

2020.1.17 金融数学回忆卷

一、

证明欧式期权平价公式 $C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$ 。

构造一个组合，比如 $S+P=C+KV$ ，买入左边，卖空右边。可以验证它在 T 时刻的价值是 0，那么它在 0 时刻也是 0。

二、

随机计划 x 表示有 0.4 概率消费 6 个商品，0.6 概率消费 4 个商品，随机计划 y 表示有 0.8 概率消费 2 个商品，0.2 概率消费 4 个商品，则随机计划 $p = 0.2x + 0.8y$ 表示什么？

三、

1. 某股票当前价格 100 元，未来一年后可能上涨到 130 元，可能下跌到 90 元，某期权在股票价格上升时 $U = 10$ ，股票价格下跌时 $D = 0$ 市场无风险利率为 5%。使用博弈论方法为该期权定价。
2. 某股票当前价格 50 元，未来一年后可能上升到 55 元，可能下跌到 40 元，市场无风险利率 4%，为执行价格为 45 元的欧式看跌期权定价。

四、

1. 已知前沿资产 \tilde{r}_p ，可行资产 \tilde{r}_q ，市场无风险利率 r_f ，写出 $E(\tilde{r}_p)$ 和 $E(\tilde{r}_q)$ 的关系式。
2. 写出存在无风险资产的情况下的资本资产定价公式。

五、

1. 在什么情况下，含有无风险资产的前沿边界与不含有无风险资产的前沿边界相交？什么情况下不相交？
2. 若二者相交于非有效边界，在课本内列举的四种情况下，写出每种情况对应的投资策略。

六、

某股票 60 元，未来一年有可能上涨到 80 元，有可能下跌到 50 元，市场无风险利率 4%。

1. 为执行价格为 65 元的欧式看涨期权定价。
2. 某交易商出售期权价格为 6.35 元，购买期权价格 6 元，现在已经卖出该期权 100000 份，需要购买多少股票才能保证不论股票价格上涨还是下跌，都能获得 6250 元利润？这是否违背了无套利原理？

七、

已知两项资产收益率A, B。 $P(A = 0) = 0.25$, $P(A = 0.25) = 0.25$,
 $P(A = 0.5) = 0.1$, $P(A = 1) = 0.4$; $P(B = 0) = 0.3$, $P(B = 0.5) = 0.3$,
 $P(B = 1) = 0.4$ 。证明A一阶随机占优于B。

八、

已知市场有 $n + 1$ 种资产, 为 $S_i, 0 \leq i \leq n$, 其中 S_0 是无风险资产。各个资产具有期望收益率 $r_i, 0 \leq i \leq n$, 具有风险指标 $q_i, 0 \leq i \leq n$, 其中 $q_0 = 0$ 。投资每种资产资金为 x_i , 每种资产价格为1, 有交易费:

$$c_i(x_i) = \begin{cases} 0 & x_i = 0 \\ c_i u_i & 0 < x_i \leq u_i \\ c_i x_i & x_i > u_i \end{cases}$$

1. 写出风险最小、期望收益最大化的模型。
2. 写出模型最优解和可行解的含义。