§寻找枢轴量的一般方法—将统计量枢轴量化

如果T 的连续的分布函数为$F(t;\theta)$, 则$F(T;\theta) \sim U(0,1)$. $F(T;\theta)$可作为枢轴量. 并且

$$\mathsf{P}(\alpha/2 \le F(T;\theta) \le 1-\alpha/2) = 1-\alpha/2-\alpha/2 = 1-\alpha.$$

这时, 若要求θ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间, 只要等价变形

$$\alpha/2 \le F(T;\theta) \le 1-\alpha/2,$$

即可.

Example

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本，σ已知．估计μ.

$\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$．所以$\overline{X}$的分布函数为$\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$．取

$$\Phi\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \sim U(0,1)$$

为枢轴量，由

$$\mathsf{P}\{\alpha/2 \le \Phi\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \le 1-\alpha/2\} = 1-\alpha,$$

得

$$\overline{X} - u_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \le \mu \le \overline{X} + u_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}.$$

这就是μ的置信水平为$1-\alpha$的同等置信区间.

连续型分布函数情形

设$\widetilde{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自总体$F_\theta(x)$的一个样本，其中$\theta\in\Theta\subset R$.

$T=T(\widetilde{X})$是一个统计量，其分布函数记为$G(t;\theta)$.

设统计量$T=T(\widetilde{X})$ 的分布函数$G(t;\theta)$是t的连续函数，也是θ的连续函数.

Theorem

定理*1 设统计量$T=T(\widetilde{X})$ 的分布函数$G(t;\theta)$是t的连续函数，也是θ的连续函数. 设$\alpha_1+\alpha_2=\alpha$ $(0<\alpha<1)$. 定义t的函数$\theta_1(t)$和$\theta_2(t)$如下：

$$1-G(t;\theta_1(t))=P_{\theta_1(t)}\{T\geq t\}=\alpha_1,$$

$$G(t+0;\theta_2(t))=P_{\theta_2(t)}\{T\leq t\}=\alpha_2.$$

$i.$ 若$G(t;\theta)$是θ的严格减函数，则$[\theta_1(T),\theta_2(T)]$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的同等置信区间.

$ii.$ 若$G(t;\theta)$ 是θ的严格增函数，则$[\theta_2(T),\theta_1(T)]$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的同等置信区间.

证:只证i. 因为$G(t;\theta)$是t的连续函数时, 所以$G(T;\theta)\sim U(0,1)$. 由严格单调性知

$$\begin{aligned}\theta_1(t)\le\theta\le\theta_2(t)\Longleftrightarrow&\\ \alpha_2=&G(t;\theta_2(t))\le G(t;\theta)\le G(t;\theta_1(t))=1-\alpha_1.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{\theta_1(T)\le\theta\le\theta_2(T)\}=&\mathsf{P}\{\alpha_2\le G(T;\theta)\le 1-\alpha_1\}\\ =&1-\alpha_1-\alpha_2=1-\alpha.\end{aligned}$$

一般情形

一、引理

Lemma

引理♣ 设$F(x)$是随机变量X的分布函数，则

$$P\{F(X+0) \le y\} \le y \le P\{F(X) < y\}, \quad \forall 0 < y < 1.$$

特别地,若$F(x)$是连续函数，则$F(X) \sim U(0,1)$.

证明：对$0 < y < 1$，记$x_0 = \inf\{x : F(x) \geq y\}$. 则对$\forall \epsilon > 0$，有

$$F(x_0 - \epsilon) < y \leq F(x_0 + \epsilon).$$

令$\epsilon \to 0$,得

$$F(x_0) = F(x_0 - 0) \leq y \leq F(x_0 + 0).$$

当$F(x_0) = y$时，由x_0的定义知$\{x : x < x_0\} \subset \{F(x) < y\}$,从而

$$\mathsf{P}(F(X) < y) \geq \mathsf{P}(X < x_0) = F(x_0) = y.$$

当$F(x_0) < y$时，由$\{x : x \le x_0\} \subset \{F(x) \le F(x_0)\} \subset \{F(x) < y\}$ 得

$$\mathsf{P}(F(X) < y) \ge \mathsf{P}(X \le x_0) = F(x_0 + 0) \ge y.$$

$\mathsf{P}(F(X) < y) \ge y$得证.
令$Z = -X$, 则Z的分布函数为

$$G(z) = \mathsf{P}(-X < z) = \mathsf{P}(X > -z) = 1 - F(-z + 0).$$

由已证的结果有

$$\begin{aligned} 1 - y \le & \mathsf{P}\{G(Z) < 1 - y\} = \mathsf{P}\{1 - F(-Z + 0) < 1 - y\} \\ = & \mathsf{P}\{F(X + 0) > y\} = 1 - \mathsf{P}\{F(X + 0) \le y\}. \end{aligned}$$

所以$\mathsf{P}\{F(X + 0) \le y\} \le y$.

分布函数关于参数连续的场合

设$\widetilde{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自总体$F_\theta(x)$的一个样本，其中$\theta\in\Theta\subset R$.

$T=T(\widetilde{X})$是一个统计量，其分布函数记为$G(t,\theta)$.

设统计量$T=T(\widetilde{X})$ 的分布函数$G(t;\theta)$是θ的连续函数.

Theorem

定理*2 设统计量$T=T(\widetilde{X})$ 的分布函数$G(t;\theta)$是θ的连续函数. 设$\alpha_1+\alpha_2=\alpha$ $(0<\alpha<1)$. 定义t的函数$\theta_1(t)$和$\theta_2(t)$如下:

$$1-G(t;\theta_1(t))=P_{\theta_1(t)}\{T\geq t\}=\alpha_1,$$

$$G(t+0;\theta_2(t))=P_{\theta_2(t)}\{T\leq t\}=\alpha_2.$$

i. 若$G(t;\theta)$ 是θ的严格减函数，则$[\theta_1(T),\theta_2(T)]$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间.

ii. 若$G(t;\theta)$ 是θ的严格增函数，则$[\theta_2(T),\theta_1(T)]$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间.

注: 不一定是同等置信区间.

证:只证i. 由$G(t;\theta)$ 关于θ的严格单调性知

$$\theta > \theta_2(t) \implies G(t+0;\theta) < G(t+0;\theta_2(t)) = \alpha_2.$$

$$\theta < \theta_1(t) \implies G(t;\theta) > G(t;\theta_1(t)) = 1-\alpha_1.$$

因此，结合引理♣,得

$$\mathsf{P}\{\theta > \theta_2(T)\} \le \mathsf{P}\{G(T+0;\theta) \le \alpha_2\} \le \alpha_2,$$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{\theta < \theta_1(T)\} \le& \mathsf{P}\{G(T;\theta) > 1-\alpha_1\} = 1 - \mathsf{P}\{G(T;\theta) \le 1-\alpha_1\}\\ \le& 1 - \mathsf{P}\{G(T;\theta) < 1-\alpha_1\} \le 1-(1-\alpha_1) = \alpha_1.\end{aligned}$$

所以

$$\mathsf{P}\{\theta_1(T) \le \theta \le \theta_2(T)\} \ge 1-\alpha_1-\alpha_2 = 1-\alpha.$$

Example

例 设$\widetilde{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自Possion分布$P(\lambda)$的一个样本. 求$\lambda$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间.

解: λ的充分统计量为$T=\sum_{i=1}^n X_i$, 且$T\sim P(n\lambda)$. 易知对于$t\geq 0$,

$$\mathsf{P}_\lambda(T\geq t)=\sum_{i=k}^{\infty}\frac{(n\lambda)^i}{i!}e^{-n\lambda}=\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^{n\lambda}x^{k-1}e^{-x}dx,$$

(其中$k=-[-t]$)是λ的严格增连续函数,即T的分布函数是λ的严格减连续函数. 所以λ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间的下限$\widehat{\lambda}_L$和上限$\widehat{\lambda}_U$分别满足方程

$$\widehat{\lambda}_L(k):\quad \mathsf{P}_\lambda(T\geq k)=\alpha/2,$$
$$\widehat{\lambda}_U(k):\quad \mathsf{P}_\lambda(T\leq k)=\alpha/2.$$

注意到

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}_\lambda(T \geq k) =& \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^{n\lambda} x^{k-1} e^{-x} dx = \Gamma(n\lambda; k, 1) \\
=& \Gamma(2n\lambda; k, 1/2) = \chi^2(2n\lambda; 2k),
\end{aligned}
$$

其中$\Gamma(x;\alpha,\lambda)$是gamma分布$\Gamma(\alpha,\lambda)$的分布函数，$\chi^2(x;m)$是自由度为m的χ^2分布的分布函数.

上述两方程即为

$$
\begin{aligned}
\widehat{\lambda}_L(k): \quad & \mathsf{P}_\lambda(T \geq k) = \chi^2(2n\lambda; 2k) = \alpha/2, \\
\widehat{\lambda}_U(k): \quad & \mathsf{P}_\lambda(T \geq k+1) = \chi^2(2n\lambda; 2(k+1)) = 1-\alpha/2.
\end{aligned}
$$

所以$\widehat{\lambda}_L(k) = \frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(2k)}{2n}$, $\widehat{\lambda}_U(k) = \frac{\chi^2_{\alpha/2}(2k+2)}{2n}$.

置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left[\frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(2T)}{2n}, \quad \frac{\chi^2_{\alpha/2}(2T+2)}{2n}\right].$$

Example

设$\widetilde{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是取自两点分布$B(1,p)$的样本. 求$p$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间.

解: p的充分统计量为$T=\sum_{i=1}^n X_i$, 且$T\sim B(n,p)$.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}_p(T \geq k) &= \sum_{x=k}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
=& \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\Gamma(n-k+1)} \int_0^p u^{k-1}(1-u)^{n-k} dx \\
=& \mathsf{P}(\beta(k, n+1-k) \leq p) = \mathsf{P}\left(Z(k, n+1-k) \leq \frac{p}{1-p}\right) \\
=& \mathsf{P}\left(\frac{2(n+1-k)}{2k} Z(k, n+1-k) \leq \frac{2(n+1-k)}{2k} \frac{p}{1-p}\right) \\
=& \mathsf{P}\left(F(2k, 2(n+1-k)) \leq \frac{2(n+1-k)}{2k} \frac{p}{1-p}\right)
\end{aligned}
$$

是p的严格单调增函数，所以T的分布函数是T的严格单调减函数.

取$p_L = p_L(k)$, $p_U = p_U(k)$ 满足下述方程,

$$\mathsf{P}(T \geq k; p_L) = \alpha/2, \quad \mathsf{P}(T \leq k; p_U) = 1 - \mathsf{P}(T \geq k+1; p_U) = \alpha/2.$$

则$[p_L(T),\ p_U(T)]$是p置信水平为$1-\alpha$的置信区间,而方程等价于

$$\mathsf{P}\left(F(\nu_1, \nu_2) \leq \frac{\nu_2}{\nu_1} \frac{p_L}{1-p_L}\right) = \alpha/2,$$

$$\mathsf{P}\left(F(\nu_1', \nu_2') \leq \frac{\nu_2'}{\nu_1'} \frac{p_U}{1-p_U}\right) = 1 - \alpha/2,$$

其中$\nu_1 = 2k$, $\nu_2 = 2(n+1-k)$, $\nu_1' = 2(k+1)$, $\nu_2' = 2(n-k)$.

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} \frac{p_L}{1-p_L} = F_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2), \quad \frac{\nu_2'}{\nu_1'} \frac{p_U}{1-p_U} = F_{\alpha/2}(\nu_1', \nu_2').$$

一般情形的结果

设$\widetilde{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$是来自总体$F_\theta(x)$的一组样本，其中$\theta \in \Theta \subset R$. $T = T(\widetilde{X})$是一个统计量，其分布函数$G(t;\theta)$是参数θ的严格单调函数. 这时置信区间可按下述方法构造:

$$\text{取}\theta_1(t) \;\; s.t. \;\; \mathsf{P}_{\theta_1(t)}(T \geq t) \leq \alpha_1 \;\; \text{但概率尽可能接近}\alpha_1,$$

$$\text{取}\theta_2(t) \;\; s.t. \;\; \mathsf{P}_{\theta_2(t)}(T \leq t) \leq \alpha_2 \;\; \text{但概率尽可能接近}\alpha_2.$$

则$[\theta_1(T), \theta_2(T)]$或者$[\theta_2(T), \theta_1(T)]$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha_1-\alpha_2$的置信区间.

Theorem

定理***(a)* 设$G(t;\theta)$是参数θ的严格减函数，则对给定的α $(0<\alpha<1)$，令

$$\theta_L(t)=\sup_{\theta\in\Theta}\{\theta:P_\theta(T\geq t)\leq\alpha\}=\sup_{\theta\in\Theta}\{\theta:G(t;\theta)\geq 1-\alpha\},$$

$$\theta_U(t)=\inf_{\theta\in\Theta}\{\theta:P_\theta(T\leq t)\leq\alpha\}=\inf_{\theta\in\Theta}\{\theta:G(t+0;\theta)\leq\alpha\}.$$

则$\widehat{\theta}_L=\theta_L(T)$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信下限，$\widehat{\theta}_U=\theta_U(T)$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信上限.

Theorem

定理** *(b)* 设$G(y;\theta)$是参数θ的严格增函数，则对给定的α $(0<\alpha<1)$，令

$$\theta_U(t)=\inf_{\theta\in\Theta}\{\theta:P_\theta(T\geq t)\leq\alpha\}=\inf_{\theta\in\Theta}\{\theta:G(t;\theta)\geq 1-\alpha\},$$

$$\theta_L(t)=\sup_{\theta\in\Theta}\{\theta:P_\theta(T\leq t)\leq\alpha\}=\sup_{\theta\in\Theta}\{\theta:G(t+0;\theta)\leq\alpha\}.$$

则$\widehat{\theta}_L=\theta_L(T)$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的置信下限，$\widehat{\theta}_U=\theta_U(T)$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的置信上限.

证明: 只证(a). 由于

$$\theta > \theta_L(t) \implies G(t;\theta) < 1-\alpha \implies \theta \geq \theta_L(t).$$

所以由引理♣得

$$\mathsf{P}\{\theta \geq \theta_L(T)\} \geq \mathsf{P}\{G(T;\theta) < 1-\alpha\} \geq 1-\alpha.$$

由于

$$\theta < \theta_U(t) \implies G(t+0;\theta) > \alpha \implies \theta \leq \theta_U(t),$$

所以由引理♣得

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{\theta \leq \theta_U(T)\} \geq & \mathsf{P}\{G(T+0;\theta) > \alpha\} \\ = & 1-\mathsf{P}\{G(T+0;\theta) \leq \alpha\} \geq 1-\alpha.\end{aligned}$$