金融数学

第7章 期权定价理论（二）

第7章 期权定价理论（二）

5. Black-Scholes期权定价模型
6. 期权的希腊字母
7. 波动率微笑

5. Black-Scholes期权定价模型

5.1 Black—Scholes模型的假设条件

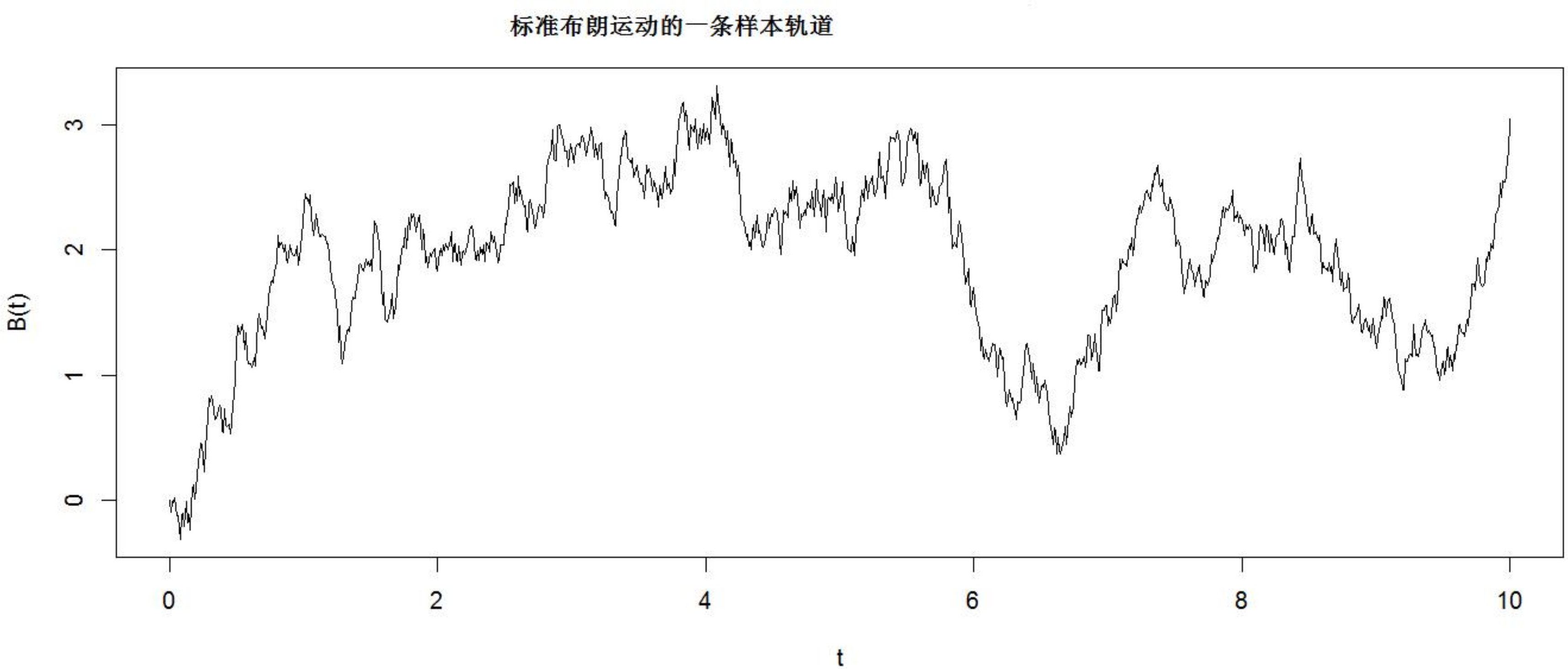
- 基础资产可以自由买卖，并可分割成若干部分
- 基础资产可以卖空
- 以同样无风险利率可以进行借、贷，且连续发生
- 没有税收、交易成本和保证金要求
- 资产的收益率服从正态分布
- 基础资产价格连续
- 基础资产在到期日前不支付股息及其他收入
- 基础资产价格和利率的变化在期权有效期内保持一贯
- 期权为欧式期权，到期日前不可行权

标准维纳过程(布朗运动)

- 考虑一个变量z，它的取值连续变化
- 定义 $N(\mu,\sigma)$ 为一个正态分布，其均值为μ，方差为 σ^2
- 微小时间区间Δt 内的变化量为 Δz
- 如果
  - $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$　　其中，$\varepsilon \sim N(0,1)$
  - 任意2个不同时间期间（没有重叠）的Δz 值是相互独立的

则变量z 遵循**标准维纳过程** (或**标准布朗运动**)

- 股价行为通常用维纳过程来描述，它是Markov过程的一种特殊形式
- 维纳过程 z 是一个描述正态分布变量变化的过程。该过程的漂移率为0，方差率为1。这就是说，在0时刻变量的值为 x ，在T时刻它服从均值为x，标准差为 $\sqrt{T}$ 的正态分布



标准维纳过程的一条样本轨道

一般维纳过程

- 一般维纳过程描述了单位时间内漂移率的期望值为a，方差率的期望值为 b^2 的正态分布变量的变化过程，其中a和b为常数
- 变量 x 的一般化维纳过程用dz 定义如下：

$$dx = a\,dt + b\,dz$$

Itô 过程

- *Itô* 过程是一个一般化的维纳过程，是变量x的漂移率和方差率均为 x 本身和时间 t 的函数的过程。数学表达式为：

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

其中，参数a和b是标的变量 x 和 t 的函数。

关于股票价格变化的假设

- 标的物股票价格的变化遵循对数正态分布的随机过程：

1）股票价格连续变化

2）在期权生命期内，股票的预期收益和方差保持不变。

3）任何时间段股票的收益和其它时间段股票的收益相互独立。

4）任何时间段股票的复利收益率服从正态分布。

- 考虑一只价格为S的股票
- 在时间段 δt内, 股票收益的一般分布为:

$$\frac{\delta S}{S} \approx \phi\left(\mu \delta t, \sigma \sqrt{\delta t}\right)$$

μ 是期望收益， σ 是波动率

股票价格的 *Itô* 过程 (几何布朗运动)

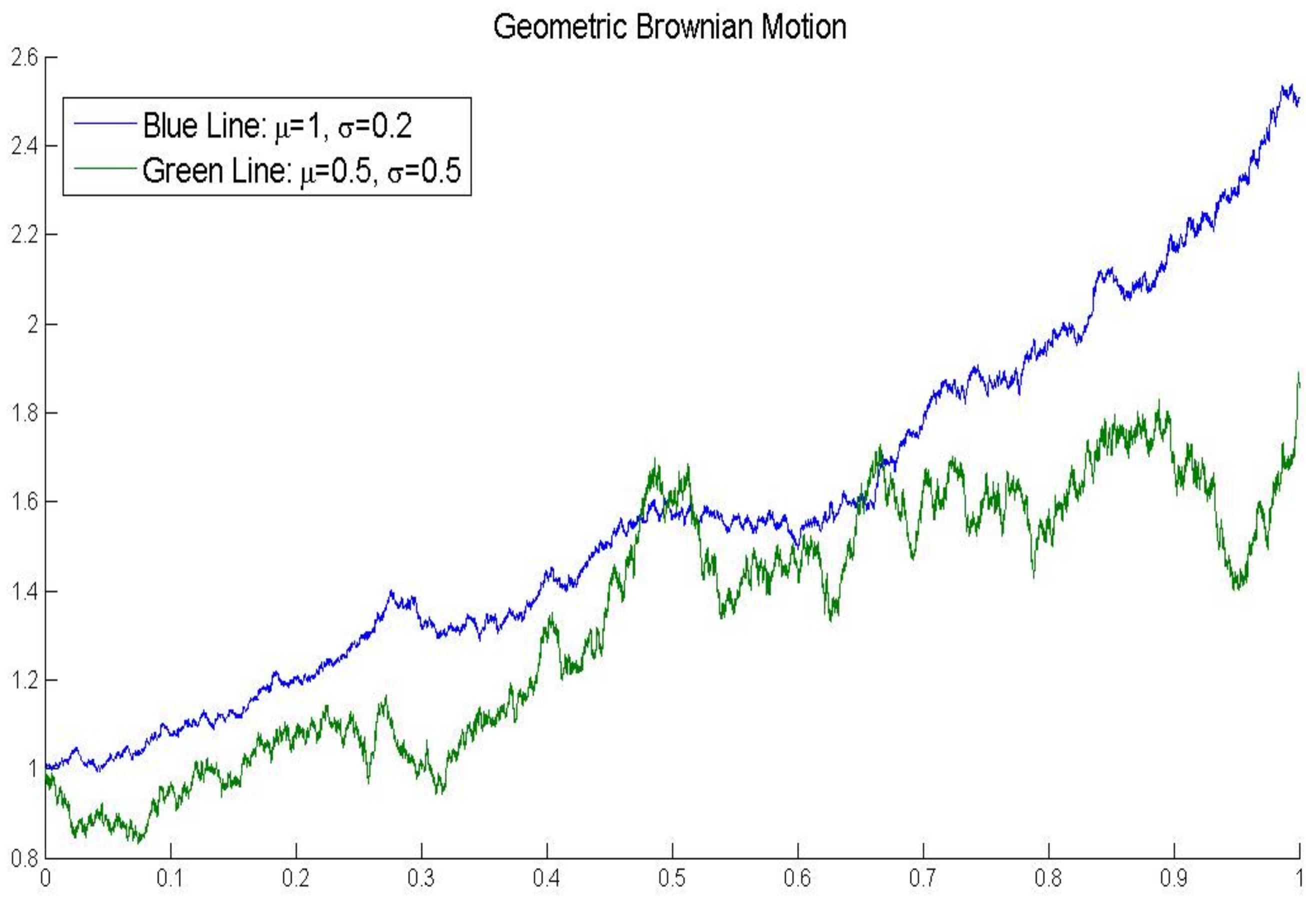
$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

其中，μ是期望收益率（**漂移率**），σ是**波动率**。等价地，离散时间过程表示为

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

这是**B-S期权定价模型的基础性假设**，也是金融中最重要最普遍的假设之一。

几何布朗运动图示


Geometric Brownian Motion
Blue Line: μ=1, σ=0.2
Green Line: μ=0.5, σ=0.5
2.6
2.4
2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Itô 引理

- 任何一种衍生证券的价格都是这些衍生证券标的随机变量和时间的函数
- *Itô* 引理表明 z 和 t 的函数G 遵循如下过程：

$$dG=\left(\frac{\partial G}{\partial x}a+\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt+\frac{\partial G}{\partial x}bdz$$

其中 z 是一般维纳过程，因此G也遵循Ito 过程。它的漂移率为 $\frac{\partial G}{\partial x}a+\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2$ ，方差率为 $\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 b^2$ 。

$It\hat{o}$引理在股票价格过程中的应用

- 由几何布朗运动得：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

μ和σ为常数，这是股票价格运动的一个合理的模型。

从Ito引理得到 S 与 t 的函数G遵循的过程为：

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma S dz$$

- $\ln S$遵循怎样的随机过程？
- 由于μ和σ为常数，所以S服从 $a(S,t)=\mu S$，$b(S,t)=\sigma S$ 的伊藤过程，可以运用伊藤引理推导$\ln S$所遵循的随机过程。
- 令$G=\ln S$，则：

$$\frac{\partial G}{\partial S}=\frac{1}{S},\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}=-\frac{1}{S^2},\frac{\partial G}{\partial t}=0$$

- 代入式（11.7），就可得到$G=\ln S$所遵循的随机过程为：

$$dG=d\ln S=(\mu-\frac{\sigma^2}{2})dt+\sigma dz$$

股票价格的对数正态分布性质

- 如下所示

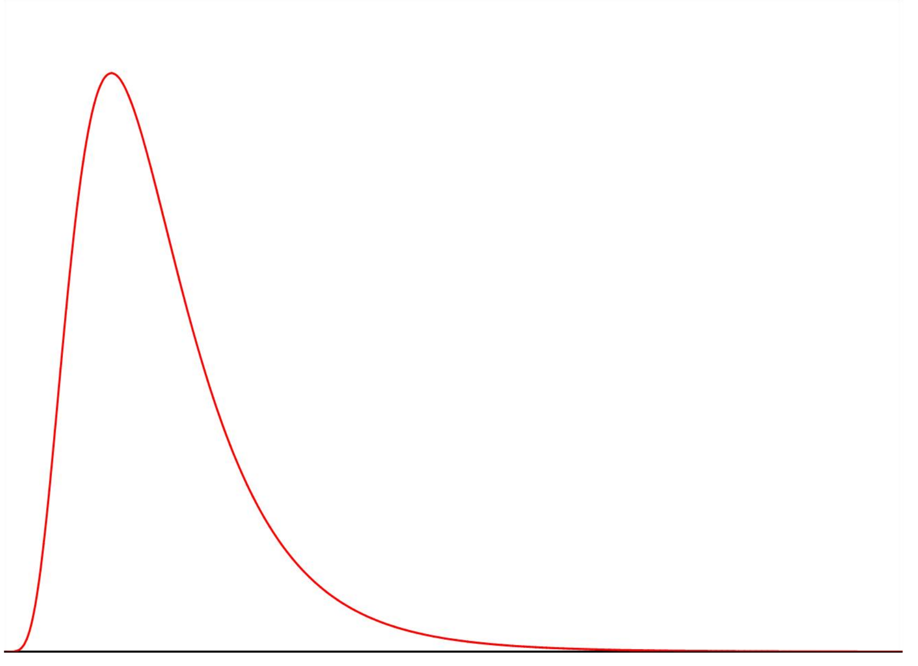
$$\ln S_T - \ln S_0 \approx \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T,\ \sigma\sqrt{T}\right]$$

or

$$\ln S_T \approx \phi\left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T,\ \sigma\sqrt{T}\right]$$

- S_T的自然对数服从正态分布，所以S_T服从对数正态分布

对数正态分布



$$E(S_T) = S_0 \, e^{\mu T}$$

$$\text{var}(S_T) = S_0^{\,2} e^{2\mu T}(e^{\sigma^2 T} - 1)$$

连续复利收益, η

$$S_T = S_0 e^{\eta T}$$

或者

$$\eta = \frac{1}{T} \ln \frac{S_T}{S_0}$$

或者

$$\eta \approx \phi\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \ \frac{\sigma}{\sqrt{T}}\right)$$

期望收益

- 股票价格的期望价值是$S_0e^{\mu T}$
- 股票的期望收益是$\mu - \sigma^2/2$

$$E\left[\ln(S_T / S_0)\right] = \mu - \sigma^2 / 2$$
$$\ln\left[E(S_T / S_0)\right] = \mu$$

波动率

- 波动率是按连续复利计的、1年的股票收益率的标准差
- 表示资产价格在1年内变化百分比的标准差

5.2 B-S模型公式

$$c = S(t)N(d_1) - Ke^{-r_f(T-t)}N(d_2)$$

$$p = Ke^{-r_f(T-t)}N(-d_2) - S(t)N(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(S(t)/K\right) + \left(r_f + \sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(S(t)/K\right) + \left(r_f - \sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy.$$

$N(d)$表示标准正态分布小于d的概率。

- 不分红的股票欧式期权的价值由五个因素决定：股票的市场价格、期权执行价格、期权距离到期的时间、无风险利率以及标的股票的波动率。
- 令人疑惑的是，期权定价公式中竟然**没有出现标的股票的期望收益率**。
- 实际上，标的股票的增值潜力已经反应在标的股票市场价格之中。在其它条件相同的情况下，标的股票的增值潜力越大，其市场价格就越高；增值潜力越小，其市场价格就越低。

无收益资产的欧式期权定价

例：假设某只不支付红利股票的市价为50元，无风险利率为12%，该股票的年波动率为10%，求该股票协议价格为50元、期限1年的欧式看涨期权和看跌期权的价格。

- **解**：相关参数表达如下：S=50，X=50，r=0.12，σ=0.1，T=1.计算过程可以分为三步:
- 第一步，先算出d_1和d_2：

$$d_1=\frac{\ln(\frac{50}{50})+(0.12+\frac{0.01}{2})*1}{0.1*\sqrt{1}}=1.25$$

$$d_2=d_1-0.1*\sqrt{1}=1.15$$

- 第二步，计算N（d_1）和N（d_2）。

  N（d_1）= N（1.25）=0.8944

  N（d_2）= N（1.15）=0.8749

- 第三步，将上述结果及已知条件代入B-S公式，这样，欧式看涨期权和看跌期权价格分别为：

  $c=50*0.8944-50*0.8749e^{-0.12*1}=5.92$美元

  $p=50*(1-0.8749)e^{-0.12*1}-50*(1-0.8944)=0.27$美元

5.3 B-S模型推导之一：动态无套利分析

核心思想：采用典型的动态无套利均衡分析技术，在t=0时刻购买一个由标的物股票和一种无风险证券构成的证券组合，然后不断动态调整其头寸使之保持无套利均衡关系，一直到t=T为止。

复制过程的特点：

- 与复制1份欧式买权相对应，股票的头寸始终小于1股
- 所对应的股票头寸的大小称为**套头比**或期权的德尔塔(Δ)：

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$$

- Δ不停的发生变化，调整是自融资的。

分析过程：

- $\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$份标的物的多头和$L$份的无风险证券的空头。满足关系：

$$f = \frac{\partial f}{\partial S} S - L$$

- 整理后：

$$L = \frac{\partial f}{\partial S} S - f$$

经过一段微小的时间 dt，上式可写为：

$$dL = -df + \frac{\partial f}{\partial S} dS$$

将以藤过程和伊藤引理代入，

$$dL = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt$$

注意到，上面的表达式右边已不再出现随机项z，这意味1份期权的空头和Δ份股票的多头能够实现风险的完全对冲，而Δ是动态变化的。所以右边的二者的组合和无风险证券等价。

于是，

$$\frac{dL}{L} = r_f dt \qquad \frac{dL}{dt} = r_f L$$

$\frac{dL}{L} = r_f dt$表示 dt 时间的预期收益率

令 dt 趋于0，把 dL 和 L 代入可得布莱克-舒尔斯方程：

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t}+r_f S\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2=r_f f}$$

满足的边界条件（$t=T$）：

- 对于买权： $c=f(T,S)=\max(S-K,0)$
- 对于卖权： $p=f(T,S)=\max(K-S,0)$

5.4 B-S模型推导之二：风险中性方法

- 在B-S模型中，通过动态对冲的办法，风险被完全的对冲而消除掉，方程中不再含随机项 z
- 方程中也不再含有 μ ，这意味着与投资者的风险偏好无关。这样风险中性假设将可适用。
- 我们可以把B-S随机微分方程放到一个**“风险中性”的世界**里研究。所有投资者都是风险中性的，他们对有风险资产的收益都不需要风险补偿。

- 在风险中性世界中，所有有风险资产的收益率都相等，为无风险收益率 r_f。
- 假设现在为时刻 t，则有：

$$E^*\left[\frac{\widetilde{S}(T)}{S(t)}\right]=\exp(r_f(T-t))$$

其中，E^*是用风险中性概率求得数学期望。

- 我们把问题转移到风险中性世界里，并没有改变股票价格的运动规律和变化方式。所以股价仍然服从对数正态分布。
- 波动率也应当保持不变。
- 但是，$\mu^* = \mu - 1/2\sigma^2$ 将会发生变化，在风险中性世界里，我们记为：$\overline{\mu}$ 。

下面来看这个 $\overline{\mu}$ 是什么：

从前面分析（现实世界）：

$$E(\widetilde{S}(T)) = S(t)\exp(\mu^*(T-t) + \tfrac{1}{2}\sigma^2(T-t))$$

在风险中性世界里：

$$E^*(\widetilde{S}(T)) = S(t)\exp(\overline{\mu}(T-t) + \tfrac{1}{2}\sigma^2(T-t))$$

同时，

$$E^*(\widetilde{S}(T)) = S(t)\exp(r_f(T-t))$$

于是我们得到：

$$\overline{\mu} = r_f - \tfrac{1}{2}\sigma^2$$

- 下面以买权为例求解B-S方程：
- 在风险中性世界里，未来带有不确定性现金流的数学期望值用无风险利率折现后的现值就是均衡价。
- 在期末时，买权的价值为：

$$\max[\widetilde{S}(T) - K, 0]$$

在风险中性世界里的定价应该为：

$$c(S(t),t)=e^{-r_f(T-t)}E^*\{\max[\widetilde{S}(T)-K,0]\}$$

记 f^* 为风险中性概率的密度函数，则上式可写为：

$$c(S(t),t)=e^{-r_f(T-t)}\int_0^{\infty}\max[\widetilde{S}(T)-K,0]f^*(\widetilde{S}(T))d\widetilde{S}(T)$$

$$=e^{-r_f(T-t)}\int_K^{\infty}[\widetilde{S}(T)-K]f^*(\widetilde{S}(T))d\widetilde{S}(T)$$

我们知道在风险中性的世界里，股价也是服从对数正态分布。从而收益率服从正态分布，即：

$$\ln\left(\frac{\tilde{S}(T)}{S(t)}\right) \sim N(\overline{\mu}(T-t), \sigma^2(T-t))$$

作变量替换：

$$z = \frac{\ln\left(\frac{\tilde{S}(T)}{S(t)}\right) - \overline{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

可知 z 服从标准正态分布：

$$z \sim N(0, 1)$$

代入原积分可得：

$$c(S(t),t) = S(t)\int_{-\bar{d}}^{\infty} e^{z\sigma\sqrt{T-t}+(\bar{\mu}-r_f)(T-t)} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz - Ke^{-r_f(T-t)}\int_{-\bar{d}}^{\infty} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz$$

$$= S(t)e^{(\bar{\mu}-r_f+\sigma^2/2)(T-t)}\int_{-\infty}^{\bar{d}+\sigma\sqrt{T-t}} \frac{e^{-w^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dw - Ke^{-r_f(T-t)}\int_{-\infty}^{\bar{d}} \frac{e^{-w^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dw$$

$$= S(t)N(\bar{d}+\sigma\sqrt{T-t}) - Ke^{-r_f(T-t)}N(\bar{d})$$

其中，

$$\bar{d} = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \bar{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

代入 $\bar{\mu}=r_f-\frac{1}{2}\sigma^2$ ，得到

$$\bar{d}=\frac{\ln\left(\frac{S(t)}{X}\right)+(r_f-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}=d_2$$

于是有 $d_1=d_2+\sigma\sqrt{T-t}$

于是就得到了著名的B-S公式：

$$c=S(t)N(d_1)-Ke^{-r_f(T-t)}N(d_2)$$

5.5 B-S模型的进一步解释

- 在假想的风险中性世界里，$N(d_2)$表示股票价格高于预定价的（风险中性）概率：

$$P^*(\widetilde{S}(T) > K) = N(d_2)$$

- $N(d_1)$实际上是动态的套头比：

$$\Delta_c = \frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1)$$

$$\Delta_p = \frac{\partial p}{\partial S} = -N(-d_1)$$

- B-S模型是假设利率不变的。一般来说，除了利率期权外，利率的变化对期权的价值影响并不大。如果在期权生命周期内，市场无风险利率要发生变化，那么在波动率不变时，可以用到期日与期权相同的零息票债券的累计收益率来代替$r_f(T-t)$。即使波动率发生变化，利率变化对期权的价值的影响也不大。

6. 期权的希腊字母

期权的希腊字母

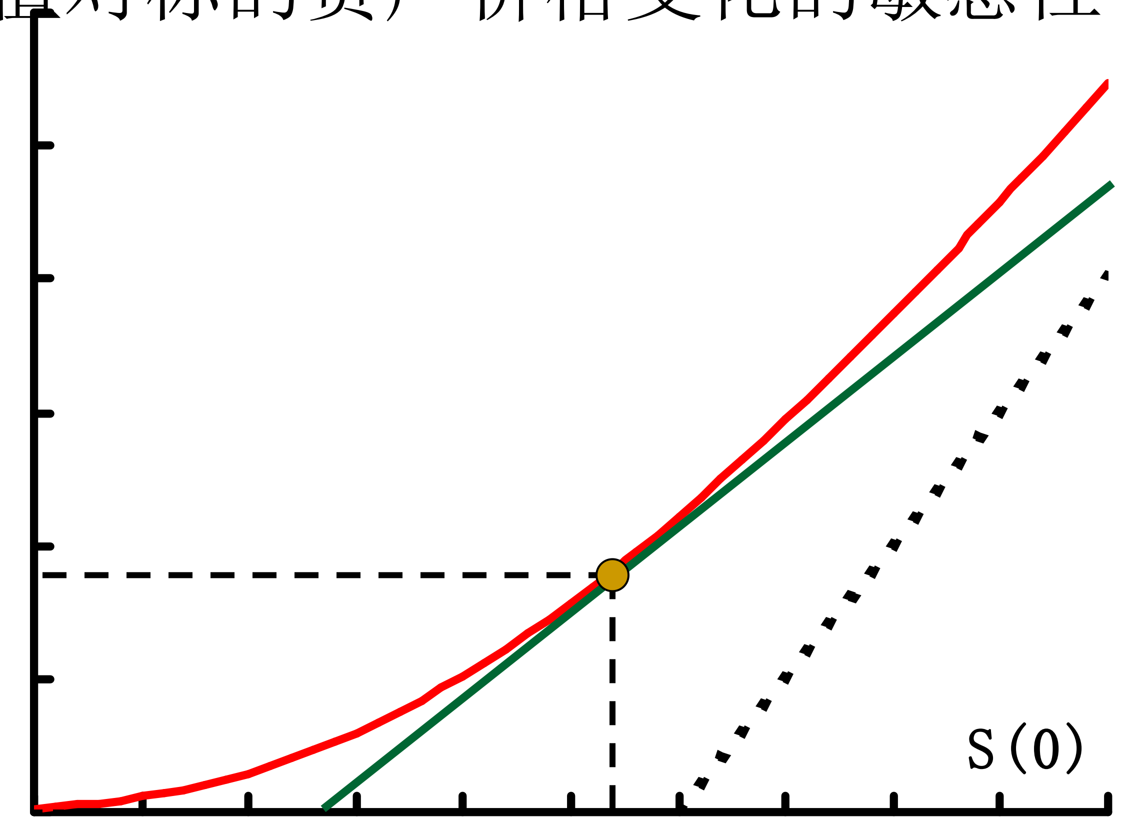
- 希腊字母度量期权的风险，用于期权头寸的风险管理
- 期权价值的决定因素包括股价、到期时间、波动率、无风险利率以及执行价格，其中易变的因素有四个：
  - 股价：Delta, Gamma
  - 到期时间：Theta
  - 波动率：Vega
  - 无风险利率：Rho

Delta

- Delta是期权价值对标的资产价格的偏导数，度量了期权价值对标的资产价格变化的敏感性

$$\Delta \triangleq \frac{\partial c}{\partial S}$$

- 图示

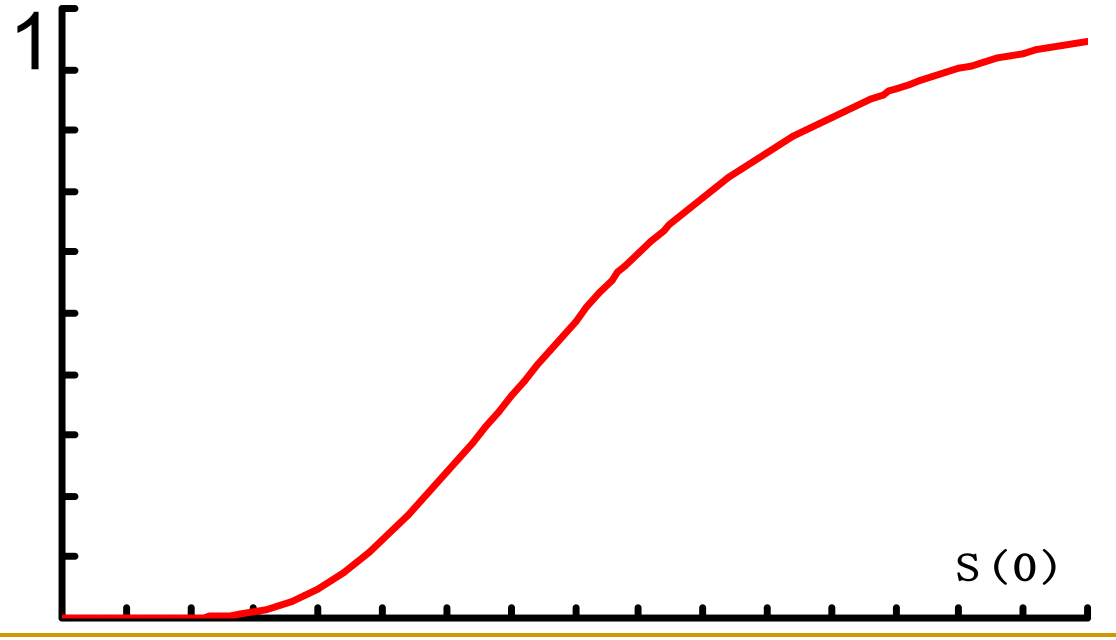


Delta

- 利用BS公式，可以推导出

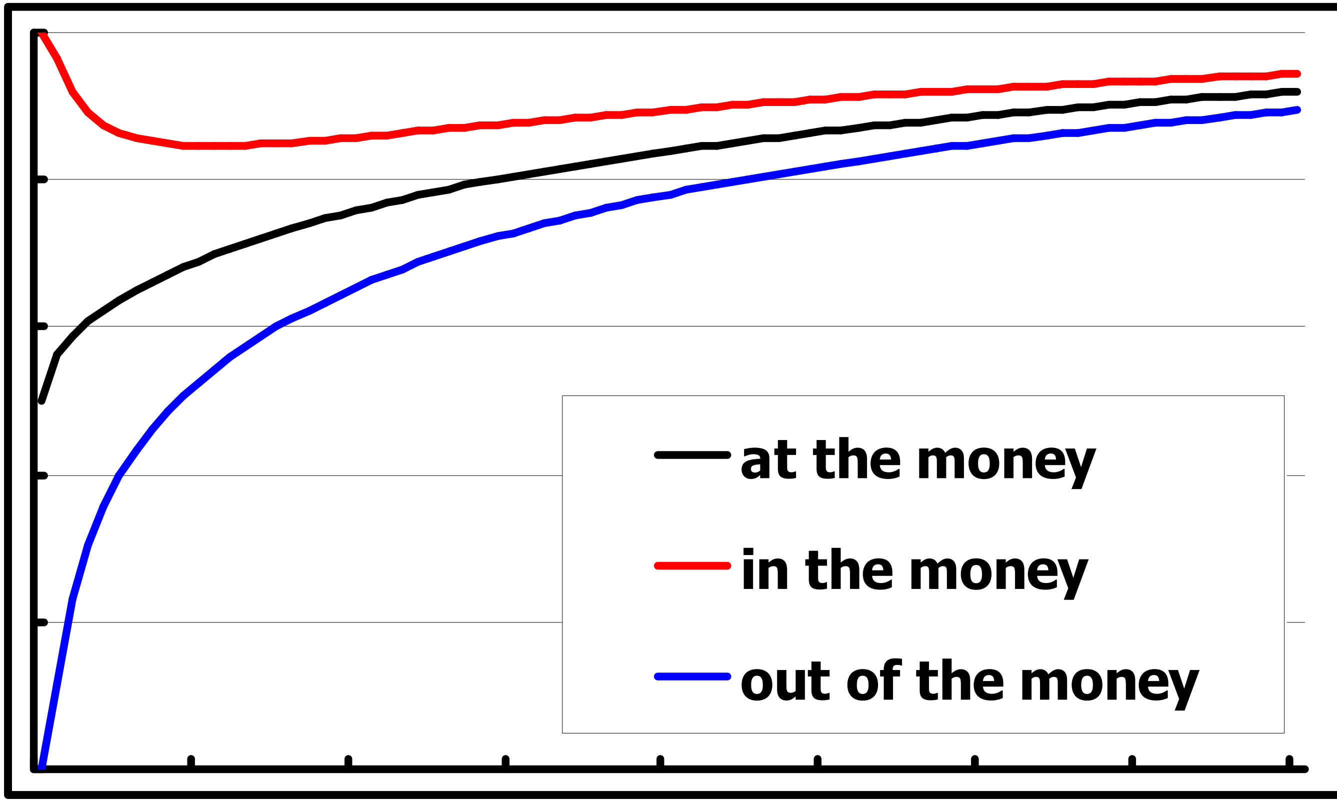
$$\Delta_c = N(d_1) \qquad \Delta_p = N(d_1) - 1 < 0$$

- Delta与股价的关系



Delta

Delta与到期时间的关系



Delta——线性

考虑一个期权投资组合，其中所有期权的标的资产都是同一种资产，则，组合的Delta等于每种期权的Delta的线性和

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta_i$$

其中，w_i 表示组合包含第i种期权的数量

Delta对冲

- 定义：建立对冲工具头寸，使得对冲工具头寸与要保护的头寸的Delta等于零
  - Delta中性：资产(或者组合)的Delta等于零
- 动态对冲
  - 由于资产的Delta通常是时间的函数，因此，为了实现对冲目标，通常必须动态调整对冲工具头寸的数量

Theta——定义

- Theta是期权价值对时间的偏导数，度量了期权价值随时间衰减的速度

$$\Theta \triangleq \frac{\partial c}{\partial t}$$

- 与股价呈随机波动不同，距离到期的时间是一个完全确定的量，无需进行对冲

Theta

- 欧式股票期权的Theta
  - 买权

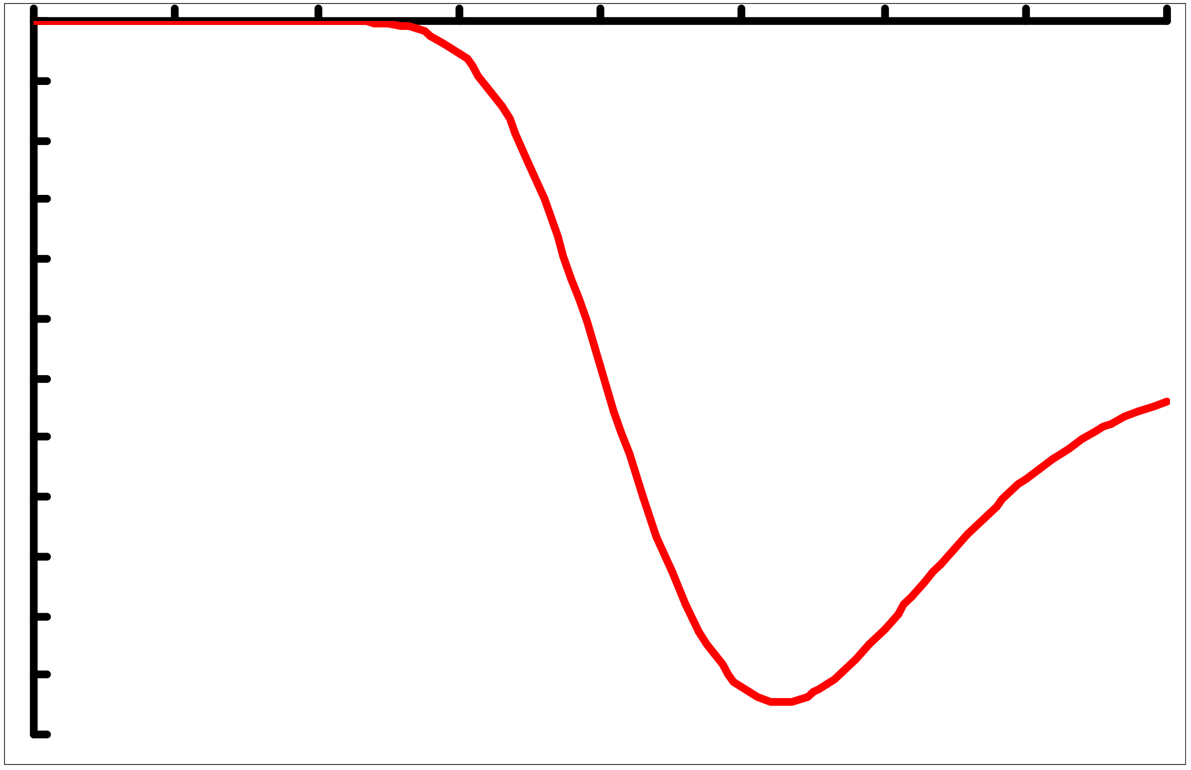
$$\Theta_c = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2)$$

  - 卖权

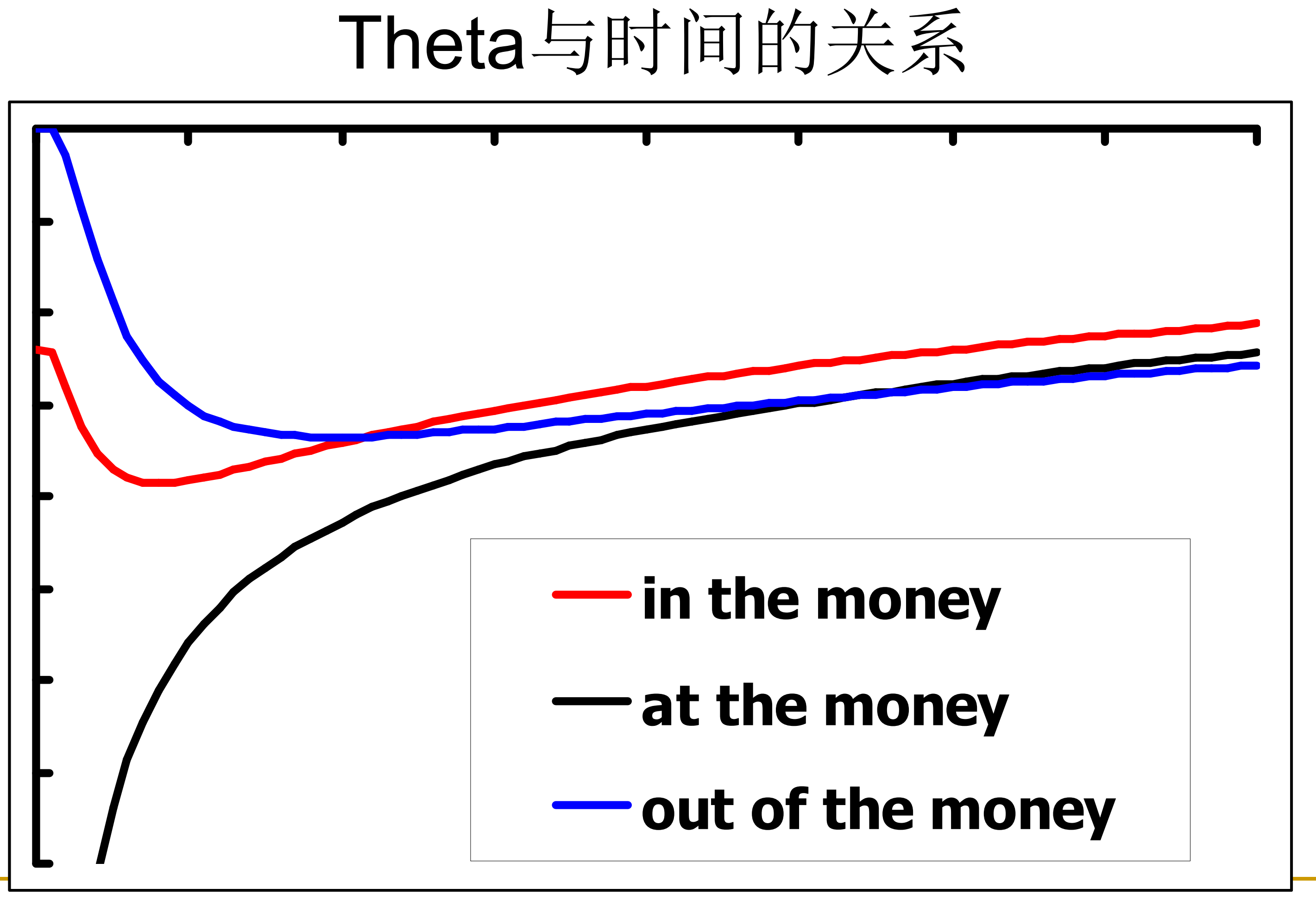
$$\Theta_p = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(d_2)$$

Theta

Theta与股价的关系 K



Theta



Gamma

- Gamma是期权的Delta对标的资产价格的偏导数，也是期权价值对标的资产价格的二阶偏倒数

$$\Gamma \triangleq \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2}$$

- Gamma度量了期权Delta对标的资产价格变化的敏感性，也度量了期权价值对标的资产价格的凸性

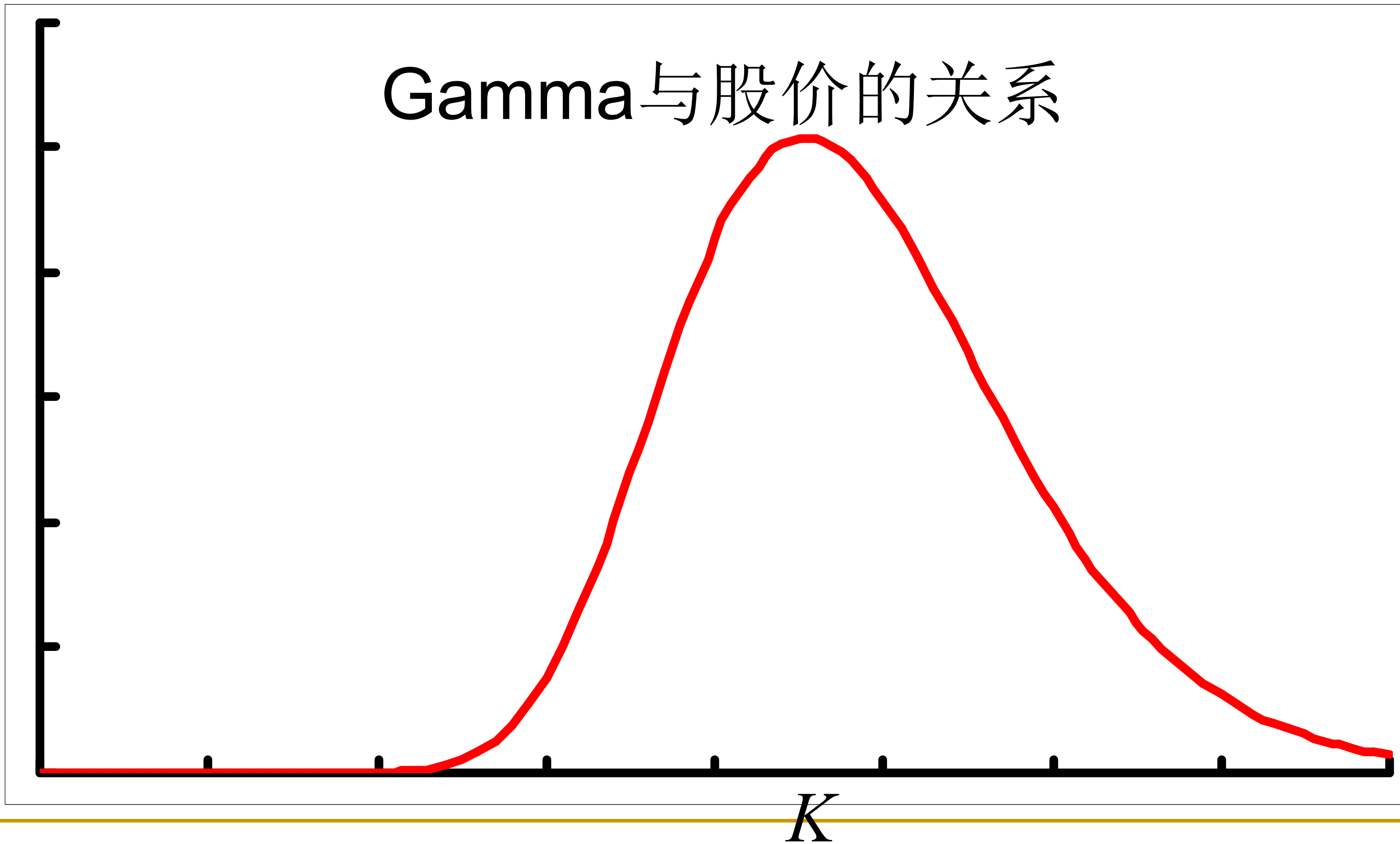
$$\Delta c = \Theta \bullet \Delta t + \frac{1}{2} \Gamma \bullet \Delta S^2$$

Gamma

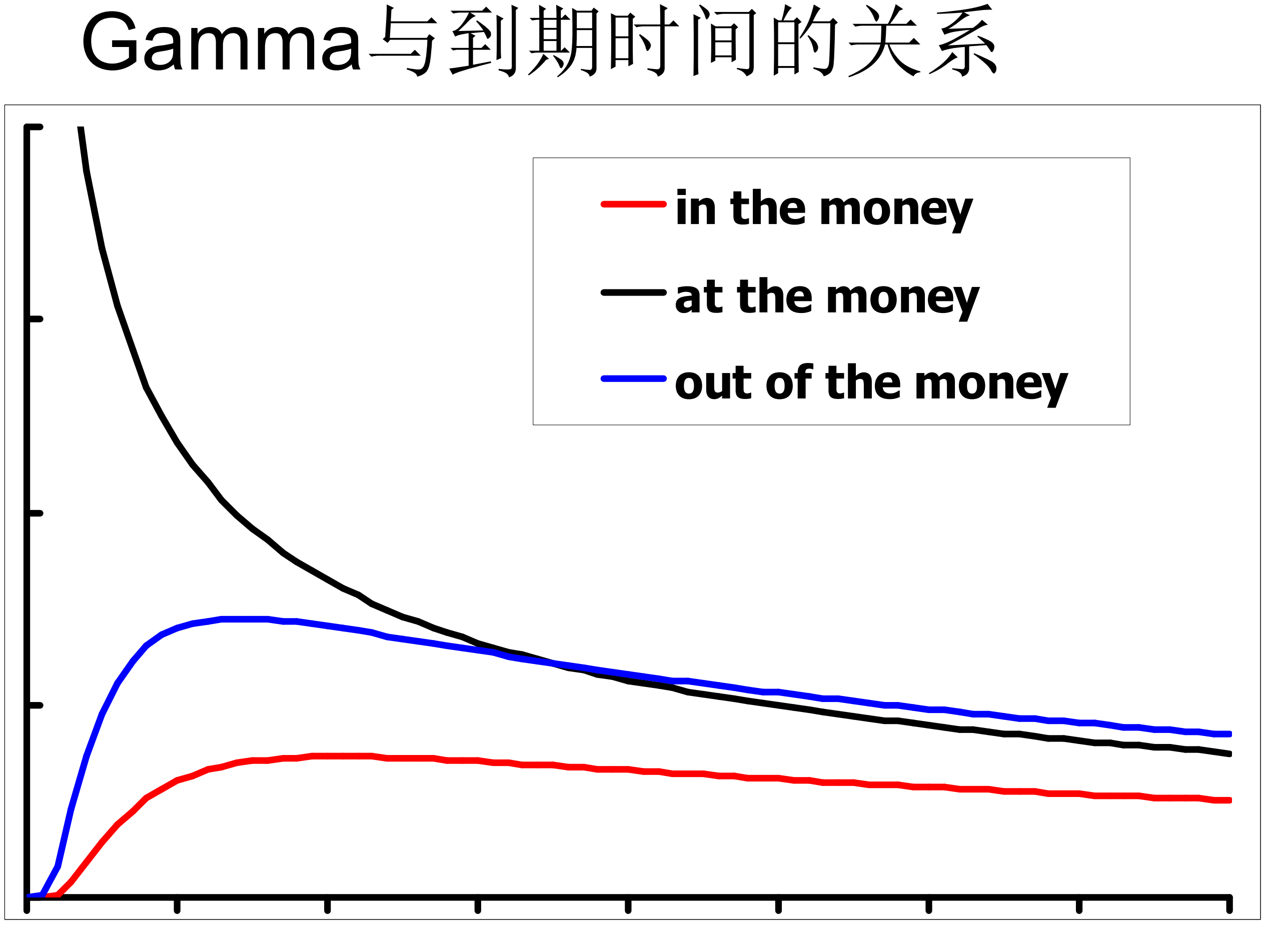
欧式股票期权的Gamma

$$\Gamma_c = \Gamma_p = \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$$

Gamma



Gamma



Delta, Theta, Gamma的关系

- 从BSM方程容易推导出三者的关系

$$\frac{\partial c}{\partial t}+rS\frac{\partial c}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}=rc$$

$$\Theta+rS\Delta+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\Gamma=rc$$

- 如果投资组合是Delta中性的，则

$$\Theta+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\Gamma=rc$$

  - 如果Theta是较大的正数，Gamma就是很大的负数，因此，Theta可以作为Gamma的替代指标使用

Vega

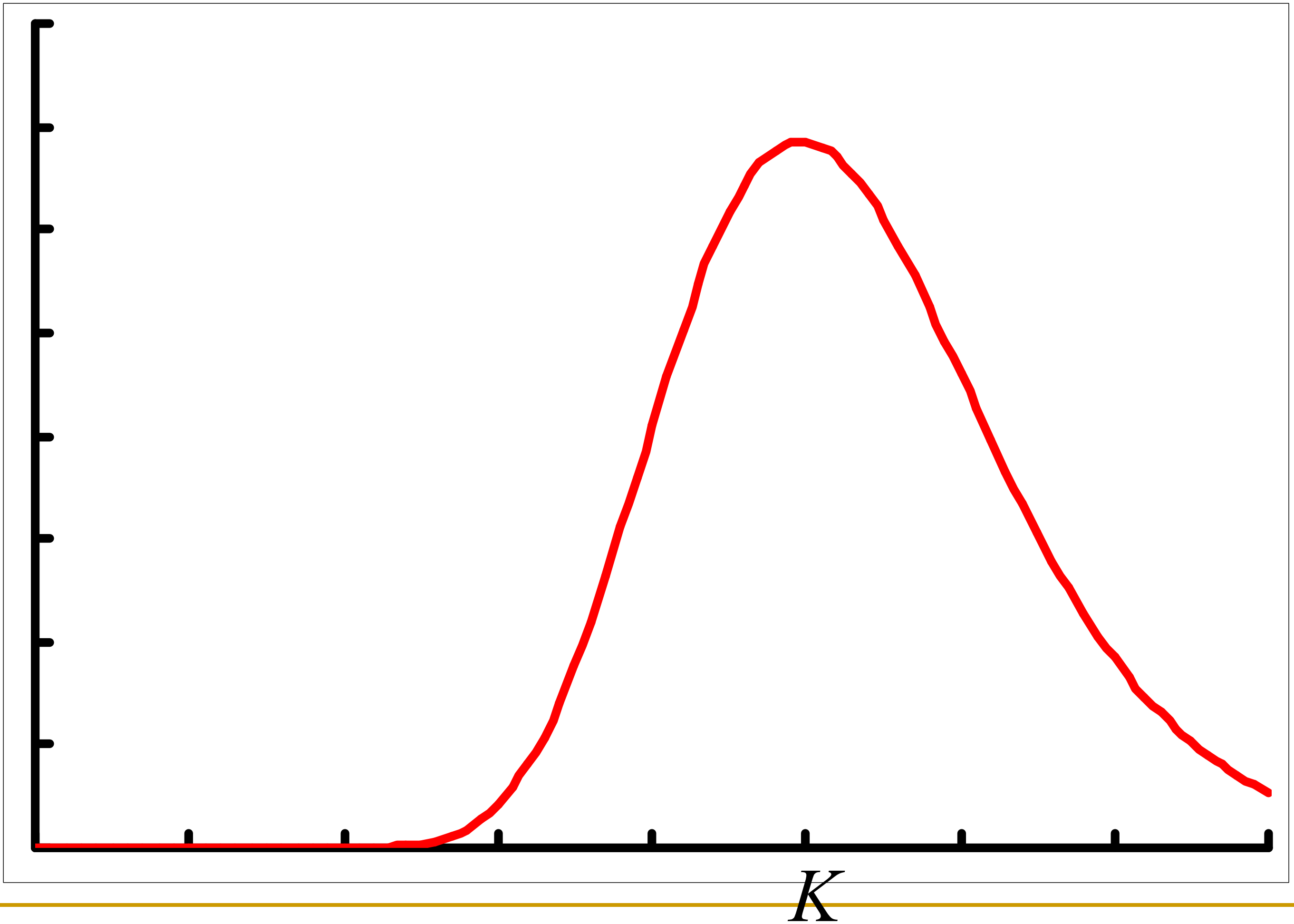
- Vega是期权的价值对标的资产波动率的偏导数，度量了期权价值对标的资产波动率的敏感性

$$Vega \triangleq \frac{\partial c}{\partial \sigma}$$

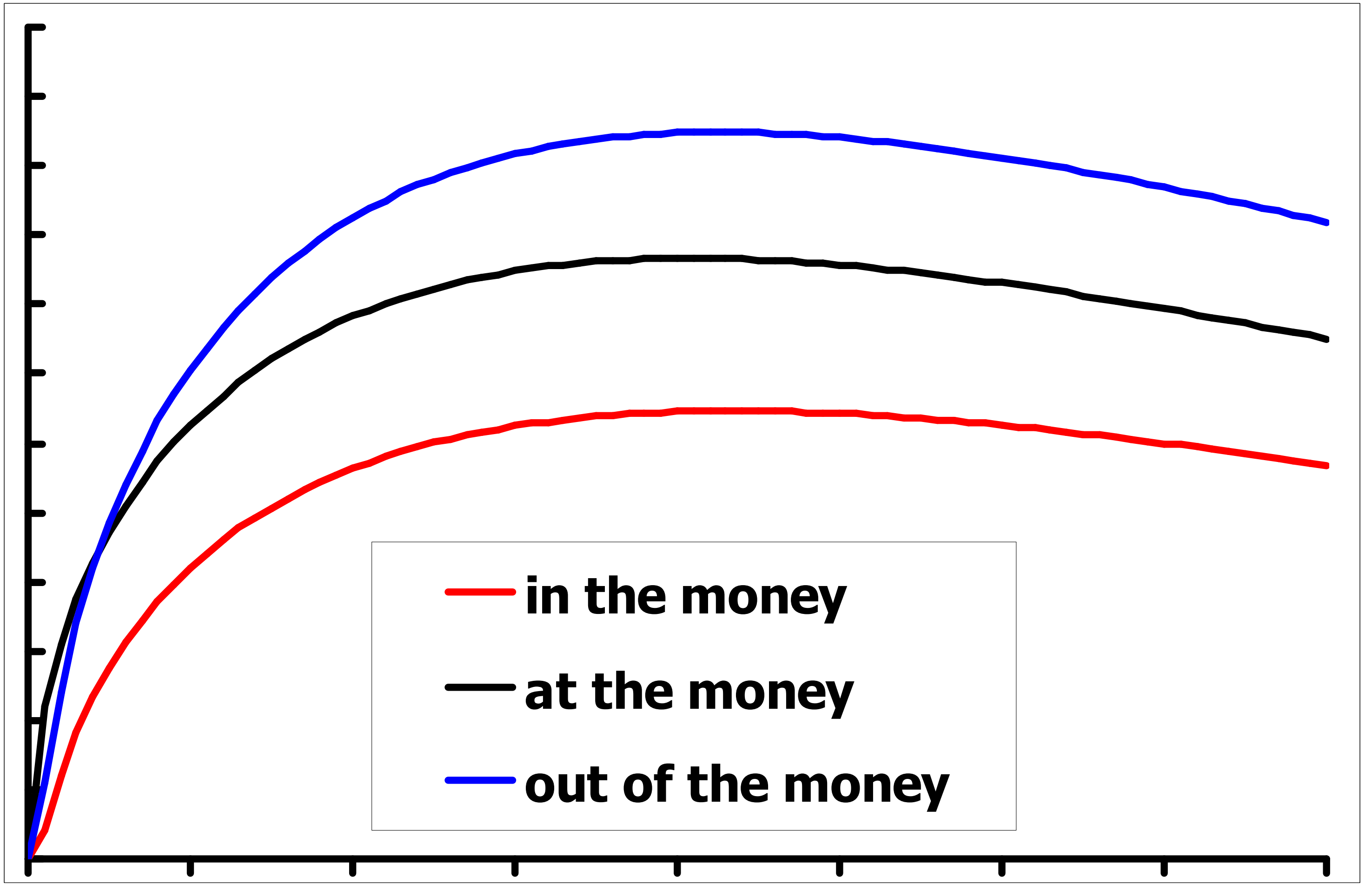
- 欧式期权的Vega

$$Vega_c = Vega_p = S_0 \sqrt{T} N'(d_1)$$

Vega——与股价的关系



Vega——与到期时间的关系



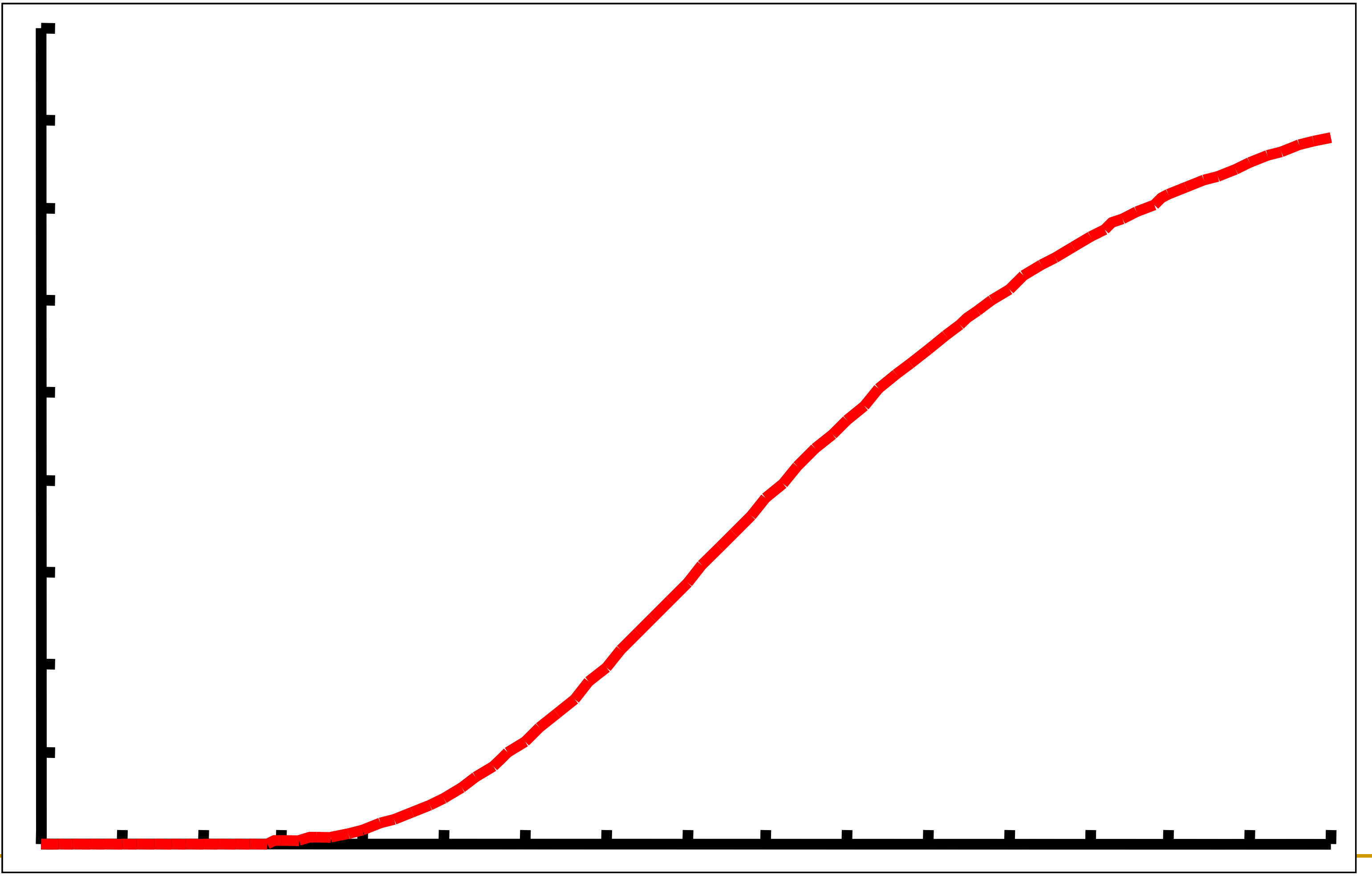
Rho

- Rho是期权价值对无风险利率的偏导数，度量了期权价值对利率变化的敏感性

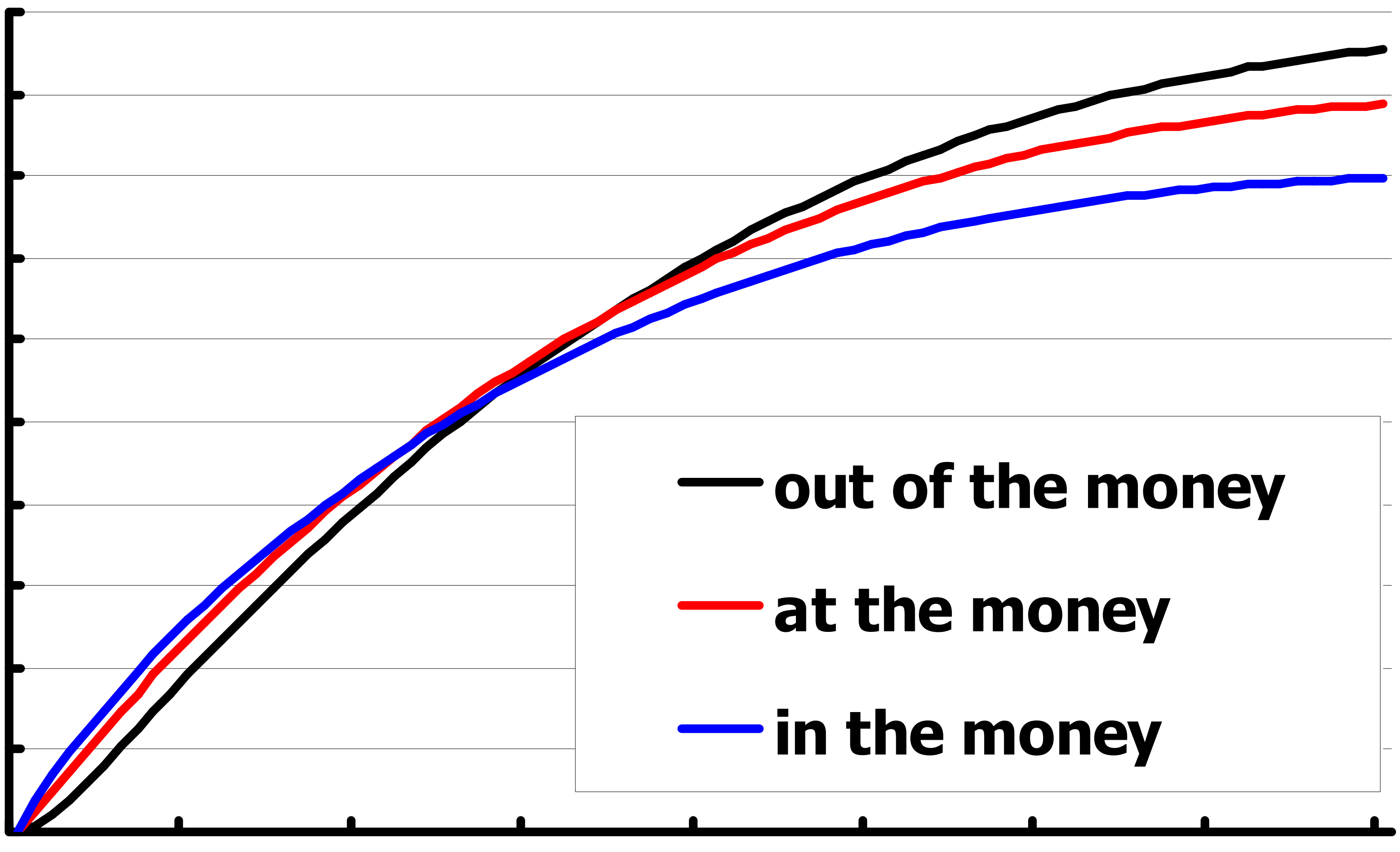
$$\text{rho} \triangleq \frac{\partial c}{\partial r}$$

- 标的股票不支付红利的欧式期权
  - 买权 $\text{rho}_c = KTe^{-rT}N(d_2)$
  - 卖权 $\text{rho}_p = -KTe^{-rT}N(-d_2)$

Rho——与股价的关系



Rho——与到期时间的关系



7．波动率微笑

波动率微笑和波动率期限结构

- **隐含的波动性**

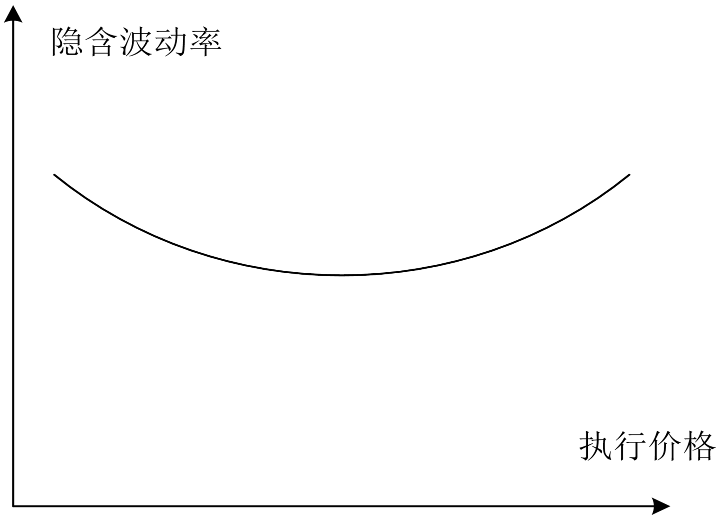
事实上，市场参与者不是用所给的标准差按照B-S公式去算期权价格，而是会问：观察到的期权价格与B-S公式计算出来的期权价格如果一致的话，标准差是多少？这就是隐含的波动性（implied volatility），即期权价格中隐含的股票的标准差水平。再看实际的波动性与隐含的波动性的大小，从而确定是否投资。

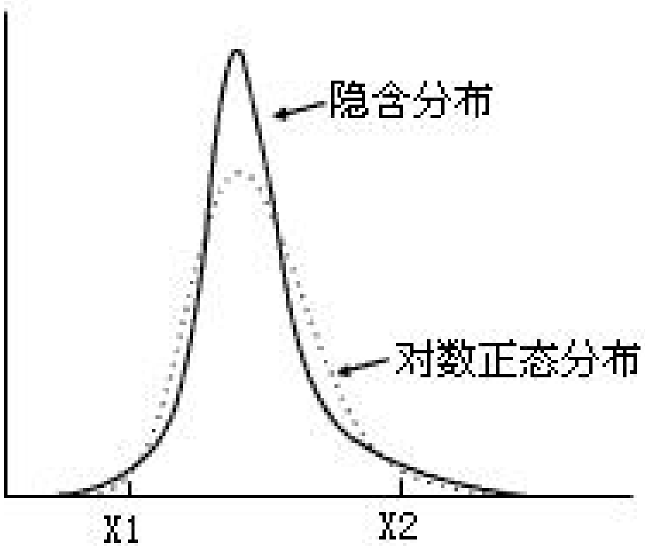
- 人们通过研究发现，应用期权的市场价格和BS公式推算出来的隐含波动率具有以下两个方向的变动规律：
- “波动率微笑”（Volatility Smiles）：隐含波动率会随着期权执行价格不同而不同；
- 波动率期限结构（Volatility Term Structure）：隐含波动率会随期权到期时间不同而变化。

波动率微笑

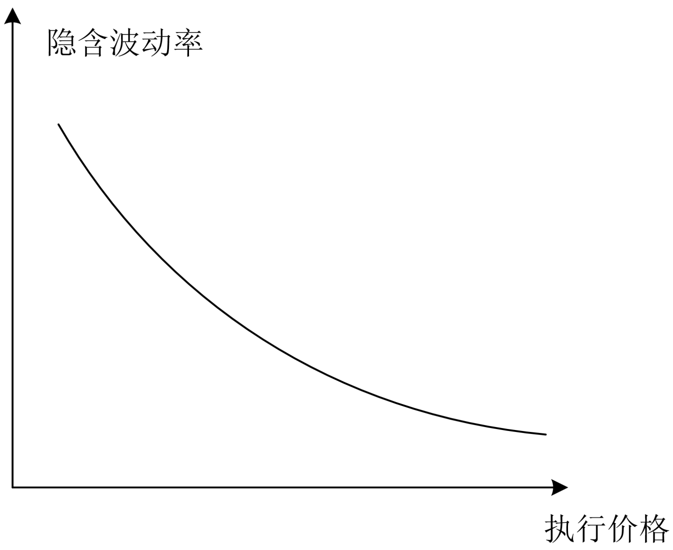
- 对于货币期权而言，隐含波动率常常呈现近似U形。平价期权的波动率最低，而实值和虚值期权的波动率会随着实值或虚值程度的增大而增大，两边比较对称。
- 股票期权的波动率微笑则呈现另一种不同的形状，即向右下方偏斜。当执行价格上升的时候，波动率下降，而一个较低的执行价格所隐含的波动率则大大高于执行价格较高的期权。

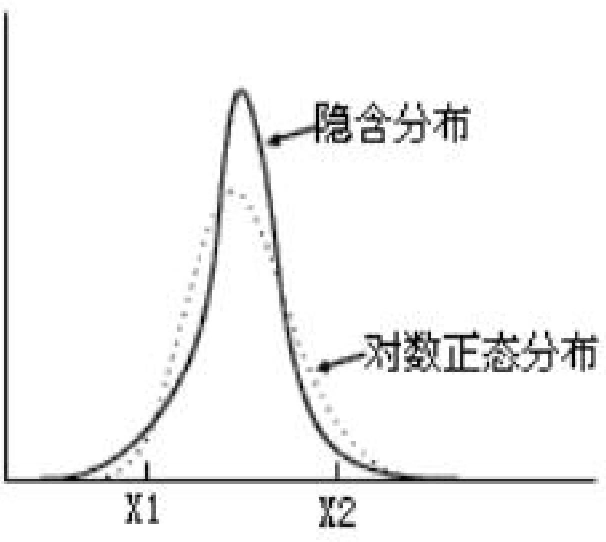
货币期权的波动率微笑与分布





股票期权的波动率微笑与分布





波动率期限结构

- 从长期来看，波动率大多表现出均值回归，即到期日接近时，隐含波动率的变化较剧烈，随着到期时间的延长，隐含波动率将逐渐向历史波动率的平均值靠近。
- 波动率微笑的形状也受到期权到期时间的影响。大多时候，期权到期日越近，波动率“微笑”就越显著，到期日越长，不同价格的隐含波动率差异越小，接近于常数

意义和应用

- 波动率微笑和波动率期限结构的存在，证明了BS公式关于波动率为常数的基本假设是不成立的，至少期权市场不是这样预期的。因此放松波动率为常数的假设，成为期权理论发展的一个重要方向。
- 解释隐含波动率的形态依然是期权定价理论中一个很有挑战性的课题