某一学科，从而揭示不同工程实践领域间的相似性，并强调基本原理和基本思想的推动力。简言之，工程科学以理论分析为主导，并常常使用先进的数学。”

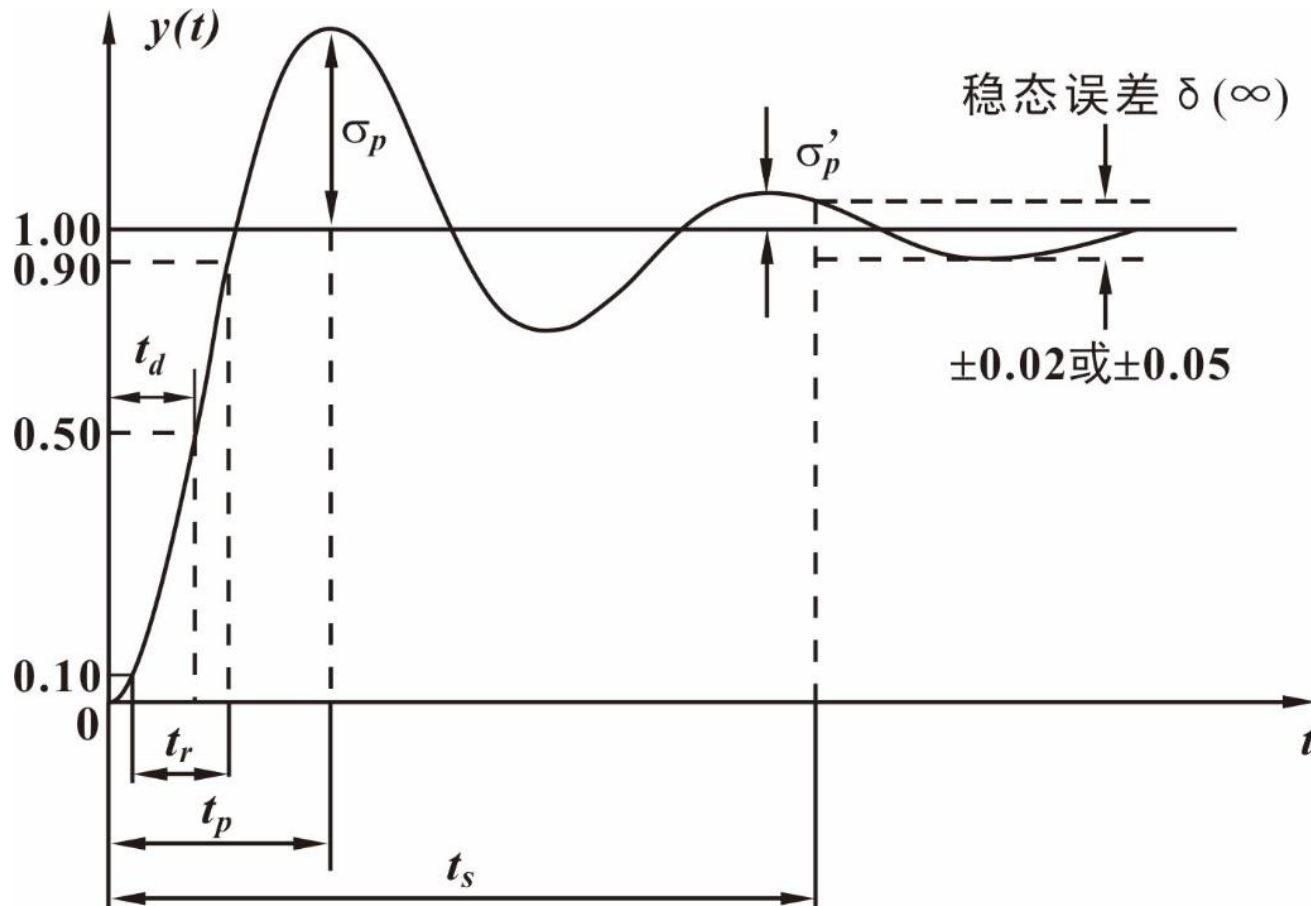


二、控制系统的稳态误差和动态品质



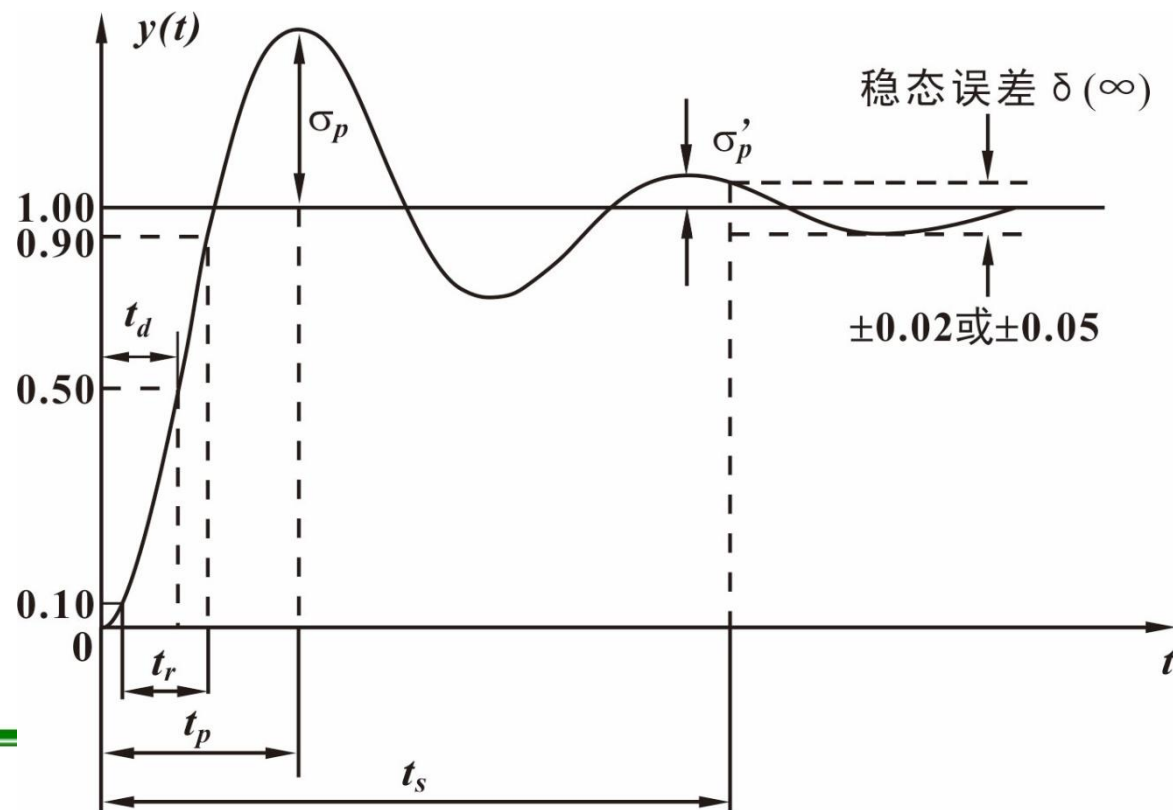
控制系统稳态误差与动态品质

- **通常规定：**
在跟随工作状态下，由单位阶跃输入所激发引起的输出调节过程的动态品质指标。



控制系统稳态误差与动态品质

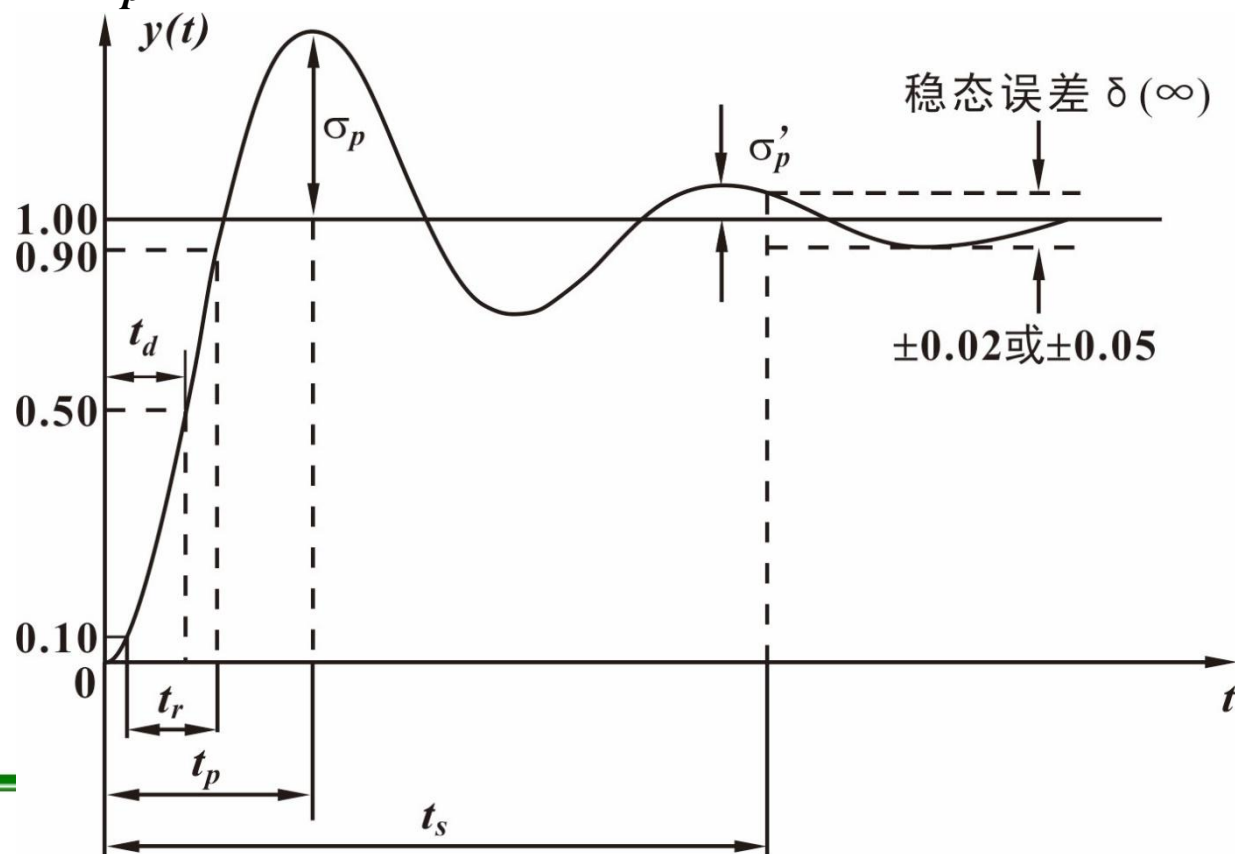
- 最大超调量 σ_p ——响应曲线偏离稳态值的最大值，以百分比表示，即：最大百分比超调量 $\sigma_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$
- 最大超调量说明系统的相对稳定性。



控制系统稳态误差与动态品质

□ 延滞时间 t_d ——响应曲线到达稳态值50%所需的时间。

□ 峰值时间 t_p ——响应曲线到达第一个峰值所需的时间。



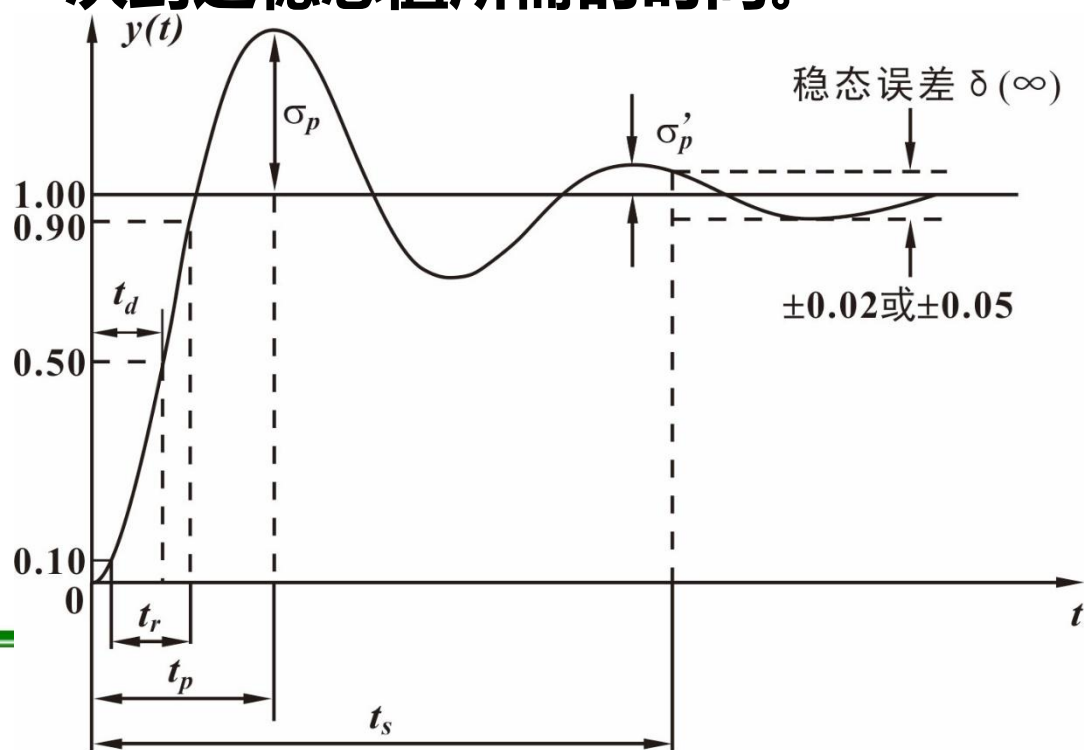
控制系统稳态误差与动态品质

□ 上升时间 t_r ——它有几种定义：

- (1) 响应曲线从稳态值的10%到90%所需时间；
- (2) 响应曲线从稳态值的5%到95%所需时间；
- (3) 响应曲线从零开始至第一次到达稳态值所需的时间。

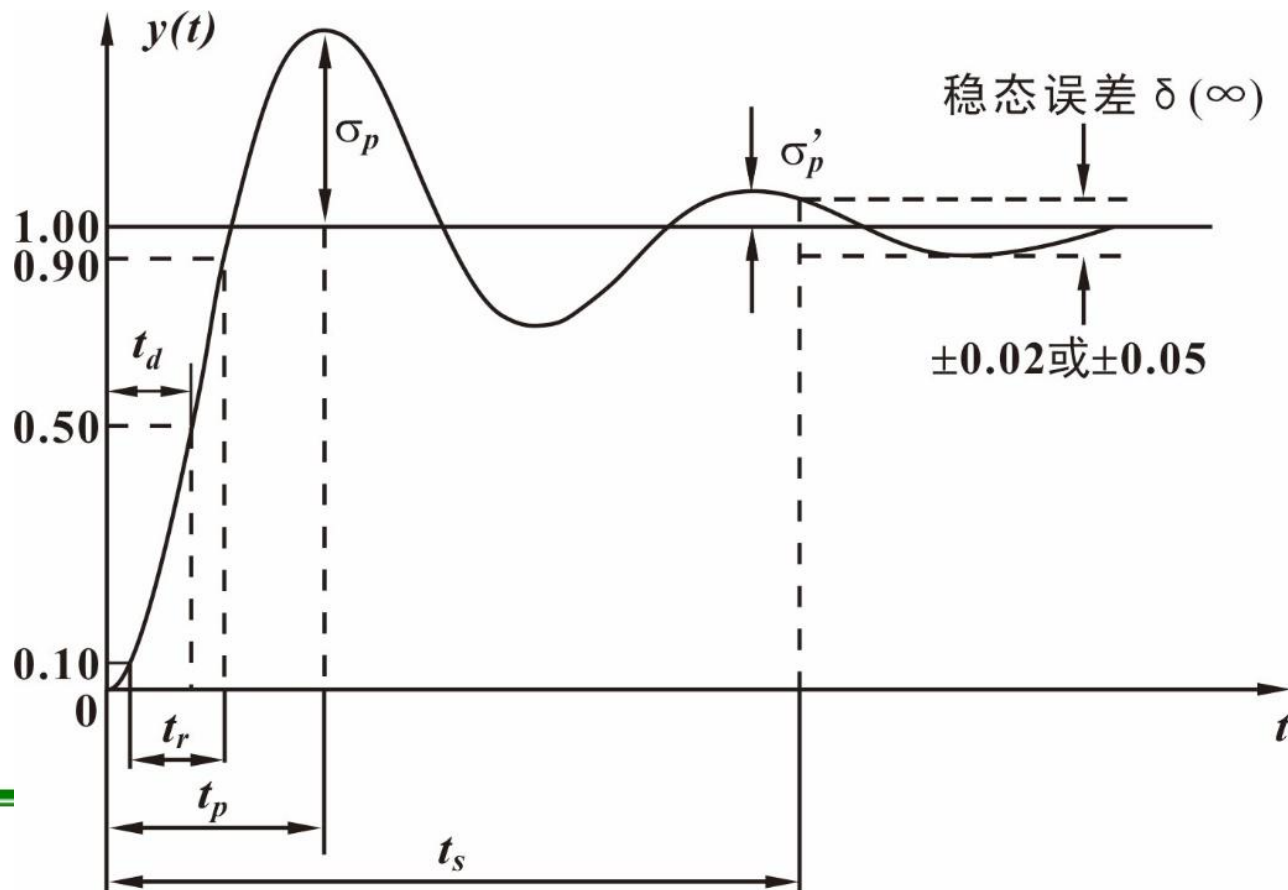
有振荡的系统常用“(3)”

无振荡的系统常用“(1)”



控制系统稳态误差与动态品质

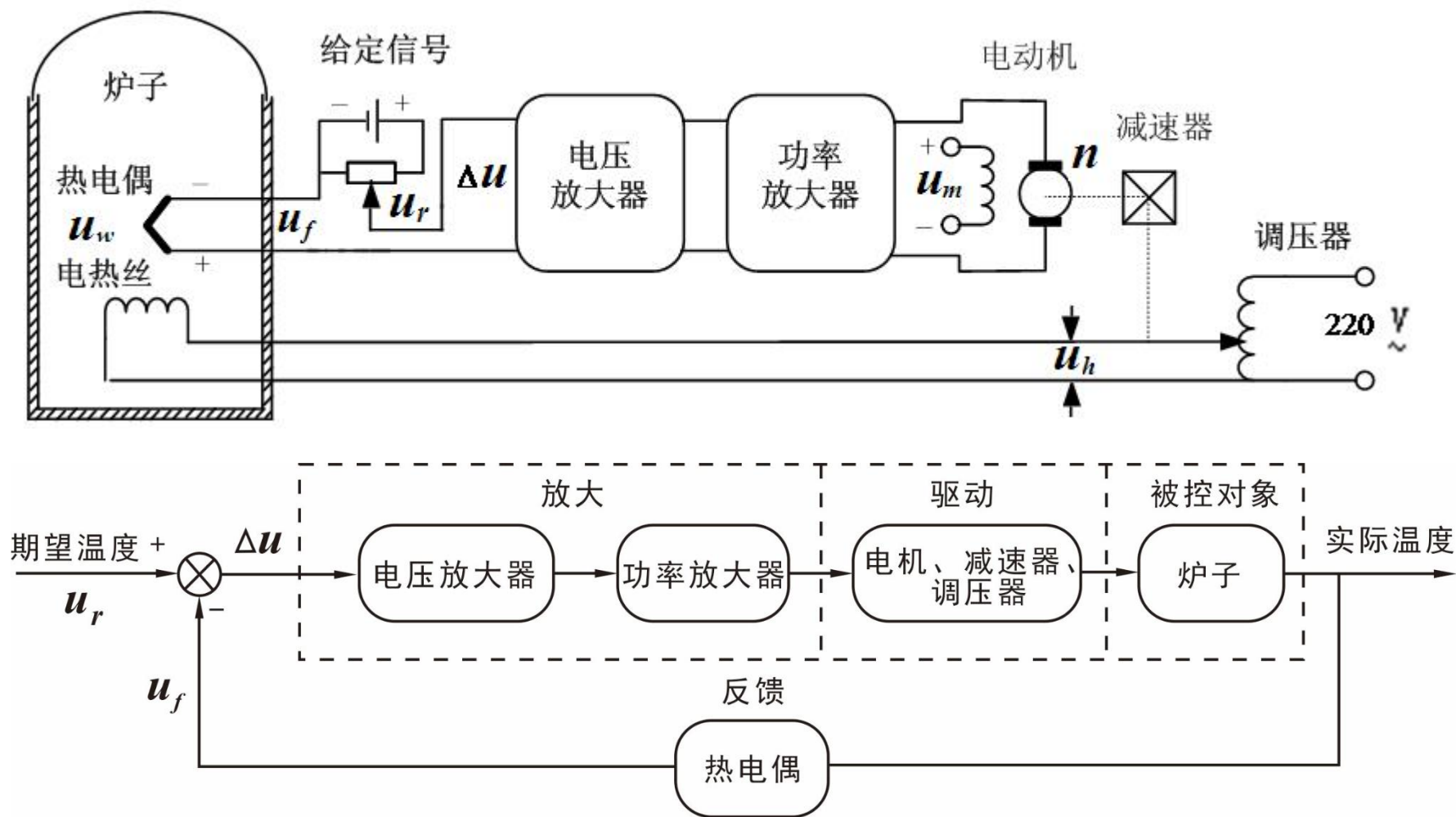
- 调整时间 t_s ——响应曲线从零开始到进入稳态值的95%~105% (或98%~102%) 误差带所需要的时间。



三、线性控制系统的微分方程模型



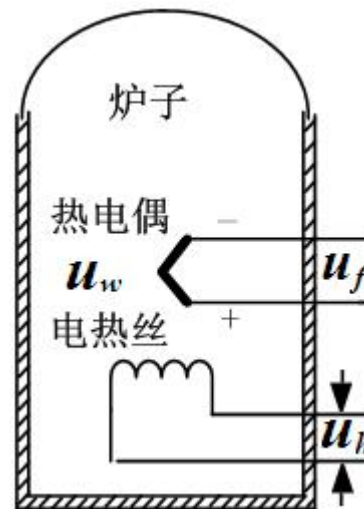
以炉温控制系统为例



加热电炉的数学模型

□ 加热炉是常用的工业对象， $u_h(t)$ 为加热电压， $u_w(t)$ 为炉内温度。从热力学定律可以建立其基于机理的数学模型。

$$T_f \frac{d}{dt} u_w(t) + u_w(t) = k_f u_h(t)$$



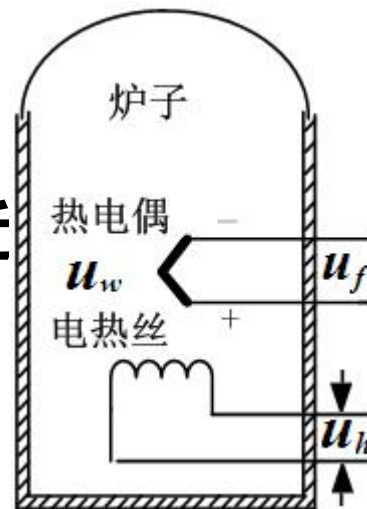
式中， $k_f u_h$ 为炉内温度 $u_w(t)$ 的稳态值； T_f 称为加热炉的时间常数，它与加热丝的质量、比热、传热系数和传热面积有关； k_f 系数与单位时间内加热丝产生的热量和加热的电压有关。



加热电炉的数学模型

- 如果**加热炉有滞后** τ , 从 $t \geq \tau$ 以后的曲线才可以由一个时间常数 T_f 的指数曲线来逼近

$$T_f \frac{d}{dt} u_w(t) + u_w(t) = k_f u_h(t - \tau)$$



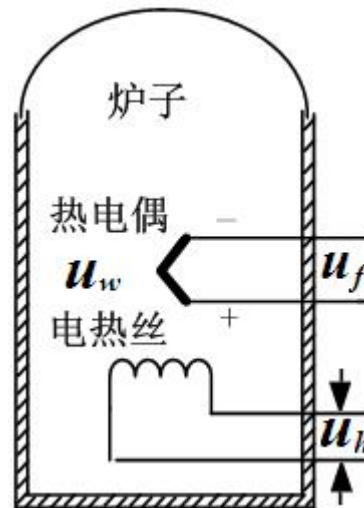
式中, $k_f u_h$ 为炉内温度 $u_w(t)$ 的稳态值; T_f 称为**加热炉的时间常数**, 它与加热丝的质量、比热、传热系数和传热面积有关; k_f **系数**与单位时间内加热丝产生的热量和加热的电压有关。



加热电炉的数学模型

- **加热电炉的数学模型**：通过理论分析或曲线拟合，加热炉对抗扰动的数学模型，可以用下面的微分方程来描述。

$$T_f \frac{d}{dt} u_w(t) + u_w(t) = -k_1 d_1(t - \tau) + k_2 d_2(t - \tau)$$



式中 $d_1(t)$ 和 $d_2(t)$ 分别表示**加入冷工件**（或环境温差的变动）和**调压器工频电源的波动**引起的相应扰动。 $u_w(t)$ 为扰动所引起的炉膛温度的变动。 k_1, k_2 前端的正负符号表示扰动的加入，会引起炉温的升高（正号）或降低（负号）。



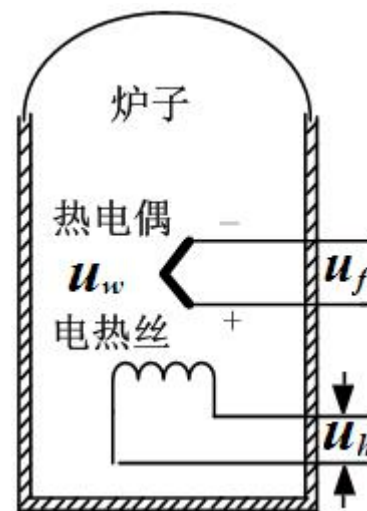
加热电炉的数学模型

- **加热电炉的数学模型**：一个完整的电加热炉的微分方程，应该包括加热炉对加热电压和扰动的响应，在 $\tau \neq 0$ 时应该是：

$$T_f \frac{d}{dt} u_w(t) + u_w(t) = k_f u_h(t - \tau) - k_1 d_1(t - \tau) + k_2 d_2(t - \tau)$$

在 $\tau \approx 0$ 时

$$T_f \frac{d}{dt} u_w(t) + u_w(t) = k_f u_h(t) - k_1 d_1(t) + k_2 d_2(t)$$

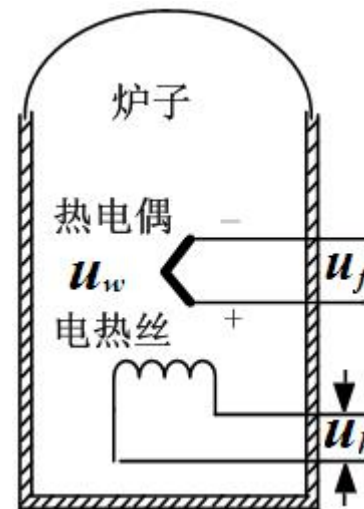


加热电炉的数学模型

- **热电偶的数学模型**：由于加热电炉的温度是借助于热电偶测量的，所以加热电炉温度响应的记录曲线其中包括热电偶的响应在内。但热电偶的响应很快，由实验方法测得它的数学模型为

$$T_c \frac{du_f(t)}{dt} + u_f(t) = k_c u_w(t)$$

式中， $u_w(t)$ 是真正的加热电炉炉内温度，而 $u_f(t)$ 是热电偶所产生的电动势（代表温度），**热电偶的时间常数** T_c 显著小于**加热炉的时间常数** T_f ，即 $T_c \ll T_f$ ，因此在这个控制系统中可以略去，成为

$$u_f(t) = k_c u_w(t)$$


放大器的数学模型

- **放大器的数学模型**：放大器是一个瞬时反应的无惯性元件，因此其模型为： $u_m(t) = k_a \Delta u(t)$



式中 $\Delta u(t)$ 为放大器输入的误差电压， $u_m(t)$ 为放大器输出电压。实际上，因为在放大器前接有改善闭环系统动态特性用的 RC （电阻-电容）微分装置，故放大器模型为

$$u_m(t) = k_a u_d(t)$$

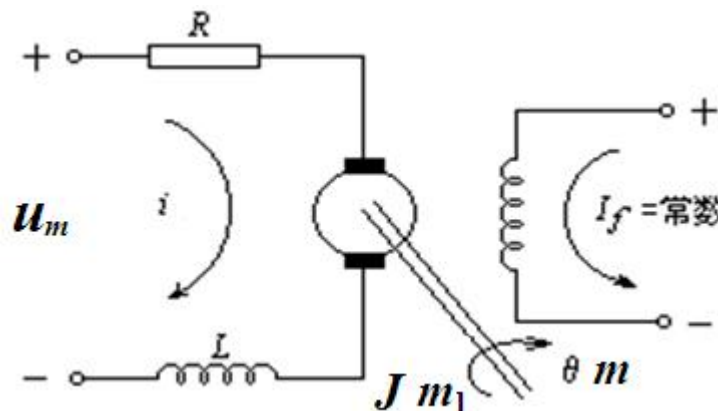
式中 $u_d(t)$ 为 RC 微分装置的输出电压，即进入放大器的输入电压。



电枢控制直流电动机的数学模型

□ 电枢控制直流电动机的数学模型：

设电机轴上**总转动惯量**（包括负荷） J 是常数，各种**机械转矩**全部归并到负载转矩 m_1 ，电枢反应忽略不计。电动机电枢回路的电阻、电感相应地全部归并到电枢总电阻 R 和总电感 L 。



电枢控制直流电动机的数学模型

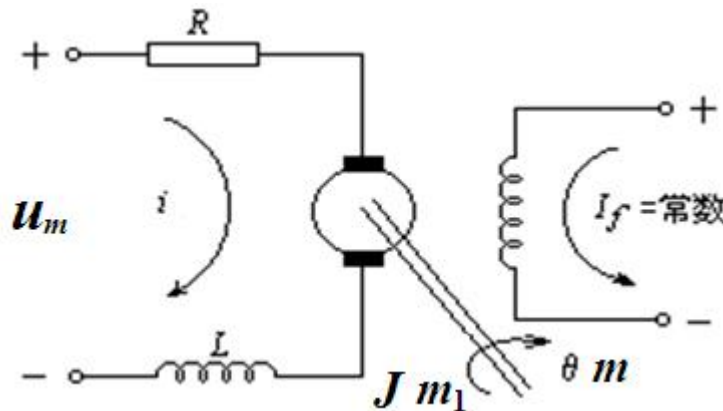
□ 电枢控制直流电动机的数学模型：
根据基尔霍夫定律、牛顿定律以及直流电动机特性，有

$$L \frac{di}{dt} + Ri + e = u_m$$

$$e = C_e \frac{d\theta}{dt}$$

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = m - m_1$$

$$m = C_m i$$



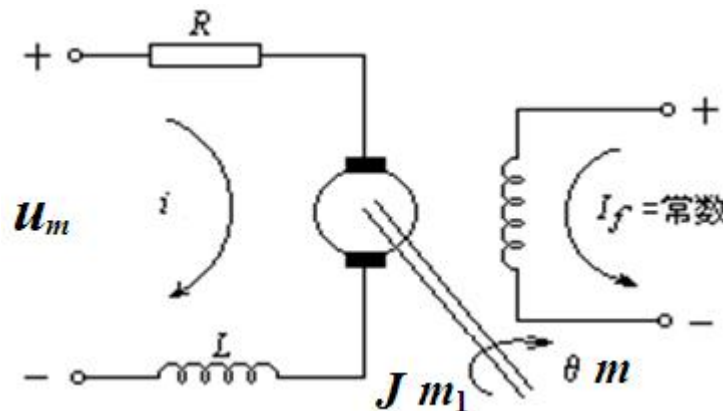
式中， i 为电枢电流； m 为电磁转矩； e 为电动机反电势； u_m 为电枢电压； C_e 为电势系数； C_m 为转矩系数； θ 为电动机的转角。



电枢控制直流电动机的数学模型

□ 电枢控制直流电动机的数学模型：

消去中间变量 i , e , m , 经整理
得到以转角 θ 为输出量时电枢
控制下直流电动机的数学模型



$$T_m T_1 \frac{d^3 \theta}{dt^3} + T_m \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = k_e u_m - k_m \left(T_1 \frac{dm_1}{dt} + m_1 \right)$$

式中, $T_m = \frac{RJ}{C_e C_m}$ 称为电动机机电时间常数; $T_1 = \frac{L}{R}$ 称为电动机的电磁时间常数; $k_e = 1/C_e$ 为电枢电压作用系数; $k_m = \frac{R}{C_e C_m}$ 为负载转矩作用系数。上式表示转角受到电枢电压和负载转矩的作用。



电枢控制直流电动机的数学模型

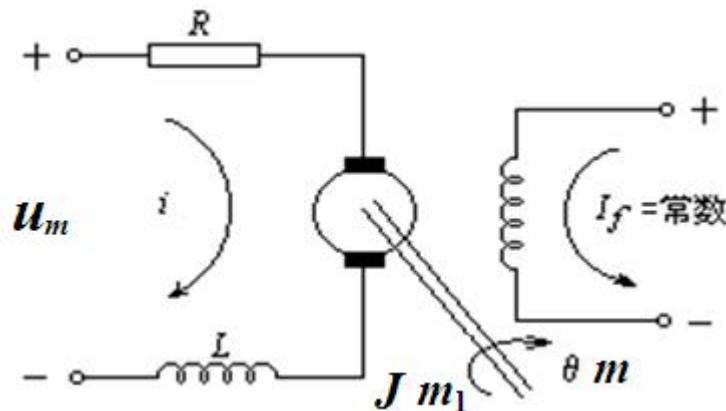
□ 电枢控制直流电动机的数学模型：

负载转矩可认为是常数，可略去，
因为数学模型研究的是电枢电压
变动对电动机转角变动的的作用，
成为增量形式。故直流电动机连

同调压器的动态数学模型最后为：

在系统中可以认为加热电压正比
于电动机的转角， $u_h = k_h \theta$ ，则：

电动机的电磁常数 T_1 与机电时间
常数 T_m 相比，常常可以忽略。故：



$$T_m T_1 \frac{d^3 \theta}{dt^3} + T_m \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = k_e u_m$$

$$T_m T_1 \frac{d^3 u_h}{dt^3} + T_m \frac{d^2 u_h}{dt^2} + \frac{du_h}{dt} = k_h k_e u_m$$

$$T_m \frac{d^2 u_h}{dt^2} + \frac{du_h}{dt} = k_h k_e u_m$$



炉温自动控制系统的数学模型

□ 描述控制系统动态响应的线性常系数微分方程：

在炉温自动控制系统中共有以下4个元件的微分方程和比较环节方程 $\Delta u(t) = u_r(t) - u_f(t)$ ，这里滞后 $\tau \approx 0$ 。在这5个方程中要消去中间变量，最后得到**以给定炉温 $u_r(t)$ 为输入，以实际炉温 $u_w(t)$ 为输出的3阶微分方程**（负载转矩认为不变）：

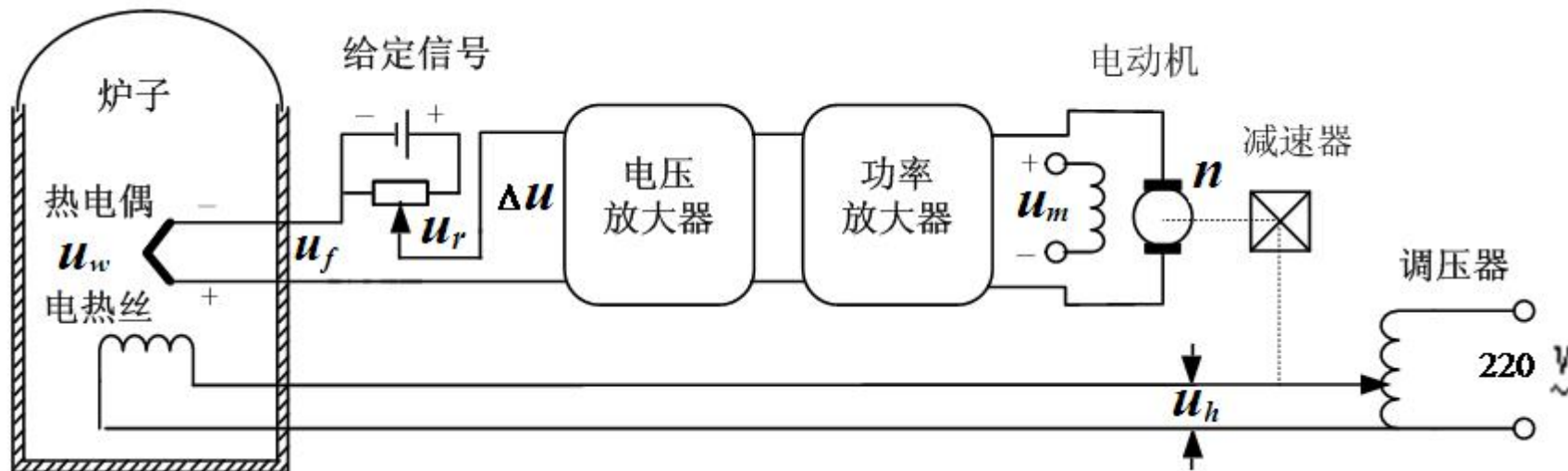
$$T_m T_f \frac{d^3 u_w(t)}{dt^3} + (T_m + T_f) \frac{d^2 u_w(t)}{dt^2} + \frac{du_w(t)}{dt} + k_a k_f k_h k_e k_c u_w(t) = k_a k_f k_h k_e u_r(t)$$

上式是描述当给定炉温 $u_r(t)$ 突然加上炉温自动控制系统时，实际炉温 $u_w(t)$ 响应的微分方程式。



炉温自动控制系统数学模型

□ 描述控制系统动态响应的线性常系数微分方程：



$$T_m T_f \frac{d^3 u_w(t)}{dt^3} + (T_m + T_f) \frac{d^2 u_w(t)}{dt^2} + \frac{du_w(t)}{dt} + k_a k_f k_h k_e k_c u_w(t) = k_a k_f k_h k_e u_r(t)$$

上式是描述当给定炉温 $u_r(t)$ 突然加上炉温自动控制系统时，
实际炉温 $u_w(t)$ 响应的微分方程式。



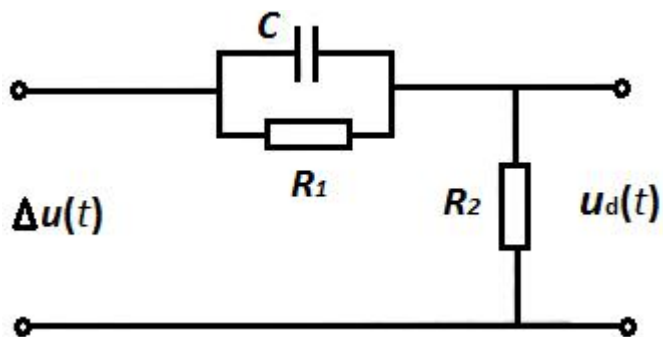
炉温自动控制系统数学模型

□ 引入微分装置线性常系数微分方程：

对自动控制系统必要时要在控制规律中引入微分作用以抑制振荡。这称为**镇定 (stabilization)**。校正装置就起这样的作用。

RC 微分装置的数学模型

由电阻器 R 、电容器 C 组成 RC 微分装置，是在炉温自动控制系统中常用的校正装置。它接在放大器的前端成串级状，其输入是误差 $\Delta u(t)$ ，输出是 $u_d(t)$ 。现推导其数学模型如下。



炉温自动控制系统的数学模型

□ 引入微分装置线性常系数微分方程：

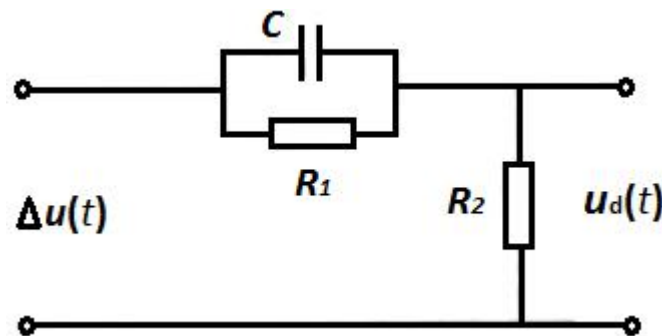
根据电路原理中基尔霍夫定律，可将RC微分装置方程写出如下。设电阻器 R_1 流经电流为 i_1 ，电容器 C 流经电流为 i_2 ，则

$$\Delta u(t) = i_1 R_1 + (i_1 + i_2) R_2 = i_1 R_1 + u_d(t)$$

$$i_1 R_1 = \frac{1}{C} \int i_2 dt$$

在上式中消去电流 i_1 和 i_2 ，可得下列描述其动态行为的微分方程

$$\alpha T_d \frac{d}{dt} u_d(t) + u_d(t) = \alpha \left(T_d \frac{d}{dt} \Delta u(t) + \Delta u(t) \right), \quad (0 < \alpha < 1)$$

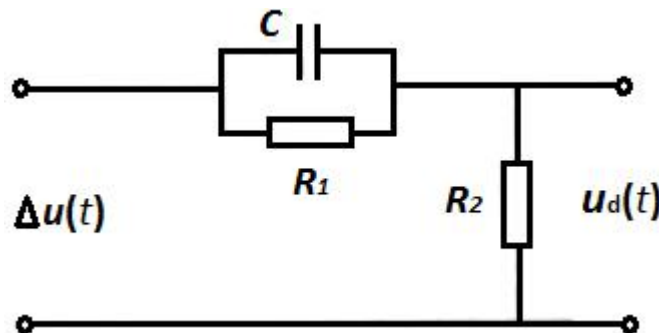


炉温自动控制系统数学模型

□ 引入微分装置线性常系数微分方程：

式中 $T_d = R_1 C$ 为微分装置的时间常数， $\alpha = R_2 / (R_1 + R_2)$ 。如果选电阻 R_2 相比 R_1 很小，则

$$u_d(t) \approx \alpha \left(T_d \frac{d}{dt} \Delta u(t) + \Delta u(t) \right)$$



输出 $u_d(t)$ 近似比例于输入 $\Delta u(t)$ 和它的微分。而微分量所占的比例由时间常数 T_d 决定， α 越小，上式越逼近等式。但给出的 $u_d(t)$ 信号越小，后接放大器需要越大的放大倍数。



炉温自动控制系统数学模型

□ 描述控制系统动态响应的线性常系数微分方程：

将微分装置接入原炉温控制系统，这时，共有以下5个元件的微分方程和比较环节方程 $\Delta u(t) = u_r(t) - u_f(t)$ 。在这5个方程中消去中间变量，最后得到一个以给定 $u_r(t)$ 为输入，以炉温 $u_w(t)$ 为输出的4阶微分方程（负载转矩认为不变）如下

$$\begin{aligned} & \alpha T_d T_m T_f \frac{d^4 u_w(t)}{dt^4} + (\alpha T_d T_m + \alpha T_d T_f + T_m T_f) \frac{d^3 u_w(t)}{dt^3} \\ & + (\alpha T_d + T_m + T_f) \frac{d^2 u_w(t)}{dt^2} + (1 + \alpha k_a k_f k_h k_e k_c T_d) \frac{du_w(t)}{dt} \\ & + \alpha k_a k_f k_h k_e k_c u_w(t) \\ & = \alpha k_a k_f k_h k_e T_d \frac{du_r(t)}{dt} + \alpha k_a k_f k_h k_e u_r(t) \end{aligned}$$



五、线性控制系统时间域研究法



控制系统时间域研究法

- 控制系统的稳定性、稳态精度、动态品质要求，都可以通过求解描述系统的微分方程而获得结果。
- 时间域(time domain)研究法：主要就是根据描述系统的微分方程，直接求解在典型输入 $u(t)$ (或扰动 $d(t)$) 作用下系统输出 $y(t)$ 关于时间 t 变化的表达式（微分方程的解）。然后根据此表达式或其相应的描述曲线来分析、鉴别系统的稳定性、稳态精度和动态品质等。



控制系统时间域研究法

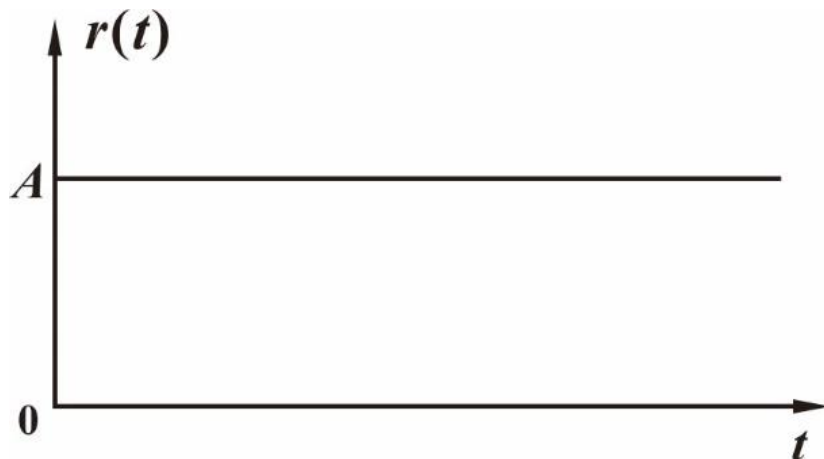
□ 典型输入函数 $u(t)$

(一) 阶跃信号

阶跃信号表示系统输入的突然加上或负载的突然变动，其表达式为：

$$r(t) = \begin{cases} A & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

当 $A=1$ 时，则称为单位阶跃信号，常用 $1(t)$ 表示。



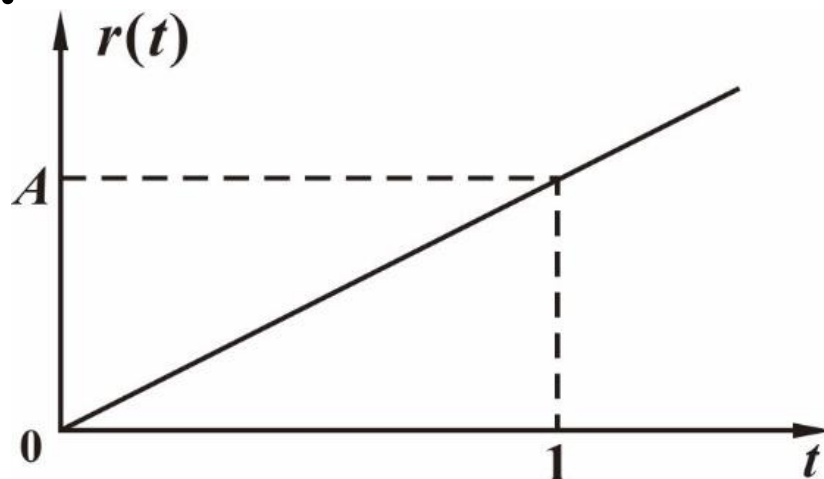
控制系统时间域研究法

□ 典型输入函数 $u(t)$

(二) 斜坡信号

也叫等速度信号。斜坡信号在 $t=0$ 时为零，并随时间线性增加。它等于阶跃信号对时间的积分，而它对时间的导数就是阶跃信号。斜坡信号的表达式为：

$$r(t) = \begin{cases} At & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

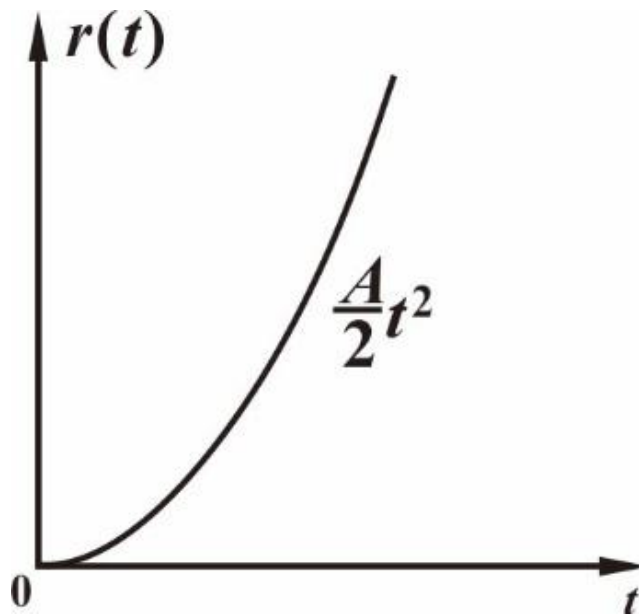


控制系统时间域研究法

□ 典型输入函数 $u(t)$ (三) 抛物线信号

也叫等加速度信号。它可以通过对斜坡信号的积分而得。
当 $A=1$ 时，则称为单位抛物线信号。抛物线信号的表达式为：

$$r(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} A t^2 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$



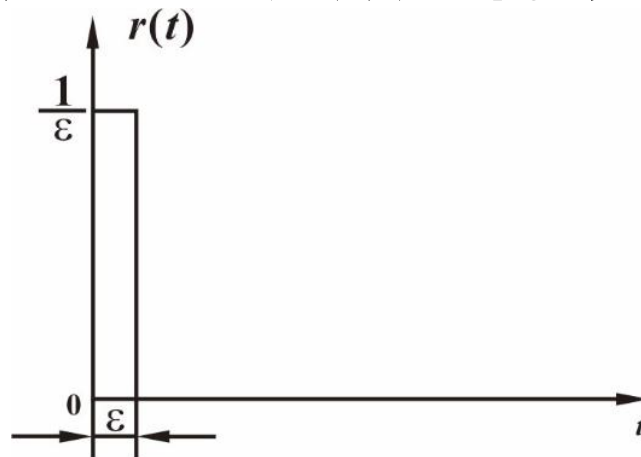
控制系统时间域研究法

□ 典型输入函数 $u(t)$

(四) 脉冲信号

单位脉冲信号是一宽度为 ε , 高度为 $1 / \varepsilon$ 的矩形脉冲。其表达式为：

$$r(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & 0 < t < \varepsilon \\ 0 & t < 0 \text{ 及 } t > \varepsilon \end{cases}$$



当 ε 趋于零时就得理想的单位脉冲信号(亦称 $\delta(t)$ 函数), 以表示生产负载的瞬间冲击性突变, 如飞剪的极短时剪切加工。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$



控制系统时间域研究法

□ 典型输入函数 $u(t)$

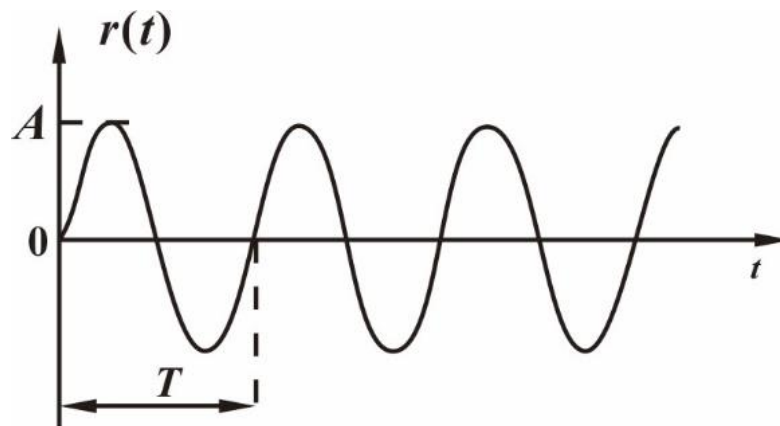
(五) 正弦信号

正弦信号的表达式为：

$$r(t) = \begin{cases} A \sin \omega t & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

其中 A 为幅值，

$\omega = 2\pi/T$ 为角频率。



控制系统时间域研究法

□ 微分方程的求解

- 线性常系数微分方程的解是由微分方程的一个**特解**，加上其齐次微分方程的**通解**这两部分组成。
- 通常取系统的稳态解作为特解。而其齐次微分方程的通解称为暂态解。
- 作为简略复习，以一个简单控制系统的2阶微分方程为例。



控制系统时间域研究法

□ 微分方程的求解

例：一个简单的控制系统的2阶微分方程

$$0.01 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 0.25 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

设输入 $u(t)$ 是单位阶跃函数 $1(t)$ ，由观察得到微分方程的

一个**特解**（取稳态解）：
$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = u(\infty) = 1$$

其齐次微分方程**通解**的求取，则要先求解齐次微分方程的

特征方程式：
$$0.01\lambda^2 + 0.25\lambda + 1 = 0$$

求得根： $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = -20$



控制系统时间域研究法

□ 微分方程的求解

于是，控制系统的2阶微分方程的通解有如下形式

$$y(t) = 1 + A_1 e^{-5t} + A_2 e^{-20t}$$

通过已知初始条件，如 $y(0) = 0, y'(0) = 0.05$ ，则解出

$$A_1 = -1.33, A_2 = 0.33$$

控制系统的2阶微分方程的全解为：

$$y(t) = 1 - 1.33e^{-5t} + 0.33e^{-20t}$$



控制系统时间域研究法

□ 微分方程的求解—系统稳定性

$$y(t) = 1 - 1.33e^{-5t} + 0.33e^{-20t}$$

- 微分方程特解用来描述系统的新的稳态，而其通解（暂态解）决定系统能否运动至原稳态附近新的稳态，或恢复到原稳态。
- 如果特征根是负数或具有负实部的复数，则线性控制系统能恢复到原稳态（或附近），换言之，系统是稳定的；否则就是不稳定的。



控制系统时间域研究法

□ 炉温自动控制系统微分方程的求解

□ 加热电炉温度自动控制系统，设电炉的滞后 τ 很小，可以不计，在没有校正装置的情况下，有如下3阶微分方程

$$T_m T_f \frac{d^3 u_w(t)}{dt^3} + (T_m + T_f) \frac{d^2 u_w(t)}{dt^2} + \frac{du_w(t)}{dt} + k_a k_f k_h k_e k_c u_w(t) = k_a k_f k_h k_e u_r(t)$$

□ 从上式不带微分项的两项可看出，在稳态时 $k_c u(\infty) = u_r(\infty)$ ，
即系统是无差的。代入参数

则得 $T_r = 30, T_m = 0.5, k_a = 250, k_f = 0.1, k_h = 1, k_c = 0.1, k_e = 1$

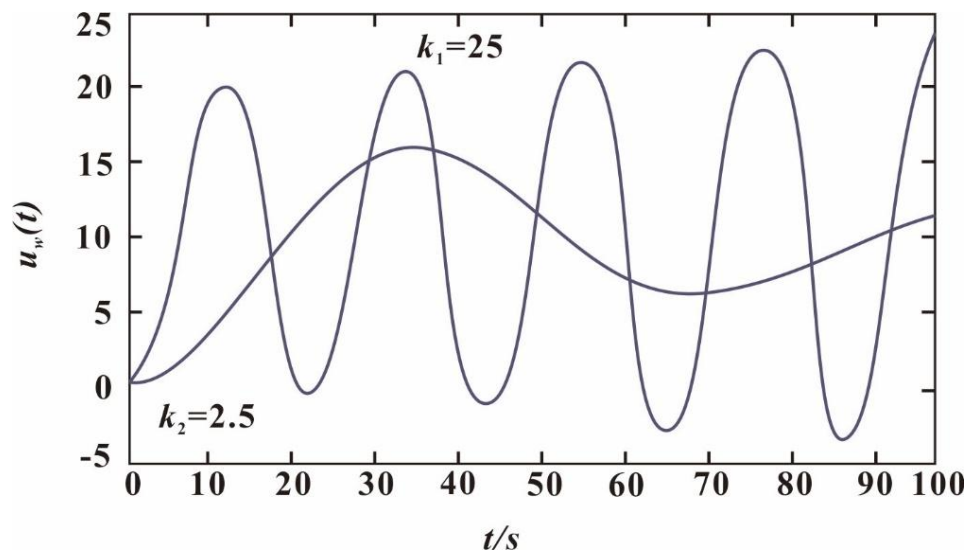
$$15 \frac{d^3 u_w(t)}{dt^3} + 30.5 \frac{d^2 u_w(t)}{dt^2} + \frac{du_w(t)}{dt} + 2.5 u_w(t) = 25 u_r(t)$$



控制系统时间域研究法

□ 炉温自动控制系统的微分方程的求解

加热炉温度在单位阶跃输入作用 $u_r(t) = 1(t)$ 激励下。解的上升曲线 $u_w(t)$ 如右图中曲线 $k_1 (= k_a k_f) = 25$ 所示, $u_w(t)$ 曲线呈发散振荡状。这表明, 加热电炉温度自动控制系统是不稳定的。



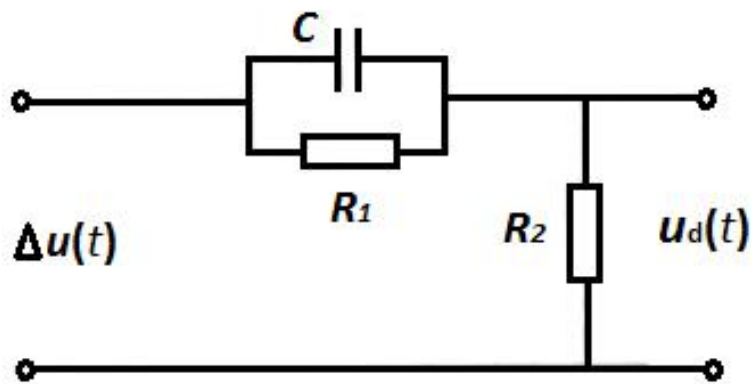
控制系统时间域研究法

□ 炉温自动控制系统的微分方程的求解

为此，必须将 RC 微分装置接入在放大器之前，设置参数。

这时，由于 RC 微分装置将系数放大倍数降为1/10，故提高放大器的放大倍数10倍，使 $k_a k_f = 250$ ，得到系统的四阶

微分方程如下
$$15 \frac{d^4 u_w(t)}{dt^4} + 45.5 \frac{d^3 u_w(t)}{dt^3} + 31.5 \frac{d^2 u_w(t)}{dt^2} + 3.5 \frac{du_w(t)}{dt} + 0.25 u_w(t) = 25 \frac{du_r(t)}{dt} + 2.5 u_r(t)$$



控制系统时间域研究法

□ 炉温自动控制系统的微分方程的求解

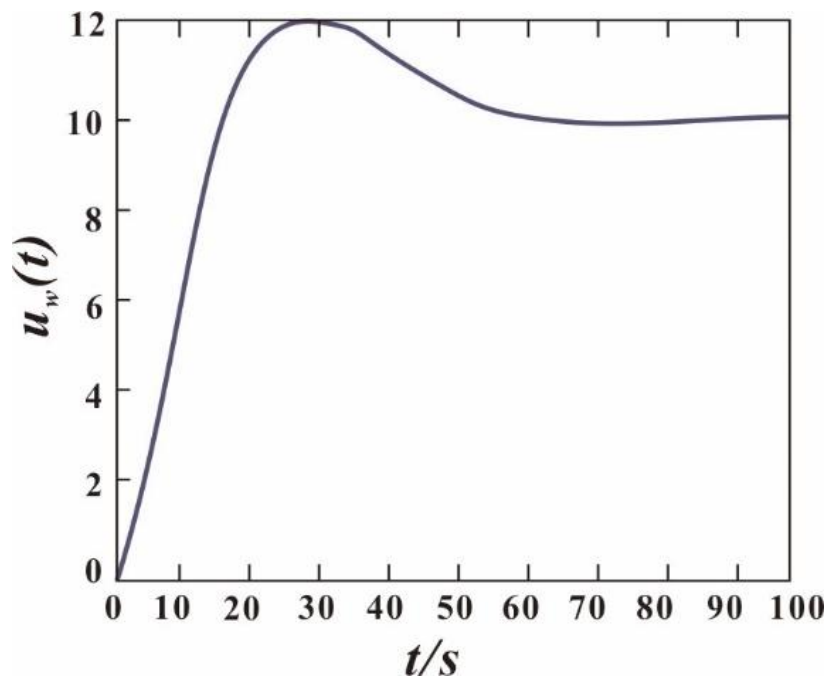
$$\begin{aligned} & 15 \frac{d^4 u_w(t)}{dt^4} + 45.5 \frac{d^3 u_w(t)}{dt^3} + 31.5 \frac{d^2 u_w(t)}{dt^2} + 3.5 \frac{du_w(t)}{dt} + 0.25 u_w(t) \\ &= 25 \frac{du_r(t)}{dt} + 2.5 u_r(t) \end{aligned}$$

它的解给出单位阶跃输入 $u_r(t) = 1(t)$

作用下的上升曲线 $u_w(t)$ 如右图。

超调量为18%，振荡次数为5次。

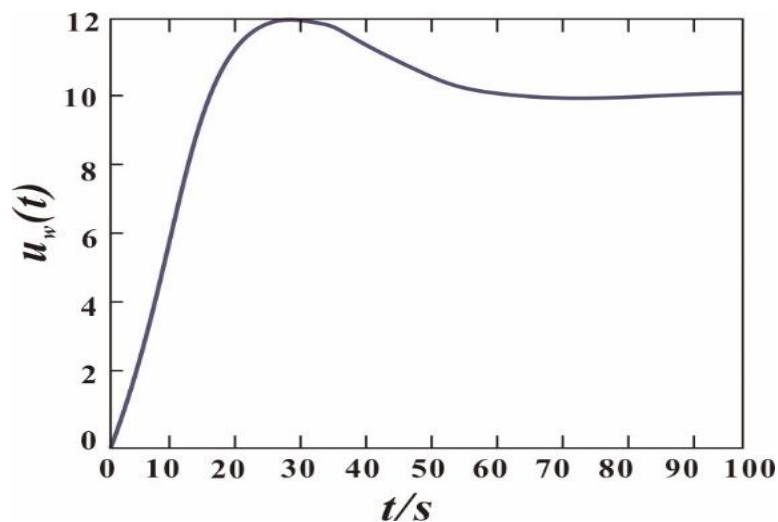
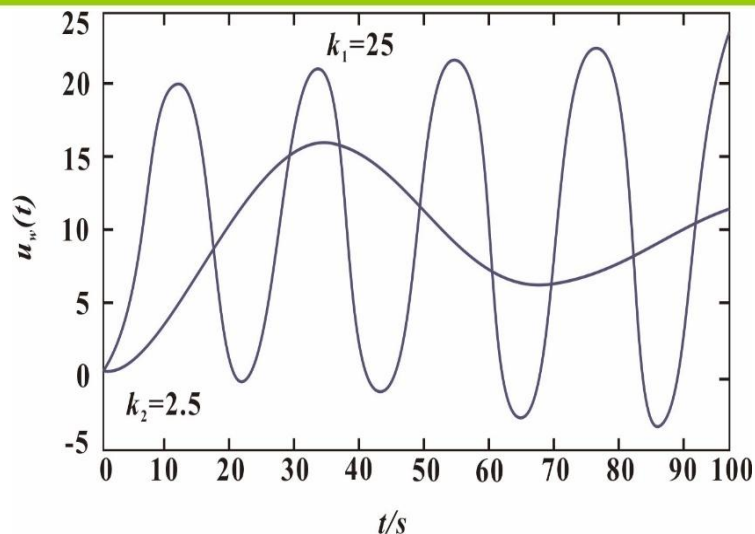
调节时间为99.9s。且系统是无差的。



控制系统时间域研究法

□ 炉温自动控制系统的微分方程的求解

如果在没有 RC 微分装置时降低放大器的放大倍数 $k_a = 25$, 则系统是稳定的, 其 $u_w(t)$ 如右图中曲线 $k_2 (= k_a k_f) = 2.5$ 所示。此时, 超调量为60%, 振荡次数为5次, 调节时间为500s。但调解过程的动态品质要比接用微分装置时下降很多, 这显示出校正装置 (微分装置) 的功能。



控制系统时间域研究法

- 线性定常控制系统稳定的充分必要条件：
 - 系统微分方程特征方程式的所有根是负实数或是具有负实部的共轭复数。这样，对线性控制系统稳定性的研究，归结为要判断闭环系统微分方程的特征根是否是负实数或具有负实部。
 - 能否用特征方程的系数来判断特征方程式根的性质？数学家E.劳思提出代数形式的判据，来判断特征方程式根的性质。



控制系统时间域研究法

□ 劳思的代数稳定判据

先按降次幂列出闭环控制系统的特征方程式

$$D(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

然后根据特征方程式的系数构造劳思阵列（也叫劳思表格）

λ^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	\cdots
λ^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	\cdots
λ^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	\cdots
λ^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	\cdots
λ^{n-4}	d_1	d_2	d_3	d_4	\cdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
λ^2	e_1	e_2			
λ^1	f_1				
λ^0	a_0				



控制系统时间域研究法

□ 劳思的代数稳定判据

阵列中第一行和第二行的元素可按照特征方程式的系数直接填写。从第三行起，各元素按下列公式计算

$$b_1 = \frac{- \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}, b_2 = \frac{- \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}, b_3 = \frac{- \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}, \dots$$

$$c_1 = \frac{- \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}, c_2 = \frac{- \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}, c_3 = \frac{- \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1}, \dots$$

依次类推直到求出第 $n+1$ 行为止。

线性定常闭环控制系统稳定充分必要条件：微分方程特征方程式的系数均为正，以及劳思阵列中第一列的所有系数均为正。



控制系统时间域研究法

□ 劳思的代数稳定判据

例1. 闭环控制系统的特征方程式如下，试判断其稳定性。

$$D(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 12\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$$

解: 特征方程式的系数均为正
构造劳思阵列

λ^4	1	12	6
λ^3	6	11	
λ^2	61/6	6	
λ^1	455/6	0	
λ^0	6		

由于特征方程式的系数均为正，且第一列所有系数均为正，故该系统稳定。代数稳定判据还能方便地帮助决定系统稳定的特征方程中某一参数的范围。



控制系统时间域研究法

□ 劳思的代数稳定判据

例2. 分析系统参数对稳定性的影响

设有一单位反馈控制系统，其闭环控制系统的特征方程式为：

$$s^3 + 6s^2 + 5s + K = 0$$

试判断能使系统稳定的参数 K 的范围。



谢谢！

