第一类错误：弃真 $\alpha(\theta)$

第二类错误：取伪 $\beta(\theta)$

$\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} \alpha(\theta) \le \alpha$ 称为显著性 α 的检验

正态总体的假设检验

σ已知

$H_0: \mu=\mu_0 \ (\mu\le\mu_0) \Leftrightarrow H_1: \mu>\mu_0$

$H_0: \mu=\mu_0 \ (\mu\ge\mu_0) \Leftrightarrow H_1: \mu<\mu_0$

$H_0: \mu=\mu_0 \Leftrightarrow H_1: \mu\ne\mu_0$

σ未知

$H_0: \mu=\mu_0 \ (\mu\le\mu_0) \Leftrightarrow H_1: \mu>\mu_0$

$H_0: \mu=\mu_0 \ (\mu\ge\mu_0) \Leftrightarrow H_1: \mu<\mu_0$

$H_0: \mu=\mu_0 \Leftrightarrow H_1: \mu\ne\mu_0$

$u = \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{\mu=\mu_0}{\sim} N(0,1)$ $\quad D:\{x: \overline{x} > \mu_0 + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}$

$D: \{x: \overline{x} < \mu_0 - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}$

$D: \{|u|>c\} = \alpha \Rightarrow \alpha = 2(1-\Phi(c)) \Rightarrow D: \{u: |u| > u_{\frac{\alpha}{2}}\}$

$t = \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \overset{\mu=\mu_0}{\sim} t_{n-1}$ $\quad D: \{t: t > t_\alpha(n-1)\}$

$D: \{t: |t| > t_\alpha(n-1)\}$

μ已知：

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \Leftrightarrow H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 \\ H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \Leftrightarrow H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \\ H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \Leftrightarrow H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

令 $\chi^2 = \dfrac{\sum (X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_n^2$ $D=\{\chi^2 < \chi_{1-\alpha}^2(n)\}$

$D=\{\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)\}$

$D=\{\chi^2 > \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)\}, \{\chi^2 < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)\}$

μ未知：

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \Leftrightarrow H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 \\ H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \Leftrightarrow H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \\ H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \Leftrightarrow H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

令 $\chi^2 = \dfrac{\sum (X_i-\bar{X})^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{(n-1)}^2$

(卡方检验)

$D=\{\chi^2 > \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)\}, \{\chi^2 < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)\}$

两个正态总体

估计 μ_X 与 μ_Y

σ_X^2, σ_Y^2 已知

$H_0: \mu_X \geq \mu_Y \Leftrightarrow H_1: \mu_X < \mu_Y$

$$u = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n}} \sim N(0,1) \qquad D: \{ u < -u_\alpha \}$$

⋮

$H_0: \mu_X = \mu_Y \Leftrightarrow H_1: \mu_X \neq \mu_Y$

$$D: \{ |u| > u_{\frac{\alpha}{2}} \}$$

$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

用 $S_w^2 = \frac{1}{m+n-2}\left[\sum(X_i-\bar{X})^2 + \sum(Y_i-\bar{Y})^2\right]$ 代替 σ_X^2, σ_Y^2

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{S_w^2}{m} + \frac{S_w^2}{n}}} \sim t(m+n-2)$$

$H_0: \mu_X \geq \mu_Y \Leftrightarrow H_1: \mu_X < \mu_Y$

⋮

$H_0: \mu_X = \mu_Y \Leftrightarrow H_1: \mu_X \neq \mu_Y$ $\rightarrow$ $D: \{ |t| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n+m-2) \}$

像 正态 N, t 分布这种对称的,

单侧就是 $> u_\alpha$, $< -u_\alpha$, $> t_\alpha$ $< -t_\alpha$

双侧就是 $> u_{\frac{\alpha}{2}}$ $< -u_{\frac{\alpha}{2}}$

像 χ^2 这种不对称的

单侧: $> \chi_\alpha$, $< \chi_{1-\alpha}$

双侧 $> \chi_{\frac{\alpha}{2}}$, $< \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}$

P值

P值代表了原假设的荒谬程度，P值越小代表原假设越荒谬。

alpha值代表的显著性水平，或者说“最小荒谬接受值”

如果P<alpha,我们认为原假设比我们能接受的还荒谬，于是拒绝原假设；

相反，如果P>alpha，我们就接受原假设。

P值的计算：当原假设成立时，检验统计量比观测值更加离谱的概率。

从这个定义很好值观理解：就如果p值很小，说明在原假设成立的情况下，现在观测到的样本落到了所有可能发生域的边界（这应该很少发生，所以我们认为这是一个小概率事件），而我们认为：如果一个假设是正确的，就不会发生小概率事件，所以我们认为原假设不成立。

例3: 设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是来自$B(1,\theta)$的样本观测值,要检验如下(单侧)假设:

$$H_0: \theta \le \theta_0 \leftrightarrow H_1: \theta > \theta_0.$$

取检验统计量为$T(\widetilde{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$, 则拒绝域形式为$D = \{T(\widetilde{x}) \ge C\}$. 则在得到观测值$\sum_{i=1}^n x_i = t_0$后,我们只需要计算概率$p = \mathsf{P}_{\theta_0}\{\sum_{i=1}^n X_i \ge t_0\}$. 这就是检验的$p$值.