

金融数学

第5章 资本资产定价模型 与套利定价理论

第5章 资本资产定价模型与套利定价理论

本章内容概览

5.1.资本资产定价模型（CAPM）

5.2.CAPM的扩展与应用

5.3.C-CAPM模型

5.4.套利定价理论

1 资本资产定价模型

资本资产定价模型（CAPM）

- ❖ 资本资产定价模型（**Capital Asset Pricing Model, CAPM**）是由美国斯坦福大学教授 **William Sharpe** 等人在 **Markowitz** 的证券投资组合理论基础上提出的一种证券投资理论。
- ❖ **CAPM** 解决了所有的人按照组合理论投资下，资产的收益与风险的问题。
- ❖ **CAPM** 理论是一个非常简洁易用、同时富有金融含义的资产组合定价模型。

1.1 CAPM的基本假设

- **假设1** 市场中有 n 种风险资产，它们的收益率分布对于每个交易个体已知（个体可以根据相关信息给出估计），并且它们的均值方差存在，均值不全相等，协方差矩阵非退化。
- **假设2** 市场上是完备的，即**不存在摩擦**。无交易成本，包括交易费用与市场流动性风险造成的交易成本，允许买空卖空。另外，还假设资产无限可分，即可以买入或者卖出任意小份额的资产。市场是完全竞争的，单个个体的投资行为不会影响资产的市场价格。

- **假设 3** 市场交易个体按照均值-方差准则进行投资，即其期望效用函数完全或者近似地用资产收益率的均值方差表示。并且假设投资个体行为遵循二阶随机占优，即在期望收益率相同的情况下偏好风险小的资产（组合），在风险相同的情况下偏好期望收益率大的资产（组合）。
- **假设 4** 所有市场交易个体均有相同的单期投资期限。
- 事实上，假设 1~4 也是Markowitz资产组合理论所需要的，而下面的假设 5~6 为经典CAPM模型所必须附加的假设。

- **假设5** 市场中存在无风险资产，并且其市场买卖价格相等。
- **假设6 (共同期望假设)** 所有市场交易个体对市场中所有资产收益率分布的看法一致，即任一资产收益率的均值与协方差在所有个体看来都是相同的。

注：

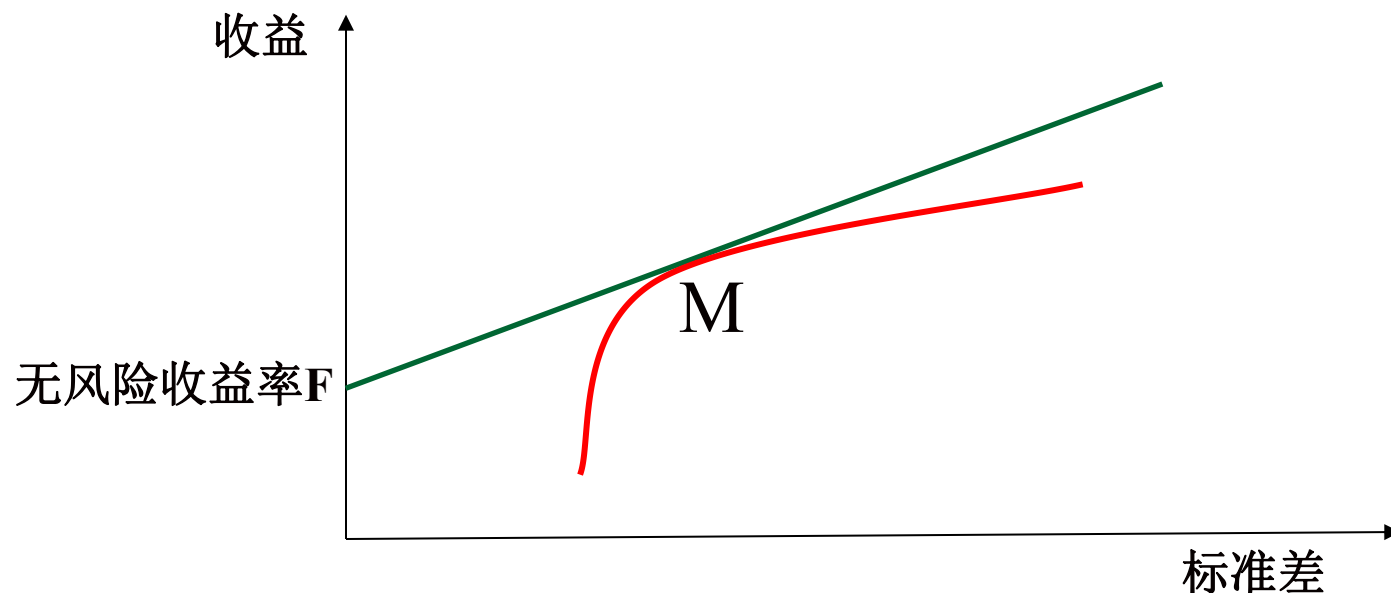
经典的*CAPM* 模型将资产组合的期望收益率利用无风险资产收益率和市场组合收益率线性表示，而假设5恰好保证了无风险资产的存在性。当然，这一假设可以适当放松。

- 假设 6 确保投资者的不同仅仅是风险偏好和拥有的投资禀赋不同。此时，所有个体的资产组合前沿边界和有效前沿边界均相同，也就是说，市场中存在唯一的前沿边界和有效前沿边界。这一假设在一定程度上将**Markowitz**资产组合理论对投资个体的组合选择特征刻画推广到宏观市场层面，使得**CAPM**模型得到了适用于整个市场而不仅仅是单个个体的结论。
- 再看假设3。投资特征满足假设3的个体一般被称为“**Markowitz型投资者**”。**Markowitz** 资产组合理论所给出的是对于**Markowitz**型投资者的组合投资决策刻画。**CAPM**模型基于**Markowitz**理论，假设3当然是必须的。

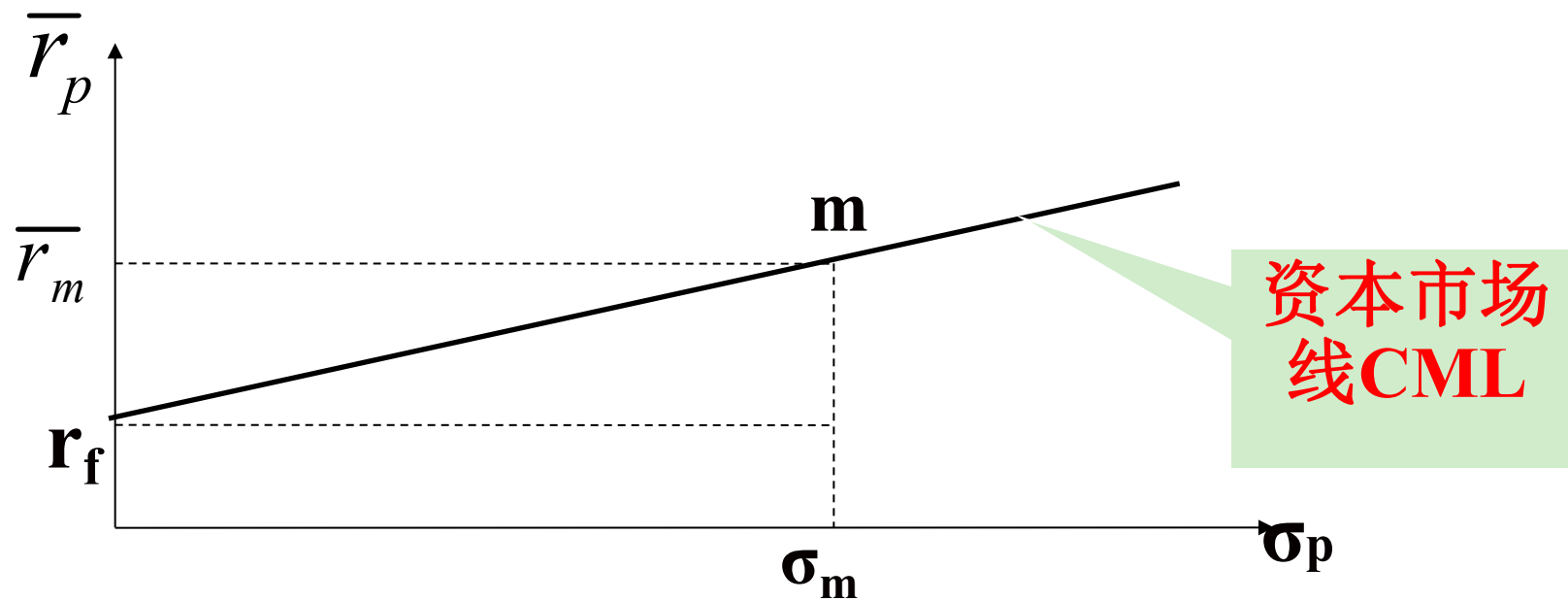
1.2 资本市场线的导出

- 假设市场中的每个投资者都是资产组合理论的有效应用者，**人人都是理性的**！
- 这些投资者对每个资产回报的均值、方差以及协方差具有相同的预期，但风险规避程度不同。
- 若市场处在均衡状态，即供给=需求，且每一位投资者都购买相同的风险基金，则该风险基金应该是何种基金呢？（对这个问题的回答构成了CAPM的核心内容）

- 风险基金=市场组合（Market portfolio）：与整个市场上风险证券比例一致的资产组合。对股票市场而言，就是构造一个包括所有上市公司股票，且结构相同的基金（如指数基金）。
- 因为只有当风险基金等价与市场组合时，才能保证：（1）全体投资者购买的风险证券等于市场风险证券的总和——市场均衡；（2）每个人购买同一种风险基金——分离定理。



在均衡状态下，资产组合（FM直线上的点）是市场组合M与无风险资产F构成的组合。如果用公式表示，可以得到



$$\bar{r}_p = r_f + \frac{\bar{r}_m - r_f}{\sigma_m} \sigma_p$$

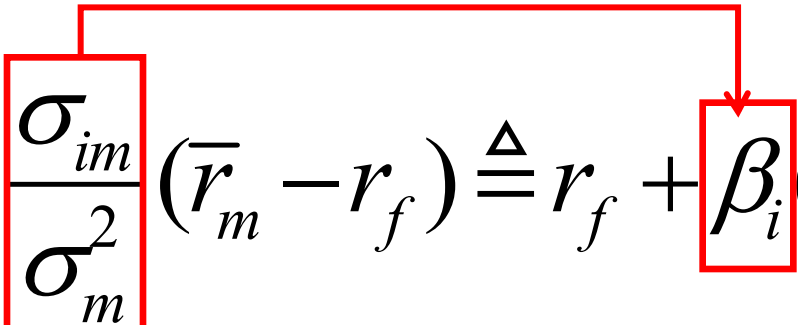
其中， r_f 为市场无风险收益率； \bar{r}_p, σ_p 为加入无风险资产后的组合的期望收益与风险； \bar{r}_m, σ_m 为市场组合的期望收益与风险。

- CML (Capital Market Line)是无风险资产与风险资产构成的组合的有效边界。
 - CML的截距被视为时间的报酬
 - CML的斜率就是单位风险溢价
- 在金融世界里，任何资产组合都不可能超越CML。由于单个资产一般来说，并不是最优的资产组合，因此，单个资产也位于该直线的下方。

1.3 定价模型—证券市场线（SML）

- CML将一项有效资产组合的期望收益率与其标准差联系起来，但它并未表明一项单独资产的期望收益率是如何与其自身的风险相联系。
- CAPM模型的最终目的是要对证券进行定价，因此，就由CML推导出SML (Security Market Line)。

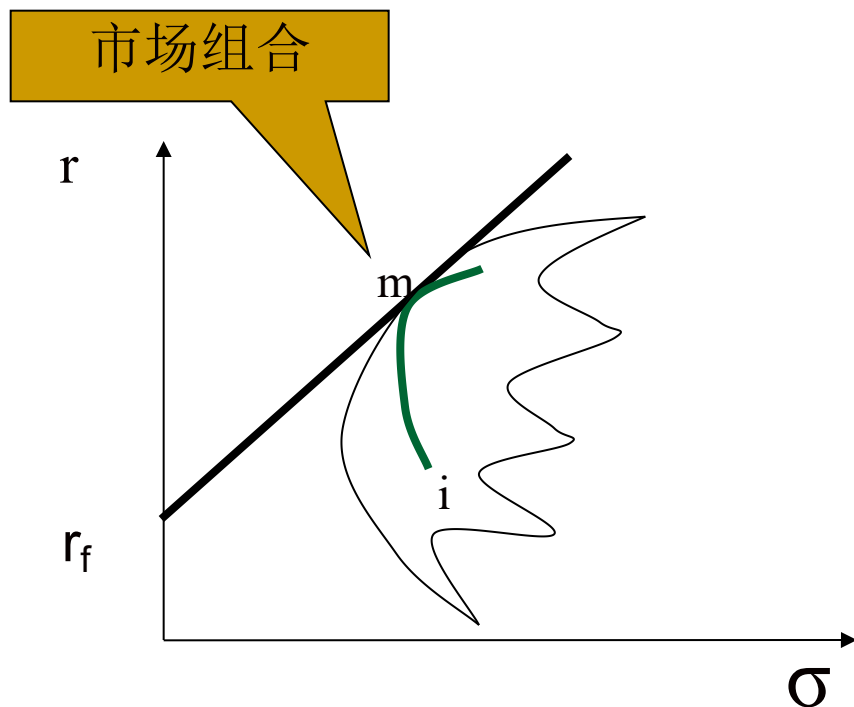
命题5.1： 若市场投资组合是有效的，则任一资产*i*的期望收益满足

$$\bar{r}_i = r_f + \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} (\bar{r}_m - r_f) \triangleq r_f + \beta_i (\bar{r}_m - r_f)$$
A red line connects the fraction $\frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$ in the first equation to the coefficient β_i in the second equation, illustrating that β_i is defined as the ratio of the asset's covariance with the market to the market's variance.

证明： 考虑持有权重 w 资产 i ，权重 $(1-w)$ 的市场组合 m 构成一个新的资产组合，由组合计算公式有

$$\bar{r}_w = w\bar{r}_i + (1-w)\bar{r}_m$$

$$\sigma_w = \sqrt{w^2\sigma_i^2 + (1-w)^2\sigma_m^2 + 2w(1-w)\sigma_{im}}$$



- 证券 i 与 m 的组合构成的有效边界为 im ；
- im 不可能穿越资本市场线；
- 当 $w=0$ 时，曲线 im 的斜率等于资本市场线的斜率。

$$\frac{d\bar{r}_w}{dw} = \bar{r}_i - \bar{r}_m, \frac{d\sigma_w}{dw} = \frac{w\sigma_i^2 + (w-1)\sigma_m^2 + (1-2w)\sigma_{im}}{\sigma_w}$$

因此,

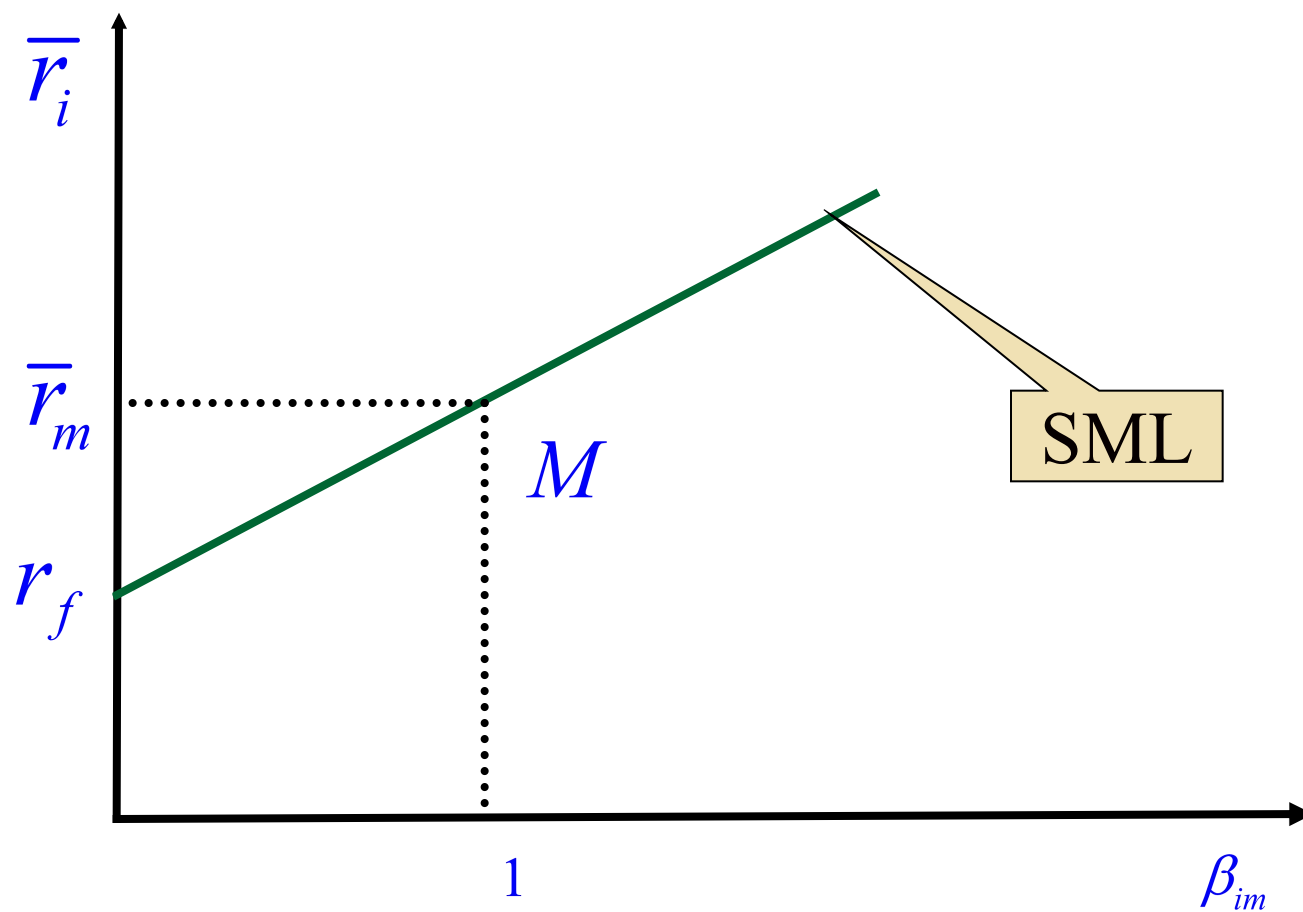
$$\left. \frac{d\bar{r}_w}{d\sigma_w} \right|_{w=0} = \left. \frac{d\bar{r}_w / dw}{d\sigma_w / dw} \right|_{w=0} = \frac{(\bar{r}_i - \bar{r}_m)\sigma_m}{\sigma_{im} - \sigma_m^2}$$

该斜率与资本市场线相等则

$$\frac{(\bar{r}_i - \bar{r}_m)\sigma_m}{\sigma_{im} - \sigma_m^2} = \frac{\bar{r}_m - r_f}{\sigma_m}, \text{解得}$$

$$\bar{r}_i = r_f + \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} (\bar{r}_m - r_f) \triangleq r_f + \beta_i (\bar{r}_m - r_f), \text{证毕。}$$

证券市场线 (Security market line)

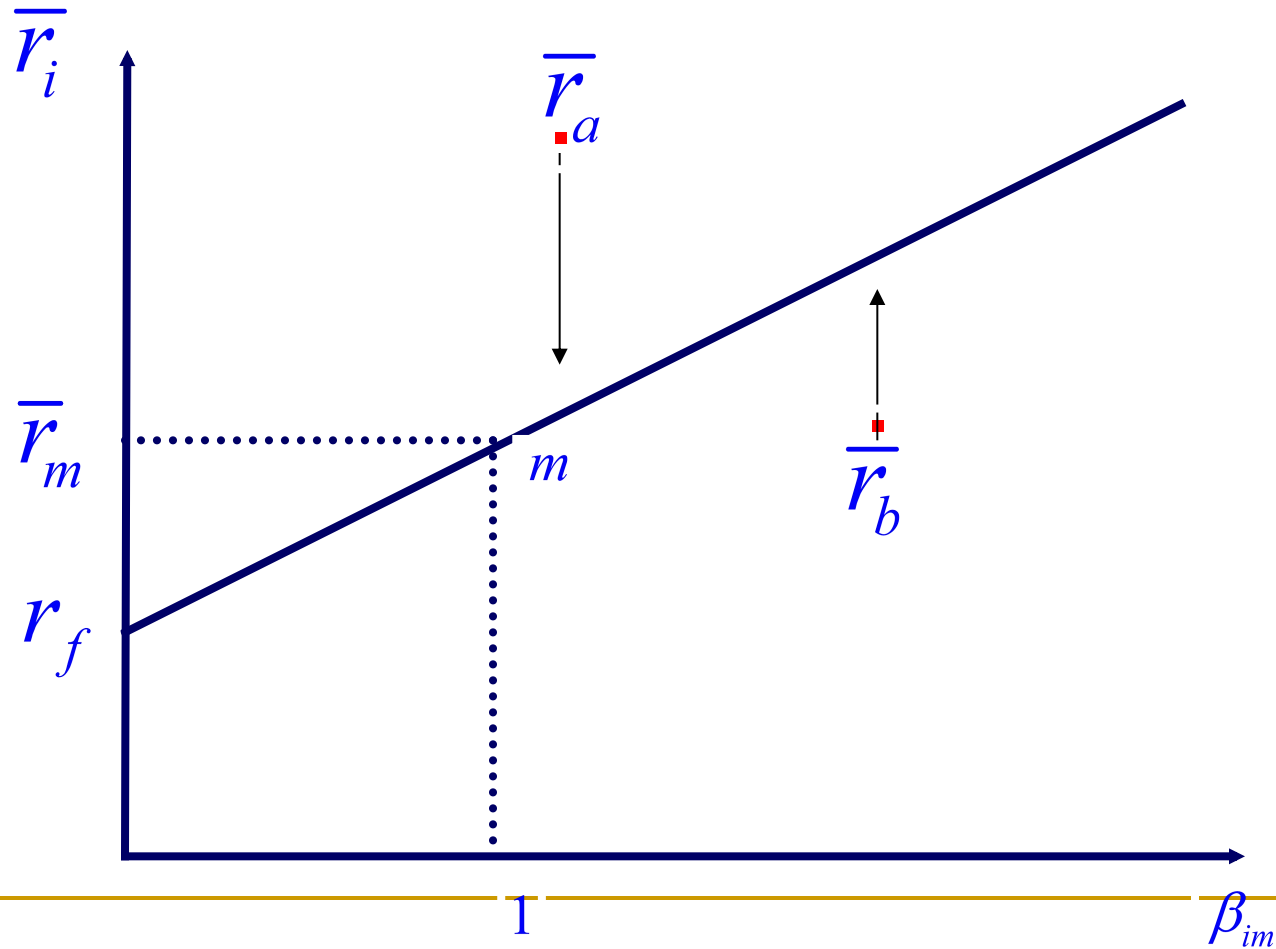


- ◆ 方程以 r_f 为截距，以 $\bar{r}_m - r_f$ 为斜率。因为斜率是正的，所以 β_{im} 越高的证券，其期望回报率也越高。
- ◆ 称证券市场线的斜率 $\bar{r}_m - r_f$ 为风险价格，而称 β_{im} 为证券的风险。是由威廉·夏普提出的风险衡量指标。用它反映资产组合波动性与市场波动性关系（在一般情况下，将某个具有一定权威性的股指（市场组合）作为测量股票 β 值的基准）。

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$$

- 由 β 的定义，我们可以看到，衡量证券风险的关键是该证券与市场组合的协方差而不是证券本身的方差。
- $\beta = 1$ 的证券一般来说和市场同步涨跌
- $\beta > 1$ 的证券一般涨跌幅度都大于市场；称为**进攻型证券**（aggressive security）
- $\beta < 1$ 的证券一般涨跌都小于市场；称为**保守型证券**（defensive security）

思考：现实中的证券有没有可能高（低）于证券市场线？



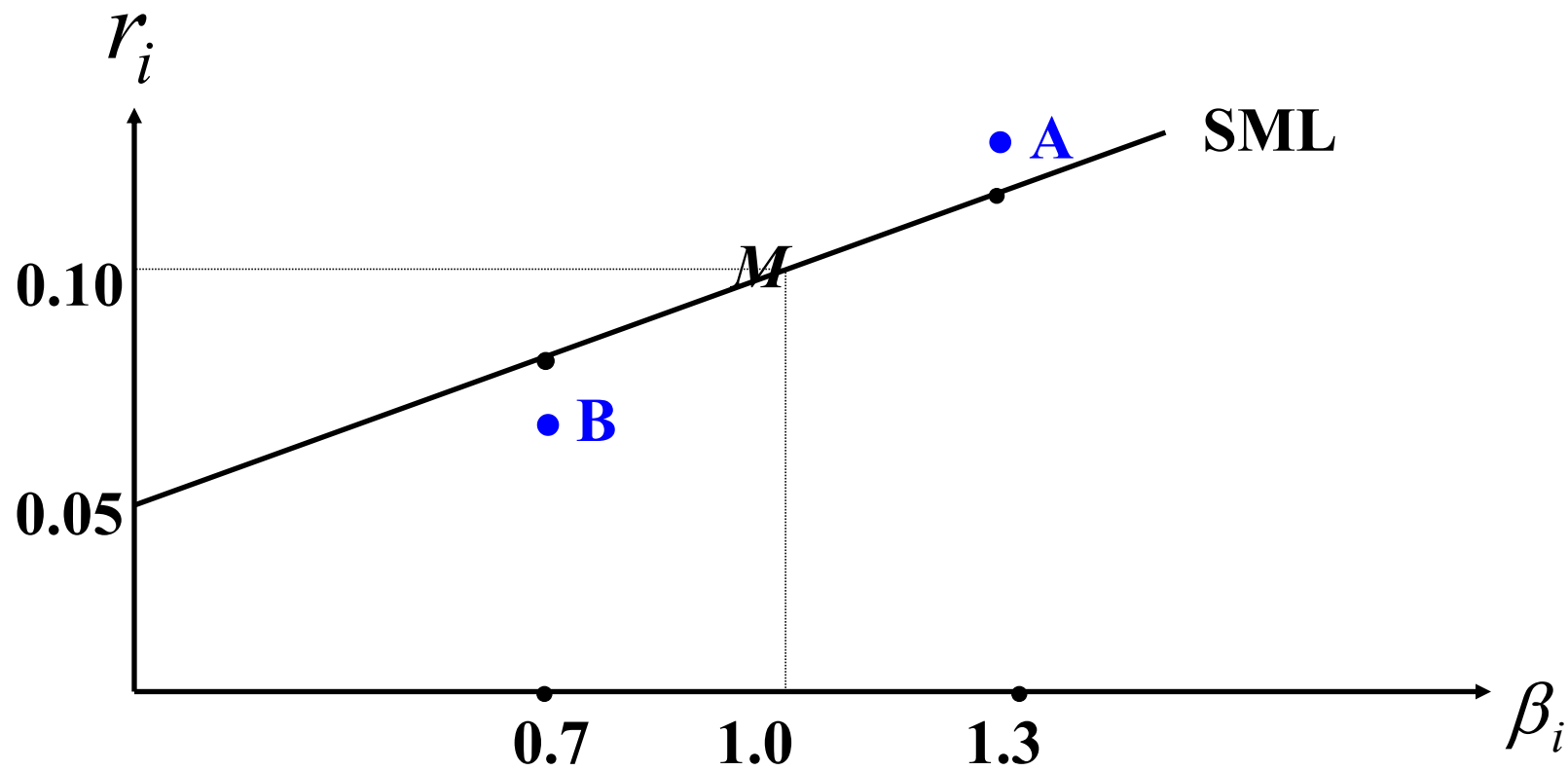
运用 SML的一个例子

	期望收益率	标准差	Beta
证券A	12.0%	20%	1.3
证券B	8.0%	15%	0.7
市场	10.0%	12%	1.0
无风险利率	5.0%		

■ 均衡期望收益率:

$$\bar{r}_A = 0.05 + 1.3 \times (0.10 - 0.05) = 11.5\%$$

$$\bar{r}_B = 0.05 + 0.7 \times (0.10 - 0.05) = 8.5\%$$



注意

- **SML**给出的是期望形式下的风险与收益的关系，若预期收益高于证券市场线给出的收益，则应该看多该证券，反之则看空。
- **SML**只是表明我们期望高贝塔的证券会获得较高的收益，并不是说高贝塔的证券总能在任何时候都能获得较高的收益，如果这样高贝塔证券就不是高风险了。
- 一般而言，从长期来看，高贝塔证券将取得较高的平均收益率。

著名的投资人 Jack • Schwager 对风险有一个非常精辟的比喻：



- 风险像什么？风险就像那种沙滩上的洞穴，越深的洞穴，风险就越大。
- 那收益率像什么呢？就像沙堆，沙堆越高，收益率就越高。
- 而杠杆就是一个铁锹，我们可以用铁锹把沙子从洞里转移到沙堆上面。
- 这样一来，洞穴挖深，沙堆堆高，也就是增加风险，增加收益了。
- 所以说在比较投资产品的时候，你仅仅是看沙堆的大小，而不去关注旁边的那个洞穴有多大，是一个错误的行为。

CML与SML的区别

- SML虽然是由CML导出，但其意义不同
 - (1) CML给出的是市场组合与无风险证券构成的组合的**有效集**，任何资产（组合）的期望收益不可能高于CML。
 - (2) SML给出的是单个证券或者组合的期望收益，它是一个**有效市场给出的定价**，但实际证券的收益可能偏离SML。
- 均衡时刻，有效资产组合可以同时位于资本市场线和证券市场线上，而无效资产组合和单个风险资产只能位于证券市场线上。

1.4 证券市场线与系统风险

设某种资产*i*的收益为

$$\tilde{r}_i = r_f + \beta_i(\bar{r}_m - r_f) + \tilde{\varepsilon}_i$$

设

$$E(\tilde{\varepsilon}_i) = 0$$

则由上面式子恢复CAPM公式

$$\bar{r}_i = r_f + \beta_i(\bar{r}_m - r_f)$$

若 $Cov(\tilde{r}_m, \tilde{\varepsilon}_i) = 0$, 则

$$\begin{aligned} Var(\tilde{r}_i) &= \beta_i^2 Var(\tilde{r}_m) + Var(\tilde{\varepsilon}_i) \\ &= \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\tilde{\varepsilon}_i}^2. \end{aligned}$$

除了无风险资产, 任何资产组合都有 $Var(r_i) \neq 0$, 即便是最大限度分散市场风险的组合 ($\beta = 0$), 其风险仍有 $\sigma^2(\varepsilon_i)$ 。

由贝塔的意义可知, 它定义资产风险与市场整体风险的相关关系, 也就是贝塔定义了系统风险对资产的影响。

投资组合的贝塔值公式

命题5.2： 组合的贝塔值是组合中各个资产贝塔值的加权平均。

证明： 若一个组合的收益率为 $\tilde{r} = \sum_{i=1}^n w_i \tilde{r}_i$

$$\text{则 } \text{cov}(\tilde{r}, \tilde{r}_m) = \sum_{i=1}^n w_i \text{cov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_m)$$

$$\beta_p = \sum_{i=1}^n w_i \beta_i$$

故命题成立，证毕。

命题5.3：系统风险无法通过分散化来消除。

证明：若假定 $Var(\tilde{\varepsilon}_i) = \sigma_{\varepsilon}^2$, $w_i = \frac{1}{n}$, $cov(\tilde{\varepsilon}_i, \tilde{\varepsilon}_j) = 0$

$cov(\tilde{\varepsilon}_i, \tilde{r}_m) = 0, i = 1, 2, \dots, n$, 则

$$\begin{aligned} Var(\tilde{r}_p) &= \beta_p^2 Var(\tilde{r}_m) + Var\left(\sum_{i=1}^n w_i \tilde{\varepsilon}_i\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \beta_i\right)^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_{\varepsilon}^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \beta_i\right)^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_{\varepsilon}^2 \end{aligned}$$

系统风险

$$Var(r_p) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \beta_i \right)^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} \right)^2 \sigma_\varepsilon^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \beta_i \right)^2 \sigma_m^2 + n \frac{1}{n^2} \sigma_\varepsilon^2$$

非系统风险

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \beta_i \rightarrow \beta}} Var(r_p) = \beta^2 \sigma_m^2$$

由于 $\beta > 0$, 故无法通过以资产组合的方式消除由 β 引起的风险, 即无法通过分散化来消除系统风险。

- SML的 β 表示资产的波动性与市场波动的关系，市场组合的 $\beta=1$ ，若 $\beta>1$ ，则表明其波动大于市场，或者说由于市场波动导致证券比市场更大的波动，反之类似。
- β 衡量的风险是系统风险的，系统风险无法通过分散化消除。
- 由于证券的期望收益是关于 β 的线性函数，这表明市场仅仅对系统风险进行补偿，而非系统风险（或称残余风险、特有风险）不补偿。

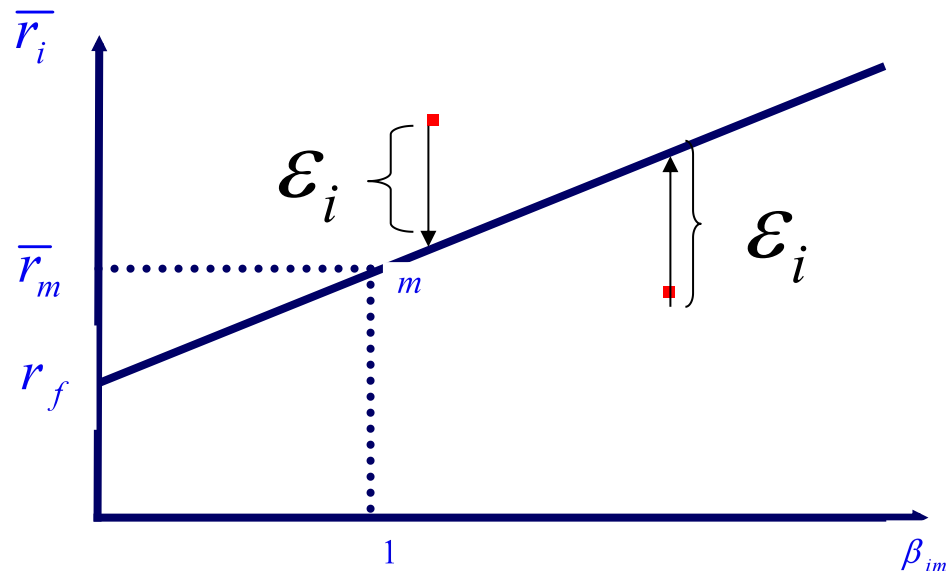
证券的系统风险本质上是该证券与市场上所有证券的协方差加权和。

由于 $\tilde{r}_m = \sum_{j=1}^n w_j \tilde{r}_j$, 则

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} = \frac{\text{COV}(\tilde{r}_m, \tilde{r}_i)}{\sigma_m^2} = \frac{\text{COV}(\tilde{r}_m, \tilde{r}_i)}{\sigma_m^2} = \frac{\sum_{j=1}^n w_j \text{COV}(\tilde{r}_j, \tilde{r}_i)}{\sigma_m^2}$$

- 一般地，由于一种证券不可能与市场上所有证券之间都相互独立，故系统风险不为0。
- 问题：用方差与 β 测量证券风险性质相同吗？为什么？

对单个证券而言，由于其没有分散风险，因此，其实际的风险就是系统风险加上特有风险，所以其收益就是



$$\tilde{r}_i = \bar{r}_i + \tilde{\mathcal{E}}_i = r_f + (\bar{r}_m - r_f)\beta + \tilde{\mathcal{E}}_i$$

无风险收益

系统风险补偿

特有风险补偿

练习：下表给出两个公司的数据。短期国债收益率为4%，市场风险溢价为6%。

公司	预测收益率（%）	收益标准差（%）	贝塔
A	12	8	1.5
B	11	10	1.0

- 根据资本资产定价模型，各公司的公平收益率是多少？
- 各公司的股票价格是被高估、低估还是合理估价了？

练习：下表给出了一证券分析家预期的两个特定市场收益情况下的两只股票的收益。

市场	市场收益率（%）	激进型股票收益率（%）	防守型股票收益率（%）
熊市	5	-2	6
牛市	25	38	12

a. 两只股票的beta值是多少？

b. 如果市场收益为5%与25%的可能性相同，两只股票的预期收益率是多少？

c. 如果国库券利率6%，市场收益为5%与25%的可能性相同，画出这个经济体系的证券市场线(SML)。

d. 激进型企业的管理层在具有与防守型企业股票相同的风险特性的项目中所使用的临界利率是多少？

2. CAPM的扩展与应用

2.1 不存在无风险资产的CAPM

- 当市场中不存在无风险资产时，前沿边界不再是两条射线，而是在标准差-期望平面中的一支双曲线，这支双曲线的上半部分是有效前沿边界。根据第四章性质4.6，对于任意可行资产 q ，对于任意前沿资产 p ，它们的期望收益率有如下关系式：

$$E[\tilde{r}_q] - E[\tilde{r}_{zc(p)}] = \beta_{pq} (E[\tilde{r}_p] - E[\tilde{r}_{zc(p)}]).$$

- 其中 $zc(p)$ 是资产组合 p 的零协方差资产组合，

$$\beta_{pq} = \frac{Cov[\tilde{r}_q, \tilde{r}_p]}{Var[\tilde{r}_p]}。$$

- 此外，在假设1～假设4下，投资者只会选择在有效前沿边界上进行投资。通过类似的论证不难得到，在不存在无风险资产的情形下，市场组合仍然是个体最优投资组合的凸组合。
- 根据第四章性质4.3，有效前沿资产组合的凸组合仍然是有效前沿边界资产，因此市场组合 m 也是有效前沿组合。进一步假设市场组合不是最小方差组合mvp，则由根据第四章性质4.6可知，有效前沿组合存在零协方差组合，因此 $zc(m)$ 存在。故将市场组合 m 代入前式，便得到

$$E[\tilde{r}_q] - E[\tilde{r}_{zc(m)}] = \beta_{mq} (E[\tilde{r}_m] - E[\tilde{r}_{zc(m)}]).$$

- 这便是Black（1972）和Lintner（1969）发明的零-Beta资本资产定价模型，也被称为**Black** 定价公式。

2.2 资本市场线与Sharpe比率

- 回顾第四章的讨论，存在无风险资产情形下的有效前沿边界在 $\sigma[\tilde{r}] - E[\tilde{r}]$ 平面上是一条从 $(0, r_f)$ 点出发，斜率为 \sqrt{H} 经过点 p 的射线，其方程为

$$\frac{E[\tilde{r}_p] - r_f}{\sigma[\tilde{r}_p]} = \sqrt{H}.$$

这条射线便称为**资本市场线(Capital Market Line, CML)**

- 左边的分式称为**Sharpe 比率（Sharpe Ratio）**。被用于衡量资产组合的风险效益，也就是承担单位风险所能带来的超额收益。
- 风险厌恶的投资者希望选择**Sharpe**比率更大的资产组合，因此资产组合的“优劣”性在一定程度上便可用**Sharpe**比率来衡量。不难看出，资本市场线上的任意资产组合的**Sharpe**比率等于常数 \sqrt{H} 。
- 因此，无风险有效前沿边界的“有效”性便体现在，其上的任何资产组合的**Sharpe**比达到最大值，其风险效益也越大；任何可行资产的**Sharpe**比率均不会大于有效前沿边界资产的**Sharpe**比率。

2.3 证券市场线与Treynor比率

- 根据前面的讨论，证券市场线有正的斜率

$$E[\tilde{r}_m] - r_f = \frac{E[\tilde{r}_q] - r_f}{\beta_{qm}}$$

- 在实际应用中，等式右端的量被称为**Treynor 比率**（**Treynor Ratio**），有时也称为**收益-波动率比率**（**Reward-to-Volatility Ratio**）。Treynor比率衡量了风险补偿与组合系统性风险的关系。Treynor比率越大，单位系统性风险带来的风险补偿越大。

- **Treynor**比率和**Sharpe**比率都衡量了风险补偿与组合风险之间的关系.
- 但是**Treynor** 比率中只考虑了系统性风险，而**Sharpe**比率中还包括了非系统性风险。对于非系统性风险被完全分散的组合来说，两个比率是相同的。
- 在实际应用中，**Treynor**比率和**Sharpe**比率均可作为资产组合的评级提供标准，均为非常重要的指标。

- **Treynor** 比率只对完全分散的组合，或者没有非系统性风险的组合（例如国库券组合）有效，对与包含非系统性风险的组合，**Treynor**比率强调了其中系统风险因素，而会忽视其中的非系统风险因素。
- **Sharpe**比率和**Treynor**比率各有千秋：**Sharpe**比率的适用性更广，但如果需要着重评估系统性风险，**Treynor**比率更为合适。

2.4 Jensen's alpha指标

- CAPM模型给出了资产组合的理论期望收益率，但实际市场中，资产组合的收益率常常偏离CAPM给出的理论期望收益率。该偏离程度可以用Jenson 的Alpha 指标（Jensen's Alpha）进行衡量。Alpha 指标定义为

$$\alpha = E[\tilde{r}_i] - [r_f + \beta_{im}(E[\tilde{r}_m] - r_f)].$$

- 如果资产有正的 α 值，说明资产的实际收益率比经过风险调整的期望收益率还要高。因此，投资者们通常会寻找具有较高 α 值的组合进行投资。

- 实际市场中具有正的**Alpha** 指标的资产组合普遍存在吗？
- 许多学者认为，现实市场的有效性足以保证正**Alpha**资产组合不会重复出现，因为投资者的大量投资会导致该资产组合的价格上升从而收益率下降。
- 然而**Russ Wermers** 对于共同基金市场的研究表明，由于投资者（基金经理）们的才能，投资组合往往有正的**Alpha**。当然，在扣除交易费用后，**Alpha**指标也常常会是负值。

- 在现实应用（例如资产组合评估）中，Jensen 的Alpha指标、Sharpe比率和Treynor比率往往结合在一起使用。
- Alpha指标的典型应用之一便是Alpha套利，它的主要思路为利用正 α 值组合与市场组合进行对冲，在部分消除市场风险的同时获取正的收益。

练习：凯伦·凯伊是柯林斯资产管理公司的一名组合经理，正使用资本资产定价模型来为其客户提供建议。他们的研究部门提供了如下信息。

公司	预测收益率（%）	标准差（%）	贝塔
X股票	14	36	0.8
Y股票	17	25	1.5
市场指数	14	15	1.0
无风险利率	5		

- a. 计算每只股票的期望收益率与 α 值。
- b. 分辨和判断哪只股票更适合投资者，他们分别希望：
 - (i) 增加该股票到一个充分分散的股票组合。
 - (ii) 持有此股票作为单一股票组合。

2.5 CAPM的应用：项目选择

- 已知一项资产的买价为 p ，而未来的售价为 q 。 q 为随机的，则

$$\because \bar{r} = \frac{\bar{q} - p}{p} = r_f + \beta(\bar{r}_m - r_f)$$

$$\therefore p = \frac{\bar{q}}{1 + \boxed{r_f + \beta(\bar{r}_m - r_f)}}$$

随机条件下的贴现率（风险调整下的利率）

例：某项目未来期望收益为1000万美元，由于项目与市场相关性较小， $\beta=0.6$ ，若当时短期国债的平均收益为10%，市场组合的期望收益为17%，则该项目最大可接受的投资成本是多少？

$$p = \frac{1000}{1 + 0.1 + 0.6(0.17 - 0.10)} = 876(\text{万美元})$$

项目选择

- 若一个初始投资为 p 的投资项目 i ，未来（如1年）的收入为随机变量 q ，则有

$$p = \frac{\bar{q}}{1 + r_f + \beta(\bar{r}_m - r_f)}$$

且由贝塔的定义知

$$\beta = \frac{\text{cov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_m)}{\sigma_m^2} = \frac{\text{cov}[(\tilde{q} / p - 1), \tilde{r}_m]}{\sigma_m^2} = \frac{\text{cov}(\tilde{q}, \tilde{r}_m)}{p\sigma_m^2}$$

$$p = \frac{\bar{q}}{1 + r_f + \frac{\text{cov}(\tilde{q}, \tilde{r}_m)}{p\sigma_m^2} (\bar{r}_m - r_f)}$$

$$1 = \frac{\bar{q}}{p(1 + r_f) + \text{cov}(\tilde{q}, \tilde{r}_m)(\bar{r}_m - r_f) / \sigma_m^2}$$

$$p = \frac{1}{(1 + r_f)} \left[\bar{q} - \frac{\text{cov}(\tilde{q}, \tilde{r}_m)(\bar{r}_m - r_f)}{\sigma_m^2} \right]$$

方括号中的部分成为 q 的确定性等价（**certainty equivalence**），它是一个确定量，用无风险利率贴现。

项目选择的准则

- 计算项目的确定性等价
- 将确定性等价贴现后与投资额 p 比较，得到净现值，即

$$NPV = -p + \frac{1}{(1+r_f)} \left[\bar{q} - \frac{\text{cov}(\tilde{q}, \tilde{r}_m)(\bar{r}_m - r_f)}{\sigma_m^2} \right]$$

企业将选择NPV最大的项目，上式就是**基于CAPM的NPV评估法**。

例 某公司I在时期0将发行100股股票，公司I在时期1的价值为随机变量 $V_I(1)$ 。公司的资金都是通过发行这些股票而筹措的，已知股票的持有者有资格获得完全的收益流。现给出有关测算数据如下：

$V_I(1)$	\$1000	\$800
P	0.5	0.5

$$Cov(R_I, R_M) = 0.045, r_f = 0.1,$$

$$Var(R_M) = 0.09, E(R_M) = 0.2$$

估计公司的股票价格。

解： 将上述数据代入风险自行调节收益率定价公式得

$$V_I(0) = \frac{1000 \times 0.5 + 800 \times 0.5}{1 + 0.1 + \frac{0.2 - 0.1}{0.09} \times 0.045} = 782.6 \quad \text{故每股价格为} \mathbf{7.83\$}$$

3. C-CAPM模型

CAPM与C-CAPM的区别

	CAPM	C-CAPM
偏好	均值-方差偏好	期望效用
行为	组合优化	不确定性下的行为
均衡	部分均衡（资产市场）	一般均衡（整个经济）
资产定价	证券市场线（SML）	C-CAPM定价方程

资产市场不确定性的描述

■ 简化假设

- 消费品不可储存（non-storable）——无需考虑商品储存问题
- 消费品以禀赋的形式外生给定——无需考虑生产问题

- 不确定性的描述（静态）
 - 两个时期：今天（0期），未来（1期）
 - 未来（1期）的每一种可能情形都定义为一个状态（state），并以 s 表示
 - S 表示所有可能状态组成的集合（未来总共有 S 种可能性）
 - $0 < \pi_s \leq 1, \sum_s \pi_s = 1$
 - 概率测度（probability measure）： $\Pi = \{\pi_s, s \in S\}$
 - 随机变量（random variable）： S 维向量（vector）
 - 风险资产的回报率： $\tilde{r} = (r_1, r_2, \dots, r_S)^T$ 。

资产及其支付

- 资产 j 的（1期）支付向量义

$$\mathbf{x}^j = \begin{bmatrix} x_1^j \\ \vdots \\ x_S^j \end{bmatrix}$$

- J 种资产组成的资产市场的（1期）支付矩阵（payoff matrix）

$$\mathbf{x} \triangleq \begin{array}{ccc|c} & 1 & \cdots & J \\ \begin{bmatrix} x_1^1 & \cdots & x_1^J \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_S^1 & \cdots & x_S^J \end{bmatrix} & 1 \\ & \vdots \\ & S \end{array}$$

- J 种资产的0期价格（以0期消费品为计价物）

$$\mathbf{p} \triangleq [p_1 \quad \cdots \quad p_J]$$

- 资产定价问题： $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}$?

资产组合

- 资产组合（**portfolio**）：对各类资产持有量组成的向量 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_J)^T$ ，其中的第 j 个元素代表第 j 类资产持有的数量
- 资产组合的支付

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^J x_1^j \theta_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^J x_S^j \theta_j \end{bmatrix} = \mathbf{x}\boldsymbol{\theta}$$

- 资产组合的0期价值为

$$\sum_{j=1}^J p_j \theta_j = \mathbf{p}\boldsymbol{\theta}$$

完备市场

- **定义：**我们称一个资产市场 X 是**完备**（complete）的，如果任何一个1期的消费计划都可以通过某个资产组合来实现
- 在一个完备的市场中，任给一个1期的消费计划 $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_S)^T$ ，都能找到一组组合权重 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_J)^T$ 是下面方程组的解（其中的 θ_j 是消费者持有的资产 j 的数量）

$$c_s = \sum_{j=1}^J x_s^j \theta_j \quad s = 1, 2, \dots, S$$

- 从经济学意义上来说，所谓完备市场，就是消费者可以通过买卖市场上的资产，在任何两个状态之间调配资源。

- 为什么要特别关心完备市场？
 - 所有的完备市场都是等价的，任意一个完备市场中得到的结论对所有完备市场都适用。
 - 在完备市场中，消费者有最高的灵活度，可以实现最有效的风险的配置
 - 完备的市场处理起来比非完备市场容易很多——完备的市场都是一样的，但非完备的市场各有各非完备的方式。

完备与非完备市场示例

	A	B
状态1	1	3
状态2	2	4

	A	B
状态1	1	2
状态2	2	4

	A	B	无
状态1	1	0	1
状态2	0	1	1
状态3	1	1	1

Arrow-Debreu市场与Arrow证券

■ Arrow—Debreu市场

$$\mathbf{I} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

■ Arrow证券 (Arrow security)

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ s \\ \vdots \\ S \end{matrix}$$

Arrow证券与资产定价

- 状态价格（state price）：Arrow证券 \mathbf{I}_s 在当前（0期）的价格 φ_s ——1期某个状态下1单位支付在0期的价格

$$\boldsymbol{\varphi} \triangleq [\varphi_1 \quad \cdots \quad \varphi_S]$$

- 资产 j 当前的价格（用Arrow证券来构造资产 j 的组合为 \mathbf{x}^j ）

$$p_j = \boldsymbol{\varphi} \mathbf{x}^j = \sum_{s=1}^S \varphi_s x_s^j$$

- 所有 J 种资产的价格

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\varphi} \mathbf{X} = [\boldsymbol{\varphi} \mathbf{x}^1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\varphi} \mathbf{x}^J] = \left[\sum_{s=1}^S \varphi_s x_s^1 \quad \cdots \quad \sum_{s=1}^S \varphi_s x_s^J \right]$$

- 从完备市场中 S 种线性无关的资产的价格反推Arrow证券价格

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{p} \mathbf{X}^{-1}$$

无风险资产

- 无风险资产是在各个状态中支付都为1的资产

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 无风险资产在0期的价格（记为 ρ ）等于所有Arrow证券的价格之和

$$\rho = \boldsymbol{\varphi} \mathbf{1} = \sum_{s=1}^S \varphi_s$$

消费者优化问题

- 消费者的优化问题：给定在0期及1期 S 个状态中的消费品禀赋 (e_0, e_1, \dots, e_S) ，选择对所有 J 种资产的持有量 $(\theta_1, \dots, \theta_J)$ 来最大化期望效用

$$\begin{aligned} \max_{\theta_1, \dots, \theta_J} & u(c_0) + \delta \sum_{s=1}^S \pi_s u(c_s) \\ \text{s.t.} \quad & c_0 = e_0 - \sum_{j=1}^J p_j \theta_j \\ & c_s = e_s + \sum_{j=1}^J x_s^j \theta_j \quad (s = 1, \dots, S) \end{aligned}$$

- 运用Arrow证券将消费者优化问题简化为

$$\begin{aligned} \max_{\theta_1, \dots, \theta_S} & u(c_0) + \delta \sum_{s=1}^S \pi_s u(c_s) \\ \text{s.t.} \quad & c_0 = e_0 - \sum_{s=1}^S \varphi_s \theta_s \\ & c_s = e_s + \theta_s \quad (s = 1, \dots, S) \end{aligned}$$

代表性消费者优化的一阶条件

- 消费者对市场中存在的 J 种资产的最优选择 $(\theta_1, \dots, \theta_J)$ 问题

$$\max_{\theta_1, \dots, \theta_J} u(c_0) + \delta \sum_{s=1}^S \pi_s u(c_s)$$

$$\text{s.t.} \quad c_0 = e_0 - \sum_{j=1}^J p_j \theta_j$$

$$c_s = e_s + \sum_{j=1}^J x_s^j \theta_j \quad (s = 1, \dots, S)$$

- 约束条件代入目标函数得

$$\max_{\theta_1, \dots, \theta_J} u\left(e_0 - \sum_{j=1}^J p_j \theta_j\right) + \delta \sum_{s=1}^S \pi_s u\left(e_s + \sum_{j=1}^J x_s^j \theta_j\right)$$

- 对 θ_j 的一阶条件为: $p_j u'(c_0) = \delta \sum_{s=1}^S \pi_s u'(c_s) x_s^j$

- 将上式左边两项除到等号右边去，并注意到 x_s^j/p_j 应该等于资产 j 在 s 状态下的（事后）总回报率 $1+r_s^j$ ，可以得

$$1 = \delta \sum_{s=1}^S \pi_s \frac{u'(c_s)}{u'(c_0)} (1 + r_s^j)$$

- 将连加号的形式改写为期望的形式，可得

$$1 = E \left[\delta \frac{u'(\tilde{c}_1)}{u'(c_0)} (1 + \tilde{r}_j) \right]$$

均衡中的资产价格

- 代表性消费者的优化一阶条件

$$1 = E \left[\delta \frac{u'(\tilde{c}_1)}{u'(c_0)} (1 + \tilde{r}_j) \right]$$

- 定义 \tilde{m} 为随机折现因子 (stochastic discount factor)

$$\tilde{m} \triangleq \delta \frac{u'(\tilde{c}_1)}{u'(c_0)}$$

- 资产定价方程

$$1 = E [\tilde{m}(1 + \tilde{r}_j)]$$

- 无风险利率也符合该资产定价方程

$$1 = E [\tilde{m}(1 + r_f)]$$

- 上两式相减，并变形可得

$$\begin{aligned} 0 &= E[\tilde{m}(1 + \tilde{r}_j)] - E[\tilde{m}(1 + r_f)] \\ &= E[\tilde{m}(\tilde{r}_j - r_f)] \\ &= E[\tilde{m}]E[\tilde{r}_j - r_f] + \text{cov}(\tilde{m}, \tilde{r}_j - r_f) \\ &= E[\tilde{m}](E[\tilde{r}_j] - r_f) + \text{cov}(\tilde{m}, \tilde{r}_j) \\ &= \frac{(E[\tilde{r}_j] - r_f)}{1 + r_f} + \text{cov}(\tilde{m}, \tilde{r}_j) \quad \left(\because E[\tilde{m}] = \frac{1}{1 + r_f} \right) \end{aligned}$$

C-CAPM资产定价方程及经济含义

■ C-CAPM资产定价方程

$$E[\tilde{r}_j] - r_f = -(1 + r_f) \text{cov}(\tilde{m}, \tilde{r}_j)$$

■ 利用随机折现因子的定义式可得

$$\begin{aligned} E[\tilde{r}_j] - r_f &= -(1 + r_f) \text{cov}\left(\delta \frac{u'(\tilde{c}_1)}{u'(c_0)}, \tilde{r}_j\right) \\ &= -\frac{\delta(1 + r_f)}{u'(c_0)} \text{cov}(u'(\tilde{c}_1), \tilde{r}_j) \end{aligned}$$

- 资产的期望回报率高低决定于资产回报率与边际效用的协方差
 - “雪中送炭”型资产的期望回报率低（资产价格高）：边际效用越高（消费越低）时回报越高的资产越受人追捧，期望回报率越低
 - “锦上添花”型资产的期望回报率高（资产价格低）：边际效用越高（消费越低）时回报越低的资产越缺乏吸引力，期望回报率因而越高

作为C-CAPM的一个特例的CAPM

■ 假设

- 二次型效用： $u(c) = -ac^2 + bc$ （其中 $a > 0$ ），
 $u'(c) = -2ac + b$
- 市场组合 M 的回报就是经济的总禀赋（ $x_s^M = e_s = c_s$ ，
 $\tilde{r}_M = \tilde{c}_1/p_M - 1$ ）

■ 随机折现因子

$$\tilde{m} \triangleq \delta \frac{u'(\tilde{c}_1)}{u'(c_0)} = \delta \frac{-2a\tilde{c}_1 + b}{-2ac_0 + b}$$

■ C-CAPM定价式变形为

$$\begin{aligned} E[\tilde{r}_j] - r_f &= -(1 + r_f) \operatorname{cov} \left(\delta \frac{-2a\tilde{c}_1 + b}{-2ac_0 + b}, \tilde{r}_j \right) \\ &= \delta \frac{2a(1 + r_f)}{-2ac_0 + b} \operatorname{cov}(\tilde{c}_1, \tilde{r}_j) \\ &= \delta \frac{2a(1 + r_f)p_M}{-2ac_0 + b} \operatorname{cov} \left(\frac{\tilde{c}_1}{p_M} - 1, \tilde{r}_j \right) \\ &= \delta \frac{2a(1 + r_f)p_M}{-2ac_0 + b} \operatorname{cov}(\tilde{r}_M, \tilde{r}_j) \end{aligned}$$

- 将市场组合本身代入上面的式子有

$$E[\tilde{r}_M] - r_f = \delta \frac{2a(1+r_f)p_M}{-2ac_0 + b} \text{var}(\tilde{r}_M)$$

- 上两式相比可得

$$\frac{E[\tilde{r}_j] - r_f}{E[\tilde{r}_M] - r_f} = \frac{\text{cov}(\tilde{r}_M, \tilde{r}_j)}{\text{var}(\tilde{r}_M)}$$

- 定义 $\beta_j = \text{cov}(\tilde{r}_M, \tilde{r}_j) / \text{var}(\tilde{r}_M)$ ，有

$$E[\tilde{r}_j] - r_f = \beta_j (E[\tilde{r}_M] - r_f)$$

- 市场组合的准确经济含义：**市场组合就是整个宏观经济**。宏观经济的禀赋部分来自经济中所有资产的总回报，但还有部分来自其它的来源（比如劳动所得等），所以市场组合的涵盖范围大于经济中所有的资产。

资产定价理论的关键

- 资产定价问题就是如何找出随机折现因子 \tilde{m} 的问题：
 - 理论上：构造随机折现因子，说明它反映了何种影响资产价格的力量
 - 实践中：将随机折现因子与可观测数据联系起来，从而给资产定价

$$p_j = E[\tilde{m}\tilde{x}_j] \quad \Leftrightarrow \quad 1 = E[\tilde{m}(1 + \tilde{r}_j)]$$

- 基于消费的资产资本定价模型（C-CAPM）

$$p_j = E\left[\delta \frac{u'(\tilde{c}_1)}{u'(c_0)} \tilde{x}_j\right] \quad \Leftrightarrow \quad 1 = E\left[\delta \frac{u'(\tilde{c}_1)}{u'(c_0)} (1 + \tilde{r}_j)\right]$$

对资产定价逻辑的再思考

■ 关键问题

- 投资者为什么会买卖资产？
- 市场上为什么会存在对资产的交易？

■ 误导的逻辑

- 对同一种资产有不同的观点不同才会形成交易——有买有卖才有交易
- 正确的观点挣钱，错误的观点亏钱
- 资产交易是个零和博弈

- 正确的逻辑
 - 对同一种资产的不同观点可能都是对的——投资者的消费状况决定了他对资产的评价
 - 资产的交易实现了资源的**跨期和跨状态交换**，最终交换了不同人的消费，实现了风险分散
 - 资产交易是个正和博弈
- 投资分析的正确思路：不是猜心，而是把握市场中那看不见的手

4. Ross套利定价理论

- 资本资产定价理论是现代金融经济学领域最经典的理论之一，它的一个最大的特点是将资产的期望收益率用无风险收益率和市场组合收益率进行线性表示，从而为资产定价提供了极大的便利。
- 然而由于资本资产定价理论继承了**Markowitz** 资产组合理论的严格假设，以及模型中关键量市场组合无法观察的特性，**CAPM**模型在实证方面存在很大的局限性。

- 在**CAPM**模型的实际应用中，往往选择一些以可观察的资产组合（如股票指数）作为市场组合的替代组合。
- 实证研究表明，使用了替代组合的**CAPM**模型的实证效果并不好，误差比较大。
- 从**CAPM**模型的推导过程中可以看出，将市场组合替换为任何非零方差的前沿资产组合，类似的定价公式也应该成立。
- 这些方法的本质思路和**CAPM**是相同的，即将某资产组合的期望收益用无风险收益率和另一资产组合的期望收益率线性表示。

可能有以下两方面的原因：

- 一方面，影响到某资产组合收益率的因素除了另一个资产组合的收益率外还有很多，例如**Banz**提出的公司规模，又如一些宏观因素例如国内生产总值等，它们可能比资产收益率这个因素表现更为出色。由此产生的一种自然的想法是，能否类似**CAPM**模型，在经过适当的标准化后，研究这些因素与资产收益率之间的线性关系？这便是**因子模型**的思想。
- 另一方面，**CAPM**用来线性表示的期望收益率（也就是因子）除了无风险收益率外只有一个，若增加因子数目，从理论上来说，定价公式的效果可能会更好。

- 根据这个思想，多因子模型也就应运而生了。
- 基于多因子模型和一些基本假设，利用渐进无套利的思想，便能得到经典的套利定价模型（**Arbitrage Pricing Model, APT**）。
- 套利定价模型由**Ross**（1976）首先得到，它刻画了资产的超额期望收益率与一些“因子”的风险溢价之间的近似线性关系。从形式上看，**APT**模型是**CAPM**模型的推广；
- 然而，最根本的不同点是，**CAPM**模型基于效用理论，而**APT**模型则基于渐近无套利思想得到。

- **CAPM**是建立在一系列假设之上的非常理想化的模型，这些假设包括**Harry Markowitz**建立均值-方差模型时所作的假设。这其中最关键的假设是**同质性假设**。
- 相反，**APT**所作的假设少得多。**APT**的基本假设之一是：**个体是非满足的**，而不需要风险规避的假设！
 - 每个人都会利用套利机会：在不增加风险的前提下提高回报率。
 - 只要一个人套利，市场就会出现均衡！

4.1 因子模型（Factor model）

- 定义：因子模型是一种假设证券的回报率只与不同的因子波动（相对数）或者指标的运动有关的经济模型。
- 因子模型是APT的基础，其目的是找出这些因素并确认证券收益率对这些因素变动的敏感度。
- 依据因子的数量，可以分为单因子模型和多因子模型。

4.1.1 单因子模型

■ 引子

- 若把经济系统中的所有相关因素作为一个总的宏观经济指数。
 - 假设：（1）证券的回报率仅仅取决于该指数的变化；（2）除此以外的因素是公司特有风险——残余风险
- 则可以建立以宏观经济指数变化为自变量，以证券回报率为因变量的单因子模型。
- 例如，GDP的预期增长率是影响证券回报率的主要因素。

例：设证券回报仅仅与市场因子回报有关

$$\tilde{r}_{it} = a_i + b_{im} \tilde{r}_{mt} + \tilde{\varepsilon}_{it} \quad (5.4.1)$$

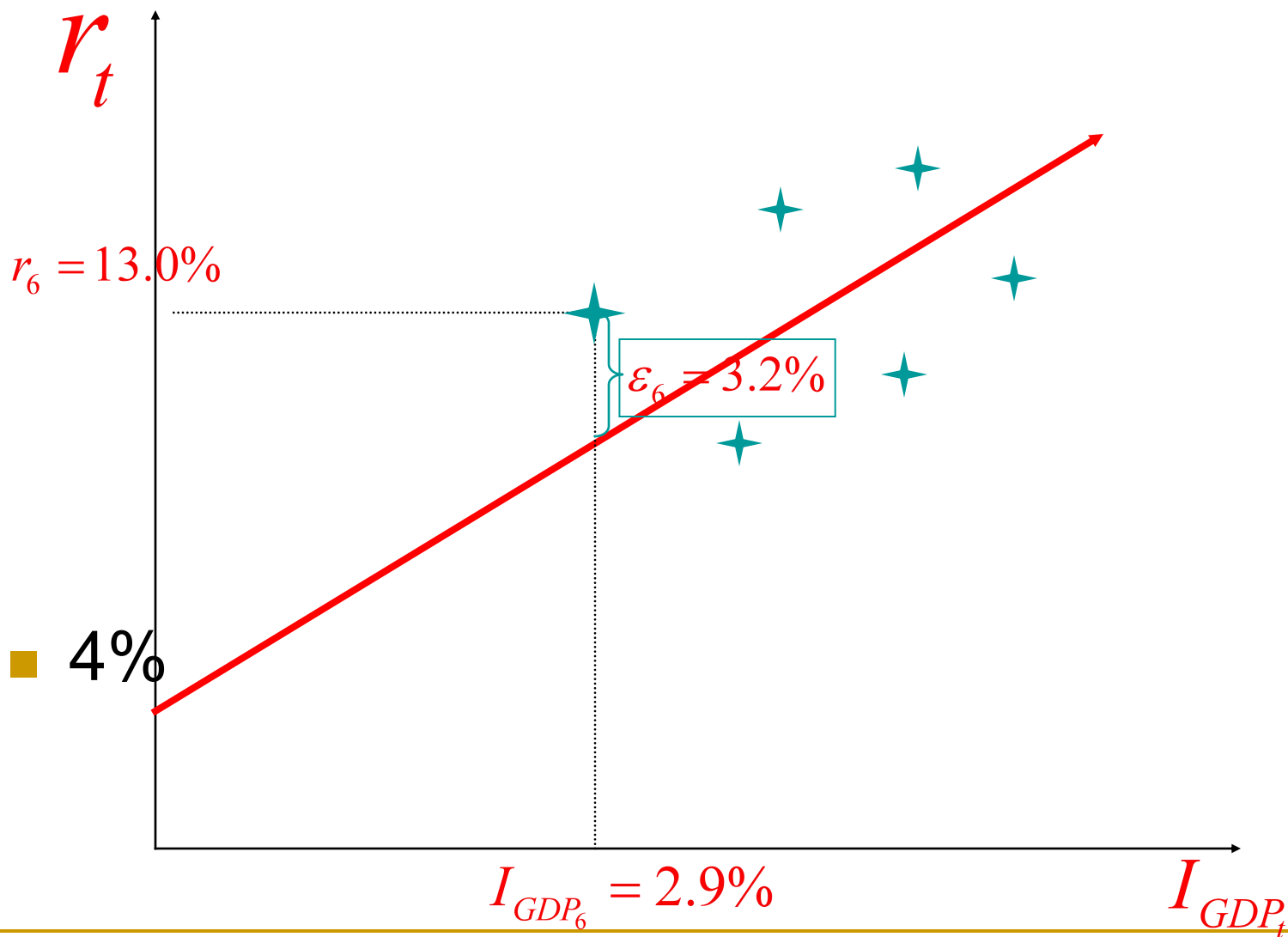
其中

- r_{it} =在给定的时间 t ，证券 i 的回报率
- r_{mt} =在同一时间区间，市场因子 m 的相对数
- a_i =截距项
- b_{im} =证券 i 对因素 m 的敏感度
- ε_{it} =随机误差项

$$E[\tilde{\varepsilon}_{it}] = 0, \text{cov}(\tilde{\varepsilon}_{it}, \tilde{r}_{mt}) = 0, \text{cov}(\tilde{\varepsilon}_{it}, \tilde{\varepsilon}_{jt}) = 0$$

因子模型回归

年份	I_{GDPt} (%)	股票A收益率 (%)
1	5.7	14.3
2	6.4	19.2
3	8.9	23.4
4	8.0	15.6
5	5.1	9.2
6	2.9	13.0



- 图中，横轴表示**GDP**的增长率，纵轴表示股票**A**的回报率。图上的每一点表示：在给定的年份，股票**A**的回报率与**GDP**增长率。
- 通过线性回归，我们得到一条符合这些点的直线为（最小方差估计）

$$r_t = 4\% + 2 I_{GDP_t} + \varepsilon_t$$

- 从这个例子可以看出，**A**在任何一期的回报率包含了三种成份：
 1. 在任何一期都相同的部分 α
 2. 依赖于**GDP**的预期增长率，每一期都不相同的部分 $b \times l_{\text{GDP}t}$
 3. 属于特定一期的特殊部分 ε_{it} 。

通过分析上面这个例子，可归纳出单因子模型的一般形式：对时间 t 的任何证券 i 有时间序列

$$\tilde{r}_{it} = \alpha_i + \beta_i \tilde{f}_t + \tilde{\varepsilon}_{it} \quad (5.4.2)$$

■ 其中：

- \tilde{f}_t 是 t 时期公共因子的预测值；
- r_{it} 在时期 t 证券 i 的回报；
- ε_{it} 在时期 t 证券 i 的特有回报
- α_i 零因子
- β_i 证券 i 对公共因子 f 的因子载荷（factor loading）

为简单计，只考虑在某个特定的时间的因子模型，从而省掉角标 t ，从而（5.4.1）式变为

$$\tilde{r}_i = a_i + b_i \tilde{f} + \tilde{\varepsilon}_i$$

并且假设 (1) $\text{cov}(\tilde{\varepsilon}_i, \tilde{f}) = 0$

$$E [\tilde{\varepsilon}_i] = 0$$

(2) $\text{cov}(\tilde{\varepsilon}_i, \tilde{\varepsilon}_j) = 0$

- **假设1：** 因子 f 具体取什么值对随机项没有影响，即因子 f 与随机项是独立的，这样保证了因子 f 是回报率的唯一因素。
 - 若不独立，结果是什么？
- **假设2：** 一种证券的随机项对其余任何证券的随机项没有影响，换言之，两种证券之所以相关，是由于它们具有共同因子 f 所致。
- 如果上述假设不成立，则单因子模型不准确，应该考虑增加因子或者其他措施。

对于证券*i*，由（5.4.2）其回报率的均值为

$$\bar{r}_i = \alpha_i + \beta_i \bar{f}$$

其回报率的方差

非因子风险

因子风险

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_f^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2$$

对于证券*i*和*j*而言，它们之间的协方差为

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \text{cov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_j) = \text{cov}(\alpha_i + \beta_i \tilde{f} + \tilde{\varepsilon}_i, \alpha_j + \beta_j \tilde{f} + \tilde{\varepsilon}_j) \\ &= \beta_i \beta_j \sigma_f^2\end{aligned}$$

单因子模型的优点

1. 单因子模型能够大大简化我们在均值-方差分析中的估计量和计算量。假定分析人员需要分析 n 种股票，则
 - 均值一方差模型： n 个期望收益， n 个方差， $(n^2 - n)/2$ 个协方差
 - 单因子模型： n 个期望收益， n 个 β_i ， n 个残差 σ_{ei}^2 ， 一个因子 f 方差 σ_f^2 ， 共 $3n + 1$ 个估计值。
 - 若 $n = 50$ ， 前者为 1325， 后者为 151。

单因子模型具有两个重要的性质

2. 风险的分散化

- 分散化导致因子风险的平均化
- 分散化缩小非因子风险

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_p^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n w_i (\alpha_i + \beta_i \tilde{f} + \tilde{\varepsilon}_i) \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_p^2 \sigma_f^2 + \sigma_{\varepsilon p}^2$$

$$\text{其中, } \beta_p = \sum_{i=1}^n w_i \beta_i, \quad \sigma_{\varepsilon p}^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2$$

假设残差有界，即

$$\sigma_{\varepsilon i}^2 \leq s^2$$

且组合 p 高度分散化，即 w_i 充分小，则对于资产 i 成立

$$w_i \leq \varepsilon$$

则有

$$\sigma_{\varepsilon p}^2 \leq \varepsilon s^2 \sum_{i=1}^n w_i = \varepsilon s^2$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_p^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_p^2 \sigma_f^2 + \sigma_{\varepsilon p}^2 = \beta_p^2 \sigma_f^2$$

4.1.2 多因子模型

- 单因素模型的简化是有成本的，它仅仅将资产的不确定性简单地认为与仅仅与一个因子相关，这些因子如利率变化，**GDP**增长率等。
 - 例子：公用事业公司与航空公司，前者对**GDP**不敏感，后者对利率不敏感。
- 单因素模型难以把握公司对不同的宏观经济因素的反应。

多因子模型

对于 n 种证券相关的 K ($K < n$) 个因子, 证券 i 的收益可以表示为

$$\tilde{r}_i = \alpha + \sum_{l=1}^K \beta_{il} \tilde{f}_l + \tilde{\varepsilon}_i$$

其中, $i=1, \dots, n; l=1, \dots, K$

$$E[\tilde{\varepsilon}_i] = 0, \text{cov}(\tilde{\varepsilon}_i, \tilde{f}_j) = 0$$

$$\text{cov}(\tilde{\varepsilon}_i, \tilde{\varepsilon}_k) = 0, i \neq k$$

4.2 套利定价理论（APT）

- 定义：**套利（Arbitrage）**是同时持有一种或者多种资产的多头或空头，从而存在不承担风险的情况下锁定一个高于无风险利率的收益。
 - 不花钱就能挣到钱，即免费的午餐！
- 两种套利方法：
 - 当前时刻净支出为0，将来获得正收益（收益净现值为正）
 - 当前时刻一系列能带来正收益的投资，将来的净支出为零（支出的净现值为0）。

- **一价定律（Law of one price）**：在竞争性市场中，两项相同资产的均衡价格应该相同。
- **无套利原则（Non-arbitrage principle）**：根据一价定律，两种具有相同风险的资产（组合）不能以不同的期望收益率出售。
 - 套利行为将导致一个价格调整过程，最终使同一种资产的价格趋于相等，套利机会消失！

一次套利机会？ (1)

- 三种证券的价格和可能的收益

证券	价格	状态 1 下的收益	状态 2 下的收益
A	70	50	100
B	60	30	120
C	80	38	112

一次套利机会？ (2)

- 利用证券 A 和 B 来构造一个投资组合，使得该组合的收益与证券 C 的收益完全相同

$$\text{状态 1 : } 50w_A + 30w_B = 38$$

$$\text{状态 2 : } 100w_A + 120w_B = 112$$

$$\Rightarrow w_A = 0.4, \quad w_B = 0.6$$

$$\Rightarrow \text{该组合的构造成本} = 0.4 \times 70 + 0.6 \times 60 = 64$$

一次套利机会？ (3)

- 假设卖出1000单位的证券C
- 套利的结果：

证券	投资	状态 1	状态 2
A	-28,000	+20,000	+40,000
B	-36,000	+18,000	+72,000
C	+80,000	-38,000	-112,000
总计	+16,000	0	0

构建套利组合（Arbitrage portfolio）

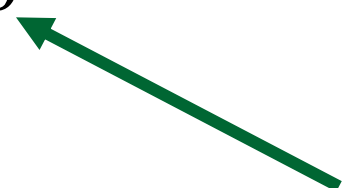
- **1.零投资：** 套利组合中对一种证券的购买所需要的资金可以由卖出别的证券来提供，即自融资（**Self-financing**）组合。
- **2.无风险：** 在因子模型条件下，因子波动导致风险，因此，无风险就是套利组合对任何因子的敏感度为0。
- **3.正收益：** 套利组合的期望收益大于零。

用数学表示就是

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n w_i = 0 \quad (5.4.4) \\ \sum_{i=1}^n \beta_i w_i = 0 \quad (5.4.5) \\ \sum_{i=1}^n w_i \bar{r}_i > 0 \quad (5.4.6) \end{array} \right.$$

$Var(\sum_{i=1}^n w_i \tilde{r}_i) = Var(\sum_{i=1}^n w_i [\bar{r}_i + \beta_i \tilde{f} + \tilde{\varepsilon}_i])$
 $= Var(\sum_{i=1}^n w_i \beta_i \tilde{f})$
 $= Var(\tilde{f}) (\sum_{i=1}^n w_i \beta_i)^2$

若要 $Var(\sum_{i=1}^n w_i \tilde{r}_i) = 0$, 则要 $\sum_{i=1}^n w_i \beta_i = 0$



- **APT的基本原理：**由无套利原则，在因子模型下，具有相同因子敏感性的资产（组合）应提供相同的期望收益率。
- **APT与CAPM的比较**
 - **APT**对资产的评价不是基于马科维茨模型，而是基于无套利原则和因子模型。
 - 不要求“同质期望”假设，并不要求人人一致行动。只需要少数投资者的套利活动就能消除套利机会。
 - 不要求投资者是风险规避的！

APT的基本假设

- 如同CAPM模型，APT模型的成立也离不开一系列的基本假设。然而相比与CAPM模型，APT模型的假设更为宽松，更符合市场实际情况。
- **假设 1 市场上资产的交易不存在摩擦**，即不存在任何形式的交易成本，包括交易费用与市场流动性风险造成的交易成本。并且假设市场上允许对资产进行卖空，即允许资产投资权重为负数。另外，还假设资产无限可分，即可以买入或者卖出任意小份额的资产。市场是完全竞争的，单个个体的投资行为不会影响资产的市场价格。

- **假设 2 市场是无套利的。**市场中存在足够多的套利者，一旦市场中出现套利机会，他们会构造尽可能多的套利组合进行套利，从而消除套利机会。
- **假设 3 市场中存在无风险资产，并且其市场买卖价格相等。**
- **假设 4 所有个体对市场中资产收益率有着相同的预期，任何资产的收益率满足 K 因子模型。**
- **假设 5 市场中资产的数量足够多；特别地，资产数量大于因子的数目。**

- 假设 1和假设3延续了CAPM模型的假设，它为APT模型的建立以及推导提供了方便。
- 假设2是关于市场的无套利假设，与Markowitz 资产组合理论和CAPM模型有最本质的区别。Markowitz资产组合理论和CAPM 模型是基于个体效用的理论，通过研究并假设个体效用函数或偏好特征，对市场中的资产进行绝对定价。
- APT模型是无套利模型，通过假设市场中不存在套利机会，它得到了所需定价的资产与市场中其它资产价格间必须存在的关系，从而对资产进行相对定价。

两资产套利定价模型

假设投资者构造这样的资产组合：

(1) 无风险利率借入1元钱；

(2) 1元钱投资在两种资产，

这样构造一个自融资组合。

设无风险利率为 r_f ，两个资产分别是资产 i 和资产 j ，在因子模型的假设下，套利组合的收益为(忽略残差)

$$\begin{aligned}\tilde{r}_p &= w(\bar{r}_i + \beta_i \tilde{f}) + (1 - w)(\bar{r}_j + \beta_j \tilde{f}) - 1 \times r_f \\ &= [w(\bar{r}_i - \bar{r}_j) + \bar{r}_j - r_f] + [w(\beta_i - \beta_j) + \beta_j] \tilde{f}\end{aligned}$$

根据条件（2），当 $w(\beta_i - \beta_j) + \beta_j = 0$ ，即

$$w^* = -\frac{\beta_j}{\beta_i - \beta_j} \text{ 时, } \tilde{r}_p \text{ 无风险}$$

若不存在套利机会，则该套利组合的收益为0

$$\tilde{r}_p = -\frac{\beta_j}{\beta_i - \beta_j}(\bar{r}_i - \bar{r}_j) + \bar{r}_j - r_f = 0,$$

$$\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i} = \frac{\bar{r}_j - r_f}{\beta_j} \triangleq \lambda_1$$

$$\bar{r}_i = r_f + \lambda_1 \beta_i$$

无误差项的一般套利定价模型

定理5.5：假设 n 种资产其收益率 K 个因子决定（ $K < n$ ），即

$$\tilde{r}_i = \bar{r}_i + \sum_{l=1}^K \beta_{il} \tilde{f}_l$$

其中， $i=1,2,\dots,n$ ， $l=1,2,\dots,K$ ，则

$$\bar{r}_i = r_f + \sum_{l=1}^K \beta_{il} \lambda_l$$

$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_K$ 为常数

证明：假设在资产 i 上投资 w_i ，构造零投资且无风险的组合，即 w_i 满足下列条件

$$\text{零投资} \quad \sum_{i=1}^n w_i = \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 0 \quad (5.4.7)$$

$$\text{无风险} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n w_i \beta_{i1} = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\beta}_1 = 0 \\ \sum_{i=1}^n w_i \beta_{i2} = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\beta}_2 = 0 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \sum_{i=1}^n w_i \beta_{iK} = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\beta}_K = 0 \end{array} \right. \quad (5.4.8)$$

其中， $\mathbf{1}$ 、 $\boldsymbol{\beta}_j$ ($j=1, 2, \dots, K$) 线性无关。

如果市场有效，则不会有套利均衡，即零投资、无风险的组合必然是无收益的，从而只要
(5.4.7) 和 (5.4.8) 成立，则蕴含

$$\sum_{i=1}^n w_i \bar{r}_i = \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{r}} = 0$$

这等价于，只要

$$\mathbf{w} \perp \mathbf{1}, \mathbf{w} \perp \boldsymbol{\beta}_j, j = 1, \dots, K$$

对于任意的 \mathbf{w} ，必然有

$$\mathbf{w} \perp \bar{\mathbf{r}}$$

又由于非零向量 $\mathbf{1}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K$ 线性无关，则 $\bar{\mathbf{r}}$ 必定落在由 $\mathbf{1}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K$ 张成的向量空间 \mathbf{R}^{K+1} 中，也就是存在一组不全为零的数 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_K$ 使得

$$\bar{\mathbf{r}} = \lambda_0 \mathbf{1} + \lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \dots + \lambda_K \beta_K$$

证毕。

$\mathbf{1}$ 和 β_j 是该空间的一组基

理解： $\bar{\mathbf{r}}$ 必须落在 \mathbf{R}^{K+1} 空间中，才能必然成立

$$\mathbf{w} \perp \bar{\mathbf{r}}$$

- 定理5.5所得到的线性定价公式严格成立，这是一个非常漂亮的结论。但是不难发现，为了得到这样的结论，定理所需附加的条件也极为严格：**假设多因子模型的残差项为零**。
- 从经济学意义上说，这样的假设要求风险资产的风险只来源于系统性风险，而不存在非系统性风险。这样的假设显然是不合理的。
- 下面的定理放松了残差项为零的假设，尝试得到相似的结论。当然，此时的结论也相应地变弱：线性定价公式只是对大部分资产近似地成立。

■ 由于下面的推导过程以及结论是基于极限意义得到的，假设2中的无套利概念需要进行相应的推广。极限意义下的套利机会是指这样一个自融资套利组合序列，它们的期望收益率有严格大于零的下界，同时方差收敛于0。严格地说，套利组合序列 $\{p_n\}$ 满足

$$(1) \quad p_n \text{ 是自融资组合} \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

$$(2) \quad E[\tilde{r}_{p_n}] \geq a > 0, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}[\tilde{r}_{p_n}] = 0.$$

- 从直观意义上来看，假设市场中存在足够多的资产，如果市场中存在极限意义下的套利机会，则存在一个资产组合，它的构建成本为0，而期望收益率严格大于0，并且风险小到可以被忽略。对于套利者来说，这样的资产组合几乎是免费的午餐。如果套利者构造尽可能多的这样的组合进行套利，市场上不应该存在极限意义下的套利机会。因此，在下面的论述中，我们引入渐进无套利假设：

假设2' (渐近无套利假设) 市场上不存在极限意义下的套利机会。

下面开始近似线性定价公式的证明。首先需要证明如下引理，它弱于定理5.5，但为近似线性定价公式的成立提供了必要条件。

引理5.6 对于任意实数 $\varepsilon > 0$ ，存在正整数 N ，使得对于任意子市场 M_n ，除了至多 N 个资产外，其余资产 i 均满足

$$\left| \alpha_i^n - \left(1 - \sum_{l=1}^K \beta_{il}^n \right) r_f \right| < \varepsilon. \quad (5.4.9)$$

证明：对于任意实数 $\varepsilon > 0$ ，记 $C_\varepsilon(n)$ 为 M_n 中不满足引理中不等式的资产数量。则由于 $\{M_n\}$ 的单调性， $C_\varepsilon(n)$ 关于 n 单调递增。

定理结论等价于存在 N ，使得

$$C_\varepsilon(n) \leq N, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

假设结论不成立，则存在 $\varepsilon_0 > 0$ ，使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{\varepsilon_0}(n) = \infty.$$

不失一般性，假设 M_n 中不满足引理中不等式的资产下标集合为 $\{1, 2, \dots, C_\varepsilon(n)\}$ 。

对于每个经济体 M_n 中的资产 \tilde{r}_i^n ， $i = 1, 2, \dots, C_{\varepsilon_0}(n)$ ，构造资产组合 p_i^n ，它由无风险资产与 K 个因子资产组成。

其中投资于无风险资产的权重为 $\omega_{i0}^n = 1 - \sum_{l=1}^K \beta_{il}^n$ ，而投资于因子 l 的权重为 $\omega_{il}^n = \beta_{il}^n$ 。然后构造如下自融资组合 SF_i^n ：

■ 当 $\alpha_i^n > \left(1 - \sum_{l=1}^K \beta_{il}^n\right) r_f$ 时, 买入1元 p_i^n , 卖空1元资产 \tilde{r}_i^n ;

■ 当 $\alpha_i^n < \left(1 - \sum_{l=1}^K \beta_{il}^n\right) r_f$ 时, 卖空1元 p_i^n , 买入1元资产 \tilde{r}_i^n 。

■ 则通过直接的计算可知, 自融资组合 SF_i^n 的收益额为

$$\left| \alpha_i^n - \left(1 - \sum_{l=1}^K \beta_{il}^n\right) r_f \right| + \text{sgn} \left(\alpha_i^n - \left(1 - \sum_{l=1}^K \beta_{il}^n\right) r_f \right) \tilde{\varepsilon}_i^n.$$

接着对于 M_n ，取资产组合

$$S_n = \frac{1}{C_{\varepsilon_0}(n)} \sum_{j=1}^{C_{\varepsilon_0}(n)} SF_j^n$$

即 S_n 为 $C_{\varepsilon_0}(n)$ 个自融资资产组合 $SF_1^n, \dots, SF_{C_{\varepsilon_0}(n)}^n$ 的权重为 $1/C_{\varepsilon_0}(n)$ 的等权重凸组合。因此 S_n 也是自融资组合，同时其期望收益率为

$$E(n) = \frac{1}{C_{\varepsilon_0}(n)} \sum_{j=1}^{C_{\varepsilon_0}(n)} \left| \alpha_i^n - \left(1 - \sum_{l=1}^K \beta_{il}^n \right) r_f \right| \geq \varepsilon_0 > 0. \quad (5.4.10)$$

其方差为

$$V(n) = \frac{1}{C_{\varepsilon_0}^2(n)} \sum_{j=1}^{C_{\varepsilon_0}(n)} Var[\tilde{\varepsilon}_i^n] \leq \frac{\sigma^2}{C_{\varepsilon_0}(n)}.$$

■ 由于(5.4.10)，上式可以推出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(n) = 0. \quad (5.4.11)$$

■ 因此，自融资组合序列 $\{S_n\}$ 是极限意义下的套利组合，这与渐近无套利假设（假设2'）矛盾。因此引理得证。

- 引理5.6有下面的直观理解。在残差项不为零的情形下，严格的公式不再成立，往往只能做到近似成立，即

$$\alpha_i^n \approx \left(1 - \sum_{l=1}^K \beta_{il}^n \right) r_f. \quad (5.4.12)$$

- 然而，对这个近似式的精度可以做出要求。不管精度要求多高(即不管 $\varepsilon > 0$ 多小)，除了有限个资产外(不超过 N 个)，(5.4.12)式对于市场中其余资产均成立。

■ 因此，当市场中资产数量足够多（远远大于 N 时），近似式(5.4.12)对于市场中绝大部分资产都是成立的。将(5.4.12)代入(5.4.6)并取期望，可以得到如下的套利定价模型：

■ **定理 5.7（套利定价模型）** 在APT模型假设下，对于资产 \tilde{r}_i ，下式近似成立：

$$E[\tilde{r}_i] - r_f = \sum_{l=1}^K \beta_{il} (E[\tilde{f}_l] - r_f).$$

APT的意义

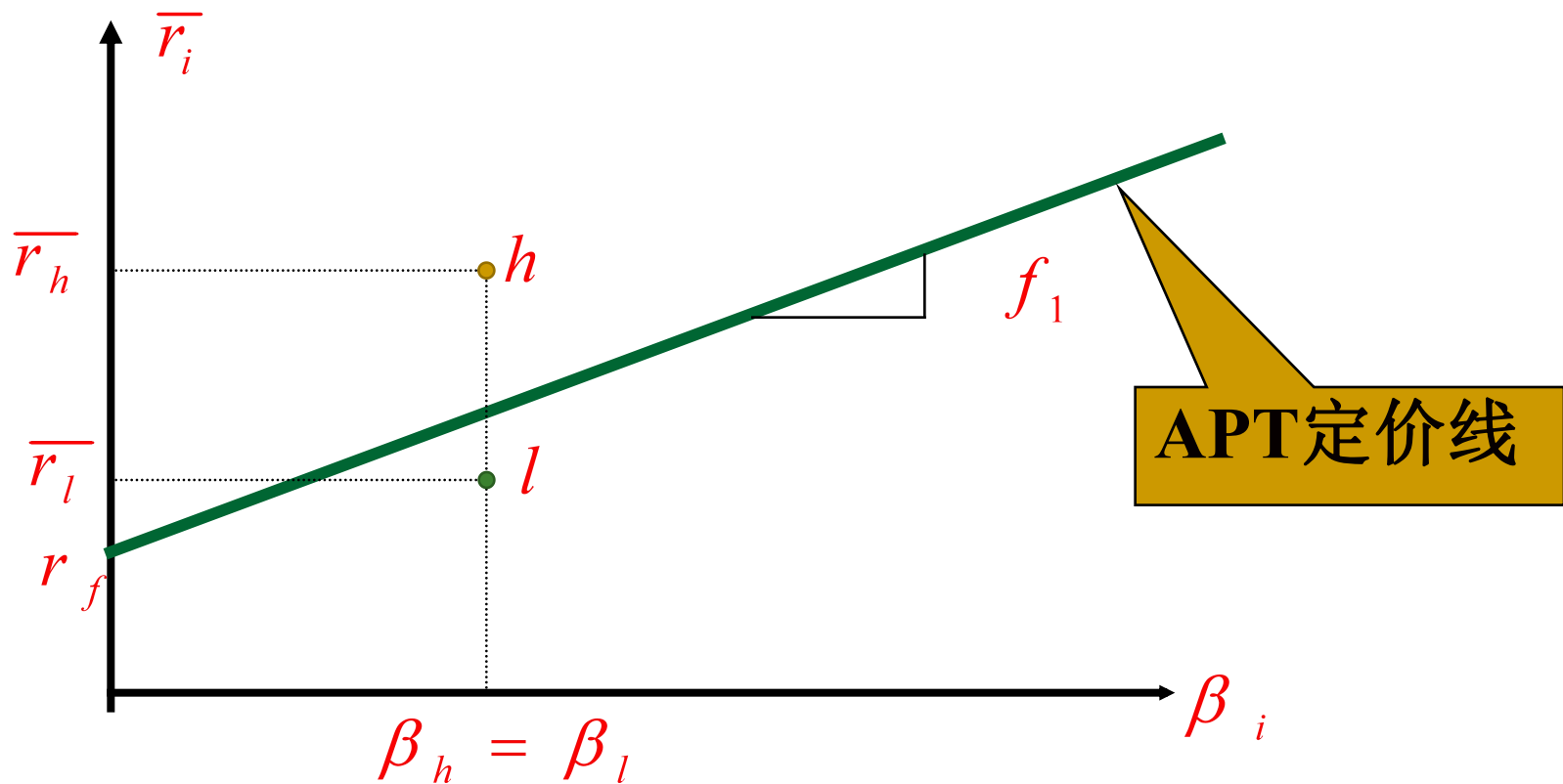
在单因子条件下，有 $\bar{r}_i = r_f + \beta_i f_1, i = 1, \dots, n$

对于所有风险资产则有

$$f_1 = \frac{\bar{r}_1 - r_f}{\beta_1} = \frac{\bar{r}_2 - r_f}{\beta_2} = \dots = \frac{\bar{r}_n - r_f}{\beta_n}$$

由此可见，*APT*方程的斜率 f_1 实际上是因子1的风险价格。

结论：当所有证券关于因子的风险价格相等时，
则证券之间不存在套利。



若给定等投资额的证券 h 多头和证券 l 空头，则形成套利组合。投资者为获利必定尽可能地购入证券 h ，从而使其价格上升，预期收益率下降，最终到达**APT定价线**。在均衡时，所有的证券都落在套利定价线上，只要证券偏离APT定价线就会有套利机会。

APT的另一种表达

在单因子模型下，考虑一个使 $\beta_p = 1$ 的（资产）组合 p ，即 $\bar{r}_p = r_f + f_1$ ，则有 $f_1 = \bar{r}_p - r_f$

则称该组合 p 为**纯因子组合**(类似于CAPM的市场组合)

令 $\delta = \bar{r}_p$ ，即风险价格 $f_1 = \delta - r_f$ ，则

$$\bar{r}_i = r_f + f_1 \beta_i = r_f + (\delta - r_f) \beta_i$$

特别地，当 $\delta = \bar{r}_m$ ，即纯因子组合为市场组合时有

$$\bar{r}_i = r_f + (\bar{r}_m - r_f) \beta_i$$

在多因子模型下

$$\begin{aligned}\bar{r}_i &= \lambda_0 + \beta_{i1}f_1 + \beta_{i2}f_2 + \dots + \beta_{im}f_m \\ &= r_f + \beta_{i1}(\delta_1 - r_f) + \beta_{i2}(\delta_2 - r_f) + \dots + \beta_{im}(\delta_m - r_f)\end{aligned}$$

其中， δ_j 为因子 $j(j=1,\dots,m)$ 的纯因子组合的期望收益

- 证券的期望收益率等于无风险收益率，加上 j 个因素的风险补偿（风险价格 \times 风险因子载荷）；
- 资产对风险因子的敏感度（因子载荷）越大，则其应得到的风险补偿越大。

例子

假定市场可以用下面的三种系统性风险及相应的风险溢价进行描述：

要素	风险溢价（%）
工业生产(I)	6
利率(R)	2
消费者信心(C)	4

特定股票的收益率可以用下面的方程来确定

$$\tilde{r} = 15\% + 1.0\tilde{I} + 0.5\tilde{R} + 0.75\tilde{C} + \varepsilon$$

使用套利定价理论确定该股票的均衡收益率。假设无风险利率为 6%，股票当前的预期收益率 $E(r) = 15\%$ 。该股票价格是低估还是高估了？解释原因。

根据APT，该股票的期望收益率为

$$\begin{aligned}\bar{r} &= r_f + 1.0\lambda_I + 0.5\lambda_R + 0.75\lambda_c \\ &= 6\% + 1 \times 6\% + 0.5 \times 2\% + 0.75 \times 4\% \\ &= 16\%\end{aligned}$$

股票当前的预期收益率 $E(r) = 15\%$ (因为所有因素的预期到的变动都定义为0)。基于风险的要求收益率超过了实际的预期收益率，我们可以得出结论说该股票定价过高。

也就是15%的收益率是不满足无套利的，若无套利，则收益率应该是16%。

练习

考虑如下一种特定股票收益的多因子证券收益模型：

要素	因子载荷	风险溢价（%）
通货膨胀	1.2	6
行业生产	0.5	8
石油价格	0.3	3

（a）短期国库券可提供6%的收益率，如果市场认为该股票是公平定价的，那么请求出该股票的期望收益率。

(b) 假定下面第一列给出的三种宏观因素的值是市场预测值，而实际值在第二列给出。在这种情况下，计算该股票修正后的期望收益率。

要素	预期变化率(%)	实际变化率 (%)
通货膨胀	5	4
行业生产	3	6
石油价格	2	0

APT与CAPM的一致性

■ APT与CAPM的一致性

- 若只有一个风险因子，且纯因子组合是市场组合，则当APT与CAPM均成立时有

$$\bar{r}_i = r_f + b_i(\delta_1 - r_f) = r_f + b_i f_1$$

$$\bar{r}_i = r_f + \beta_i(\bar{r}_m - r_f)$$

显然，若纯因子组合是市场组合

即 $\delta_1 = \bar{r}_m$, b_i 代表 β_i ，则APT与CAPM一致。

- 因此从某种意义上讲，CAPM是APT的一个特例。

CAPM与APT的区别

- 1.若纯因子组合不是市场组合，则APT与CAPM不一定一致，CAPM仅仅是APT的特例。当且仅当纯因子组合是市场组合时，CAPM与APT等价。
- 2.在CAPM中，市场组合居于不可或缺的地位，但APT即使在没有市场组合条件下仍成立。
 - APT模型可以得到与CAPM类似的期望回报- β 直线关系，但并不要求组合一定是市场组合，可以是任何风险分散良好的组合。

$$\bar{r}_i = r_f + b_i(\delta_1 - r_f)$$

注意二者并不一致

$$\bar{r}_i = r_f + \beta_i(\bar{r}_m - r_f)$$

由于市场组合在实际中是无法得到的，因此，在实际应用中，只要指数基金等组合，其即可满足APT。所以APT的适用性更强！

- 3. **CAPM**属于单一时期模型，但**APT**并不受到单一时期的限制。
- 4. 模型的假定条件不同，**APT**的推导以无套利为核心，**CAPM**则以均值一方差模型为核心，隐含投资者风险厌恶的假设，但**APT**无此假设。
- 5. 在**CAPM**中，证券的风险只与市场组合的 β 相关，它只给出了市场风险大小，而没有表明风险来自何处。**APT**承认有多种因素影响证券价格，从而扩大了资产定价的思考范围（**CAPM**认为资产定价仅有一个因素），也为识别证券风险的来源提供了分析工具。

- 6. 建立模型的出发点不同。APT考察的是当市场不存在无风险套利而达到均衡时,资产如何均衡定价,而CAPM考察的是当所有投资者都以相似的方法投资,市场最终调节到均衡时,资产如何定价。
- 7. 描述形成均衡状态的机理不同。当市场面临证券定价不合理而产生价格压力时,按照APT的思想,即使是少数几个投资者的套利行为也会使市场尽快地重新恢复均衡;而按CAPM的思想,所有投资者都将改变其投资策略,调整他们选择的投资组合,他们共同行为的结果才促使市场重新回到均衡状态。
- 8. 定价范围及精度不同。

APT对资产组合的指导意义

- **APT**对系统风险进行了细分，使得投资者能够测量资产对各种系统因素的敏感系数，因而可以使得投资组合的选择更准确。例如，基金可以选择最佳的因素敏感系数的组合。
- **APT的局限**：决定资产的价格可能存在多种因素，模型本身不能确定这些因素是什么和因素的数量，实践中因素的选择常常具有经验性和随意性。