数理统计 2020-2021 春夏 回忆

from WJK, LXD, @TheSpectre

一、判断题

1. $\{X \sim B(n,p) : n \in \mathbb{Z}^+, 0 < p < 1\}$，则此分布族是指数分布族。✗
2. MLE 一定是唯一的。✗
3. 总体为 $U(0,\theta)$，则在均方误差准则下，θ 的点估计 $X_{(n)}$ 比 $2\bar{X}$ 更优。✓ $\frac{2}{(n+1)(n+2)}\theta^2$ $\frac{1}{3n}\theta^2$
4. 大概是给了一个区间估计的方法，其中在枢轴量中没有出现待估参数。✗
5. 设正态总体中，假设检验 $H_0 : \mu = 0 \longleftrightarrow H_1 : \mu < 0$。已知 $\mu = -0.125$（数据存疑），样本均值计算得到 $\bar{x} = -0.25$（数据存疑），在 $\alpha = 0.1$ 的条件下，犯第二类错误的概率为 $1 - \Phi(1.7..)$。（最后的标准正态分布函数的自变量要么是1.76，要么是1.78）
6. 医院里有很多病人住院，他们中有不少是因为心脏病住院的，不少人是秃头。因为心脏病住院的总人数为 x_1，他们中有 y_1 人秃头；不是因为心脏病住院的总人数为 x_2，他们中有 y_2 人秃头。（卷子中 x_i, y_i 都是具体的数，回忆不起来了）使用列联表独立性检验，拒绝域为 $D = \{\chi^2 > \chi^2_\alpha(1)\}$。✓

二、

逛商场的人数 X 满足分布 $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k = 0,1,2,\cdots$。去电影院的人数 $Y \sim B(k,p)$（当 $k=0$ 时，$P(Y=0)=1$）。抽样得两简单样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$。

1. 写出合样本的联合密度函数，并求 (λ, p) 的充分统计量。
2. 求 λ, p 的矩估计和MLE。

三、

总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，简单样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$。

1. 如果 $T_n = \frac{a_n}{n}\sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}|$ 是 σ 的无偏估计，求 a_n。
2. 证明 T_n 是 σ 的相合估计。
3. 求 σ^2 的 UMVUE。
4. 求 $E_{\mu,\sigma^2}[(X_1 - X_2)^2 | \bar{X}, S^2]$。

四、

分别从两个总体，抽取两组简单样本，其值为 $(x_1, x_2, \cdots, x_6)$，$(y_1, y_2, \cdots, y_6)$。值是用表的形式给出了具体的数，具体是什么数记不清了。

1. 两总体是否有显著差异。
2. 若两个总体的分布都是正态分布，方差均为 σ^2，均值分别为 μ_1, μ_2，求均值之差的置信度为95%的置信区间，然后在5%的显著性水平下比较两总体是否有显著差异。

五、

总体 $X \sim \Gamma(1, \lambda)$。

1. 求参数 λ 的无偏估计的C-R下界
2. 使用共轭先验分布，求 λ 的期望型点估计。
3. 求90%可信区间的上界。