

控制论

Cybernetics

授课教师：杨春节 教授

cjyang999@zju.edu.cn

浙江大学控制科学与工程学院



第七讲

工程控制论： 控制系统频域分析法



控制系统传递函数

- 16岁时进入开恩大学，在学习期间写了十篇关于有限差分的论文。完成学业之后，求见大名鼎鼎的达朗贝尔，达朗贝尔很高兴的当了他的教父，并介绍他去巴黎陆军学校任教授。
- 1773年被选为法国科学院副院长；1783年任军事考试委员，并于1785年主持对一个16岁的唯一考生进行考试，这个考生就是后来成为皇帝的拿破仑。



拉普拉斯,法国数学家和天文学家



控制系统传递函数

- 在席卷法国的政治变动中，包括拿破仑的兴起和衰落，都并未显著地影响他对科学的研究。他能慷慨帮助和鼓励年轻一代（数学家泊松、柯西等）。
- “我们知道的是微小的，我们不知道的是无限的。”
- “自然的一切结果都只是数目不多的一些不变规律的数学结论。”
- “**认识一位巨人的研究方法**，对于科学的进步，并不比发现本身更少用处。科学研究的方法经常是极富兴趣的部分。”



控制系统传递函数

□ 拉普拉斯变换

将时间函数 $f(t)$ 通过积分变换为一个新变量 s 的函数 $F(s)$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

式中，复变量 $s = \sigma + j\omega$ ， σ 是实变量部分， ω 是虚变量部分， $j = \sqrt{-1}$ 是虚函数。 $f(t)$ 和 $F(s)$ 互称变换的**原函数**和**象函数**。用运算符号将拉普拉斯变换式表示成：

$$F(s) = \mathcal{L} [f(t)]$$



控制系统传递函数

□ 拉普拉斯变换

研究控制系统动态过程所采用的典型输入信号**单位阶跃函数** $1(t)$ 和**单位冲激函数**都是可拉普拉斯变换的。

例. 单位阶跃函数 $1(t)$ 的象函数

$1(t)$ 定义为 $1(t) = 0, t < 0; 1(t) = 1, t \geq 0$, 则

$$\int_0^{\infty} 1(t)e^{-st} dt = \frac{1}{s} \quad \text{或} \quad L[1(t)] = \frac{1}{s}$$

例. 单位冲激函数 $\delta(t)$ 的象函数

$$\int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1 \quad \text{或} \quad L[\delta(t)] = 1$$



控制系统传递函数

常用函数的拉氏变换表

序号	拉氏变换 $E(s)$	时间函数 $e(t)$
1	1	$\delta(t)$
2	$\frac{1}{1-e^{-Ts}}$	$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT)$
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$
4	$\frac{1}{s^2}$	t
5	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$




控制系统传递函数

	6	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$
➡	7	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
	8	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}
➡	9	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$
	10	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$



控制系统传递函数

微分定理	一般形式	$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$ $L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$ \vdots $L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$ $f^{(k-1)}(t) = \frac{d^{k-1} f(t)}{dt^{k-1}}$
	 初始条件为 0 时	$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s)$



控制系统传递函数

□ 拉普拉斯反变换

由拉普拉斯变换的象函数 $F(s)$ 求取原函数 $f(t)$ 的数学运算，称为**拉普拉斯反变换**，它是通过下述积分运算实现的。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{st} dt$$

或

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)]$$

拉普拉斯变换的原函数 $f(t)$ 和象函数 $F(s)$ 是一一对应的，而象函数 $F(s)$ 经过拉普拉斯反变换后得到原函数 $f(t)$ ；

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)] = \mathcal{L}^{-1} \mathcal{L} [f(t)] = f(t)$$



控制系统传递函数

为什么引入拉普拉斯变换？

拉普拉斯变换把一个用时间变量 t 所描述的物理过程**翻译**成用复变量 s 所描述的过程，这样的**翻译**并不影响物理过程本身的性质，只不过是把这个过程的描述从“ t 的语言”翻译成“ s 的语言”而已。在 t 的语言里用分析运算“微分或积分”所描述的过程，用 s 的语言来叙述就只要用简单的代数运算就可以了。 t 的语言里的微分方程就简化为代数方程，从而简化计算的手续和表达的方式。



控制系统传递函数

为什么引入拉普拉斯变换？

当我们用拉普拉斯变换法处理问题时，常常需要根据已知的象函数 $Y(s)$ 求出原函数 $y(t)$ 。我们可以利用反变换公式，但反变换公式中的积分运算常常很复杂；因此，对于那些常用的和典型的 $y(t)$ 和 $Y(s)$ ，人们已经编制了一些字典式的表格。利用这种变换表我们就可以根据已知的 $Y(s)$ 查出相应的 $y(t)$ ，也可以从已知的 $y(t)$ 查出相应的 $Y(s)$ ，这样就大大地减轻了计算量。



控制系统传递函数

□ 传递函数的概念

令 RC 电路中电容的端电压 $u_c(t)$ 。根据克希霍夫定律，可列写如下微分方程：

$$i(t)R + u_c(t) = u_r(t)$$

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

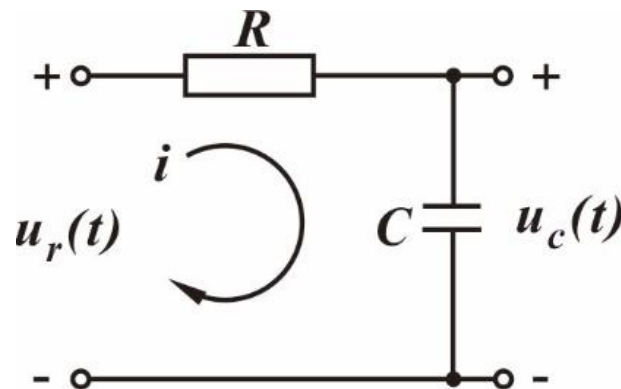


图. RC 电路

消去中间变量 $i(t)$ ，得到输入 $u_r(t)$ 与输出 $u_c(t)$ 之间的线性定常微分方程：

$$RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$



传递函数的概念

现在对上述微分方程两端进行拉氏变换，并考虑电容上的初始电压 $u_c(0)$ ，得：

$$RCsU_c(s) - RCu_c(0) + U_c(s) = U_r(s)$$

式中 $U_c(s)$ —— 输出电压 $u_c(t)$ 的拉氏变换；
 $U_r(s)$ —— 输入电压 $u_r(t)$ 的拉氏变换。

由上式求出 $U_c(s)$ 的表达式：

$$U_c(s) = \frac{1}{RCs + 1}U_r(s) + \frac{RC}{RCs + 1}u_c(0)$$

当输入为阶跃电压 $u_r(t) = u_0 \cdot 1(t)$ 时，对 $U_c(s)$ 求拉氏反变换，即得 $u_c(t)$ 的变化规律：



传递函数的概念

$$u_c(t) = u_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) + u_c(0)e^{-\frac{t}{RC}} \quad (1)$$

式中第一项称为**零状态响应**，
由 $u_r(t)$ 决定的分量；
第二项称为**零输入响应**，
由初始电压 $u_c(0)$ 决定的
分量。

右图表示各分量的变化曲线，
电容电压 $u_c(t)$ 即为两者的合成。

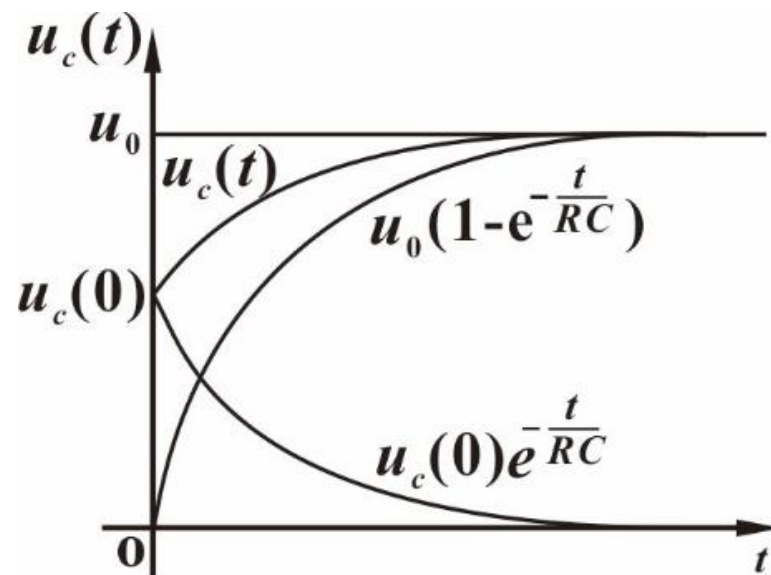


图. RC 网络的阶跃响应曲线



传递函数的概念

在式(1)中，如果把初始电压 $u_c(0)$ 也视为一个输入作用，则根据线性系统的叠加原理，可以分别研究在输入电压 $u_r(t)$ 和初始电压 $u_c(0)$ 作用时，电路的输出响应。若 $u_c(0)=0$ ，则有：

$$U_c(s) = \frac{1}{RCs + 1} U_r(s) \quad (2)$$

当输入电压 $u_r(t)$ 一定时，电路输出响应的拉氏变换 $U_c(s)$ 完全由 $1/(RCs+1)$ 所确定，式(2)亦可写为：

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{RCs + 1} \quad (3)$$

当初始电压为零时，电路输出响应的象函数与输入电压的象函数之比，是一个只与电路结构及参数有关的函数。



传递函数的概念

用式(3)来表征电路本身特性，称做**传递函数**，记为：

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

式中 $T=RC$ 。显然，传递函数 $G(s)$ 确立了电路输入电压与输出电压之间的关系。

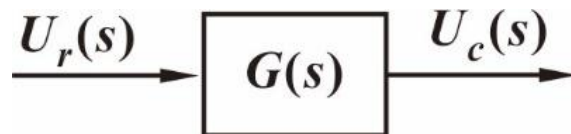


图. 传递函数

传递函数可用上图表示。该图表明了电路中电压的传递关系，即输入电压 $U_r(s)$ ，经过 $G(s)$ 的传递，得到输出电压 $U_c(s)=G(s)U_r(s)$ 。

传递函数定义： **线性（或线性化）定常系统在零初始条件下，输出量与输入量的拉氏变换之比称为传递函数。**



传递函数的概念

若线性定常系统由下述 n 阶微分方程描述：

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n}{dt^n} c(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} c(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} c(t) + a_0 c(t) \\ & = b_m \frac{d^m}{dt^m} r(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} r(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} r(t) + b_0 r(t) \end{aligned} \quad (4)$$

令 $C(s)=L[c(t)]$ ， $R(s)=L[r(t)]$ ，在初始条件为零时，对式(4)进行拉氏变换，可得到 s 的代数方程：

$$\begin{aligned} & [a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0] C(s) \\ & = [b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0] R(s) \end{aligned}$$



传递函数的概念

由传递函数的定义，由式(4)描述的线性定常系统的传递函数：

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{M(s)}{D(s)} \quad (5)$$

式中 $M(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0$ 为传递函数的分子多项式；
 $D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ 为传递函数的分母多项式。

传递函数是在初始条件为零（或称零初始条件）时定义的。
控制系统的**零初始条件**有两方面的含义：（1）**系统输入量及其各阶导数**在 $t=0$ 时的值均为零；（2）**系统输出量及其各阶导数**在 $t=0$ 时的值也为零。



传递函数的概念

一般的传递函数可以写成**零极点形式**如下：

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$

式中 k 为常数， $-z_1, \dots, -z_m$ 为传递函数分子多项式方程的 m 个根，称为传递函数的**零点**； $-p_1, \dots, -p_n$ 为分母多项式方程的 n 个根，称为传递函数的**极点**。



传递函数的概念

一般 z_i , p_i 可为实数 , 也可
为复数 , 且若为复数 , 必共轭
成对出现。将零、极点标在复
平面上 , 则得传递函数的**零极
点分布图** , 如右图所示。图中
零点用 “○” 表示 , 极点用
“* ” 表示。

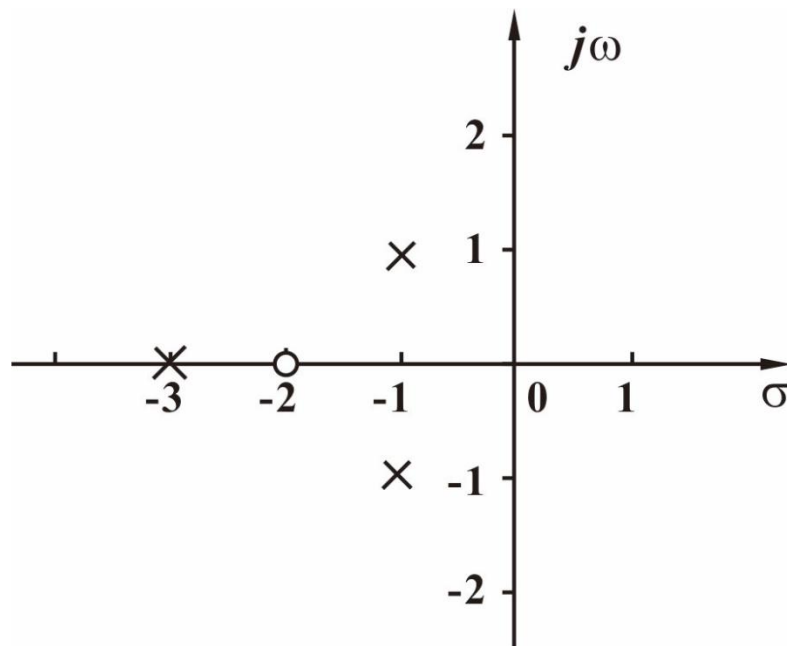


图. $G(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s^2+2s+2)}$

零极点分布图



传递函数的概念

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{M(s)}{D(s)}$$

若上面传递函数中 $s = 0$ ，则：

$$G(0) = \frac{b_0}{a_0}$$

常称为**传递系数**（或静态放大系数）。从微分方程式(4)看， $s=0$ 相当于所有导数项为零，方程蜕变为静态方程

$$a_0 c = b_0 r \quad \text{或} \quad c = \frac{b_0}{a_0} r$$

b_0/a_0 恰为输出输入时**静态比值**。

传递函数无法全面反映信号传递通路中的中间变量。多输入多输出系统各变量间的关系要用传递函数阵表示。



典型环节及其传递函数

控制系统从动态性能或数学模型来看可分成为以下几种基本环节，也就是典型环节。

(一) 比例环节

$$G(s) = K$$

输出量与输入量成正比，比例环节又称为**无惯性环节**或**放大环节**。

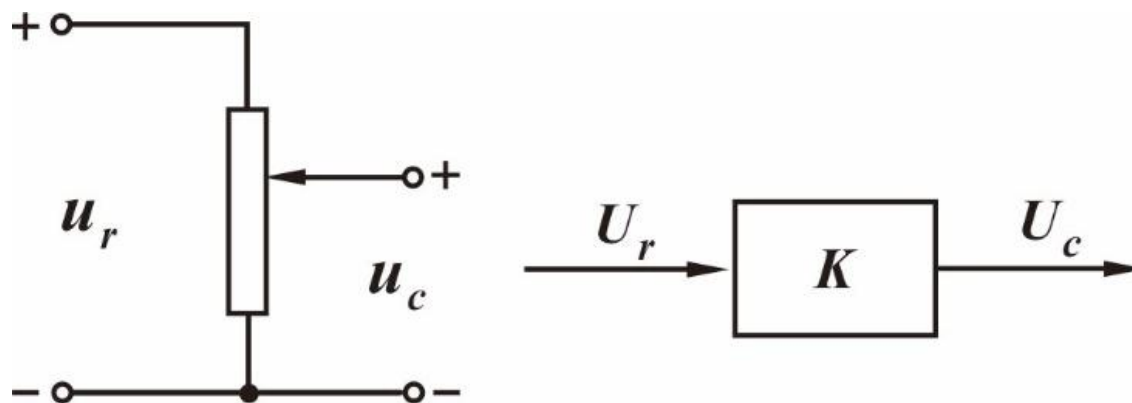


图. 比例环节

上图左所示为一电位器，输入量和输出量关系如上图所示。



典型环节及其传递函数

(二) 惯性环节

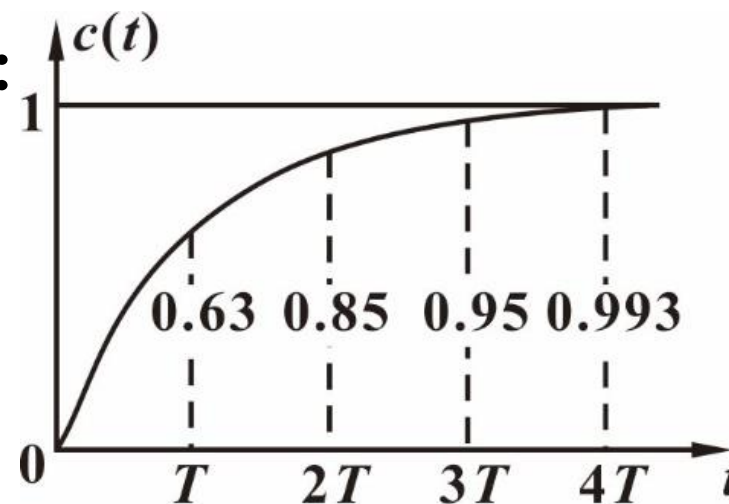
传递函数为如下形式的环节为惯性环节：

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

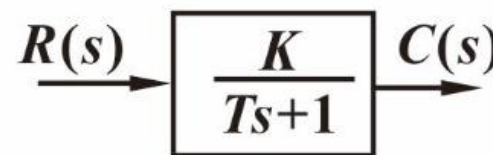
式中 K ——环节的比例系数；

T ——环节的时间常数。

当环节的输入量为单位阶跃函数时，环节的输出量将按**指数曲线**上升，具有惯性，如右图(a)所示。



(a) 单位阶跃响应曲线



(b) 方框图

图. 惯性环节



典型环节及其传递函数

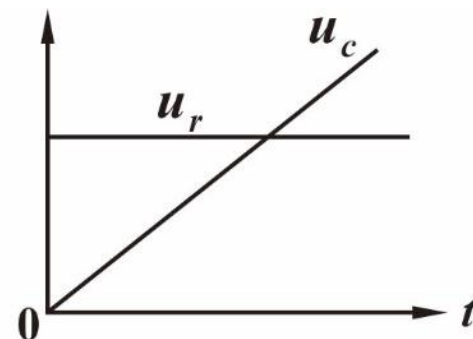
(三) 积分环节

它的传递函数为:

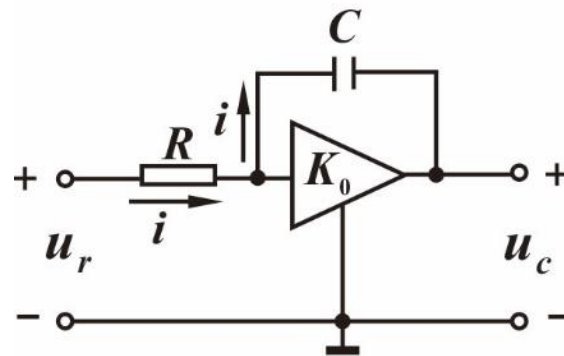
$$G(s) = \frac{1}{Ts}$$

当积分环节的输入为单位阶跃函数时, 则输出为 t/T , 它随着时间直线增长。 T 称为**积分时间常数**。 T 很大时惯性环节的作用就近似一个积分环节。

右图(b)为积分调节器。积分时间常数为 RC 。



(a) 阶跃响应曲线



(b) 线路图

图. 积分环节



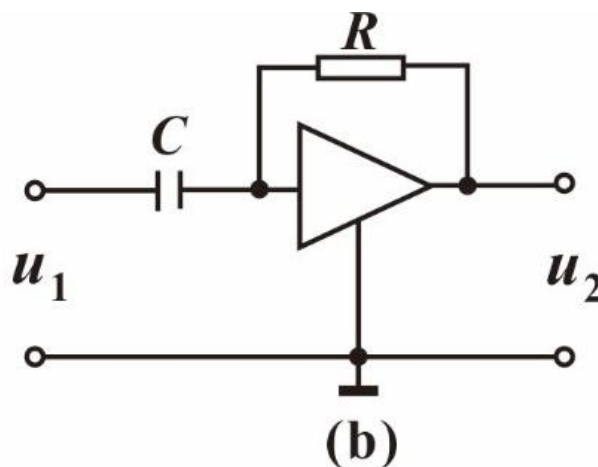
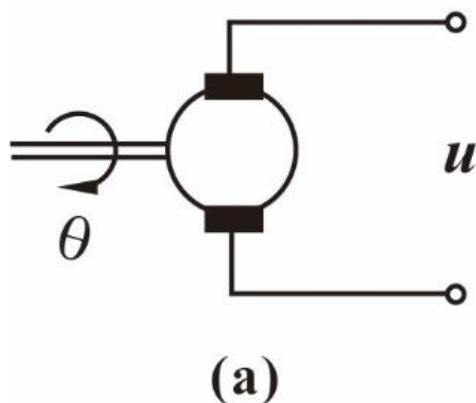
典型环节及其传递函数

(四) 微分环节

理想微分环节传递函数为:

$$G(s) = Ts$$

输入是单位阶跃函数 $1(t)$ 时, 理想微分环节的输出为 $c(t)=T\delta(t)$, 是个脉冲函数。理想微分环节的实例示于下图(a)、(b)。(a)为测速发电机。图中(b)为微分运算放大器。

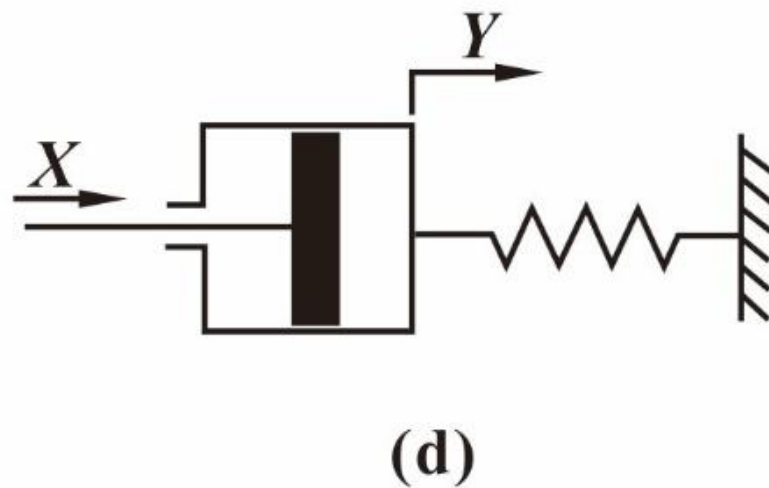
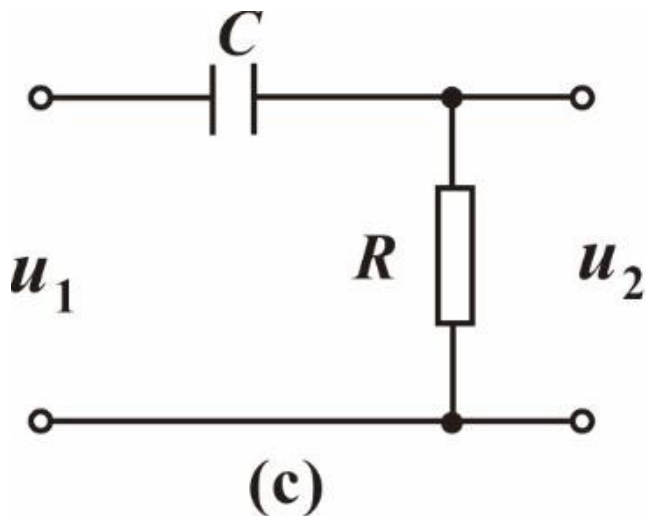


典型环节及其传递函数

(四) 微分环节

在实际系统中，微分环节常带有惯性，它的传递函数为：

$$G(s) = \frac{T_1 s}{T_2 s + 1}$$



典型环节及其传递函数

(五) 振荡环节

振荡环节的传递函数为：

$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n\zeta s + \omega_n^2}$$

式中 ω_n --- 无阻尼自然振荡频率， $\omega_n = 1/T$ ；

ζ —— 阻尼比， $0 < \zeta < 1$ 。

右图所示为单位阶跃函数作用下的响应曲线。

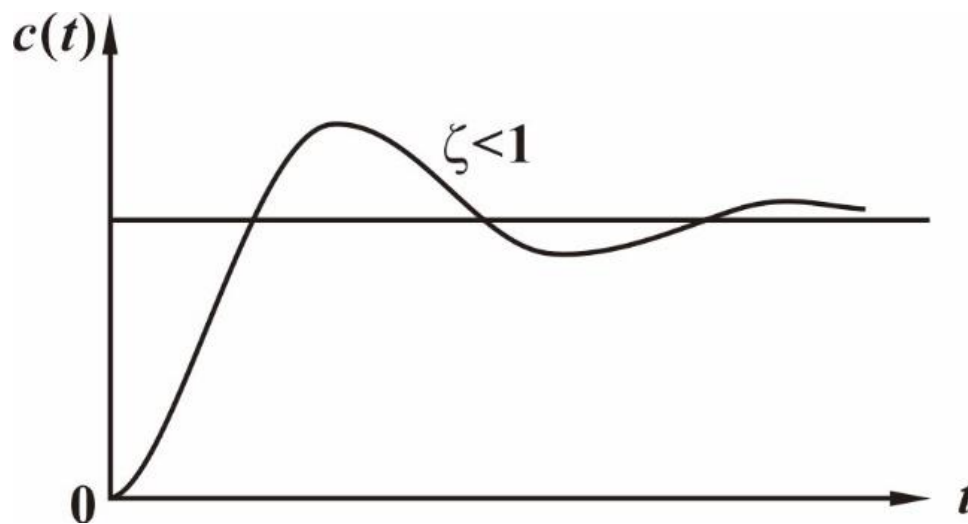


图. 振荡环节的单位阶跃响应曲线



典型环节及其传递函数

(六) 延滞环节

延滞环节是线性环节， τ 称为延滞时间。具有延滞环节的系统叫做延滞系统。

如下图所示，当输入为阶跃信号，输出要隔一定时间 τ 后才出现阶跃信号，在 $0 < t < \tau$ 内，输出为零。

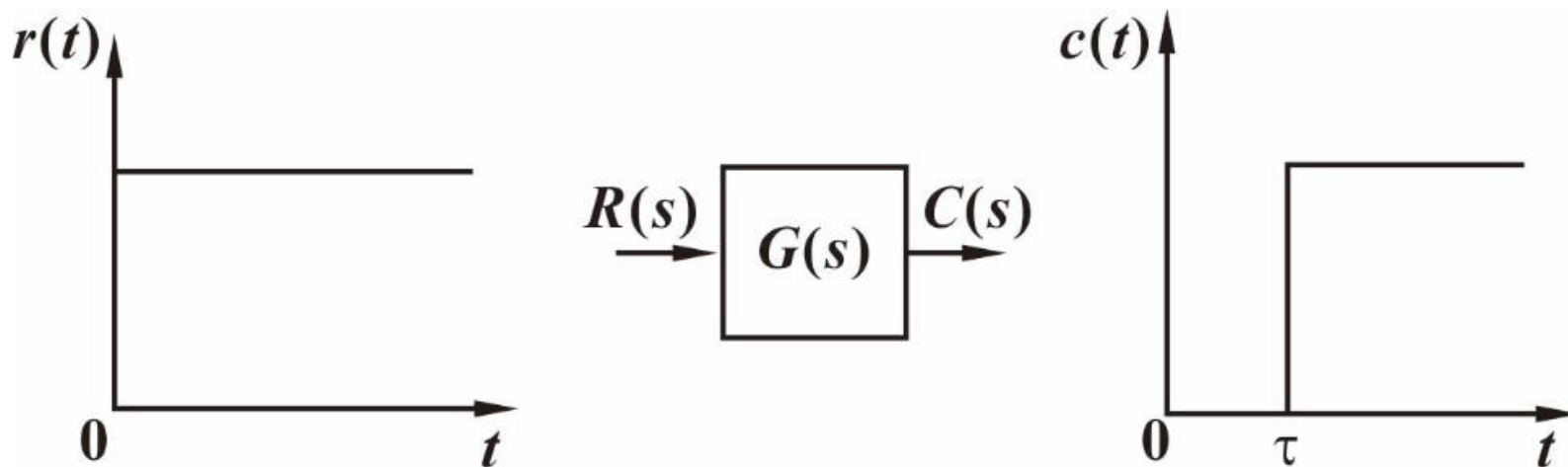


图. 延滞环节



典型环节及其传递函数

延滞环节的传递函数可求之如下：

$$c(t) = r(t - \tau)$$

其拉氏变换为：

$$\begin{aligned} C(s) &= \int_0^{\infty} r(t - \tau) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} r(\xi) e^{-s(\xi + \tau)} d\xi \\ &= e^{-\tau s} R(s) \end{aligned}$$

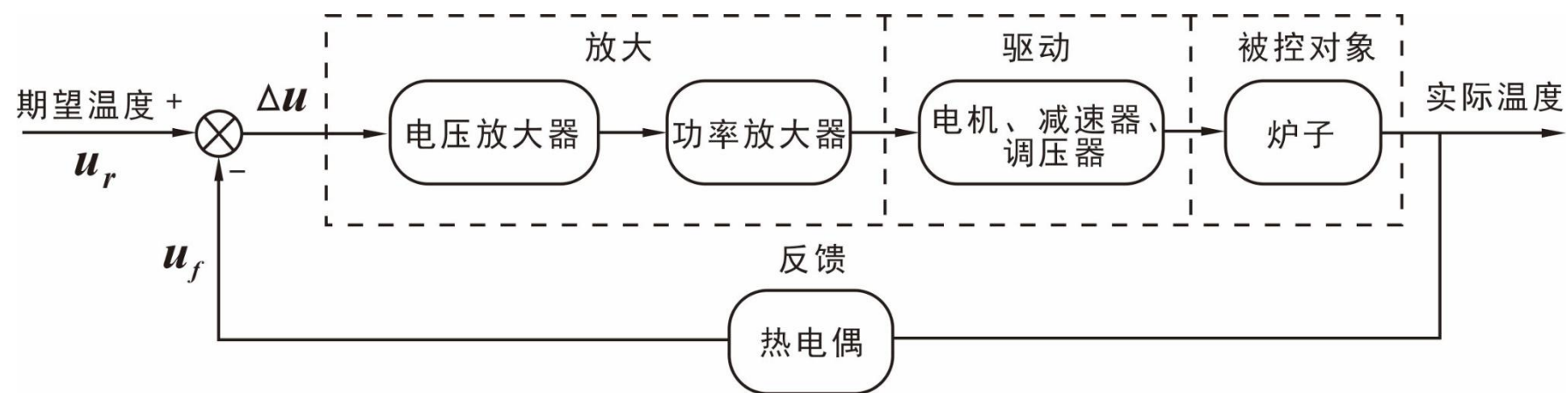
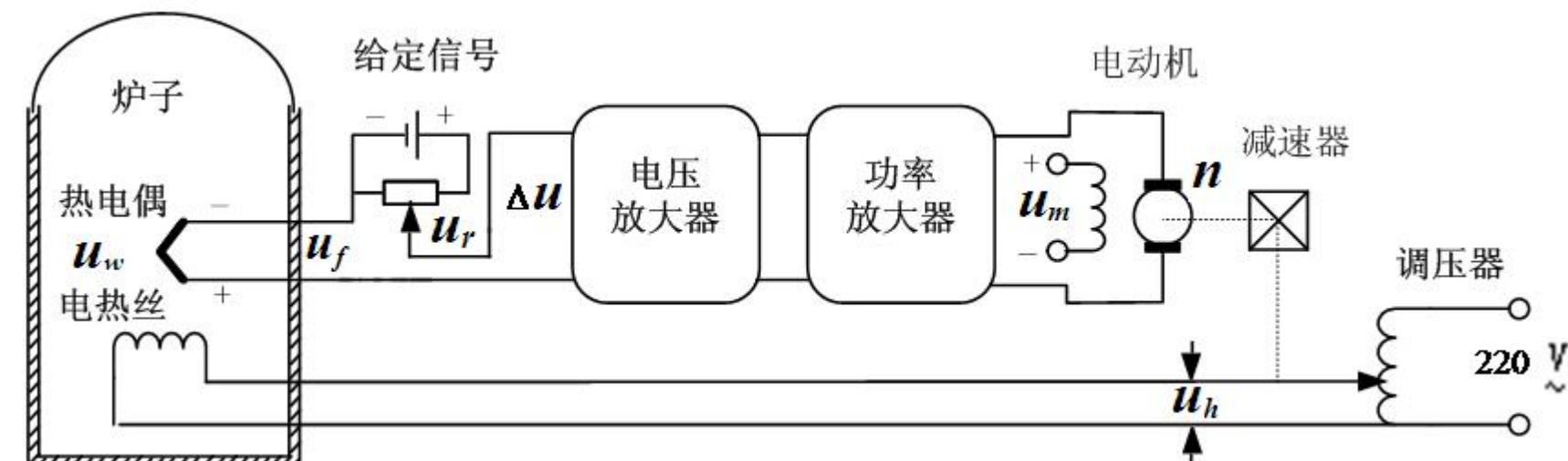
式中 $\xi = t - \tau$ ，所以延滞环节的传递函数为：

$$G(s) = e^{-\tau s}$$

系统具有延滞环节对系统的稳定性不利，延滞越大，影响越大。



炉温自动控制系统的传递函数



炉温自动控制系统的传递函数

□ 加热电炉的传递函数：加热电炉的微分方程

模型在滞后 $\tau \neq 0$ 时如下式所示，即

$$T_f \frac{d}{dt} u_w(t) + u_w(t) = k_f u_h(t - \tau) + k_1 d_1(t - \tau) + k_2 d_2(t - \tau)$$

对上式进行拉普拉斯变换，又设，

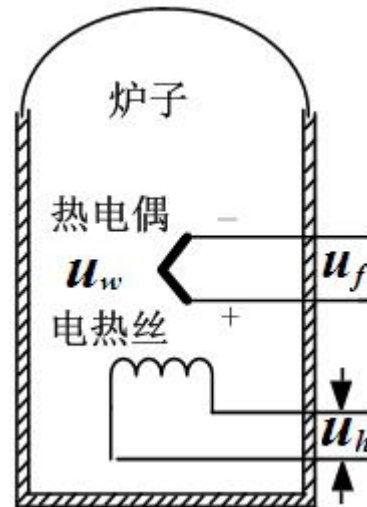
$$\mathcal{L}[u_w(t)] = U_w(s), \mathcal{L}[u_h(t)] = U_h(s)$$

则 $\mathcal{L}[u_h(t - \tau)] = e^{-\tau s} U_h(s)$ 得

$$U_w(s) = \frac{k_f e^{-\tau s}}{T_f s + 1} U_h(s) + \frac{k_1 e^{-\tau s}}{T_f s + 1} D_1(s) + \frac{k_2 e^{-\tau s}}{T_f s + 1} D_2(s)$$

当滞后时间 $\tau \approx 0$ 时，由加热电压变动引起的加热电炉的传递函数为

$$G_f(s) = \frac{U_w(s)}{U_h(s)} = \frac{k_f}{T_f s + 1}$$

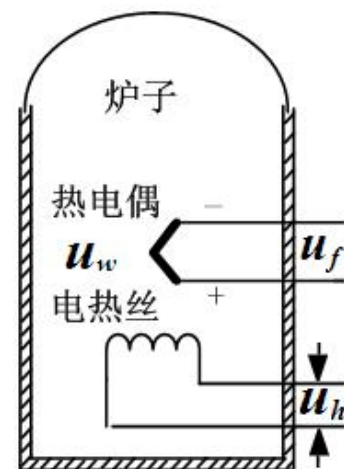


炉温自动控制系统的传递函数

□ 热电偶的传递函数：由热电偶的微分方程式，

$$T_f \frac{du_f(t)}{dt} + u_f(t) = k_c u_w(t) \quad \text{得热电偶的传递函数}$$

$$G_c(s) = \frac{U_f(s)}{U_w(s)} = \frac{k_c}{T_f s + 1} \approx k_c$$



□ 放大器的传递函数：由放大器的数学模型式 $u_d(t) = k_1 \Delta u(t)$ ，
则放大器的传递函数

$$G_a(s) = \frac{U_d(s)}{\Delta U(s)} = k_1$$



炉温自动控制系统的传递函数

□ 电枢控制直流电动机连同调压器的传递函数：电枢控制直流电动机连同调压器的微分方程模型如下式所示，

$$T_m T_1 \frac{d^3 u_h}{dt^3} + T_m \frac{d^2 u_h}{dt^2} + \frac{d u_h}{dt} = k_h k_e u_m$$

对上式进行拉普拉斯变换，得传递函数

$$G_m(s) = \frac{U_h(s)}{U_m(s)} = \frac{k_h k_e}{T_1 T_m s^3 + T_m s^2 + s}$$

或忽略电磁时间常数，则 $T_m \frac{d^2 u_h}{dt^2} + \frac{d u_h}{dt} = k_h k_e u_m$

对上式进行拉普拉斯变换，得传递函数 $G_m(s) = \frac{k_h k_e}{T_m s^2 + s}$



炉温自动控制系统的传递函数

- **系统的传递函数及结构图**：根据上述4元件的传递函数式以及比较环节的方程 $\Delta u(t) = u_r(t) - u_f(t)$ 的拉普拉斯变换式 $\Delta U(s) = U_r(s) - U_f(s)$ 则可以绘出加热炉在输入作用下炉温自动控制系统的结构图。

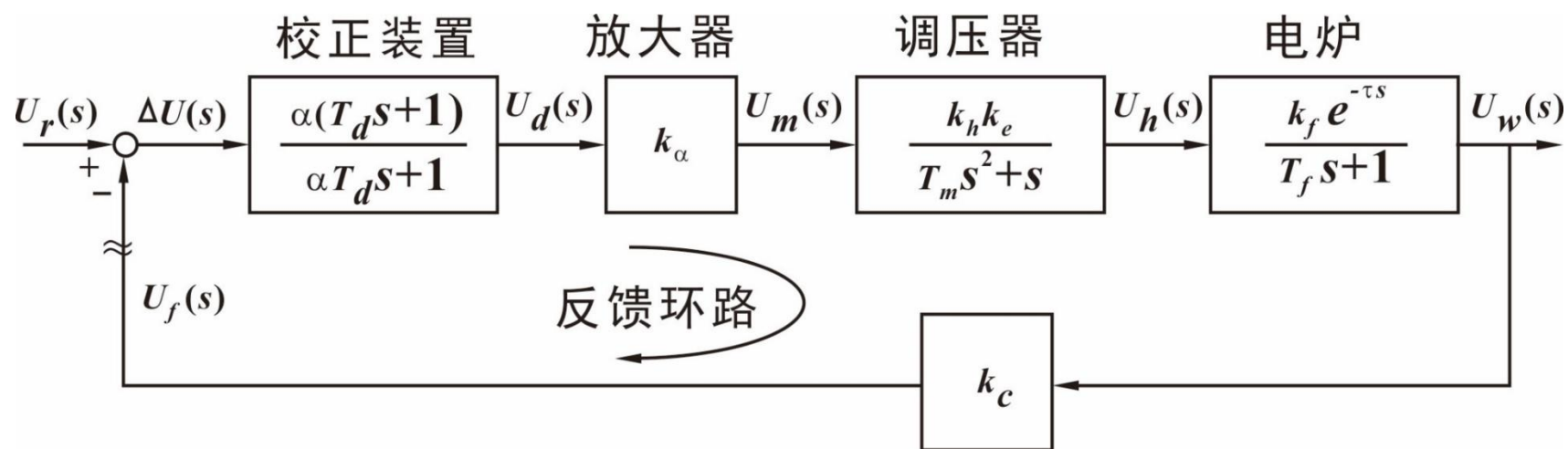


图1. 加热炉炉温控制系统的结构框图



炉温自动控制系统传递函数

□ 图1中从误差 $\Delta U(s)$ 到输出 $U_w(s)$ ，称为**前向通道**，其传递函数设为 $G(s)$ ；从输出 $U_w(s)$ 到比较环节 \otimes 称为**反馈通道**，其传递函数设为 $H(s)$ 。利用 $G(s)$ 和 $H(s)$ 将一般的方框图表示成图2. $E(s)$ 是误差 $e(t)$ 的拉普拉斯变换。符号 “ \approx ” 表示在图上该处切断连接，使控制系统成为开环的。

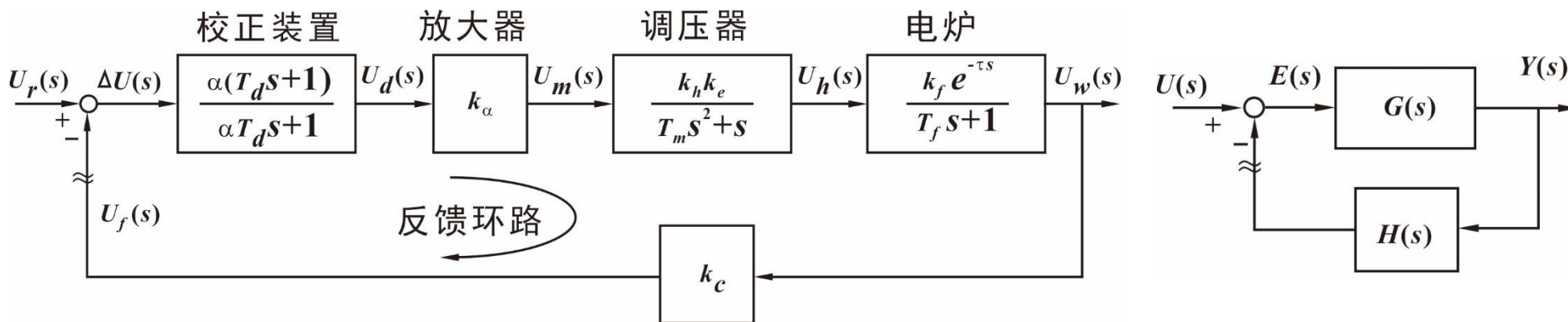


图1

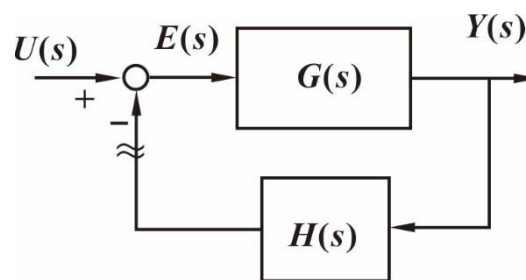


图2



炉温自动控制系统传递函数

□ **开环控制系统的传递函数**定义为

$$G_0(s) = G(s)H(s)$$

是前向通道传递函数 $G(s)$ 和反馈通道传递函数 $H(s)$ 的乘积。

闭环控制系统的传递函数 $W(s)$ 定义为输出 $Y(s)$ 和输入 $U(s)$

之比，可由 $E(s) = U(s) - H(s)Y(s)$ ， $Y(s) = G(s)E(s)$ ，求

得

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)E(s)}{E(s) + H(s)Y(s)} = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)}$$

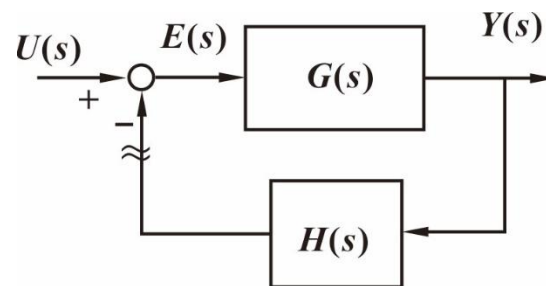


图2



炉温自动控制系统的传递函数

□ 闭环控制系统的传递函数：

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)E(s)}{E(s) + H(s)Y(s)} = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)}$$

可见，闭环传递函数将前向通道的传递函数和反馈通道的传递函数联系在一起。



炉温自动控制系统传递函数

□ 闭环控制系统的传递函数：

像随动系统中输出直接反馈与输入比较，即 $H(s)=1$ 的场

合，则
$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)} U(s) = W(s)U(s)$$

即闭环随动系统的输出取决于闭环传递函数和输入的性质。

加热炉炉温自动控制系统的反馈通道上只有一个热电偶，

其反馈通道传递函数
$$H(s) = k_c$$



炉温自动控制系统传递函数

- **炉温自动控制系统开环系统传递函数**：以图1为例，4个元件串联后等效的传递函数再串联上第五环节（热电偶）得到加热炉在输入作用 $U_r(s)$ 下**炉温自动控制系统开环系统**

的传递函数

$$\begin{aligned} G(s)H(s) &= \frac{U_f(s)}{\Delta U(s)} = \frac{U_d(s)}{\Delta U(s)} \frac{U_m(s)}{U_d(s)} \frac{U_h(s)}{U_m(s)} \frac{U_w(s)}{U_h(s)} \frac{U_f(s)}{U_w(s)} \\ &= G_d(s)G_a(s)G_m(s)G_f(s)G_c(s) \\ &= \frac{\alpha(T_d s + 1)}{\alpha T_d s + 1} k_\alpha \frac{k_h k_e}{T_m s^2 + s} \frac{k_f}{T_f s + 1} k_c \\ &= \frac{\alpha k_a k_f k_h k_e k_c (T_d s + 1)}{(\alpha T_d s + 1)(T_m s + 1)(T_f s + 1)s} \end{aligned}$$

可见在s域求积的简单过程，相当于在时间域上对5个微分方程消去4个中间变量，显示出传递函数方法即频域法的优越性。



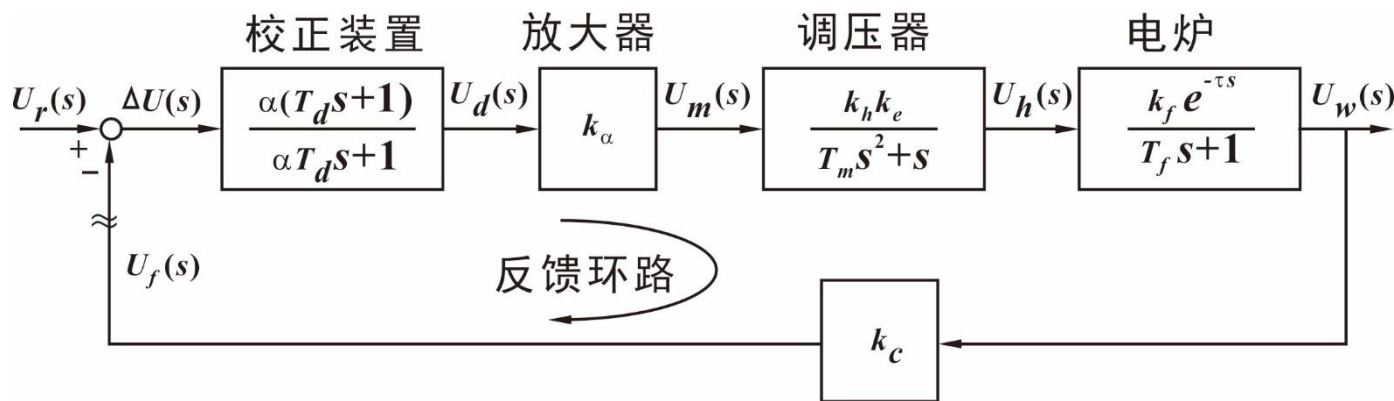
炉温自动控制系统的传递函数

□ **炉温自动控制系统的闭环传递函数**：以下图为例，加热炉

在输入作用下炉温控制系统的闭环传递函数

$$\frac{U_w(s)}{U_r(s)} = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)} = \frac{\alpha k_a k_f k_h k_e k_c (T_d s + 1)}{(\alpha T_d s + 1)(T_m s^2 + 1)(T_f s + 1)s + \alpha k_a k_f k_h k_e k_c (T_d s + 1)}$$

可以看出，加热炉在输入作用下炉温控制系统的闭环传递函数，其分母是闭环控制系统的特征方程，是4次代数方程。



炉温自动控制系统的传递函数

□ 加热炉炉温控制系统对扰动的闭环传递函数：

以上加热炉炉温闭环传递函数，是针对炉温控制系统处于跟随工作状态而推导出来的。

然而，加热炉炉温控制系统对**扰动的调节工作状态**才是更重要的，因为它是一个恒值自动调节系统。



炉温自动控制系统传递函数

- **加热炉炉温控制系统对扰动的闭环传递函数：**下图所示为加入冷工件或环境温度突然下降时，炉膛温度的自动调节过程，即温度下降曲线。研究这个动态调节过程需要采用加热炉炉温的完整的微分方程式（略去滞后 τ 并且扰动 d_2 不变）

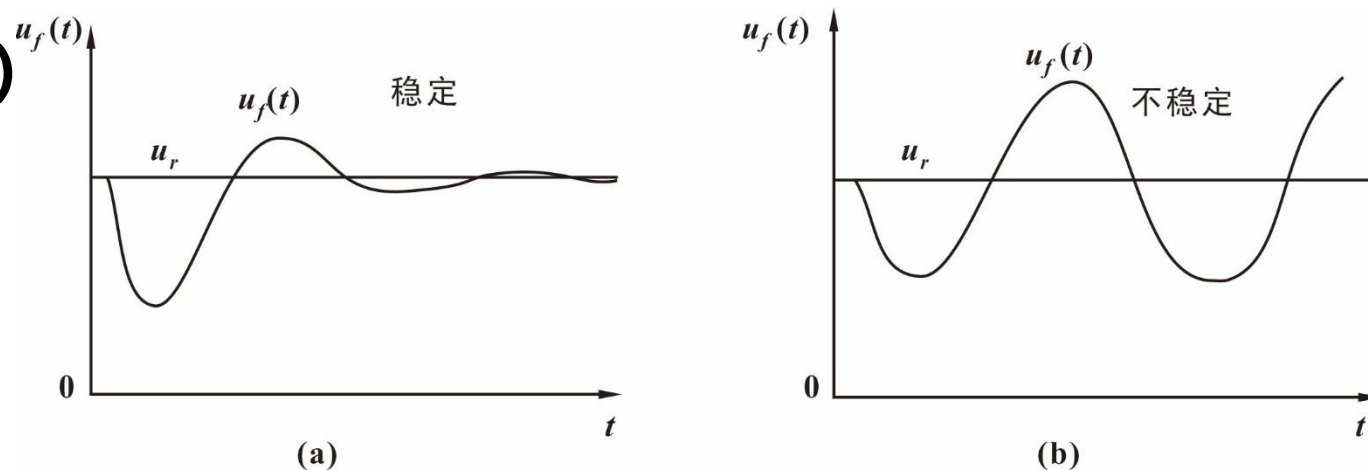


图3. 加入冷工件后炉温的变化过程



炉温自动控制系统的传递函数

□ 加热炉炉温控制系统对扰动的闭环传递函数：

$$T_f \frac{d}{dt} u_w(t) + u_w(t) = k_f u_h(t) - k_1 d_1(t)$$

式中 $d_1(t)$ 为扰动； $u_h(t)$ 为加热电压，也即 $u_h(t)$ 和扰动 $d_1(t)$ 两者联合作用时所引起的炉膛温度变动的方程。这样，加热炉炉温对扰动的传递函数为 $U_w(s) = \frac{k_f}{T_f s + 1} U_h(s) - \frac{k_1}{T_f s + 1} D_1(s)$

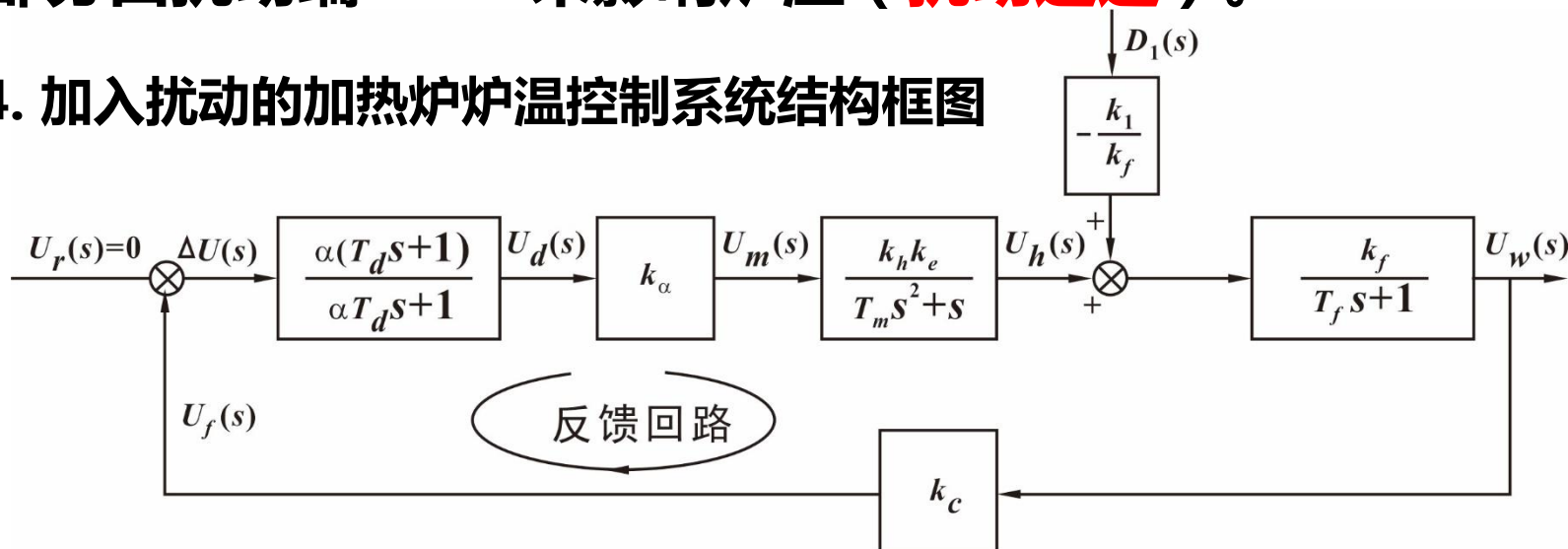
加入扰动的加热炉炉温控制系统结构框图如图4所示，



炉温自动控制系统传递函数

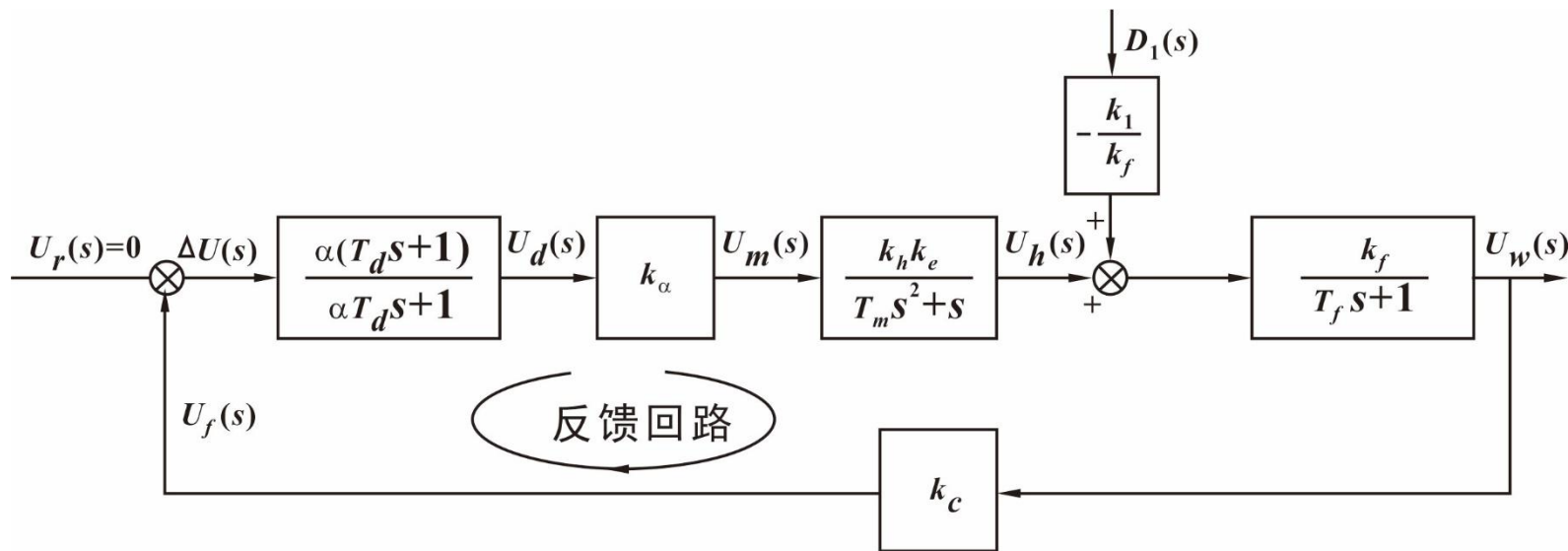
- 加热炉炉温控制系统对扰动的闭环传递函数：从下图4中可以观察到控制系统在调节状态下工作，输入端没有给定量的变化， $U_r(s)=0$ 。同时加热炉传递函数的输入由两部分组成：一部分由调压器端电压 $U_h(s)$ 来调节炉温（**前向通道**），另一部分由扰动端 $D_1(s)$ 来影响炉温（**扰动通道**）。

图4. 加入扰动的加热炉炉温控制系统结构框图



炉温自动控制系统的传递函数

- 加热炉炉温控制系统对扰动的闭环传递函数：加热炉炉温对扰动的闭环传递函数，从扰动端计入，由两部分串联组成：一部分是扰动通道传递函数（ $-k_1 / k_f$ ），另一部分是从扰动端比较器计入，有负反馈的闭环传递函数。



炉温自动控制系统的传递函数

- 加热炉炉温控制系统对抗动的闭环传递函数：将上述两部分的传递函数相乘，则得加热炉炉温控制系统对抗动的闭环传递函数

$$\begin{aligned}\frac{U_w(s)}{D_1(s)} &= \frac{-k_1}{k_f} \frac{k_f / (T_f s + 1)}{1 + \frac{\alpha k_a k_f k_h k_e k_c (T_d s + 1)}{(\alpha T_d s + 1)(T_m s + 1)(T_f s + 1)s}} \\ &= \frac{-k_1 (\alpha T_d s + 1)(T_m s^2 + s)}{(\alpha T_d s + 1)(T_m s + 1)(T_f s + 1)s + \alpha k_a k_f k_h k_e k_c (T_d s + 1)}\end{aligned}$$

若未接校正装置, $T_d = 0$, $\alpha = 1$, 则成为分母为3阶的传递函数

右侧符号表示扰动加大会引起炉温降低

$$\frac{U_w(s)}{D_1(s)} = \frac{-k_1 (T_m s^2 + s)}{(T_m s^2 + s)(T_f s + 1) + k_a k_f k_h k_e k_c}$$



炉温自动控制系统的传递函数

□ 加热炉炉温控制系统对扰动的闭环传递函数：将各参数代入，并取低的放大倍数 $K = k_a k_f = 2.5$ 以保证系统稳定，得到

扰动作用下的闭环传递函数
$$\frac{U_w(s)}{D_1(s)} = \frac{-0.05(0.5s^2 + s)}{15s^3 + 30.5s^2 + s + 0.25}$$

具有微分装置时的扰动作用 $d_1(t)$ 下的闭环传递函数为

$$\frac{U_w(s)}{D_1(s)} = \frac{-0.05(0.5s^3 + 1.5s^2 + s)}{15s^4 + 45.5s^3 + 31.5s^2 + 3.5s + 0.25}$$

经过拉普拉斯反变换运算扰动作用下对炉温的微分方程的解就可以求得了。



炉温自动控制系统传递函数

- 加热炉炉温控制系统对扰动的闭环传递函数：下图中的曲线1为没有微分装置的炉温的响应，曲线2为有微分装置的响应。可见微分装置由于改善了闭环系统的动态特性，使扰动的响应也显著减小。

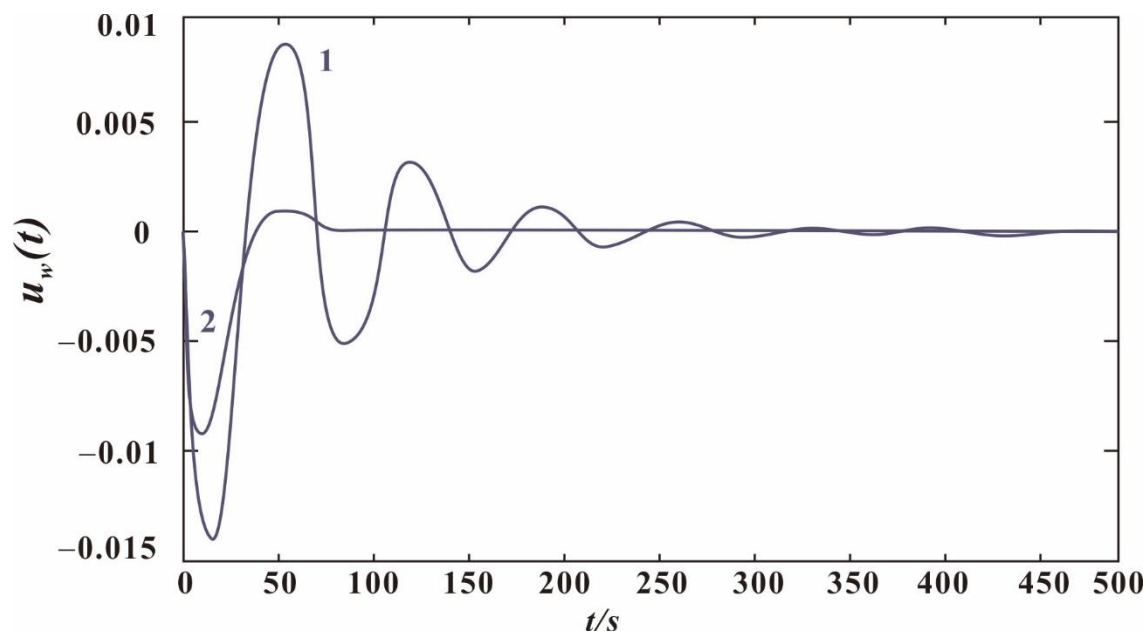


图. 加热炉炉温控制系统对扰动的响应



自动控制系统的频域分析法

□ 频率法分析系统的动态性能和稳定性

开环传递函数的极点可以分为下列三类：（1）负极点或有负实部的复极点；（2）正实极点或有正实部的复极点；（3）零极点或零实部的虚极点。

第一类极点处在左半 s 平面，第二类极点处在右半 s 平面，最后一类极点在 s 平面的虚轴上。因此，开环系统也有稳定性的问题，只有开环传递函数全部极点处在左半 s 平面的开环系统，才是稳定的。



自动控制系统的频域分析法

□ 频率法分析系统的稳定性

例题：判断以下开环系统稳定性

$$G(s) = \frac{s+3}{(s+6)(s^2+2s+3)}$$



谢谢！

