§5.5 (广义)似然比检验((Generalized) Likelihood Ratio Test)

一、广义似然比检验

设$\widetilde{X}=(X_1,\cdots,X_n)$为来自总体$X\sim p(x;\theta)$的样本，其中$p(x;\theta)$为pmf 或pdf. 则似然函数为

$$L(\theta;\widetilde{x})=p(\widetilde{x};\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta),\quad \theta\in\Theta.$$

考察假设检验问题

$$H_0:\theta\in\Theta_0\longleftrightarrow H_1:\theta\in\Theta_1=\Theta_0^c. \tag{1}$$

Definition

定义5.5.1 令

$$\lambda(\tilde{x}) = \frac{\sup_{\theta\in\Theta} L(\theta;\tilde{x})}{\sup_{\theta\in\Theta_0} L(\theta;\tilde{x})} = \frac{L(\widehat{\theta};\tilde{x})}{L(\widehat{\theta}_0;\tilde{x})},$$

其中

$$\widehat{\theta}_0 = \arg\sup_{\theta\in\Theta_0} L(\theta;\tilde{x}), \quad \widehat{\theta} = \arg\sup_{\theta\in\Theta} L(\theta;\tilde{x}).$$

称$\lambda(\tilde{x})$为(广义)似然比((generalized) likelihood ratio), 而称$\lambda(\tilde{X})$为检验问题(1)的(广义)似然比(检验)统计量. 拒绝域为$\{\tilde{x} : \lambda(\tilde{x}) > C\}$的检验称为(广义)似然比检验((generalized) likelihood ratio test).

求临界值C，仍然根据Neyman-Pearson原则，先要求满足

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} \mathsf{P}_\theta\{\lambda(\widetilde{X}) > C\} \le \alpha \quad \text{且尽可能接近}\alpha.$$

有时据此式不易求出C，但如果存在另一个统计量$G = G(\widetilde{X})$，且$\lambda(\widetilde{X})$随$G(\widetilde{X})$上升而严格上升(或,上升而严格下降)，而且$G(\widetilde{X})$的分布为我们所熟知或其分位数容易得到，那么据$G(\widetilde{X})$可定出拒绝域:

$$D = \{\widetilde{x} : G(\widetilde{x}) > C'\} \quad (\text{或} \quad D = \{\widetilde{x} : G(\widetilde{x}) < C''\}),$$

其中C'(或C'')满足如下条件:

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} \mathsf{P}_\theta\{G(\widetilde{X}) > C'\} \le \alpha \quad \text{且尽可能接近}\alpha$$

$$(\text{或} \sup_{\theta\in\Theta_0} \mathsf{P}_\theta\{G(\widetilde{X}) < C''\} \le \alpha \quad \text{且尽可能接近}\alpha).$$

则基于G的拒绝域

$$D=\{\widetilde{x}:G(\widetilde{x})>C'\}\ \ (\text{或}\ \ D=\{\widetilde{x}:G(\widetilde{x})<C''\})$$

与$\{\widetilde{x}:\lambda(\widetilde{x})>C\}$等价，这样构造的检验也是广义似然比检验.

Example

对正态分布族$\{N(\mu,\sigma^2): -\infty<\mu<\infty, \sigma>0\}$. 检验

$$H_0: \mu=\mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu\neq\mu_0.$$

求GLRT.

解：设$\widetilde{X}=(X_1,\cdots,X_n)$是抽取的样本，则似然函数为

$$L(\mu,\sigma^2;\widetilde{x})=(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2\}, \mu\in\mathbb{R}, \sigma>0.$$

在参数空间

$$\Theta = \{(\mu, \sigma^2) : -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0\}$$

上，μ和σ^2的MLE为

$$\widehat{\mu} = \overline{X}, \quad \widehat{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2/n = S_n^2;$$

从而

$$L(\widehat{\mu}, \widehat{\sigma^2}; \widetilde{X}) = (2\pi S_n^2)^{-n/2} e^{-n/2}.$$

而在

$$\Theta_0 = \{(\mu_0, \sigma^2) : \sigma > 0\}$$

上，$\mu = \mu_0$，σ^2的MLE为

$$\widehat{\sigma_0^2} = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2 / n.$$

从而

$$L(\mu_0, \widehat{\sigma_0^2}; \widetilde{X}) = (2\pi \widehat{\sigma_0^2})^{-n/2} e^{-n/2}.$$

所以

$$\lambda(\widetilde{X}) = \frac{L(\widehat{\mu}, \widehat{\sigma^2}; \widetilde{X})}{L(\mu_0, \widehat{\sigma_0^2}; \widetilde{X})} = (\widehat{\sigma_0^2}/\widehat{\sigma^2})^{n/2} = \left(1 + \frac{(\overline{X} - \mu_0)^2}{S_n^2}\right)^{n/2}$$

$$= \left\{1 + \left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{S_n^*/\sqrt{n}}\right)^2 /(n-1)\right\}^{n/2} = \left(1 + t^2/(n-1)\right)^{n/2},$$

其中$t = t(\widetilde{X}) = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S_n^*/\sqrt{n}}$. 那么$\lambda(\widetilde{X})$是$|t|$的严格单调上升函数, 所以GLRT等价于

$$\text{当}|t| > C' \text{ 时, 拒绝}H_0; \qquad \text{当}|t| \le C' \text{ 时, 接受}H_0.$$

这也就是t检验, C'取为$t_{\alpha/2}(n-1)$.

二、分布的似然比检验

假设关于总体X的密度函数(或分布列)$p(x;\theta)$可提出如下两个假设:

$$H_0 : p(x;\theta) = p_0(x;\theta) \longleftrightarrow H_1 : p(x;\theta) = p_1(x;\theta).$$

为检验这两个假设中哪一个更合理, 从总体X中取样本$\widetilde{X} = (X_1, \cdots, X_n)$.

令

$$\lambda(\widetilde{x}) = \frac{L_1(\widehat{\theta}_1; \widetilde{x})}{L_0(\widehat{\theta}_0; \widetilde{x})} = \frac{\prod_{i=1}^n p_1(x_i; \widehat{\theta}_1)}{\prod_{i=1}^n p_0(x_i; \widehat{\theta}_0)} = \frac{\sup_\theta \prod_{i=1}^n p_1(x_i; \theta)}{\sup_\theta \prod_{i=1}^n p_0(x_i; \theta)}.$$

取$\lambda(\widetilde{X})$为检验统计量.

$$当\lambda(\widetilde{x}) > C \text{ 时, 拒绝} H_0; \qquad 当\lambda(\widetilde{x}) \le C \text{ 时, 接受} H_0.$$

其中, C满足

$$\mathsf{P}(\lambda(\widetilde{X}) > C | H_0 \text{ 为真}) \le \alpha \ \text{ 且尽可能接近}\alpha.$$

Example

考虑假设检验问题:

$$H_0: \ p(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},$$
$$H_1: \ p(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}, \quad x > \mu.$$

解: 在H_0为真时, μ和σ^2的MLE 为

$$\widehat{\mu}_0 = \overline{X} \ \text{ 和 } \ \widehat{\sigma_0^2} = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2/n = S_n^2.$$

$$\sup L(\mu,\sigma^2;\widetilde{x}|H_0) = L(\widehat{\mu}_0, \widehat{\sigma_0^2}; \widetilde{x}|H_0) = (2\pi\widehat{\sigma_0^2})^{-n/2}e^{-n/2}.$$

在H_1为真时，μ和σ的MLE 为

$$\widehat{\mu}_1 = X_{(1)} \text{ 和 } \widehat{\sigma}_1 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})/n.$$

$$\sup L(\mu,\sigma;\widetilde{x}|H_1) = L(\widehat{\mu}_1,\widehat{\sigma}_1;\widetilde{x}|H_1) = (\widehat{\sigma}_1)^{-n}e^{-n}.$$

似然比统计量为

$$\lambda(\widetilde{X}) = (2\pi/e)^{n/2}\cdot D^n.$$

其中

$$D = \frac{S_n}{\sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})/n}.$$

$\lambda(\widetilde{X})$关于D严格增加, 所以区分正态分布与指数分布可取D为检验统计量.

令$Y_i = (X_i - \mu)/\sigma$, 则

$$D = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2/n}}{\sum_{i=1}^n (Y_i - Y_{(1)})/n}.$$

在H_0为真时, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ i.i.d. $\sim N(0,1)$.

在H_1为真时, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ i.i.d. $\sim E(1)$.

D的分布与参数μ, σ无关.

取D_α使得

$$\mathsf{P}\{D > D_\alpha | H_0\} = \mathsf{P}\{D > D_\alpha | \text{总体分布为} N(0,1)\} = \alpha.$$

拒绝域为

$$\{\widetilde{x} : d > D_\alpha\}.$$

D的近似分布和D_α的近似值可由随机模拟方法求得.

D_α 的模拟法:

Step 1. 产生n个标准正态随机数$y_1, \ldots, y_n$, 代入D中, 计算D的观察值d_1;

Step 2. 重复Step1 N次, 得到N个D的观察值$d_1, \cdots, d_N$;

Step 3. 取$d_1, \cdots, d_N$的样本上侧α分位数$\widehat{D}_\alpha$ 作为D_α的近似.

此时

$$p - value = \frac{\sharp\{i : d_i > d(\tilde{x})\}}{N},$$

其中$d(\tilde{x})$是将样本代入检验统计量D后所得的统计量的值.

三、大样本似然比检验

为构造水平为α的似然比检验, 我们要求临界值C使得

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} \mathsf{P}_\theta\{\lambda(\widetilde{X}) > C\} \leq \alpha.$$

这就需要知道似然比检验统计量$\lambda(\widetilde{X})$的分布. 在应用中, 它的精确分布往往比较复杂, 甚至难以计算得到它的精确分布.

Theorem

(LRT的渐近分布,简单原假设情形) 考察假设检验问题

$$H_0 : \theta = \theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta \neq \theta_0.$$

设$\widetilde{X} = (X_1, \cdots, X_n)$是从总体$p(x;\theta)$抽取的$i.i.d.$样本. 设$p(x;\theta)$满足适当的正则条件, 则在$H_0$下,

$$2\log\lambda(\widetilde{X}) \xrightarrow{D} \chi^2(1), \quad n \to \infty.$$

证明的大致思路：将对数似然函数$l(\theta;\widetilde{X})=\log L(\theta;\widetilde{X})$(其中$L(\theta;\widetilde{x})=\prod_{i=1}^n p(x_i;\theta)$) 在$\theta$的MLE$\widehat{\theta}$处Taylor展开得

$$l(\theta;\widetilde{X})=l(\widehat{\theta};\widetilde{X})+l'(\widehat{\theta};\widetilde{X})(\theta-\widehat{\theta})+\frac{1}{2}l''(\widehat{\theta};\widetilde{X})(\theta-\widehat{\theta})^2+\cdots.$$

而

$$2\log\lambda(\widetilde{X})=2l(\widehat{\theta};\widetilde{X})-2l(\theta_0;\widetilde{X}),$$

将$l(\theta_0;\widetilde{X})$的展开式代入上式,并注意到$l'(\widehat{\theta};\widetilde{X})=0$，得

$$2\log\lambda(\widetilde{X})\approx -l''(\widehat{\theta};\widetilde{X})(\theta_0-\widehat{\theta})^2.$$

由于在H_0下，当$n \to \infty$,

$$\frac{1}{n} l''(\widehat{\theta}; \widetilde{X}) \approx \frac{1}{n} l''(\theta_0; \widetilde{X}) \xrightarrow{P} -I(\theta_0)$$

且

$$\sqrt{n}(\theta_0 - \widehat{\theta}) \xrightarrow{D} N(0, I^{-1}(\theta_0)).$$

所以

$$2\log\lambda(\widetilde{X}) \xrightarrow{D} \chi^2(1), \quad n \to \infty.$$

Theorem

(LRT的渐近分布,复合原假设情形) 考察假设检验问题

$$H_0: \theta \in \Theta_0 \longleftrightarrow H_1: \theta \notin \Theta_0.$$

设$\widetilde{X} = (X_1, \cdots, X_n)$是从总体$p(x;\theta)$抽取的$i.i.d.$样本. 设$p(x;\theta)$满足适当的正则条件. 则在$H_0$下,

$$2\log\lambda(\widetilde{X}) \xrightarrow{D} \chi^2(\nu), \quad n \to \infty$$

其中χ^2分布的自由度

$$\nu = \text{参数空间}\Theta\text{的自由参数的个数}$$
$$- \text{用来表示}\Theta_0\text{的自由参数的个数}.$$

Bayeian Tests

考察假设检验问题

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1.$$

在求得θ的后验分布$\pi(\theta|\widetilde{x})$后，计算$\Theta_0$和$\Theta_1$发生的概率

$$\begin{aligned} \alpha_0 =& \mathsf{P}\big(H_0 \text{ is true } |\widetilde{x}\big) = \mathsf{P}\big(\theta \in \Theta_0|\widetilde{x}\big), \\ \alpha_1 =& \mathsf{P}\big(H_1 \text{ is true } |\widetilde{x}\big) = \mathsf{P}\big(\theta \in \Theta_1|\widetilde{x}\big). \end{aligned}$$

检验法则如下

$$当\frac{\alpha_0}{\alpha_1} \geq 1 \text{ 时接受}H_0，\text{ 否则拒绝}H_0,$$

若$\Theta_1 = \Theta_0^c$, 则拒绝域为

$$\left\{\widetilde{x} : \mathsf{P}\big(\theta \in \Theta_0^c | \widetilde{x}\big) > \frac{1}{2}\right\}.$$

如果希望保护原假设, 拒绝域有时也可定义为

$$\left\{\widetilde{x} : \mathsf{P}\big(\theta \in \Theta_0^c | \widetilde{x}\big) > 1 - \alpha\right\}.$$