金融数学

第6章　期权定价（一）

- 期权定价是一件非常具有挑战性的任务。在20世纪的前面70多年里，众多经济学家做出无数努力，试图解决期权定价的问题，但都未能获得令人满意的结果。
- 公认的期权定价理论的始祖是法国数学家巴舍利耶(Louis Bachelier, 1900年)
- 令人难以理解的是, 长达半个世纪之久巴舍利耶的工作没有引起金融界的重视, 直到20世纪50年代被萨维奇(Savage)、萨缪尔森(Samuelsen)和克鲁辛格(Kruizenga)等经济学家再次发现。

- 在探索期权定价的漫漫征途中，具有里程碑意义的工作出现在1973年——金融学家F. Black与M. Scholes发表了《期权定价与公司负债》的著名论文。
- 该论文推导出了确定欧式期权价值的解析表达式——Black-Scholes欧式期权定价公式，探讨了期权定价公式在估计公司股票价值方面的应用，更加重要的是，运用了一种新的方法——**风险中性定价(Risk-Neutral Valuation)**，它成为随后期权定价研究的经典方法。

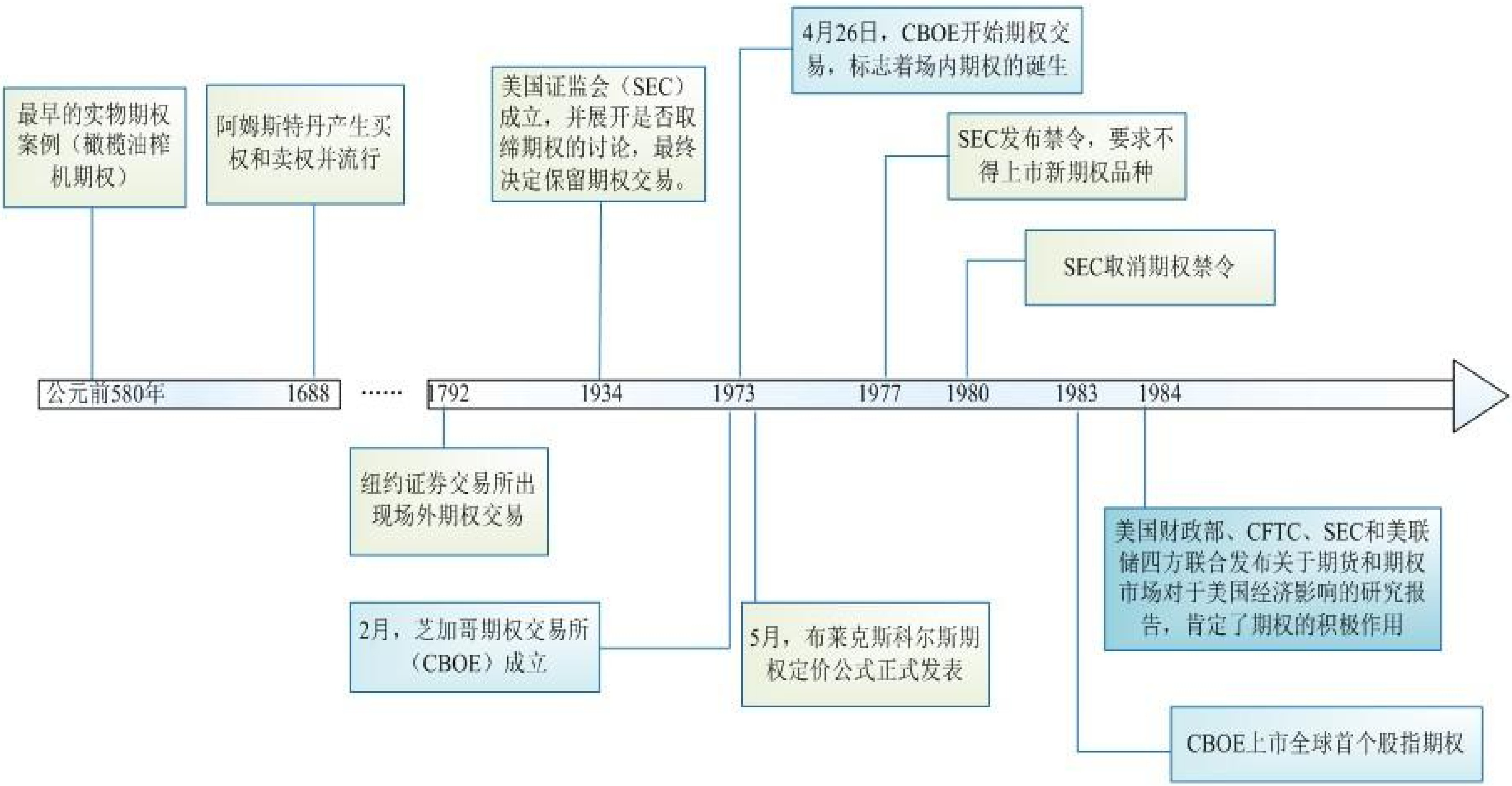
- M. Scholes主要因为这一工作与R. Merton一道荣膺了1997年的诺贝尔经济学奖。
- 两位作者最先把论文投给Journal of Political Economics，遭到了编辑的拒绝，而且没有得到审稿意见。拒绝的理由：金融太多，经济学太少。
- 他们于是向*Review of Economics and Statistics*投稿，同样在没有得到审稿意见的情况下遭到拒绝。
- 在芝加哥人E. Fama和M. Miller与JPE杂志的编辑打了招呼以后，JPE才最终发表了这篇论文。
- 这一番波折导致他们检验B-S公式的论文发表在先。

第6章 期权定价理论

1. 期权简介
2. 期权组合策略
3. 期权定价的价格无套利关系
4. 期权定价——二叉树方法
5. Black-Scholes期权定价模型
6. 期权的希腊字母
7. 波动率微笑

1. 期权简介

期权发展史



最早的实物期权案例（橄榄油榨机期权）
阿姆斯特丹产生买权和卖权并流行
美国证监会（SEC）成立，并展开是否取缔期权的讨论，最终决定保留期权交易。
4月26日，CBOE开始期权交易，标志着场内期权的诞生
SEC发布禁令，要求不得上市新期权品种
SEC取消期权禁令
公元前580年
1688
……
1792
1934
1973
1977
1980
1983
1984
纽约证券交易所出现场外期权交易
2月，芝加哥期权交易所（CBOE）成立
5月，布莱克斯科尔斯期权定价公式正式发表
美国财政部、CFTC、SEC和美联储四方联合发布关于期货和期权市场对于美国经济影响的研究报告，肯定了期权的积极作用
CBOE上市全球首个股指期权

我国场内期权发展史

2015/2/9 上证50ETF期权 于上海证券交易所上市，国内首只场内期权品种。不仅宣告了中国期权时代的到来，也意味着我国拥有全套主流金融衍生品。

2017/3/31 豆粕期权 国内首只商品期货期权，大连商品交易所上市。

2017/4/19 白糖期权 郑州商品交易所上市交易。

2018/9/21 铜期权

2019年1月28日：玉米期权、棉花期权、天然橡胶期权；12月9日，铁矿石期权；12月16日：PTA、甲醇期权；12月20日：黄金期权；12月23日：沪300ETF期权，深300ETF期权，沪深300ETF期权

2020年1月16日：菜籽粕期权；6月30日：动力煤期权；7月6日：聚丙烯、聚乙烯、聚氯乙烯期权；8月10日：铝期权，锌期权

2021年6月18日：棕榈油期权；2021年6月21日：原油期权

2022年7月22日：中证1000股指期权；8月8日：豆油期权、豆一期权、豆二期权；8月26日：菜油期权、花生期权；9月19日：沪500ETF期权、深500ETF期权、创业板ETF期权；12月12日：深证100ETF期权；12月19日：上证50股指期权；12月22日：工业硅期权；12月26日：螺纹钢期权、白银期权

2023年5月15日：乙二醇、苯乙烯期权；2023年6月5日：华夏科创50ETF期权、易方达科创50ETF期权；7月24日：碳酸锂期权；7月28日：丁二烯橡胶期权；9月15日：烧碱、对二甲苯期权；10月20日：短纤、纯碱、锰硅、硅铁、尿素、苹果期权

期权的概念

- **期权**（Option）：是指赋予其购买者在规定期限内按双方约定的价格（简称协议价格或执行价格）购买或出售一定数量某种标的资产的权利的合约。
- 期权的买入方称为**期权多头**，期权的卖出方称为**期权空头**。其中标的物可以是股票、债券、外汇等基础金融资产，也可以是股票指数、债券指数等指数金融产品，更可以是大豆、铜等实物商品。
- **期权**是一种衍生金融工具，衍生金融工具的价值是由标的资产的价值决定的。

期权的买方（持有人）**有权利**（但**没有义务**）在未来特定时点或之前（含该特定时点）依既定的价格买（或卖）特定数量的目标资产

拥有期权，买方必须付给卖方**权利金 (Premium or Option price)**

买方执行**权利**买（或卖）目标资产时，卖方有**义务**卖（或买）该目标资产

<u>种类</u>：

- 看涨期权 (Call)： 也称**认购期权**、**买权**，持有人拥有购买标的资产的权利

- 看跌期权 (Put)： 也称**认沽期权**、**卖权**，持有人拥有出售目标资产的权利

<u>到期日</u> (Maturity Date or Expiration Date)
- 欧式 (European)：到期日才可以执行权利
- 美式 (American)：到期日以前（含到期日）均可以执行权利
- 百慕大 (Bermuda)：到期日之前的某一段时间执行期权

既定的价格：<u>执行价格、敲定价格</u>或<u>履约价格</u> (Exercise price、Strike price)
被指定行权（Assigned）

<u>标的资产</u> (Underlying assets)
- 现货：期权 (Options)
- 期货：期货期权 (Options on futures, Futures options)

期权合约条款

欧式看涨期权合约：标的物为股票。

- 以下给出**的条款**：
  - 在合约签订日0，双方签订协议，并且期权买方向卖方支付现金C_0；
  - 在合约到期日T，如果股票的价格S_T涨到了**执行价格K**以上，则期权买方有权以价格K从卖方买入标的股票；如果股票的价格S_T在执行价格K以下，则期权买方可以选择不买入股票
  - 在合约到期日T，期权合约的卖方有义务在期权买方提出购买标的股票时卖出股票。

真实期权合约包含的要素

- 期权的合约规格一般包含以下基本要素
  - **合约标的**
  - **合约乘数**
  - **合约类型**
  - **报价单位**
  - **最小变动价位**
  - **合约月份**
  - **执行价格间距**
  - **执行方式**
  - **交易时间**
  - **最后交易日**
  - **到期日**
  - **交割方式**
  - **交易代码**
  - **上市交易所等**

期权的T型报价

	代码	名称	涨幅%	现价	涨跌	买价	卖价	总量	现量	涨速%	换手%	今开	最高	最低	昨收
1	510050	50ETF	0.21	2.413	0.005	2.413	2.414	718.1万	476	0.04	3.68	2.408	2.417	2.404	2.408

杠杆	时间价	波动率%	虚实度%	溢价%	内在价	涨跌	现价	行权价	现价	涨跌	内在价	溢价%	虚实度%	波动率%	时间价	杠杆
11.0	0.0068	0.00	9.68	0.28	0.2130	-0.0003	0.2198	2.2000	0.0007	-0.0006	–	8.86	-9.68	0.00	0.0007	3447.1
14.1	0.0077	0.00	7.24	0.32	0.1630	0.0016	0.1707	2.2500	0.0022	0.0000	–	6.85	-7.24	0.00	0.0022	1096.8
19.2	0.0130	0.00	4.91	0.54	0.1130	0.0038	0.1260	2.3000	0.0063	-0.0008	–	4.94	-4.91	0.00	0.0063	383.0
28.1	0.0229	0.00	2.68	0.95	0.0630	0.0021	0.0859	2.3500	0.0151	-0.0014	–	3.24	-2.68	0.00	0.0151	159.8
44.8	0.0409	0.00	0.54	1.69	0.0130	0.0024	0.0539	2.4000	0.0336	-0.0019	–	1.93	-0.54	0.00	0.0336	71.8
77.6	0.0311	0.00	-1.51	2.82	–	0.0014	0.0311	2.4500	0.0607	-0.0026	0.0370	0.98	1.51	0.00	0.0237	39.8
154.7	0.0156	0.00	-3.48	4.25	–	0.0006	0.0156	2.5000	0.0959	-0.0047	0.0870	0.37	3.48	0.00	0.0089	25.2
354.9	0.0068	0.00	-5.37	5.96	–	0.0003	0.0068	2.5500	0.1367	-0.0053	0.1370	-0.01	5.37	0.00	-0.0003	17.7
893.7	0.0027	0.00	-7.19	7.86	–	-0.0005	0.0027	2.6000	0.1816	-0.0104	0.1870	-0.22	7.19	0.00	-0.0054	13.3
1608.7	0.0015	0.00	-8.94	9.88	–	0.0000	0.0015	2.6500	0.2311	-0.0109	0.2370	-0.24	8.94	0.00	-0.0059	10.4
3016.3	0.0008	0.00	-10.63	11.93	–	0.0000	0.0008	2.7000	0.2803	-0.0117	0.2870	-0.28	10.63	0.00	-0.0067	8.6

看涨期权

买方（持有人）

Call

卖方(Written the option,立权)

向*卖方*买*Call*

将*Call卖*给*买方*

付权利金

收入权利金

有权利向*卖方*以协议价格*Call*标的资产

有义务将目标资产*卖*给*Call持有人*

主动

被动

买方

卖方

标的资产

看跌期权

买方（持有人）	Put	卖方(Written the option, 立权)
向卖方买Put		将Put卖给买方
付权利金		收入权利金
有权利以协定价格将目标资产Put给卖方		有义务向持有人购买标的资产
主动		被动
卖方	标的资产	买方

例子

（1）看涨期权：1月1日，标的物是铜期货，它的期权执行价格为1850美元/吨。A买入这个权利，付出5美元；B卖出这个权利，收入5美元。2月1日，铜期货价上涨至1905美元/吨，看涨期权的价格涨至55美元。A可采取两个策略：

行使权利——A有权按1850美元/吨的价格从B手中买入铜期货；B在A提出这个行使期权的要求后，必须予以满足，即便B手中没有铜，也只能以1905美元/吨的市价在期货市场上买入而以1850美元/吨的执行价卖给A，而A可以1905美元/吨的市价在期货市场上抛出，获利50美元。B则损失50美元。

售出权利－－A可以56美元的价格售出看涨期权，A获利51美元（56-5）。

如果铜价下跌，即铜期货市价低于敲定价格1850美元/吨，A就会放弃这个权利，只损失5美元权利金，B则净赚5美元

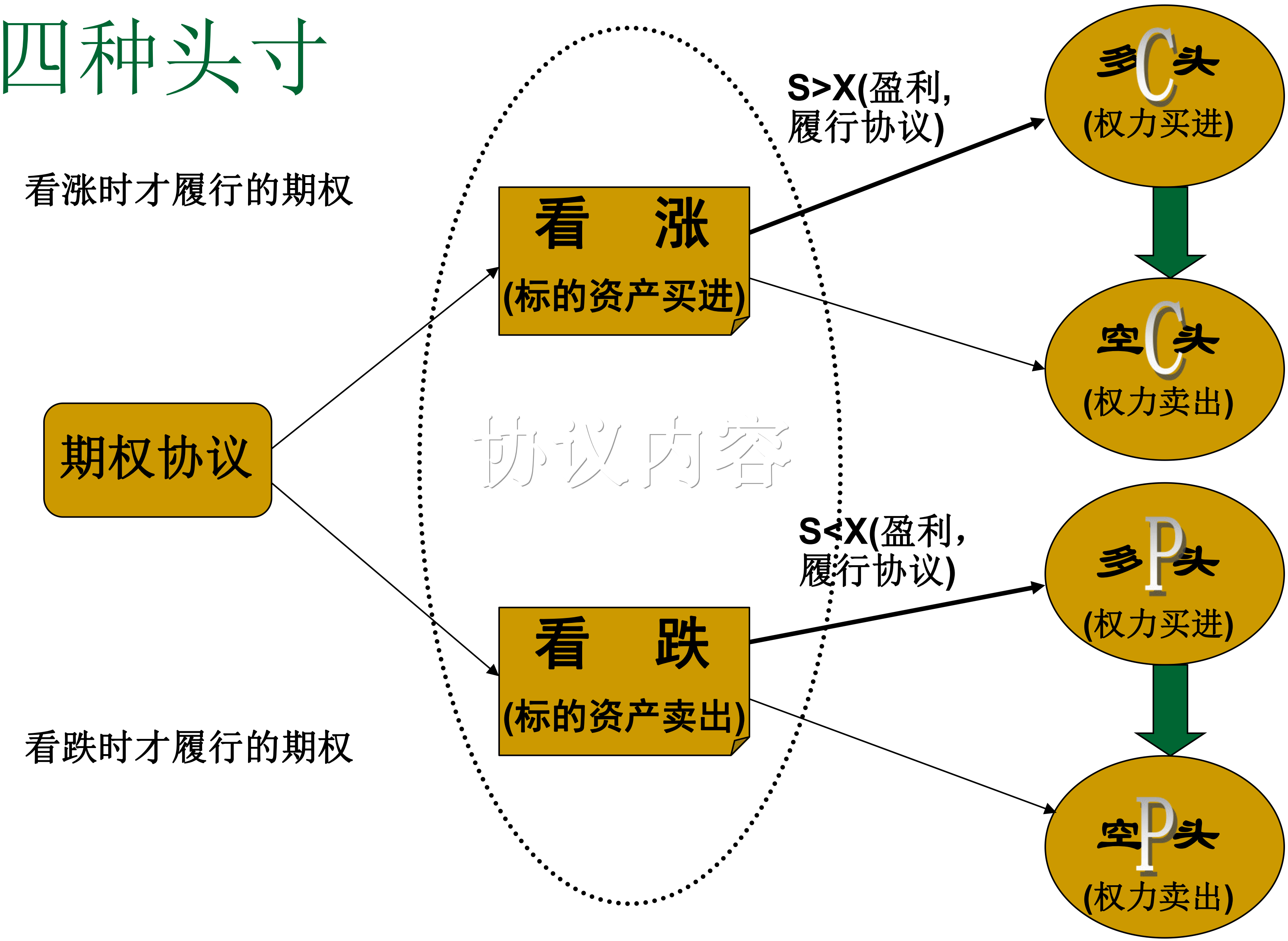
（2）看跌期权：1月1日，铜期货的执行价格为1750美元/吨，A买入这个权利，付出5美元；B卖出这个权利，收入5美元。2月1日，铜价跌至1695美元/吨，看跌期权的价格涨至55美元。此时，A可采取两个策略：

行使权利——A可以按1695美元/吨的市价从市场上买入铜，而以1750美元/吨的价格卖给B，B必须接受，A从中获利50美元，B损失50美元。

售出权利——A可以55美元的价格售出看跌期权。A获利50美元。

如果铜期货价格上涨，A就会放弃这个权利而损失5美元，B则净得5美元

四种头寸


看涨时才履行的期权
看跌时才履行的期权
期权协议
协议内容
看 涨
(标的资产买进)
看 跌
(标的资产卖出)
S>X(盈利，
履行协议)
S<X(盈利，
履行协议)
多 C 头
(权力买进)
空 C 头
(权力卖出)
多 P 头
(权力买进)
空 P 头
(权力卖出)

各种期权

- **普通期权**
  - 欧式或者美式、看涨或看跌期权
- **奇异期权**
  - 其他种类期权

- **股票期权**
  - 实物交割，价格股票本身
- **货币期权**
  - 主要在场外市场上交易
- **即期期权（option on spot）：**标的物为标的资产本身
- **期货期权**（option on future）：行使期权获得的是期货头寸
  - 大多数是美式期权
  - 通常现金结算+交割标的期货

  到期月是以标的期货到期月来识别的
  - 商品多为期货期权
  - 利率期货期权：长期国债期货、中期国债期货和欧洲美元期货
- **股指期货期权**
  - 大部分为欧式期权， S&P 500欧式期权,S&P 100 美式和欧式
  - 现金交割

- **Binary Option**:数字期权，二元期权，定点期权，两值期权
  - 如果标的资产满足预先约定的条件，则期权买方得到合约中约定好的固定金额的支付，否则期权的买方得不到任何支付
  - **all-or-nothing**

Broad Based Indexes

- ▶ BSZ - CBOE Binary Options on the S&P 500® Index (SPX℠) | Components
- ▶ BVZ - CBOE Binary Options on the CBOE Volatility Index® (VIX®)
- ▶ DJX - Dow Jones Industrial Average Index Options | Components
  - ▶ Dow Jones Industrial Average LEAPS | Components
- DVS - S&P 500 Dividend Index Options* | Components
- ▶ MNX® - CBOE Mini-NDX Index Options | Components
- ▶ NDX - Nasdaq-100® Index Options | Components
- NFT - Morgan Stanley Multinational Company Index* | Components
- ▶ OEX® - S&P 100® Index Options (American-style) | Components
  - ▶ S&P 100® Index LEAPS (American-style) | Components
- ▶ QUARTERLYS - Mini-SPX Index Options | Components
- ▶ QUARTERLYS - S&P 100 Index Options (European-style) | Components
- ▶ QUARTERLYS - S&P 500 Index Options | Components
- ▶ RUT - Russell 2000® Index | Components
- RVX - CBOE Russell 2000 Volatility Index℠ Options* | Components
- ▶ SPX - S&P 500® Index Options | Components
- ▶ SPXpm - S&P 500-p.m.-settled Index Options | Components
- ▶ S&P 500® Range Options - (SRO)
- ▶ VIX - CBOE Volatility Index® (VIX®) Options
- ▶ WEEKLYS℠ - Options that expire at the ends of weeks
- ▶ XEO® - S&P 100® Index Options (European-style) | Components
  - ▶ S&P 100® Index LEAPS (European-style) | Components
- ▶ XSP - Mini-SPX Index Options | Components

- **亚洲期权(Asia Option)：**收益取决于标的资产在至少是期权部分有效期内的平均价格。
- **障碍期权(Barriar Option)：**收益不仅取决于期权到期时的标的资产的价格，还取决于资产价格是达到了特定的值，达到了特定的屏障。

如，下降敲出期权（down-and-out）就是一种当股价

降至一定水平就自动失效的障碍期权。

- **回顾期权：**收益取决于期权有效期内标的资产达到的最大或最小值。例如，回顾期权的收益等于期权有效期内股价的最高值减去执行价，而不是收盘价减去执行价格。

金融产品创新

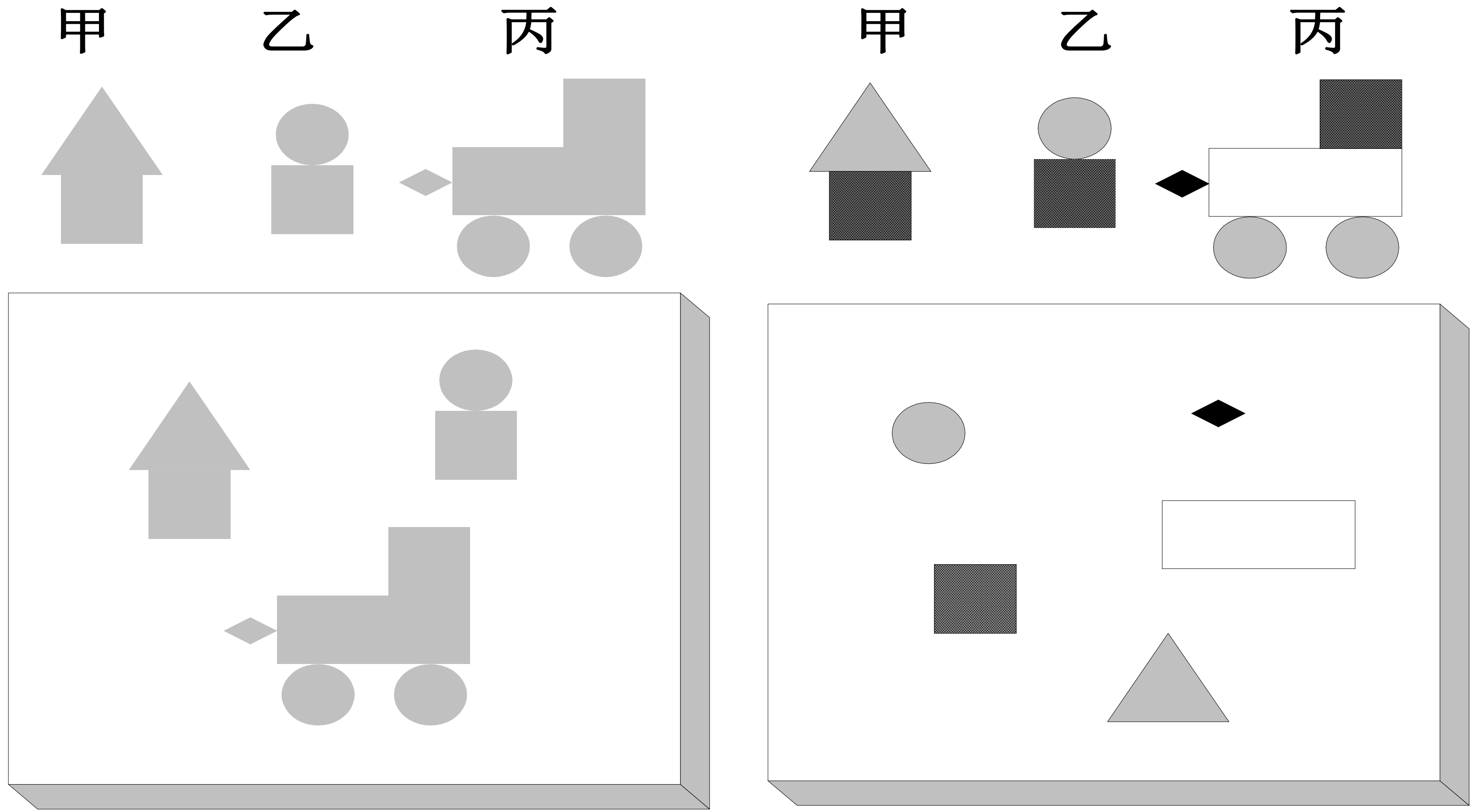
由于面临的情况不同、对未来也有不同的预期或计划，因而所作的决策以及用来完成其目标的工具不同。健全的金融市场必须提供足够的金融工具，使不同的决策可以藉由金融工具的交易或操作得以实践，有两种方式可以达到目标：

1.金融工具各有特性（Payoff schedule），让不同的工具尽量上市，此方式的缺点是金融工具的数量将会很多，社会成本高

2.同样能达到目标又比较有效率的方式是市场只提供特性不同的基本金融工具（Basic instrument），不同的人就基本工具作组合，以完成其目标

Reshaping the payoffs

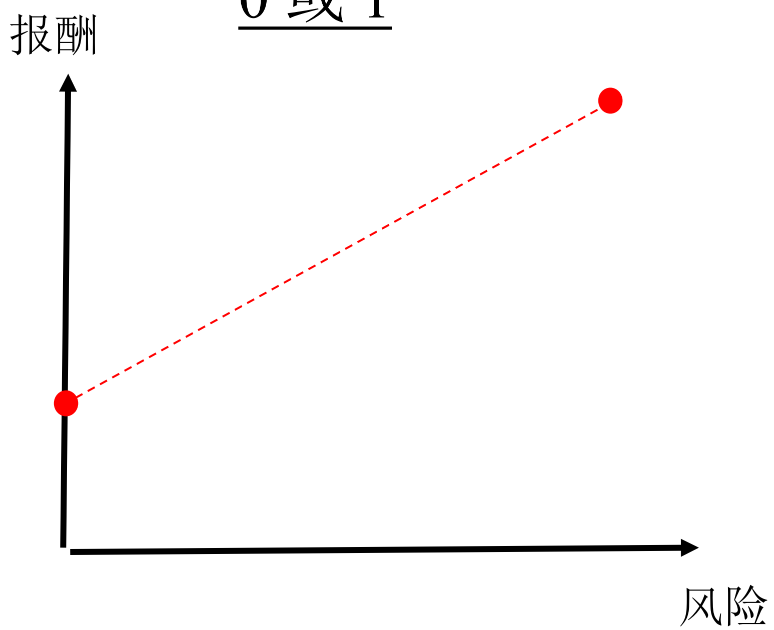
产品设计



产品设计

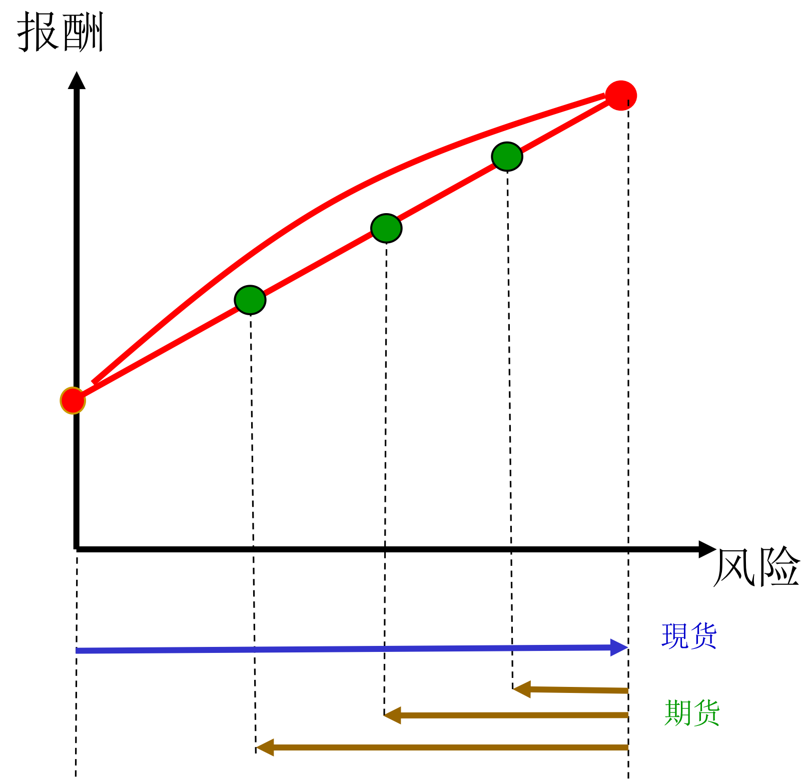
不使用衍生商品之情况

0 或 1



使用衍生商品

0 与 1 之间



期权的风险特征

- 在忽略交易费用的条件下，期权的多方和空方的损益之和恒等于零，用博弈论的术语来说，期权交易是零和博弈。
- 期权是单边风险工具，它只保护价格向一个方向变化。
- 在期权到期日，

买权多头的支付= $\max(S_T - K, 0)$

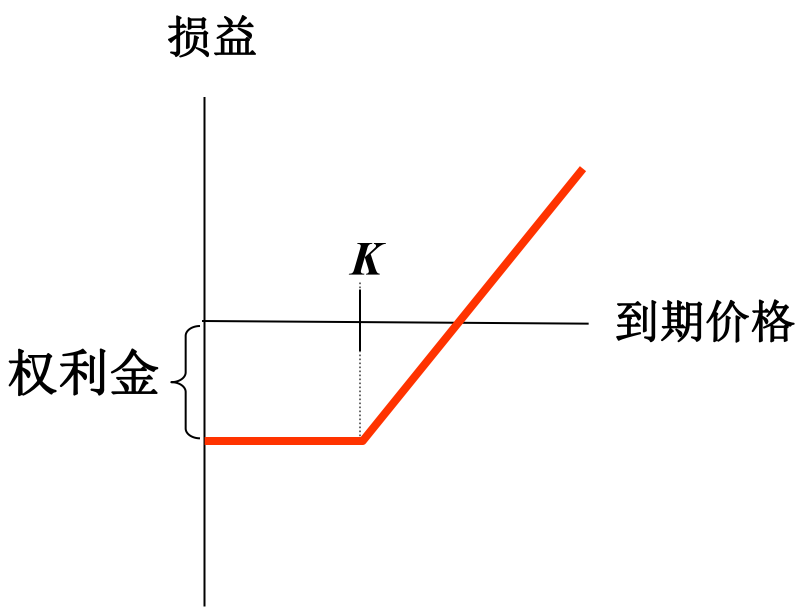
买权空头的支付= $-\max(S_T - K, 0)$

卖权多头的支付= $\max(K - S_T, 0)$

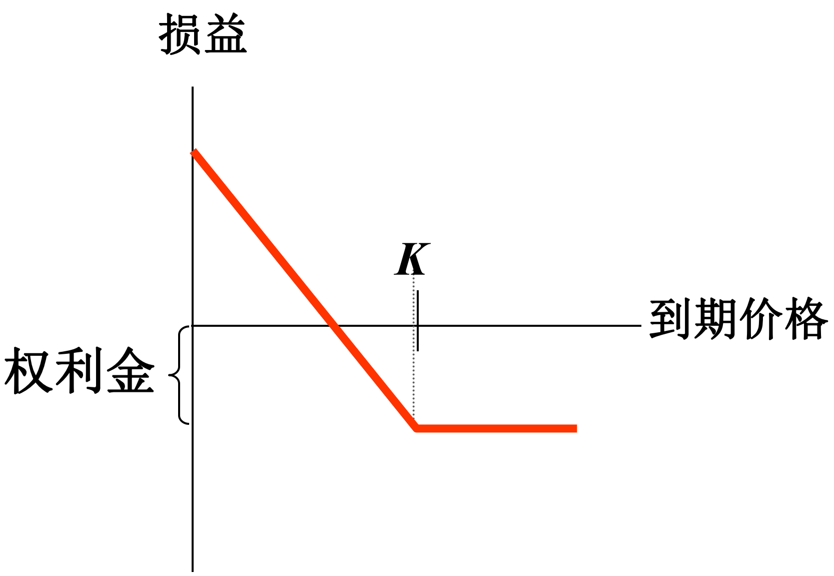
卖权空头的支付= $-\max(K - S_T, 0)$

期权多头到期损益图

买Call



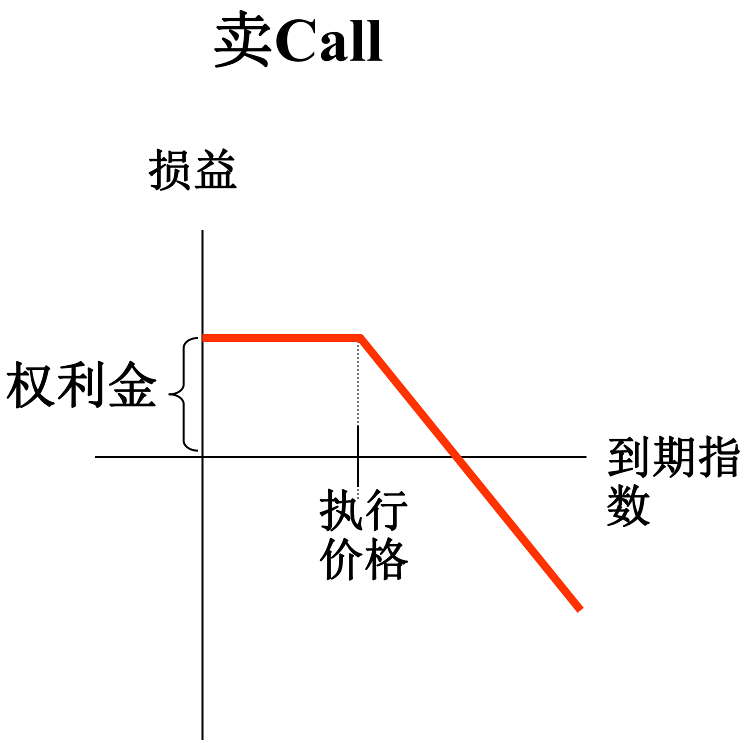
买Put

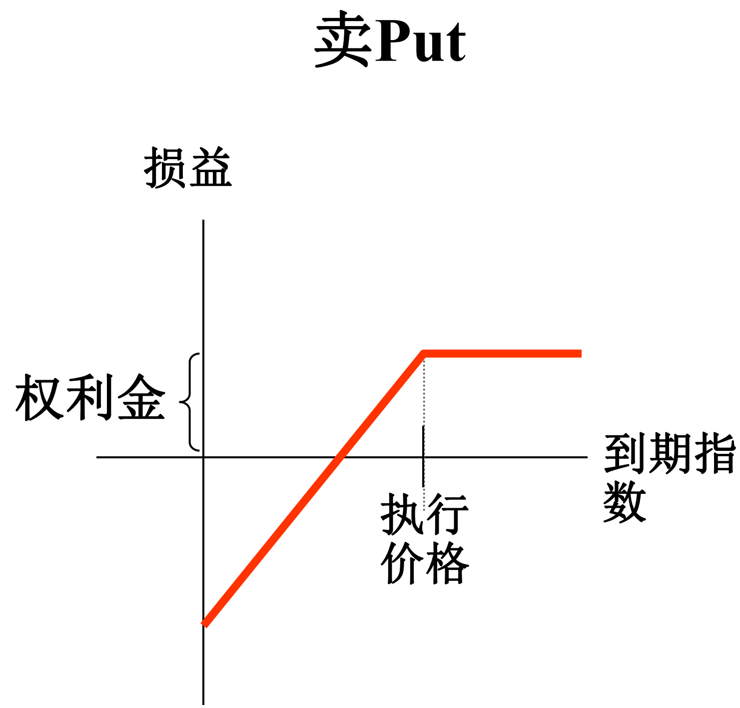


买买权、卖卖权：价格上涨

买卖权、卖买权：价格下跌

期权空头到期损益图





Mirror Image: 零和博弈

期权费、内在价值与时间价值

- 期权费＝内在价值＋时间价值

  Premium = intrinsic value (IV) + time vaule (TV)

- 内在价值＝执行价与标资产价格的差额

  期权的内在价值(Intrinsic Value)是指买方行使期权时可以获得的收益的现值。

- 内在价值≥0，是衡量期权的实值状态的尺度

- **实值(价内)状态：**对于买权来说，如果现在标的物股票的价格高于执行价，则称买权处于实值状态。
- **虚值(价外)状态：**低于执行价，则称处于虚值状态。
- **两平(价平)状态：**执行价正好等于标的物股票的价格，则是两平状态。

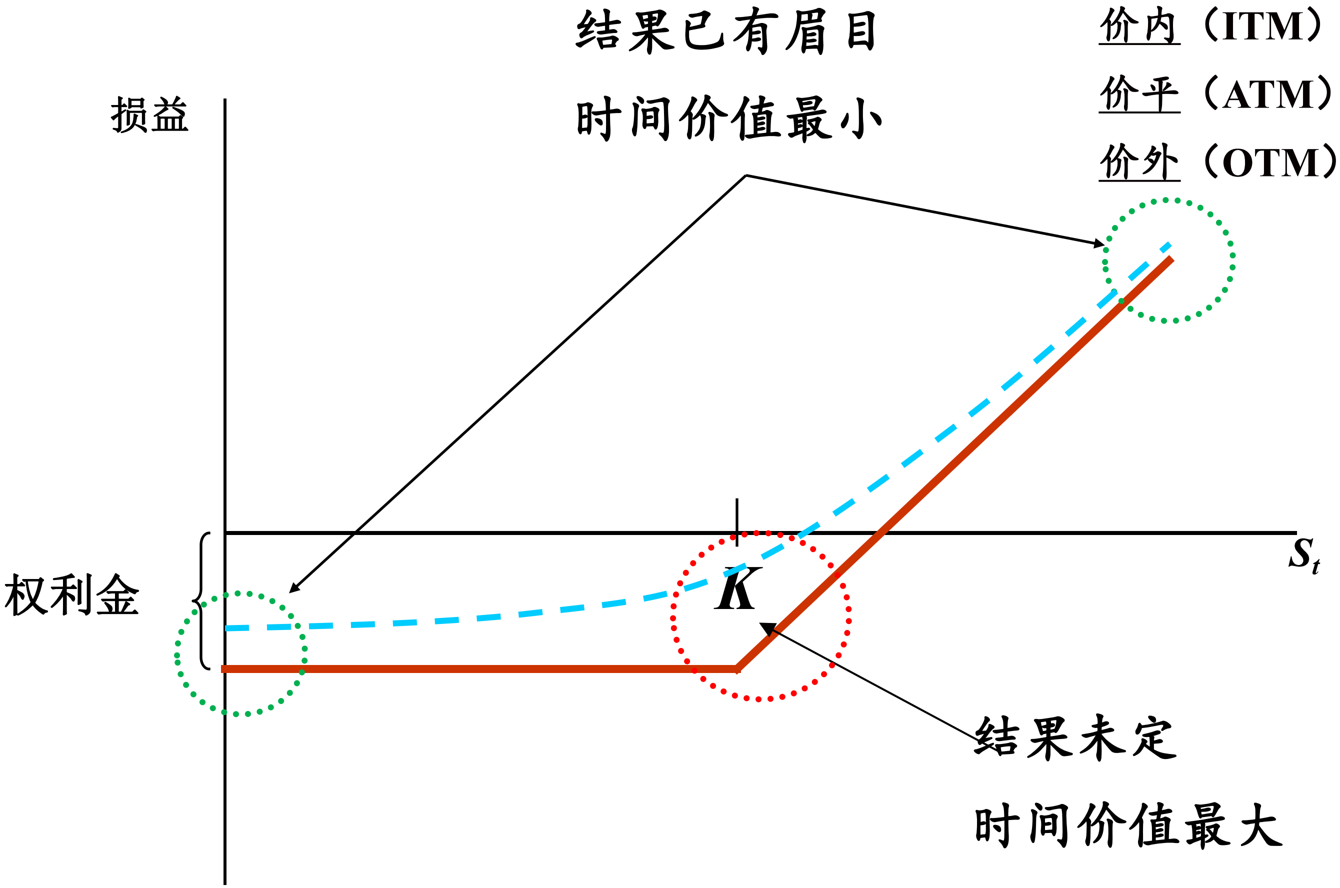
对卖权来说，则正好相反。

价内、价平、价外

价内（ITM）：市价＞执行价

价平（ATM）：市价＝执行价

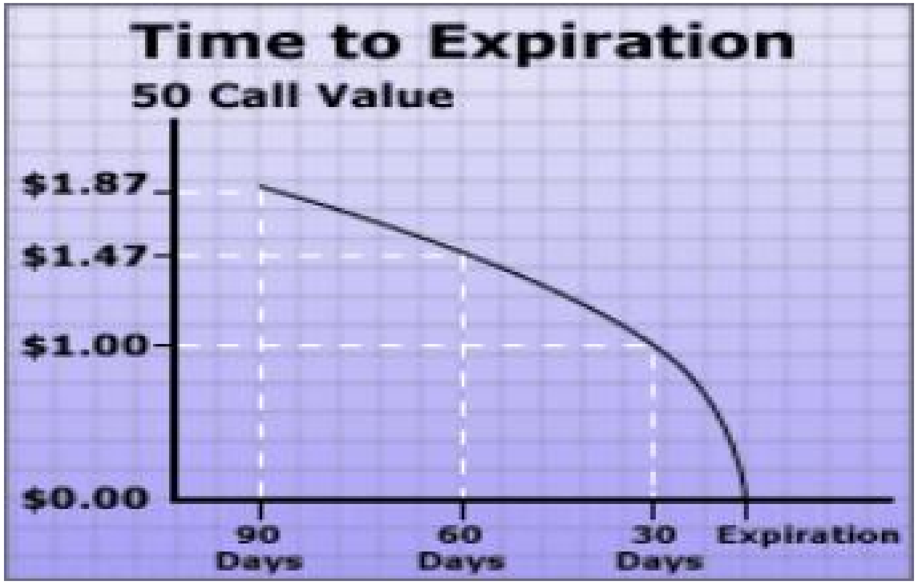
价外（OTM）：市价＜执行价



时间价值（Time Value）的深入理解

- TV是指在期权有效期内标的资产价格波动为期权持有者带来收益的可能性所隐含的价值。
- 期权费在IV之外的附加部分就是TV，这个量用于补偿在期权到期前，期权可能进入实值状态而需承担的风险。
  - *理解1：* 在未来期权有效期内，标的资产大幅波动给你带来收益的可能性所体现出来的价值。
  - *理解2：* TV是给你提供保护所具有的价值。
  - *理解3：* TV体现在以小博大的杠杆性上。

- TV随到期时间逐渐衰减。
- 对于欧式和美式期权，时间的影响有所不同。
- 在一般情况下，期权的边际时间价值都是正的。也就是说，随着时间的增加，期权的时间价值是增加的。然而，期权的边际时间价值是递减的，也就是说随着时间的延长，期权时间价值的增幅是递减的。



- 影响期权价值的因素
  - 标的股票价格
  - 执行价格
  - 距离到期的时间
  - 波动率
  - 无风险利率
  - 股票红利

因　　素	欧式期权		美式期权	
	买权多头	卖权多头	买权多头	卖权多头
股票价格	正	负	正	负
执行价	负	正	负	正
距离到期的时间	正	正	正	正
波动率	正	正	正	正
无风险利率	正	负	正	负
股票红利	负	正	负	正

- **波动率**：波动率越大，标的股票潜在的上涨和下跌幅度越大。由于期权对股价向不利方向变动进行保护，因此，波动率增加对期权的影响总是有利的。
- **无风险利率**：无风险利率对期权价值的影响是比较复杂的。影响来自两个方面，一方面，股票价格的期望增长率随着利率的上升而上升；另一方面，利率上升将提高贴现率，降低未来现金流的现值。对于卖权来说，这两种作用都是不利的，因此，利率越高，卖权的价值越低。对于买权来说，前一种作用是有利的，后一种作用是不利的。可以证明，前一种作用相对于后一种作用占优，因此，利率越高，买权的价值越高。

2. 期权组合策略

1 牛市价差组合

2 熊市价差组合

3 蝶式价差组合

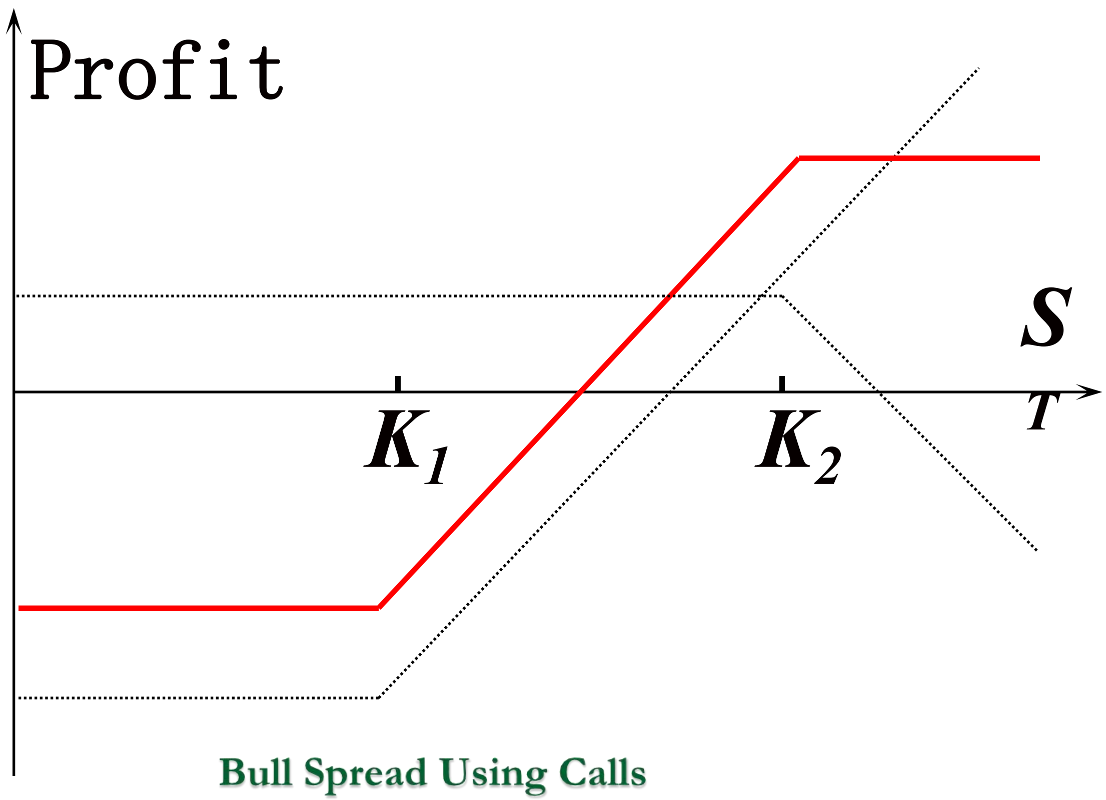
4 底部跨式组合

5 宽跨式组合

6 日历组合

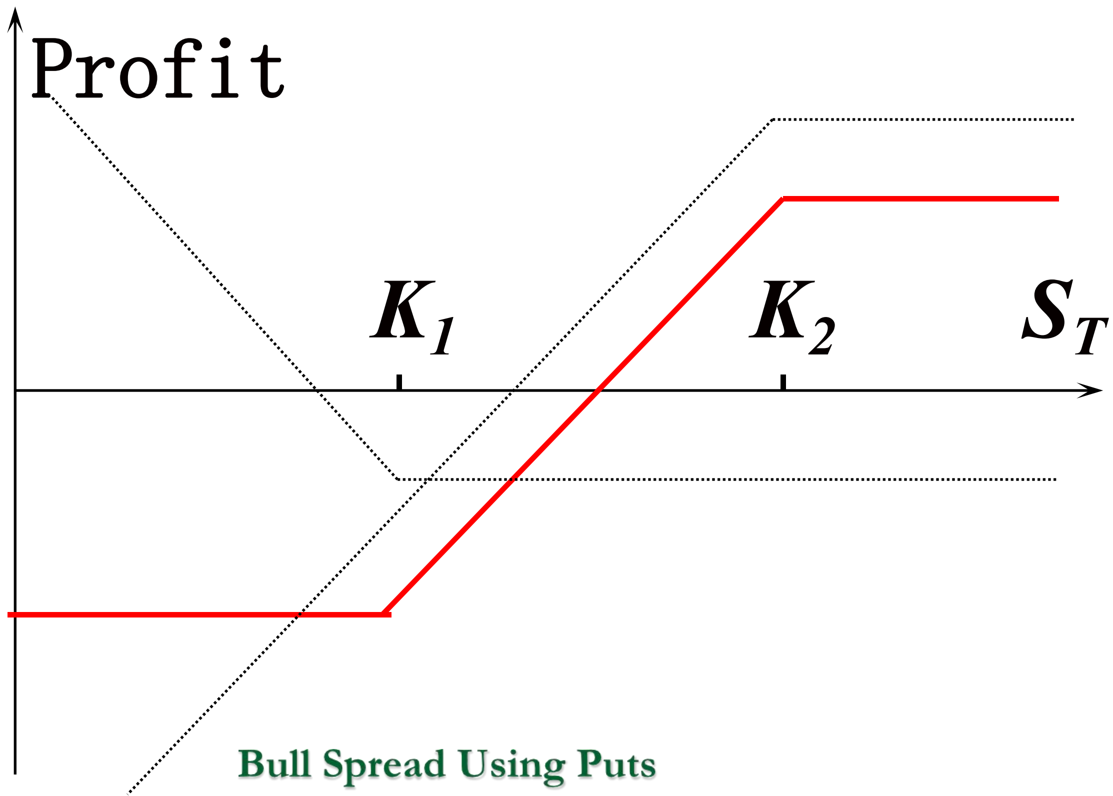
牛市价差组合(Bull Spread using Calls)

（1）看涨后市，但幅度不高，可以通过构造牛市价差期权来，减少购买期权的期权费



牛市价差组合(Bull Spread using Puts)

（1）看涨后市，但幅度不高，可以通过构造牛市价差期权来，减少购买期权的期权费



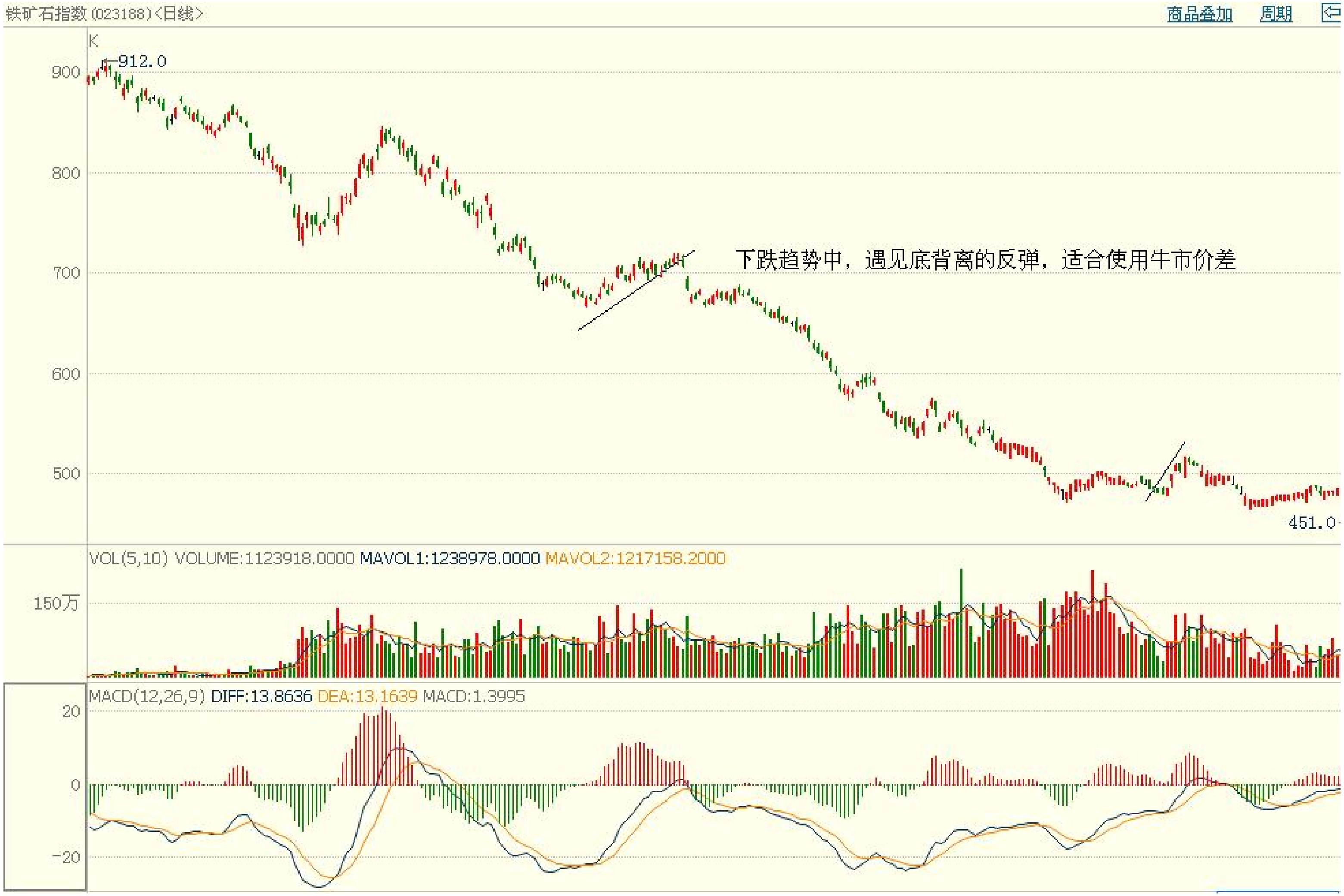
Bull Spread Using Puts

牛市价差组合(Calls)的到期收益率与利润

- 两个执行价格：K_1, K_2且 $K_1 < K_2$
- 简记期权价格为：$C(K_1)$, $C(K_2)$

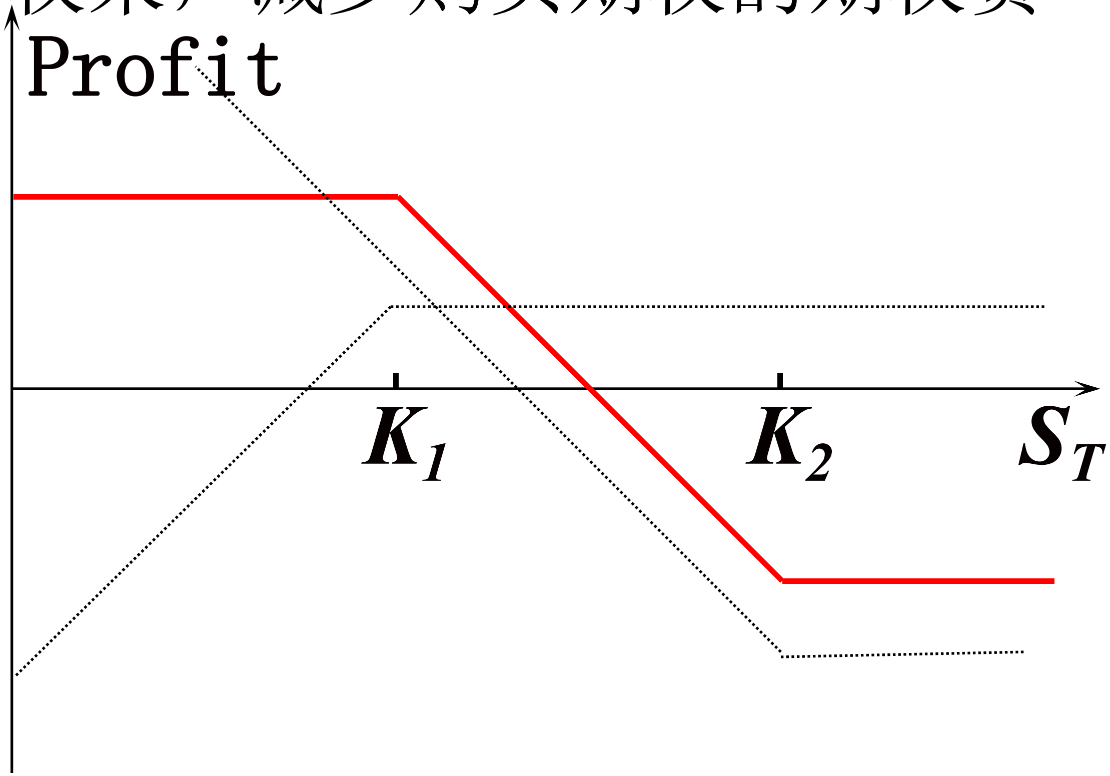
	$S(T) \le K_1$	$K_1 < S(T) \le K_2$	$S(T) > K_2$
收益	0	$S(T)-K_1$	$S(T)-K_2-(S(T)-K_1)$ $=K_2-K_1$
利润	$\mathbf{C(K_2)-C(K_1)}$	$\mathbf{C(K_2)-C(K_1)+S(T)-K_1}$	$\mathbf{C(K_2)-C(K_1)+K_2-K_1>0}$

适用场合：下跌趋势中反弹，希望获得反弹的收益，但是担心反弹的时间和空间难以把握，此时采用牛市价差



熊市价差组合(Puts)

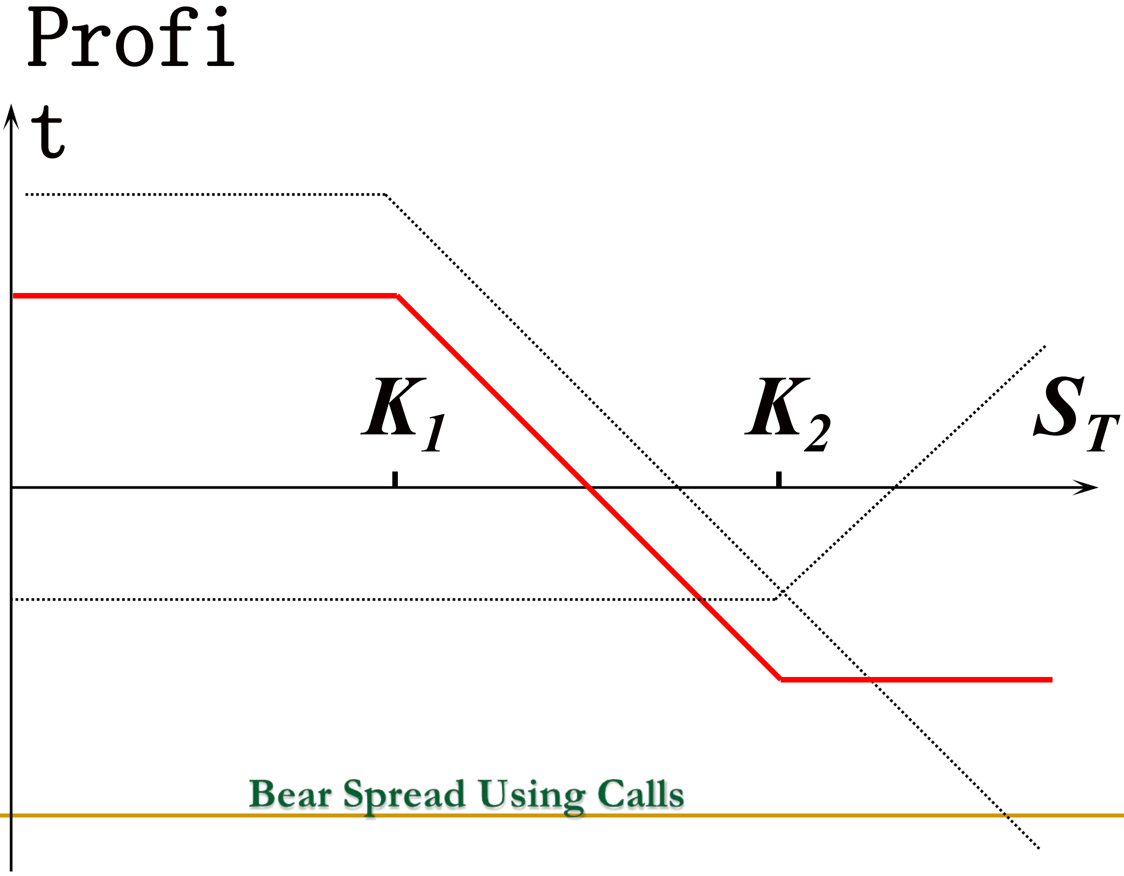
（2）看跌后市，但跌幅不大，可以通过构造熊市价差期权来，减少购买期权的期权费



Bear Spread Using puts

熊市价差组合(Calls)

（2）看跌后市，但跌幅不大，可以通过构造熊市价差期权来，减少购买期权的期权费



熊市价差组合(Calls)的到期收益率与利润

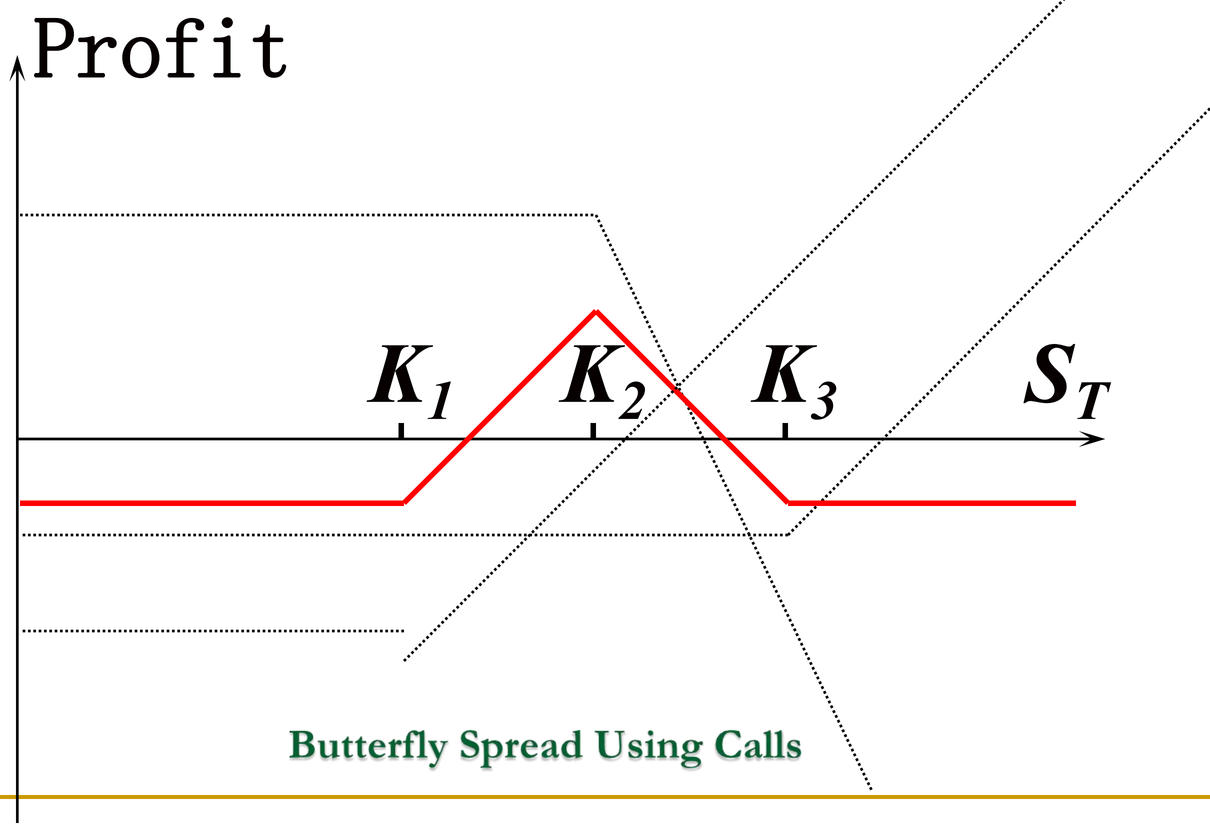
- 两个执行价格：K_1,K_2且 $K_1 < K_2$
- 简记期权价格为：$\mathrm{C}(K_1)$, $\mathrm{C}(K_2)$

	$S(T) \le K_1$	$K_1 < S(T) \le K_2$	$S(T) > K_2$
收益	0	$-\mathrm{S(T)}+K_1$	$-\mathrm{S(T)}+K_2+(\mathrm{S(T)}-K_1)$ $=K_1 - K_2$
利润	$\boldsymbol{-\mathrm{C}(K_2) + \mathrm{C}(K_1)}$	$\boldsymbol{-\mathrm{C}(K_2) +\mathrm{C}(K_1)-\mathrm{S(T)}+K_1}$	$\boldsymbol{-\mathrm{C}(K_2) +\mathrm{C}(K_1)-K_2 + K_1<0}$

适用场合：上升趋势中回调，希望获得下跌的收益，但是担心下跌的时间和空间难以把握，此时采用熊市价差

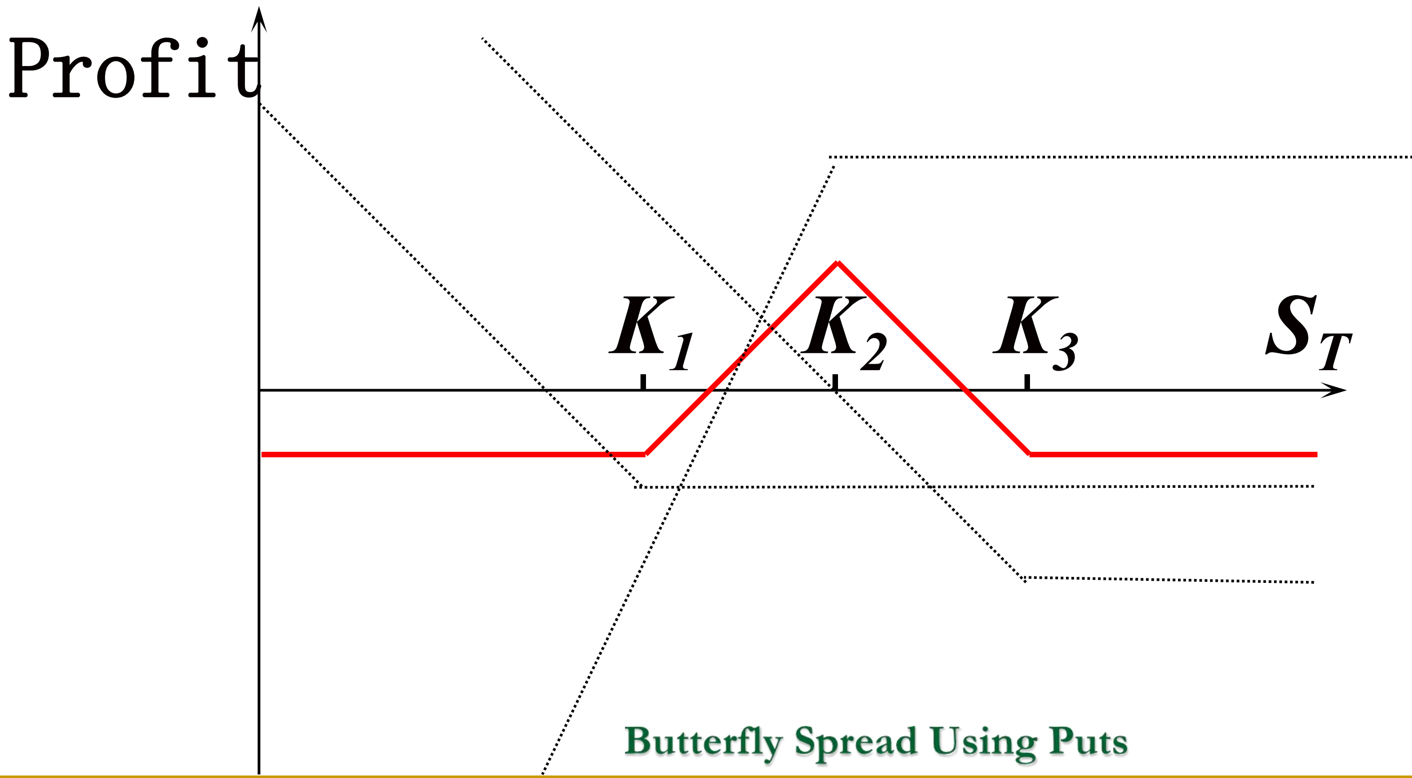
蝶式价差组合(Calls)

（3）认为后市将在非常小的幅度内振荡，可以通过构造蝶式价差期权来在市场小幅振荡时获利，大幅度波动时亏损也有限



蝶式价差组合(Puts)

（3）认为后市将在非常小的幅度内振荡，可以通过构造蝶式价差期权来在市场小幅振荡时获利，大幅度波动时亏损也有限

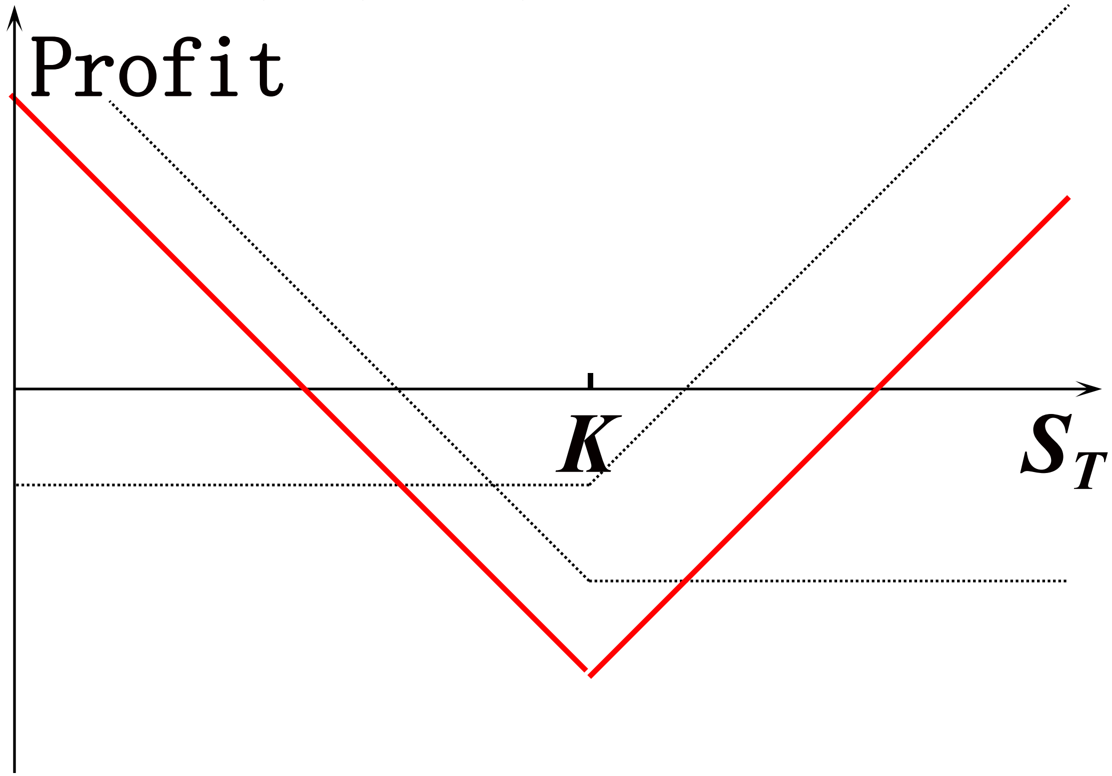


Butterfly Spread Using Puts

适用场合：预期短期内将继续窄幅区间震荡，不会发生突破

底部跨式组合

（4）认为后市将大涨或大跌（但不确定方向），可以构造跨式期权来在市场大涨或大跌中获利

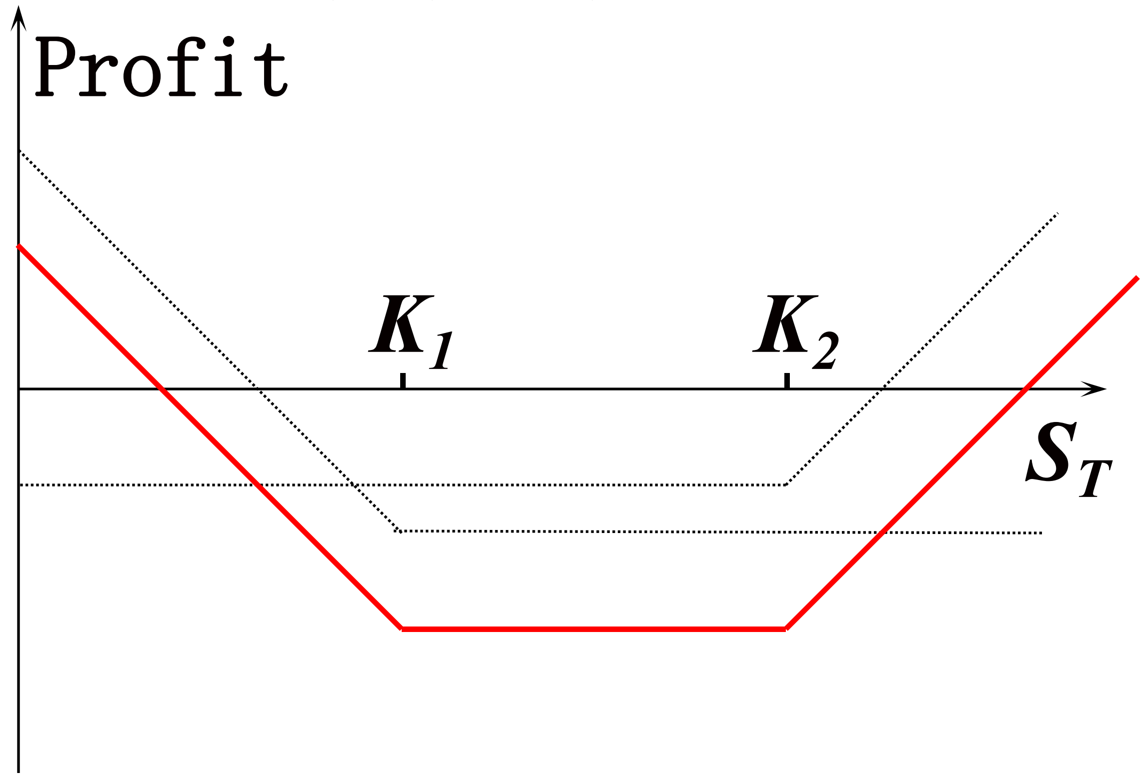


A Straddle Combination

适用场合：三角形整理末期，即将突破，大幅波动

底部宽跨式组合

（5）认为后市将大涨或大跌（但不确定方向），可以构造宽跨式期权来在市场大涨或大跌中获利

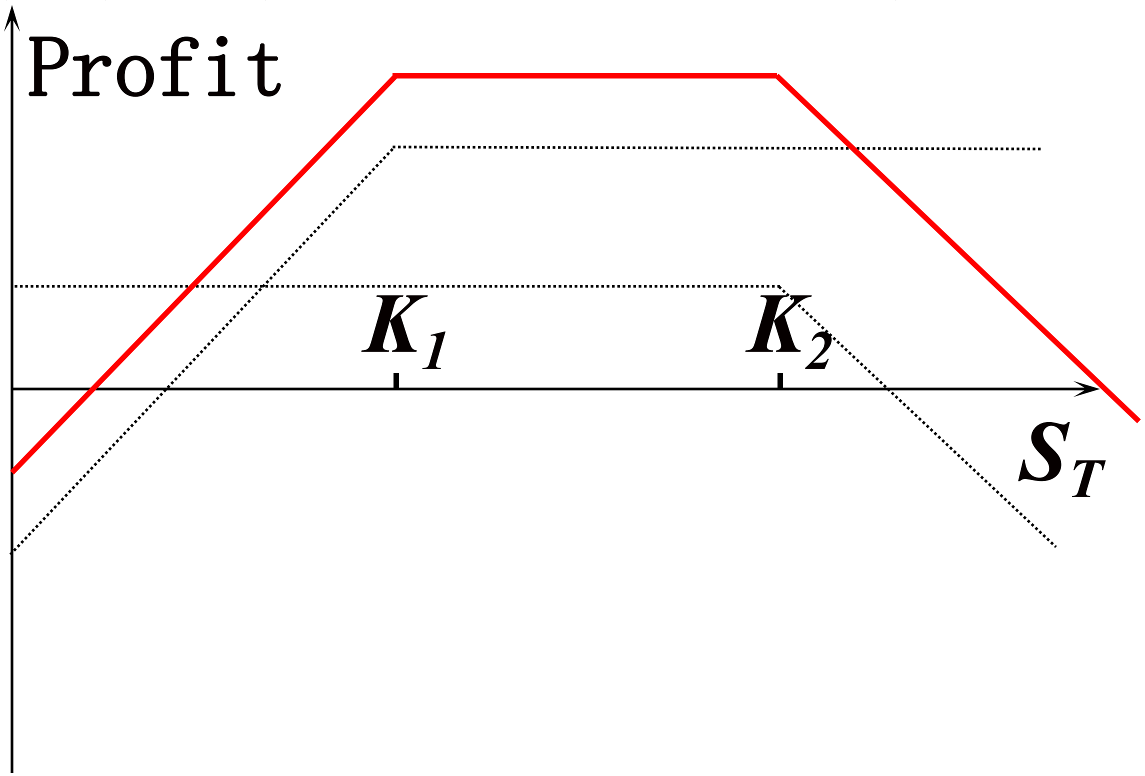


A Strangle Combination

适用场合：预期将突破区间震荡

顶部宽跨式组合

（5）认为后市将继续区间震荡，可以构造顶部宽跨式期权来在市场大涨或大跌中获利

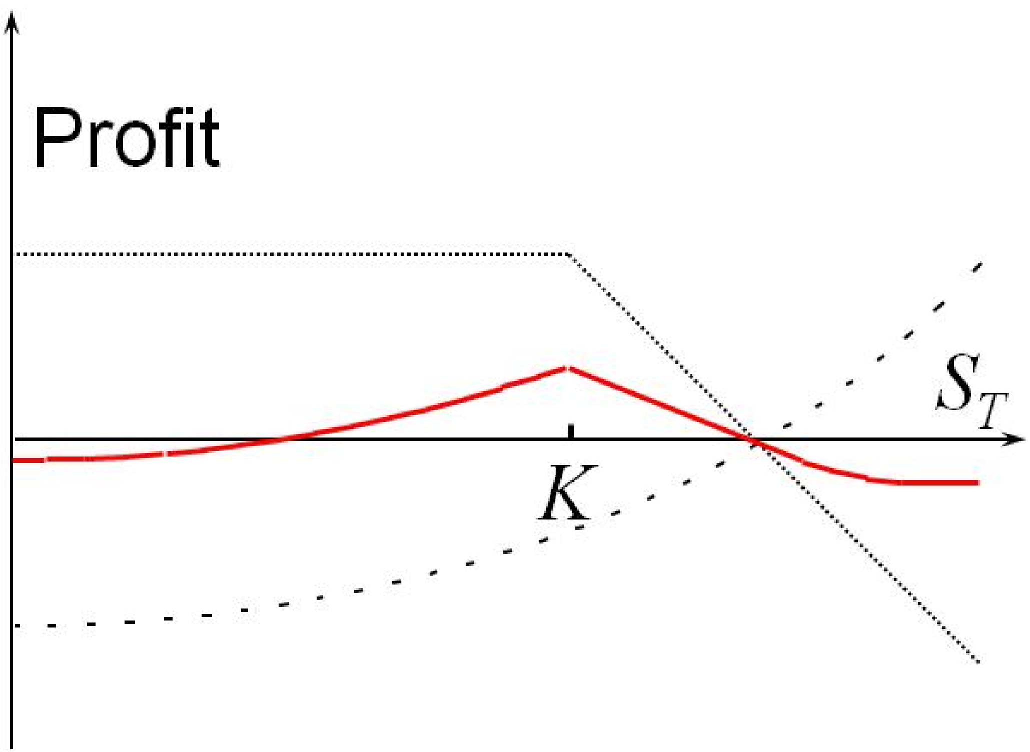


A Strangle Combination

适用场合：预期短期内将继续区间震荡，不会发生突破

日历价差组合

（6）认为后市将在非常小的幅度内振荡，也可以通过构造日历期权组合来获利：买入到期时间为T_2的期权，并卖出的T_1期权(T_2>T_1)



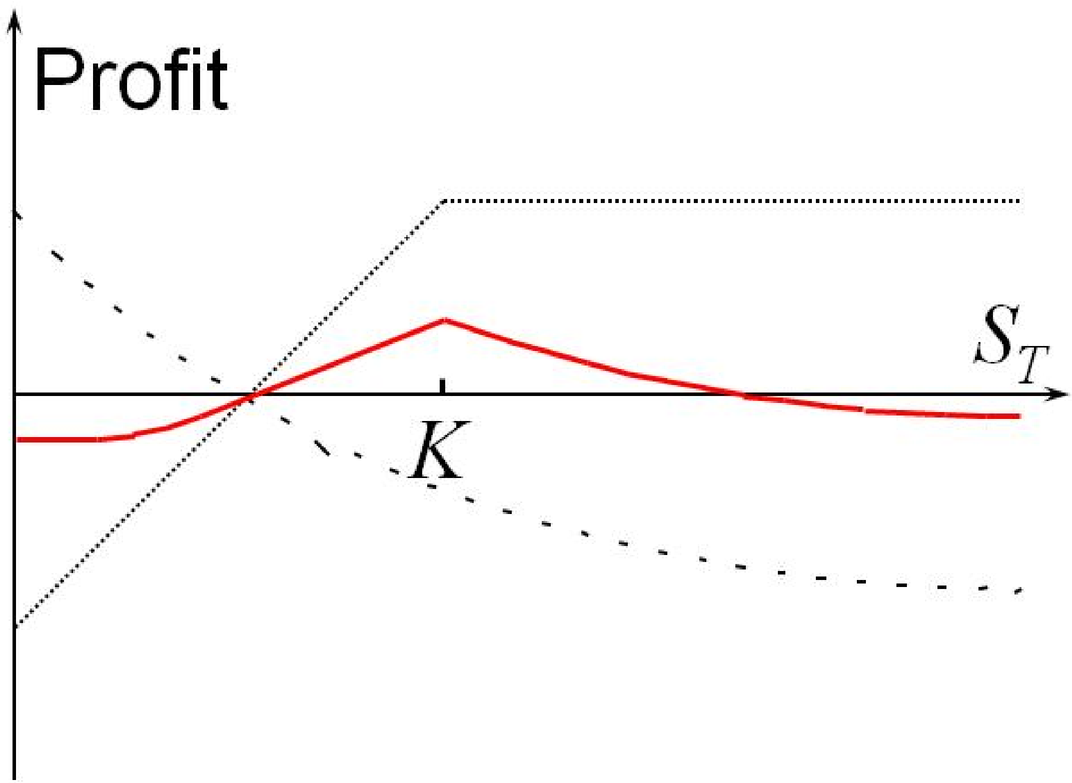
Calendar Spread Using Calls

日历价差组合

- 成本：$C(t,K,T_2) - C(t,K,T_1) > 0$
- 到期收益：$C(T_1,K,T_2) - max(S_{T1} - K,0)$
- 若T_1时刻股价S_{T1}：
  - 远低于行权价：$C(T_1,K,T_2) \approx 0 = max(S_{T1} - K,0)$
  - 接近行权价：$C(T_1,K,T_2) > 0 \approx max(S_{T1} - K,0)$
  - 远高于行权价：$C(T_1,K,T_2) \approx S_{T1} - K = max(S_{T1} - K,0)$

日历价差组合

（6）认为后市将在非常小的幅度内振荡，也可以通过构造日历跨式期权组合来获利



Calendar Spread Using Puts

3. 期权定价的价格无套利关系

3.1 期权定价的基本无套利关系

（1）基本无套利关系

- 买权的价值从不高于标的物股票本身的价值，卖权的价值不高于预定价。
- 欧式卖权的价值从不高于预定价用无风险利率折现的现值
- 期权的价值决不为负
- 美式期权的价值决不低于欧式期权的价值。

- 数学符号：
  - 时刻 t，欧式看涨、看跌期权的价格：$c(t)$，$p(t)$
  - 时刻 t，美式看涨、看跌期权的价格：$C(t)$，$P(t)$

- **关系1**：$0 \le c(t) \le C(t) \le S(t)$
- **关系2**：$0 \le p(t) \le P(t) \le K$
- **关系3**：$p(t) \le Ke^{-r(T-t)} = PV(K)$

- 美式期权的价值决不低于现在马上就执行该期权所实现的期权价值：

$$C(t) \geq \max\{S(t)-K, 0\}$$
$$P(t) \geq \max\{K-S(t), 0\}$$

例如：股票：100元，执行价90元，期权费9元，则可无风险套利一元。

（2）欧式期权定价和美式期权定价之间的关系

- 欧式期权

考察未到期时标的价格与预定价格之间的关系，假定标的股票在期权有效期内是不分红的，则有：

关系4： $\boxed{c(t) \geq \max\{S(t) - Ke^{-r(T-t)}, 0\}}$

$v_{(T-t)} = e^{-r(T-t)}$ 是以无风险利率 r_f 为折现率，从时刻 t 到 T 的贴现因子。

看一下证明过程：

只需证明：　$c(t) \ge S(t) - Kv_{(T-t)}$

假如　$c(t) < S(t) - Kv_{(T-t)}$

头寸	即期现金流（t）	到期现金流(T)
卖空1股股票	$S(t)$	-$S(T)$
购买1份欧式期权	-$c(t)$	$\max\{S(T)-K,0\}$
购买无风险证券	$-Kv_{(T-t)}$	K
净现金流	$S(t)-Kv_{(T-t)}-c(t)$	$\max\{S(t)-K,0\}-(S(T)-K)$

注意：

$$S(t) \ge c(t) \ge \max\{S(t) - Ke^{-r(T-t)}, 0\}$$

如果T趋于无穷，则折现因子趋于零，从而

$$c(t) = S(T)$$

- 美式期权

$$\boxed{C(t) \geq \max\{S(t) - Ke^{-r(T-t)}, 0\}}$$

在t时刻美式买权实现的价值为 $\max\{S(t)-K, 0\}$

显然不划算，因此，

不分红股票的美式买权不可能提前执行

如果提前执行，就存在套利机会。

对于看跌期权，我们同样有

- 欧式看跌期权

考察未到期时标的的价格与预定价之间的关系，假定标的股票在期权有效期内是不分红的，则：

关系5： $$\boxed{p(t) \geq \max\{Ke^{-r(T-t)} - S(t), 0\}}$$

- 美式看跌期权

$$\boxed{P(t) \geq \max\{Ke^{-r(T-t)} - S(t), 0\}}$$

- 两种期权价值的关系

美式买权不可能提前执行，则

关系6： $\boxed{C(t)=c(t)}$

对于卖权：可能提前执行

$$P(t)\geq p(t)$$

$$p(t)\geq \max\{Ke^{-r(T-t)}-S(t),0\}$$
$$P(t)\geq \max\{Ke^{-r(T-t)}-S(t),0\}$$

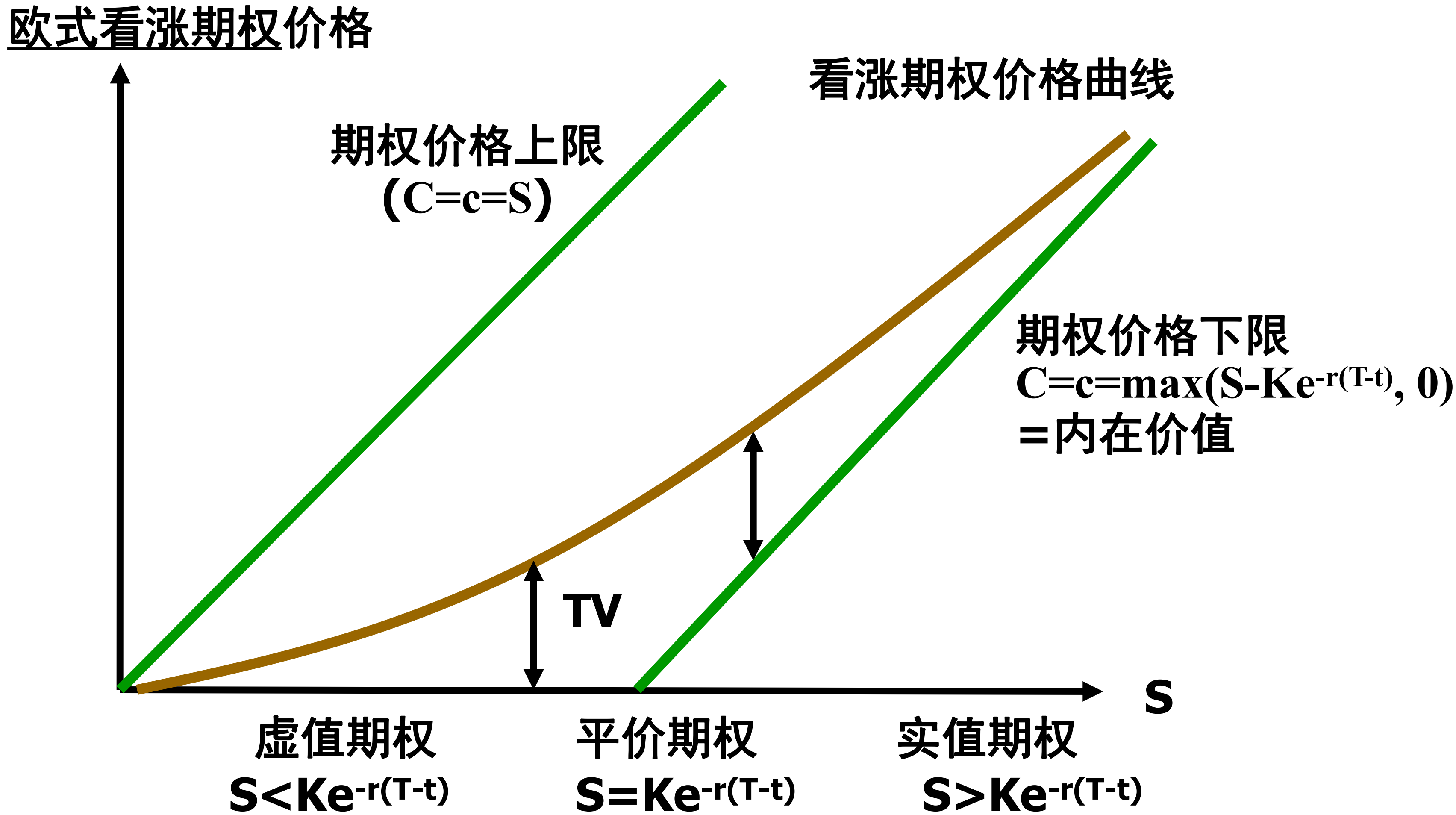
期权基本无套利关系汇总

- **关系1**： $0 \le c(t) \le C(t) \le S(t)$
- **关系2**： $0 \le p(t) \le P(t) \le K$
- **关系3**： $p(t) \le Ke^{-r(T-t)} = PV(K)$
- **关系4**： $c(t) \ge \max\{S(t) - Ke^{-r(T-t)}, 0\}$

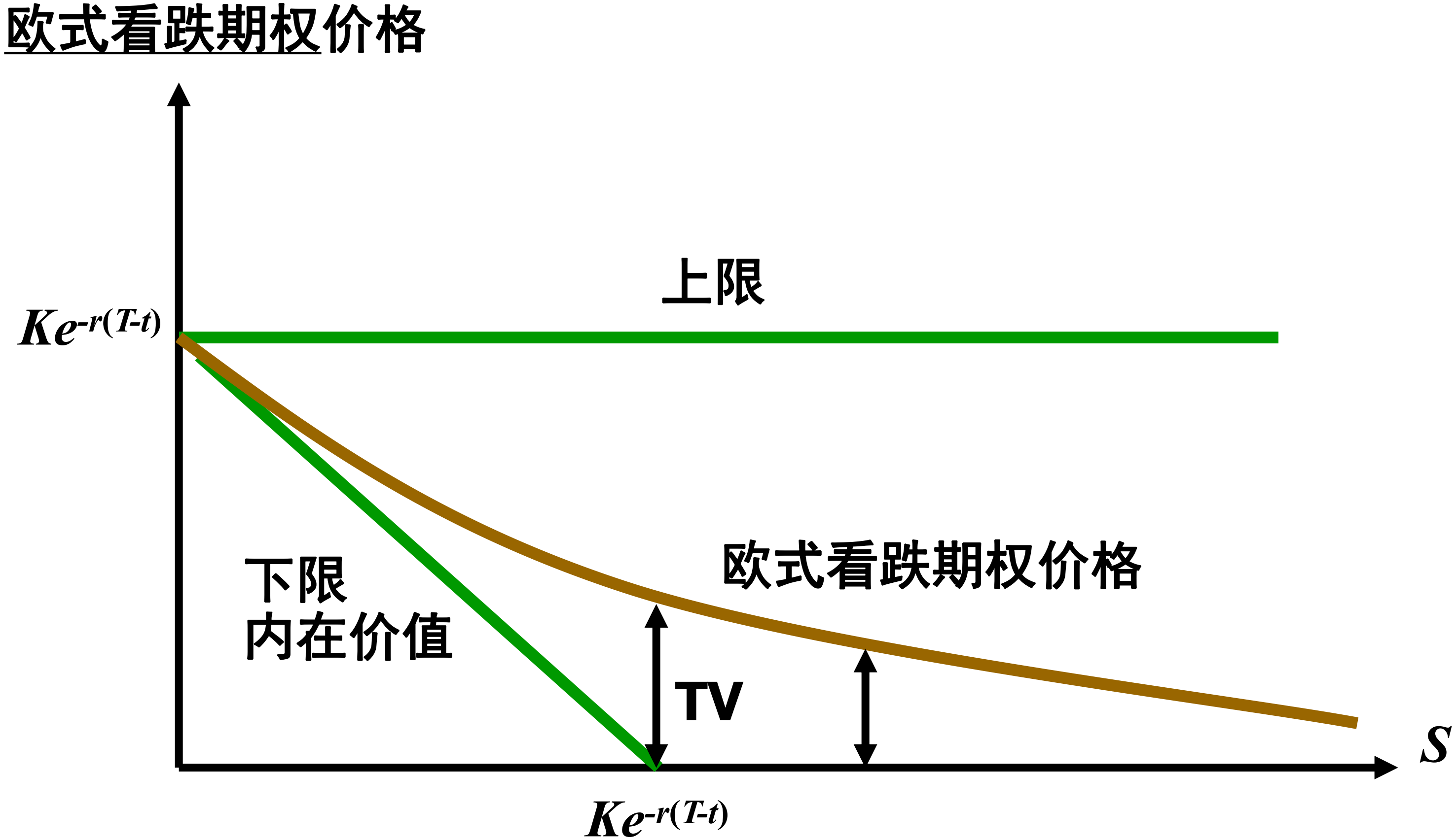
  $C(t) \ge \max\{S(t) - Ke^{-r(T-t)}, 0\}$
- **关系5**： $p(t) \ge \max\{Ke^{-r(T-t)} - S(t), 0\}$

  $P(t) \ge \max\{Ke^{-r(T-t)} - S(t), 0\}$
- **关系6**： $C(t) = c(t)$

欧式看涨期权价格曲线的形状



欧式看跌期权价格曲线的形状



3.2 看涨–看跌平价关系

(1). 标的资产不分红，欧式期权的买权和卖权有如下关系（买权与卖权有相同的执行价格）：

$$\boxed{S(t) = c(t) - p(t) + Kv_{(T-t)}}$$

要证明这个关系，考虑下面两个投资组合：

- 数量为 $Kv_{(T-t)}$ 的无风险资产与一个欧式买权
- 一股股票和一个单位卖权 。

假如两个组合有不同的价格，

头寸	即期现金流（t）	到期现金流 ($S(T)<K$)	到期现金流 ($S(T)\geq K$)
购买1份股票	$-S(t)$	$S(T)$	$S(T)$
卖空1份看涨期权	$c(t)$	0	$-[S(T) - K]$
购买1份看跌期权	$-p(t)$	$K - S(T)$	0
卖空无风险证券	$Ke^{-r(T-t)}$	$-K$	$-K$
净现金流	$\mathbf{-S(t)+c(t)-p(t)+Ke^{-r(T-t)}}$	**0**	**0**

则一定会产生套利。

(2). 标的资产不分红，美式期权买权和卖权的关系

$$S(t) \geq C(t) - P(t) + Kv_{(T-t)}$$

还可以推出进一步的关系：

$$S(t) - K \leq C(t) - P(t) \leq S(t) - Ke^{-r(T-t)}$$

前一部分证明：组合策略

- 卖空1股股票
- 卖空1份美式看跌期权
- 购买1份美式看涨期权
- 购买价值为K的无风险证券

(3) 标的资产分红的的买权和卖权的关系

- 欧式期权与美式期权的关系

$$C(t) \geq c(t) \geq S(t) - PV(D) - Kv_{(T-t)}$$

$$P(t) \geq p(t) \geq Kv_{(T-t)} - S(t) + PV(D)$$

$PV(D)$是期间发放的红利折现到t时刻的现值。
利用无套利分析可证明两式成立。

- 到期日前有红利支付的欧式期权的买权与卖权的平价关系：

$$S(t) = c(t) - p(t) + Kv_{(T-t)} + PV(D)$$

- 到期日前有红利支付的美式期权的买权与卖权的关系：

$$S(t) - PV(D) - K \le C(t) - P(t) \le S(t) - Kv_{(T-t)}$$

期权平价关系扩展

- 欧式期权， $D > 0$

$$c + D + Ke^{-rT} = p + S_0$$

- 美式期权， $D = 0$

$$S_0 - K < C - P < S_0 - Ke^{-rT}$$

- 美式期权， $D > 0$

$$S_0 - D - K < C - P < S_0 - Ke^{-rT}$$

3.3 到期期限对期权价格的影响

- 若T_2>T_1，则有

$$C(S;K;t;T_2) \geq C(S;K;t;T_1);$$
$$P(S;K;t;T_2) \geq P(S;K;t;T_1);$$

另外，若标的股票无分红：

$$c(S;K;t;T_2) \geq c(S;K;t;T_1).$$

- 美式期权结论显而易见。

- 对于欧式期权，如果$c(S;K;t;T_2) < c(S;K;t;T_1)$,构造组合：

1. 在 t 时刻，买入左边期权，卖出右边期权，现金流为正；

2. 在T_1时刻，右边期权的空头头寸导致的现金流为 -max{S_{T1}-K,0};左边的多头头寸价值为c(S;K;T_1;T_2).

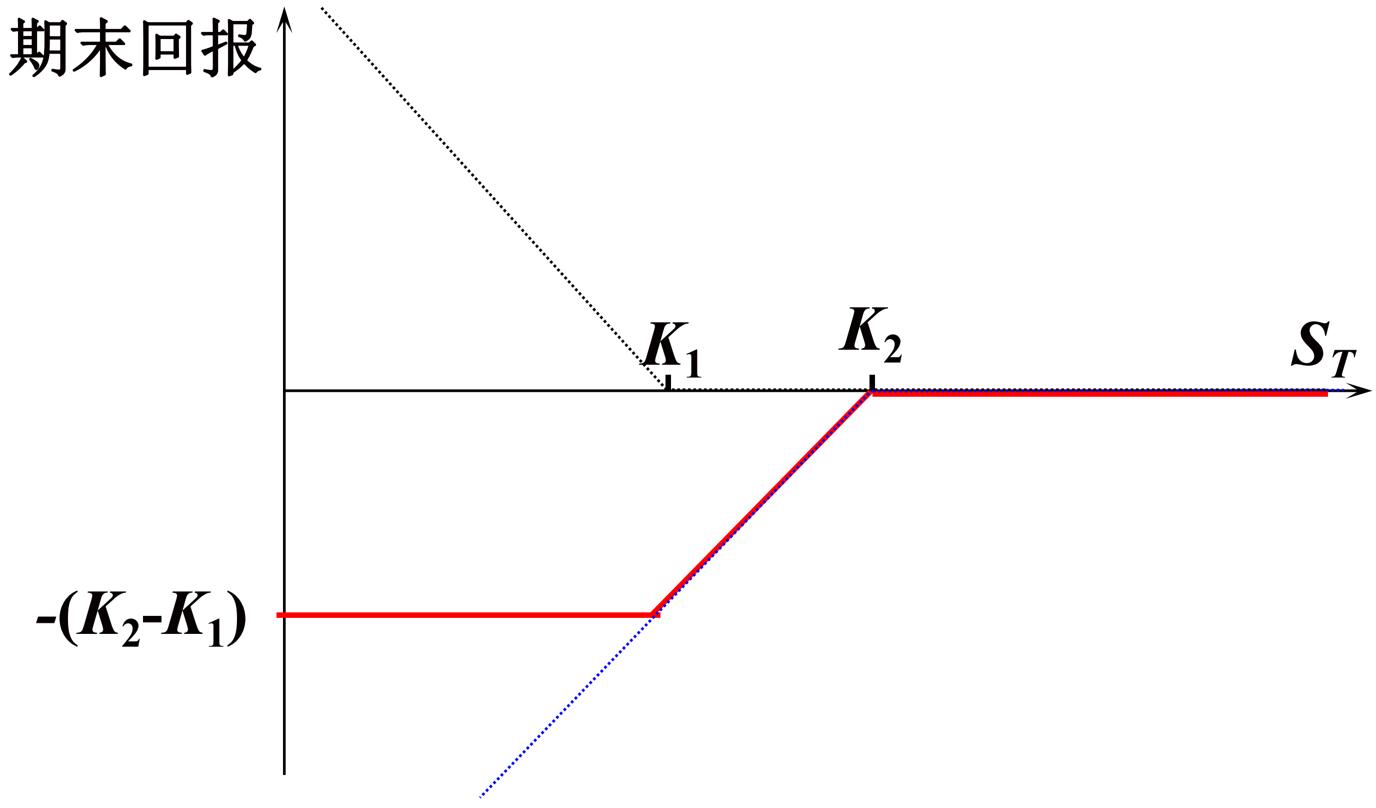
- 由无套利关系4可知，此时期权多头价值满足

$$c(S;K;T_1;T_2) \geq \max(S_{T_1} - PV(K),0)$$
$$\geq \max(S_{T_1} - K,0)$$

于是存在套利机会！

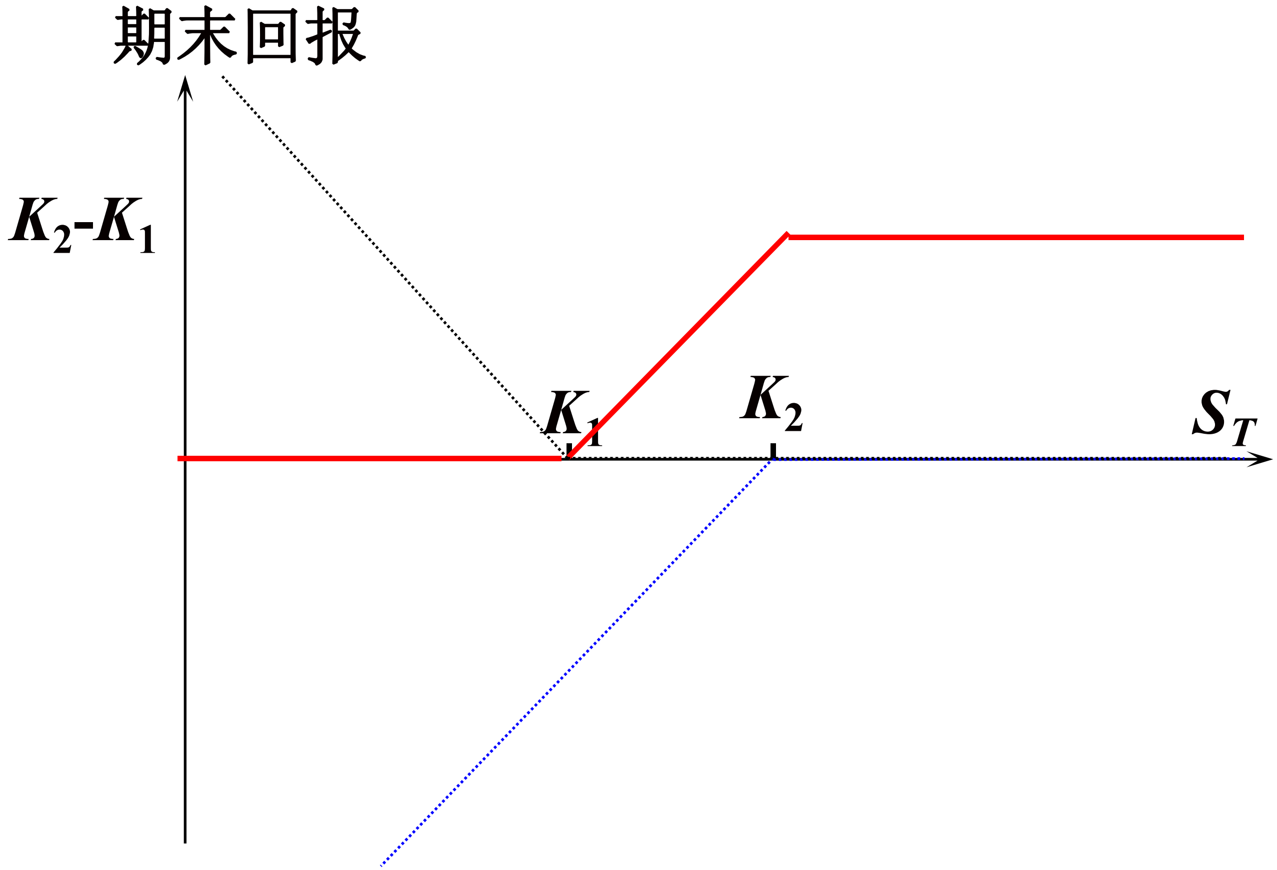
3.4 期权的斜率限制关系

（1）牛市价差组合：$p(K_1)-p(K_2)\le 0$



（2）牛市价差组合(puts)+债券(K_2-K_1)

$$p(K_1) - p(K_2) + (K_2 - K_1)\cdot v_{T-t} \geq 0$$



这意味着执行价格每增加1，看跌期权的价格增量不超过1的现值。

$$0 \le \frac{p(K_2)-p(K_1)}{K_2-K_1} \le v \quad \Rightarrow \quad 0 \le \frac{\partial p}{\partial K} \le v$$

同样的，我们可用熊市差价组合(calls)和债券，得出

$$-v \le \frac{c(K_2)-c(K_1)}{K_2-K_1} \le 0 \quad \Rightarrow \quad -v \le \frac{\partial c}{\partial K} \le 0$$

例：五粮液当前股价为100。一年到期执行价格为100的欧式看跌期权价格为2.5，一年到期执行价格为110的欧式看跌期权价格为12.25。假设从现在起到期权到期日，无风险利率为5%。那么是否存在套利机会？

$$p(110)-p(100) = 9.75 > 9.5238 = (110-100)/(1+5\%).$$

所以存在套利机会。

套利策略：卖空执行价格为110的看跌期权，买入执行价格为100的看跌期权，并将所得现金12.25-2.5=9.75以5%的无风险利率存入银行(存款到期现金流为10.2375)。

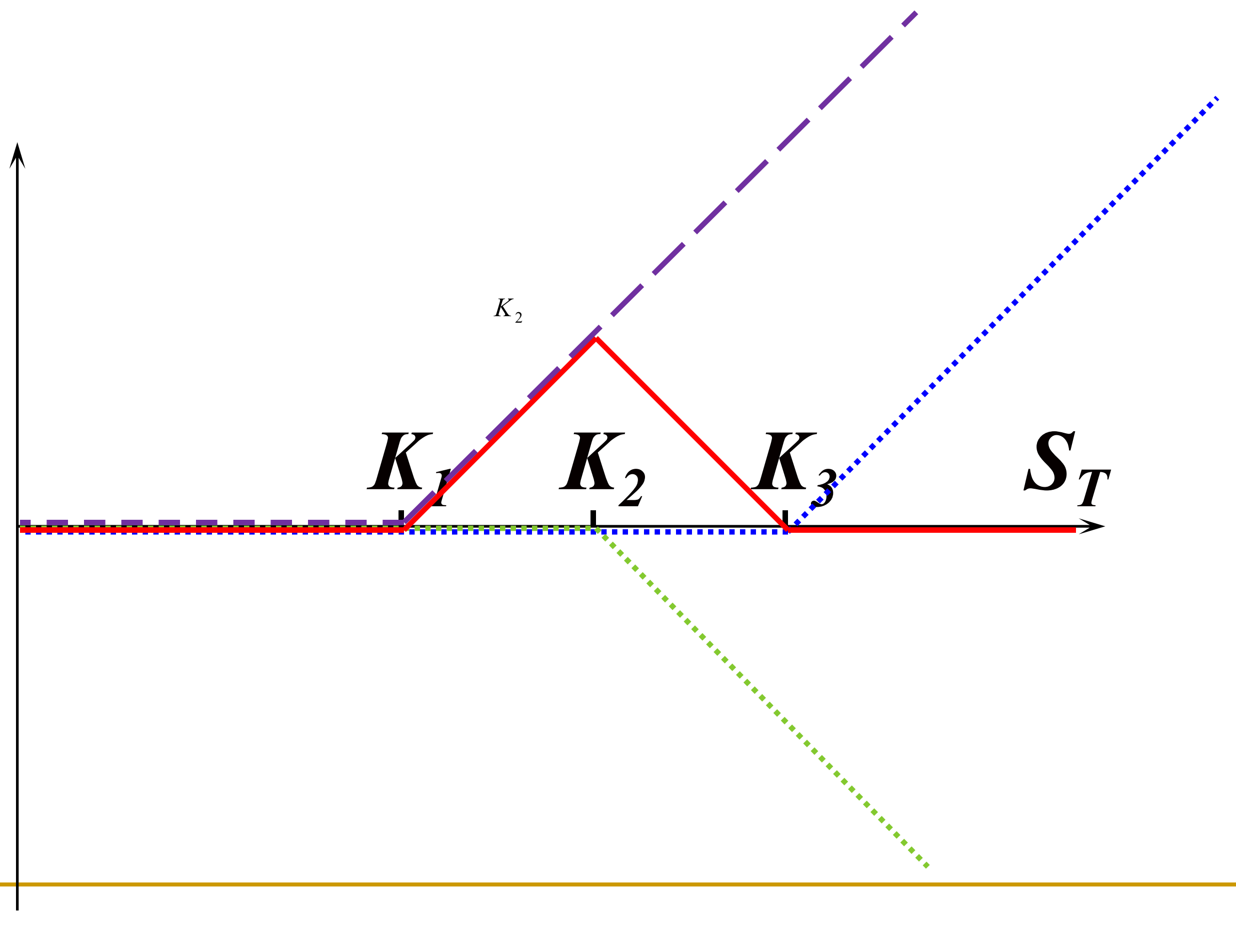
对于美式期权，无套利论证基本相同。区别在于卖出的期权可能提前行权，这时候**得不到执行期权后所得资金的利息**。

因此，美式期权的无套利斜率限制为：

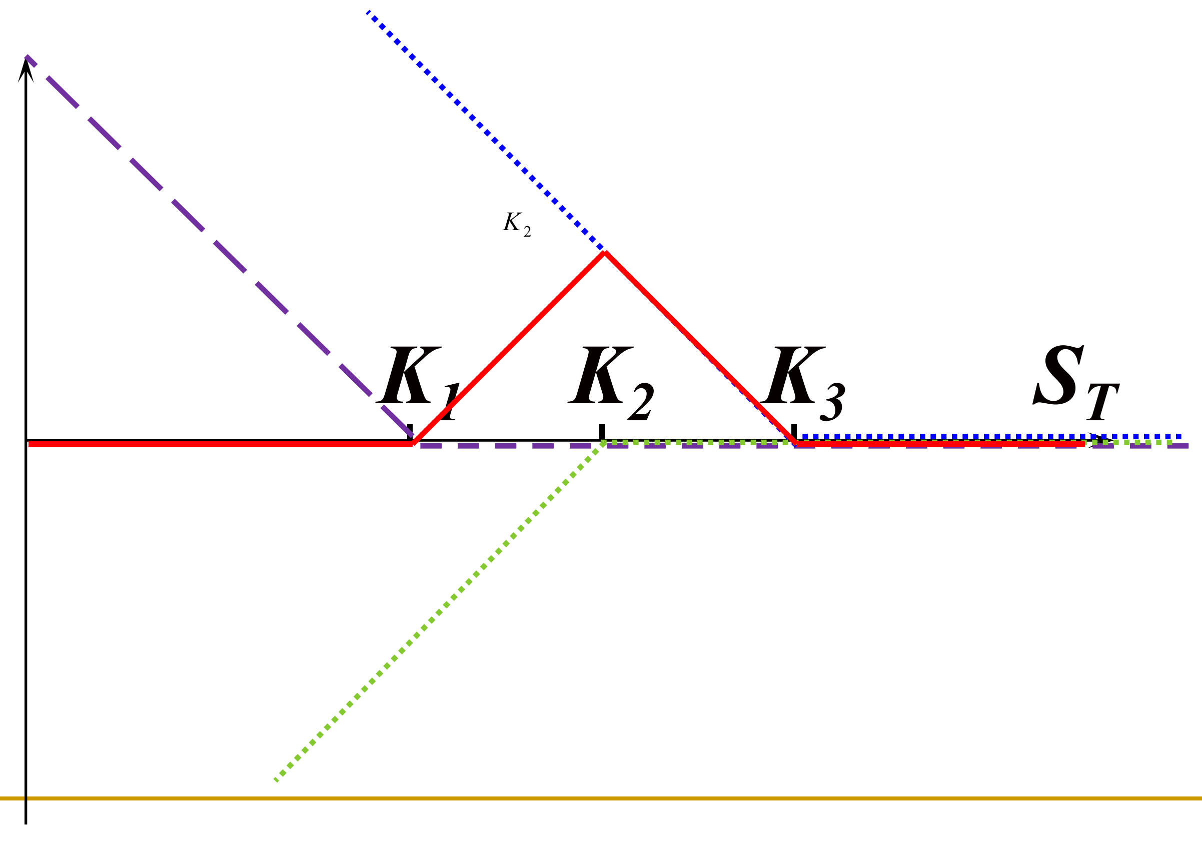
$$0 \le \frac{P(K_2)-P(K_1)}{K_2-K_1} \le 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le \frac{\partial P}{\partial K} \le 1$$

$$-1 \le \frac{C(K_2)-C(K_1)}{K_2-K_1} \le 0 \quad \Rightarrow \quad -1 \le \frac{\partial C}{\partial K} \le 0$$

（3）蝶式差价组合：$c(K_1)-2c(K_2)+c(K_3)\geq 0$



蝶式差价组合：$p(K_1)-2p(K_2)+p(K_3)\geq 0$



由于蝶式期权组合的到期收益非负，所以该头寸价值非负：

$$
\begin{aligned}
&c(K_1)-2c(K_2)+c(K_3)\\
&=[c(K_3)-c(K_2)]-[c(K_2)-c(K_1)]\geq 0
\end{aligned}
$$

另外，由于K_3-K_2 = K_2-K_1>0，我们有

$$\frac{c(K_3)-c(K_2)}{K_3-K_2}-\frac{c(K_2)-c(K_1)}{K_2-K_1}\geq 0$$

类似地

$$\frac{p(K_3)-p(K_2)}{K_3-K_2}-\frac{p(K_2)-p(K_1)}{K_2-K_1}\geq 0$$

即$c(K)$和$p(K)$的斜率随着执行价格K的增大而增加。
换句话说，$c(S,K,t,T)$和$p(S,K,t,T)$是K的凸函数。

当执行价格足够接近时($\Delta K=K_2-K_1\to 0$)，我们有

$$\frac{\partial^2 c}{\partial K^2}\ge 0,\qquad \frac{\partial^2 p}{\partial K^2}\ge 0$$

例：中石油股票当前股价为48.125。6个月到期执行价格为65的欧式看跌期权价格为17，6个月到期执行价格为70的欧式看跌期权价格为22，6个月到期执行价格为75的欧式看跌期权价格为26。假设从现在起到期权到期日，6个月的资金成本为3.25%。那么是否存在套利机会？

$p(65)-2p(70)+p(75) = 17-22*2+26=-1 < 0$.

所以存在套利机会。

套利策略：买入执行价格为65和75的看跌期权，卖空2份执行价格为70的看跌期权。期初现金流为1，期末现金流非负。

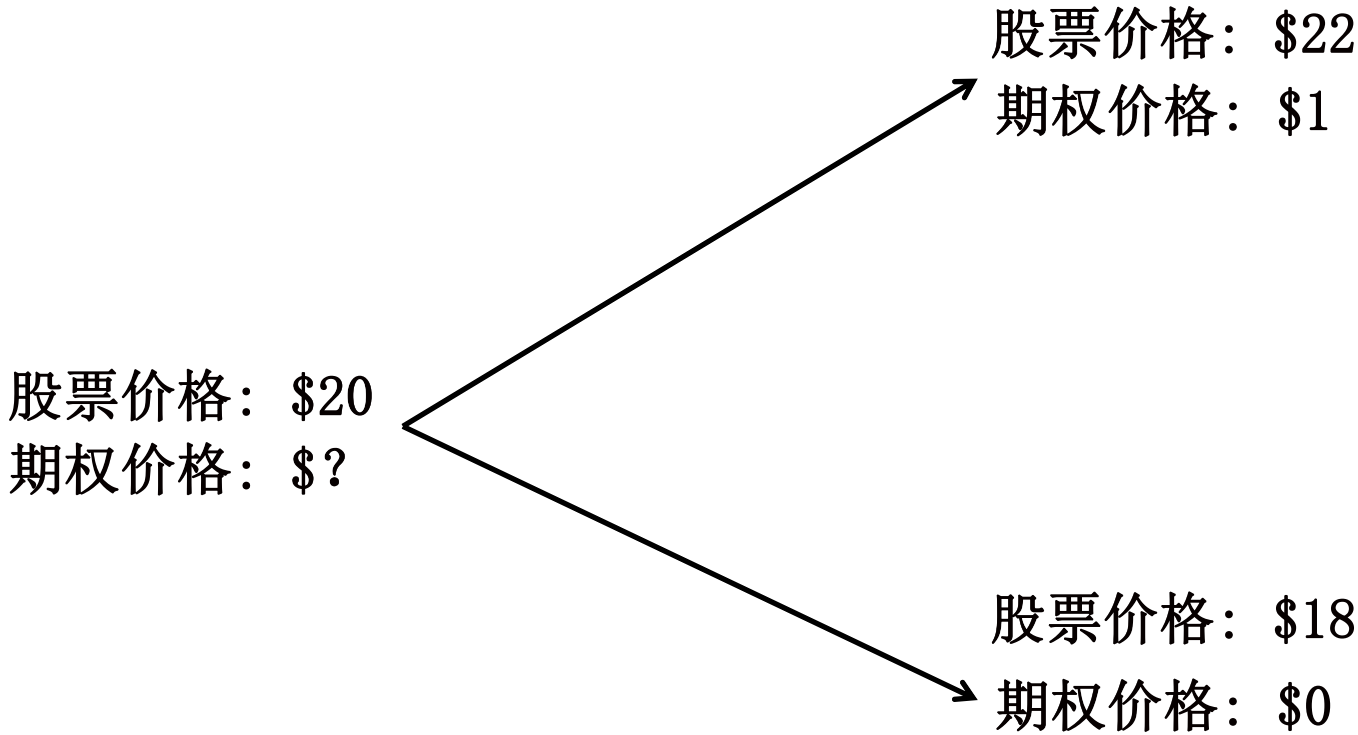
4. 期权定价——二叉树方法

4.1 单步二叉树

- 二叉树图的构造
  - 问题

　　假设一种股票当前价格为$20，三个月后的价格将可能为$22或$18。假设股票三个月内不付红利。有效期为3个月的欧式看涨期权执行价格为$21。如何对该期权进行估值？

- 思路
  - 根据期权的特性，可以用下图所示的二叉树图来描述股票和期权的价格运动。
  - 如果能够用这种股票和期权构造一个组合，使得在三个月末该组合的价值是确定的，那么根据该组合的收益率等于无风险收益率（无套利假设），可以得到构造该组合所需成本（现值），而组合中股票的价格是已知的，于是可以得出期权的价格。
  - 构造一个证券组合：**一个Δ股股票多头头寸和一个看涨期权的空头头寸。** 是否可有多种构造方法？


股票价格：$22
期权价格：$1
股票价格：$20
期权价格：$?
股票价格：$18
期权价格：$0

- 当股票价格从\$20上升到\$22时，该证券组合的总价值为22Δ-1；当股票价格从\$20下降到\$18时，该证券组合的总价值为18Δ。
- 完全可以选取某个Δ值，使得该组合的终值对在上述两种情况下是相等的。这样，该组合就是一个无风险组合。

$$22\Delta - 1 = 18\Delta \quad \Rightarrow \quad \Delta = 0.25$$

- Δ是否一定为正?
- 因此，一个无风险的组合由0.25股股票和一个期权空头构成。通过计算可知，无论股票价格是上升还是下降，在期权有效期的末尾，该组合的价值总是\$4.5。

- 在无套利假设下，无风险证券组合的盈利必定为无风险利率。
- 假设无风险利率为年率12％。则该组合的现值应为：

$$4.5e^{-0.12\times 0.25}=4.3674$$

- 股票现在的价格已知为$20。用 f 表示期权的价格。因此，

$$由 20\times 0.25 - f = 4.3674 \quad 得 \quad f = 0.633$$

- 如果期权价格偏离0.633，则将存在套利机会。

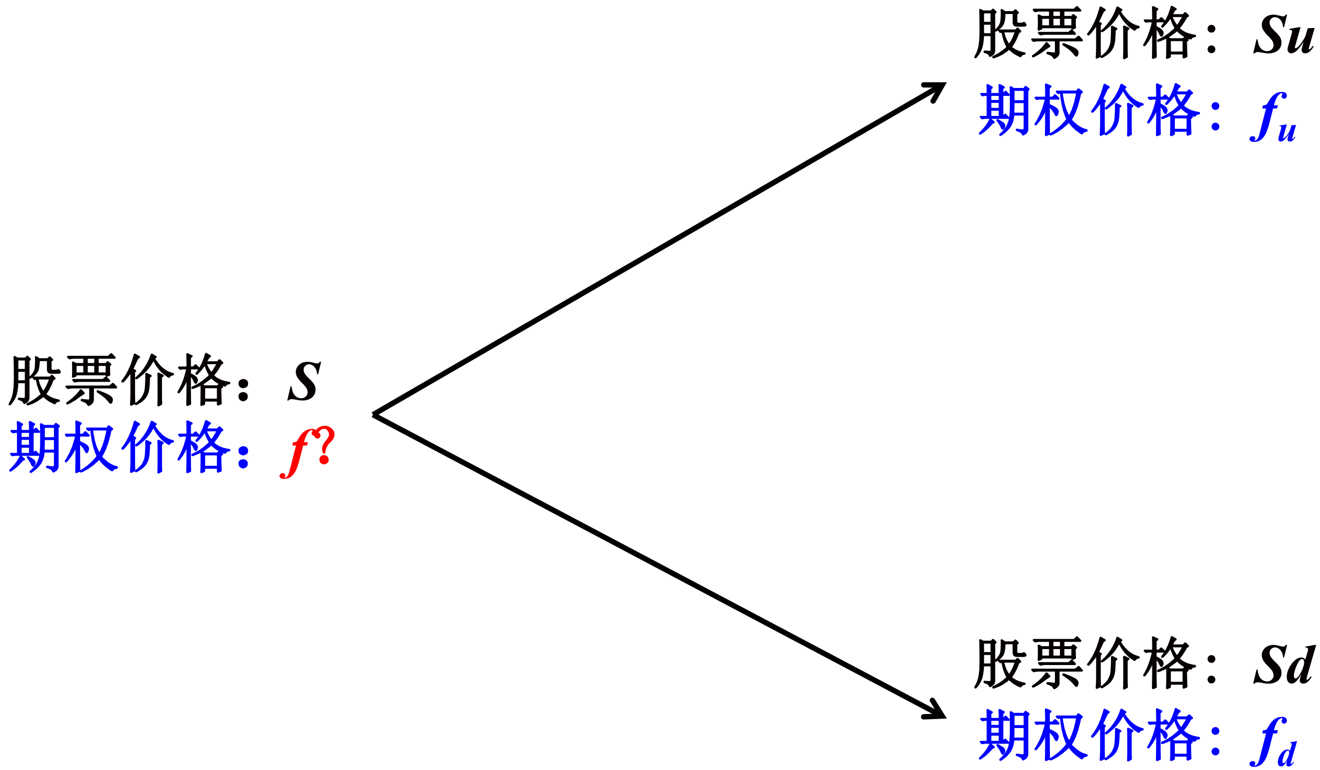
一般结论

- 考虑一个无红利支付的股票，价格为 S_0。基于该股票的某个衍生证券的当前价格为 f。假设当前时间为 0 时刻，衍生证券给出了在 T 时刻的盈亏状况。
- 一个证券组合由 Δ 股的股票多头和一个衍生证券空头构成。
- 如果股票价格上升，在有效期末该组合的价值为：

$$S_u \cdot \Delta - f_u$$

- 如果股票价格下降，在有效期末该组合的价值为：

$$S_d \cdot \Delta - f_d$$



单步二叉树图中的股票价格和期权价格

- 当两个价值相等时，即 $S_d \cdot \Delta - f_d = S_u \cdot \Delta - f_u$
- 此时，

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}$$

- 该组合是无风险的，收益必得无风险利率。
- 在T时刻的两个节点之间运动时，Δ是衍生证券价格变化与股票价格变化之比。

- 用 r 表示无风险利率，该组合的现值应为

$$(S_u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

- 而构造该组合的成本是：

$$S\Delta - f$$

- 因此，根据无套利原理

$$S\Delta - f = (S_u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

- 将Δ表达式代入上式，得到

$$\boxed{f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d]} \qquad \textbf{(*)}$$

- 其中

$$p = \frac{e^{rT}S_0 - S_d}{S_u - S_d} \qquad \textbf{(p)}$$

风险中性概率

- 关于单步二叉树，上式就可为衍生证券估值。

4.2 风险中性估值

- 风险中性估值原理
  - 风险中性世界：式中的变量 p 可以“解释为”股票价格上升的概率，而变量1-p就是股票价格下降的概率。这样，

$$pf_u + (1-p)f_d$$

就是衍生证券的预期收益。

  - 于是定价公式可以表述为：**衍生证券的价值是其未来预期值按无风险利率贴现的值。**

- 同样，按照上式对p的解释，在T时刻预期的股票价格

$$\begin{aligned} E(S_T) &= pS_u + (1-p)S_d \\ &= p(S_u - S_d) + S_d \end{aligned}$$

- 将 (p) 式代入上式，得

$$E(S_T) = Se^{rT}$$

- 这表明，平均来说，股票价格以无风险利率增长。因此，**设定上升运动的概率等于p⟺ 假设股票收益等于无风险利率。**

- 我们把每一个人是风险中性的世界称为风险中性世界 (risk-neutral world)。在这样的世界中，投资者对风险不要求补偿，所有证券的预期收高效益是无风险利率。
- 式（$E[S_T]=Se^{rT}$）说明，当设定上升运动的概率为p时，我们就在假设一个风险中性世界 。
- 式（p）说明，衍生证券的价值是其预期收益在风险中性世界中按无风险利率贴现的值。
- 以上过程表明，当为期权和其它衍生证券估值时，完全可以假设世界是风险中性的。这就是**风险中性（risk-neutral valuation）原理**：**在风险中性世界中得到的价格，在现实世界中也是正确的。**

- 股票预期收益的无关性
  - 衍生证券定价公式并没有用到股票上升和下降的概率。这似乎不符合人们的直觉，因为人们很自然地假设如果股票价格上升的概率增加，基于该股票的看涨期权价值也增加，看跌期权的价值则减少。
  - 原因在于，**我们并不是在完全的条件下为期权估值，而只是根据标的股票的价格估计期权的价值**。未来上升和下降的概率已经包含在股票的价格中。
  - 因此，当根据股票价格为期权估值时，我们不需要股票价格实际上涨下降的概率。

- 风险中性估值举例
  - 我们将风险中性估值原理运用于第一个例子。
  - 在风险中性世界，股票的预期收益率一定等于无风险利率12％。则有：

$$22p+18(1-p) = 20e^{0.12\times 0.25}$$

得 $p = 0.6523$

  - 在三个月末尾:看涨期权价值为$1的概率为0.6523，价值为零的概率为0.3477。因此，看涨期权的期望值为：

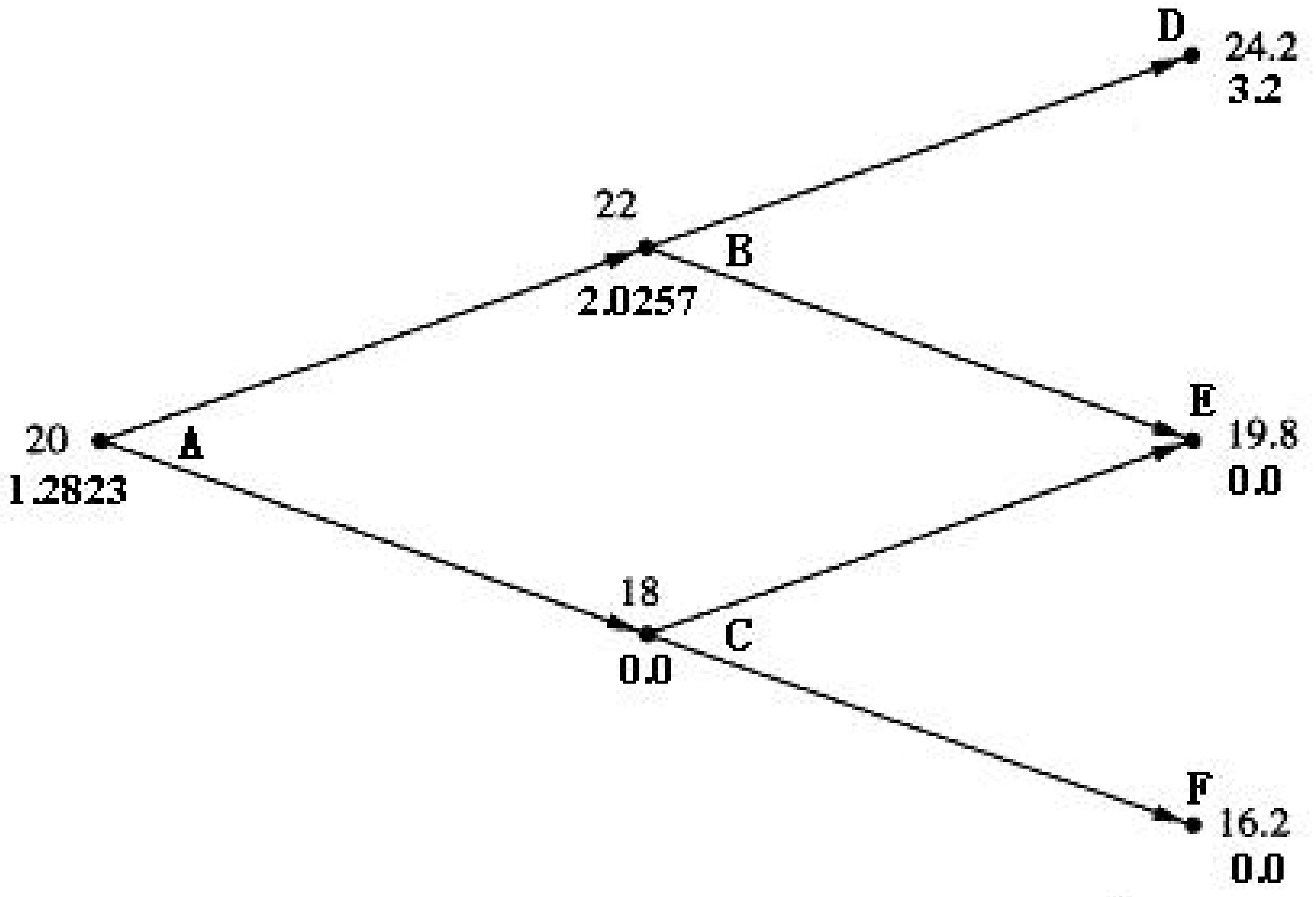
$$E(f_T) = 0.6523\times 1+0.3477\times 0 = \$0.6523$$

  - 按无风险利率贴现得期权现在的价值：

$$f = 0.6523e^{-0.12\times 0.25} =0.633$$

4.3 两步二叉树

- 风险中性估值举例
  - 假设一种股票开始的价格为$20，并在下图所示的两步二叉树图的每个单步二叉树图中，股票价格可以上升10％或者下降10％。
  - 在每个单步二叉树的步长是三个月，无风险利率是年率12％。
  - **考虑一个执行价格为$21的期权。**



两步二叉树图中的股票价格和期权价格

- 在图中，很容易得到，在节点D，期权价格为\$3.2；在节点E和F，期权价格为0。
- 根据$u=1.1,d=0.9,r=0.12,T=0.25$得到风险中性概率$p=0.6523$。在节点B的期权价格为：

$$e^{-0.12\times 0.25}(0.6523\times 3.2+0.3477\times 0)=2.0257$$

- 在节点C，期权价格为0。
- 在节点A的期权价格为：

$$e^{-0.12\times 0.25}(0.6523\times 2.0257+0.3477\times 0)=1.2823$$

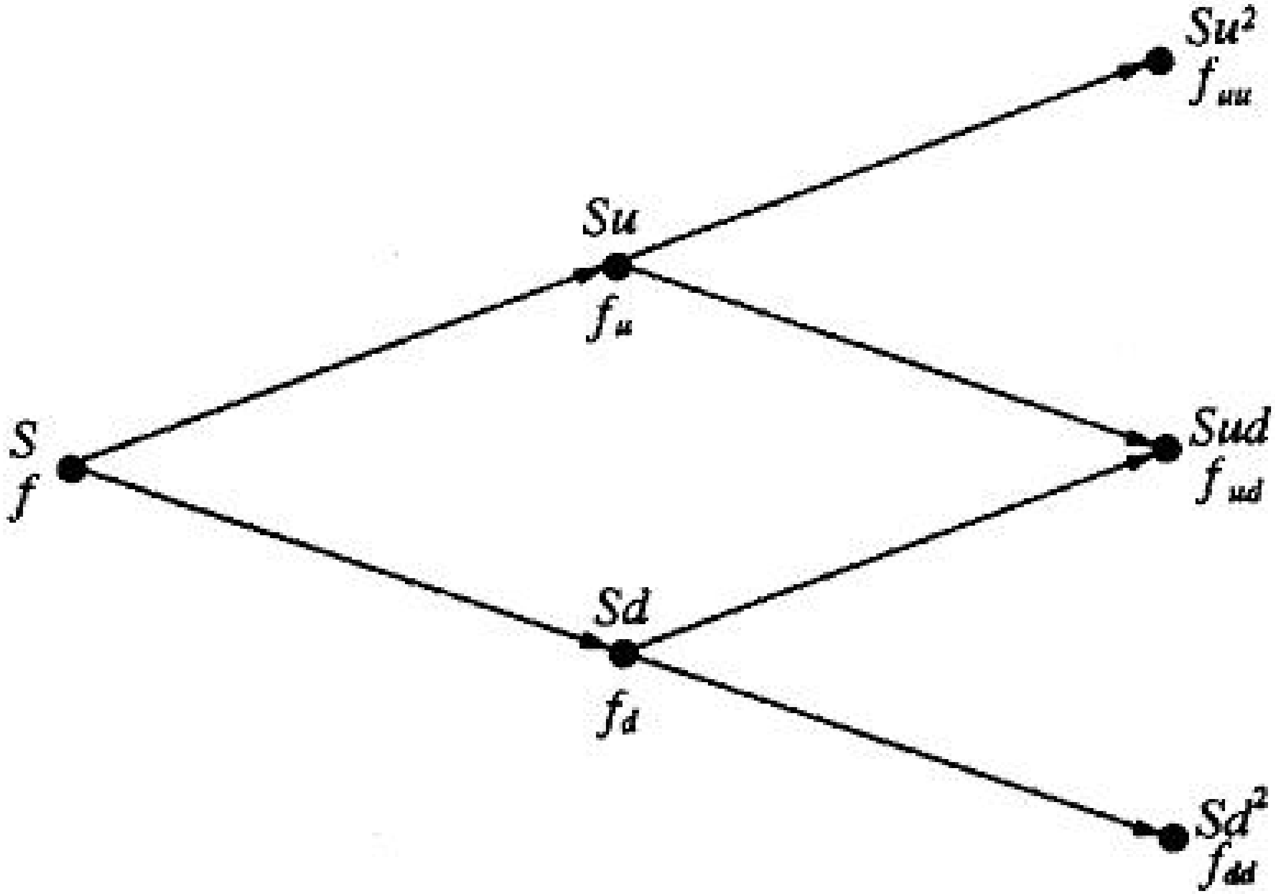
- 在构造这个例子时，u和d(股票价格上升和下降的比率)在树图的每个节点上是相同的，每个单步二叉树的时间长度是相等的。**由式（p）可得风险中性的概率*p*，它在每个节点都是相同的。**

- 一般结论
  - 在在每个单步二叉树中，股票价格或者上升到初始值的u倍，或下降到初始值的d倍。假设无风险利率是r。每个单步二叉树的时间长度是Δt年。
  - 重复单步二叉树定价公式（*）的计算，给出：

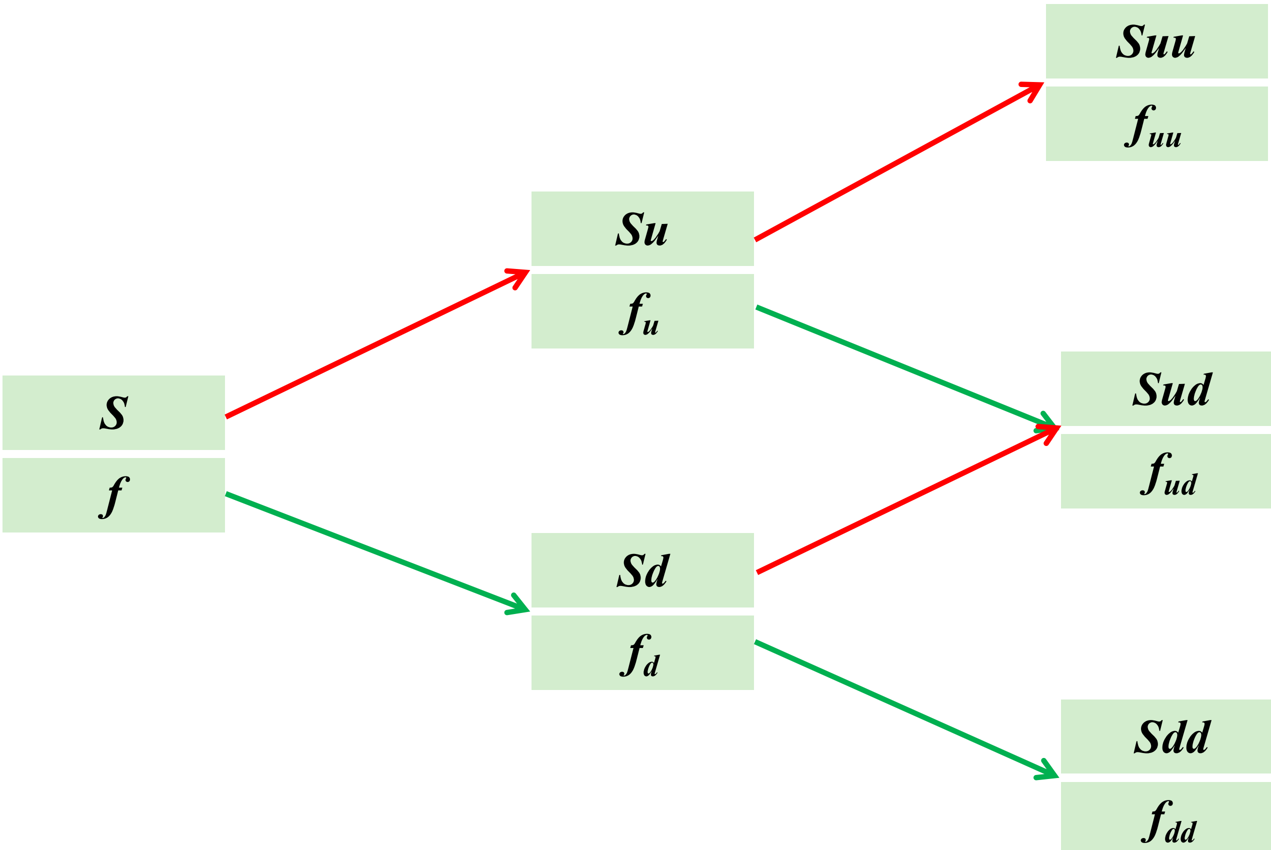
$$f_u = e^{-r\Delta t}[pf_{uu} + (1-p)f_{ud}]$$

$$f_d = e^{-r\Delta t}[pf_{ud} + (1-p)f_{dd}]$$

$$f = e^{-r\Delta t}[pf_u + (1-p)f_d]$$



两步二叉树图中的股票价格和期权价格


S
f
Su
fu
Sd
fd
Suu
fuu
Sud
fud
Sdd
fdd

- 综合上面三式，得到

$$\boxed{f = e^{-2r\Delta t}[p^2 f_{uu} + 2p(1-p) f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}]}$$

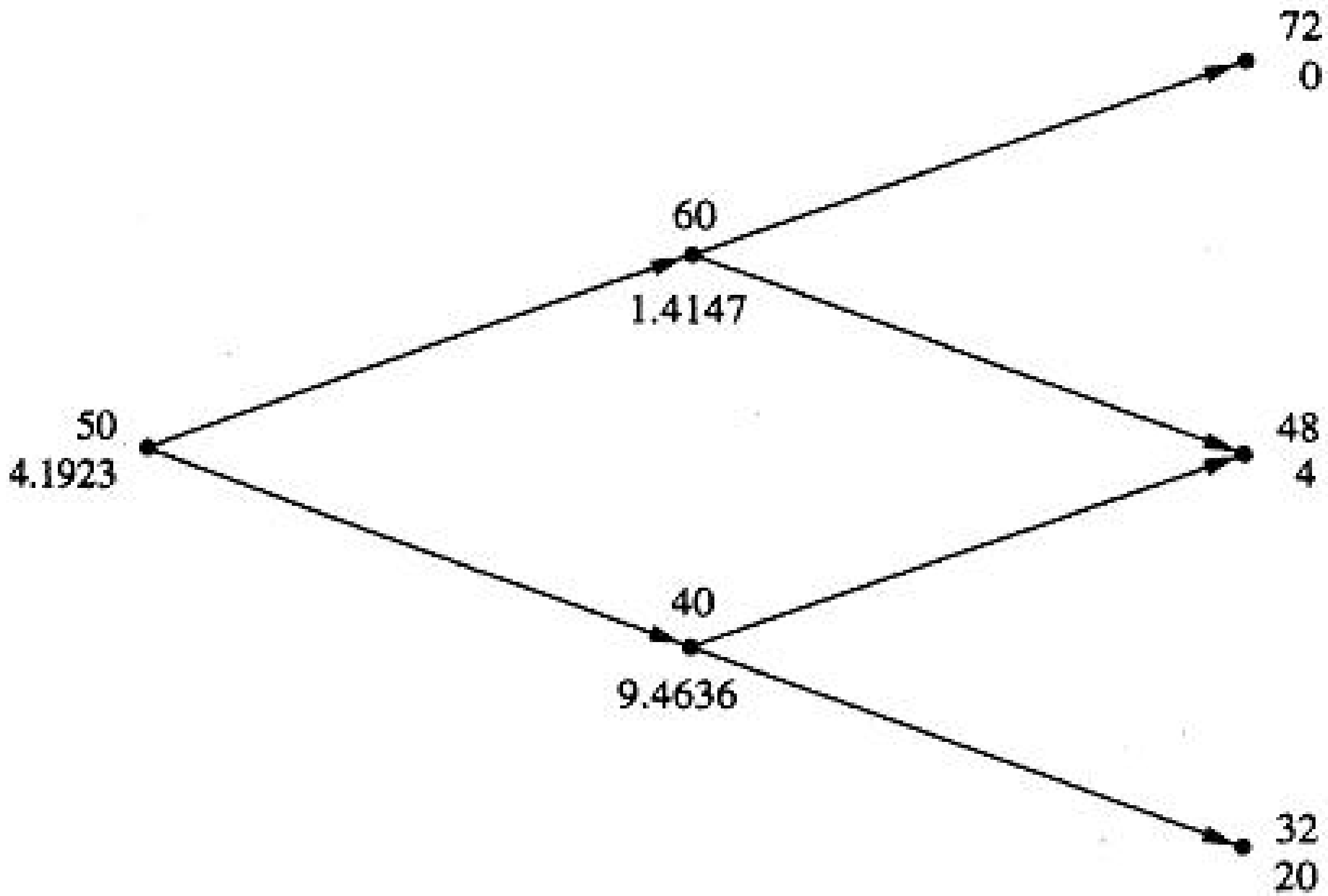
- 式中，p^2，$2p(1\text{-}p)$和$(1\text{-}p)^2$是达到最后上、中、下三个节点的概率。**衍生证券的价格等于它在它在风险中性世界的预期收益按无风险利率贴现的值。**
- 如果在树图中加入更多的步(step)以推广应用二叉树方法，风险中性估值的原理一直是成立的。**衍生证券的价格总是等于它在风险中性世界的预期收益按无风险利率贴现的值。**

看跌期权的例子

例： 考虑一个两年期欧式看跌期权，股票的执行价格为\$52，当前价格为\$50。假设价格为两步二叉树，每个步长为一年。在每个单步二叉树中股票价格或者按比率上升20%，或者按比率下降20%。无风险利率为5%。

解： 构造如下图所示的两步二叉树图。风险中性概率p的值为：

$$p=\frac{e^{0.05\times 1}-0.8}{1.2-0.8}=0.6282$$



利用两步二叉树图方法为欧式看跌期权估值

最后股票的可能价格为\$72、\$48和\$32。在这种情况下，$f_{uu}=0, f_{ud}=4, f_{dd}=20, \Delta t=1$，利用二步二叉树定价公式，得到看跌期权的价格：

$$f = e^{-2\times0.05\times1}(0.6282^2\times0+2\times0.6282\times0.3718\times4+0.3718^2\times20) = 4.1923$$

利用每个单步二步二叉树向回倒推算，也可以得到这个结果。

实际上，如果股票价格的变化是二值的，那么任何基于该股票的衍生证券都可以运用二叉树模型进行估值。

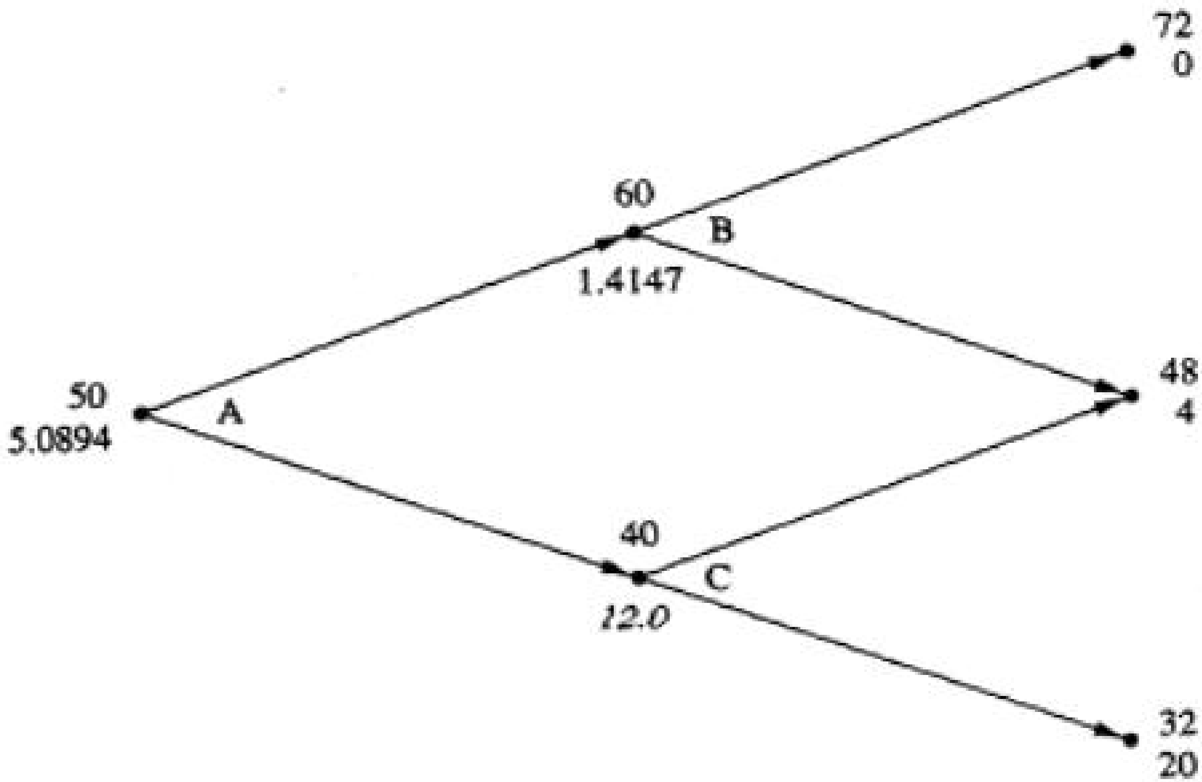
4.4 美式期权估值

- 方法
  - 二叉树模型可以用于为美式期权估值。方法是：从树图的最后末端向开始的起点倒推计算。在每个节点检验提前执行是否最佳。
  - 在最后节点的期权价值与欧式期权在最后节点的期权价值相同。
  - **在较早的一些节点，期权的价值是取如下两者之中较大者：**

    1）由式（*）求出的值。

    2）提前执行所得的收益。

例：考虑一个两年期美式看跌期权，股票的执行价格为\$52，当前价格为\$50。假设价格为两步二叉树，每个步长为一年，在每个单步二叉树中股票价格或者按比率上升20％，或者按比率下降20％。无风险利率为5％。



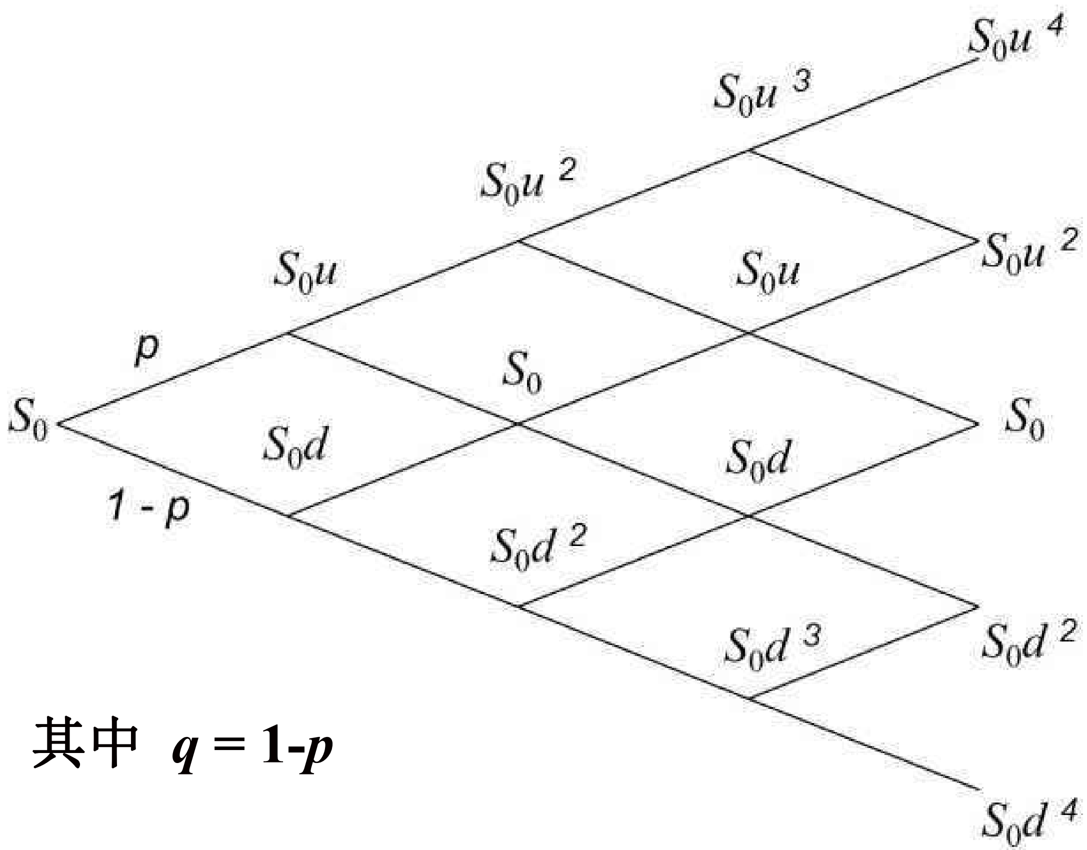
- 如图所示，在节点B，期权的价值为$1.4147，而提前执行期权的损益为负值(-$8)。在节点B提前执行不是明智的，此时期权价值为1.4147。
- 在节点C，期权的价值为$9.4636，而提前执行期权的损益为$12.0。在这种情况下，提前执行是最佳的，因此期权的价值为$12.0。
- 在初始节点A，求出的期权价值为：

$$f = e^{-0..05\times 1}(0.6282\times 1.4147+0.3718\times 12.0)$$

$$= 5.0894$$

- 而提前执行的价值为$2.0。在这种情况下，提前执行是不明智的。
- 因此期权的价值为$5.0894。

多步二叉树模型与连锁法则



概率

p^4

p^3q

p^2q^2

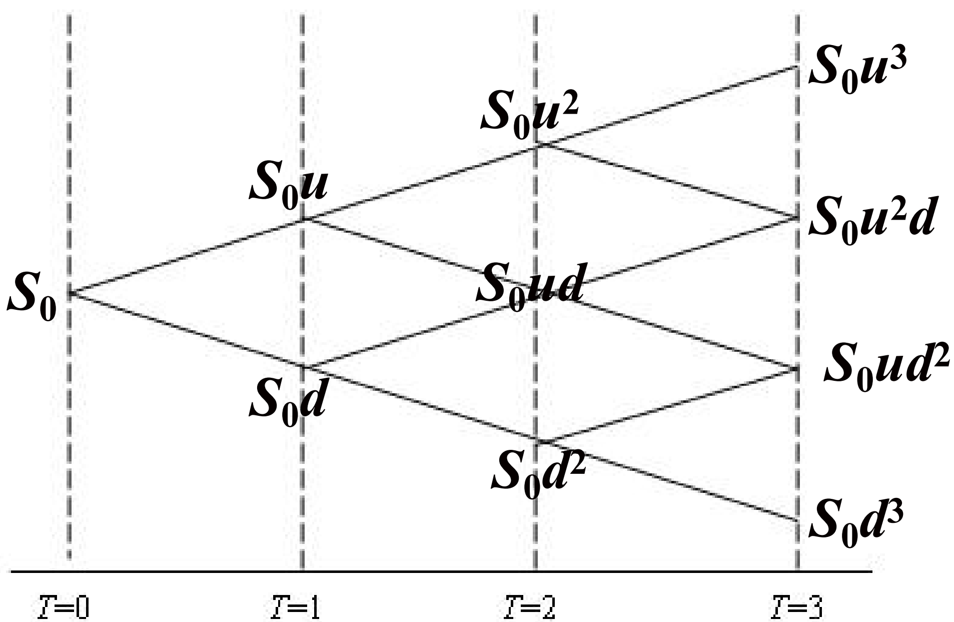
pq^3

q^4

其中 $q = 1\text{-}p$

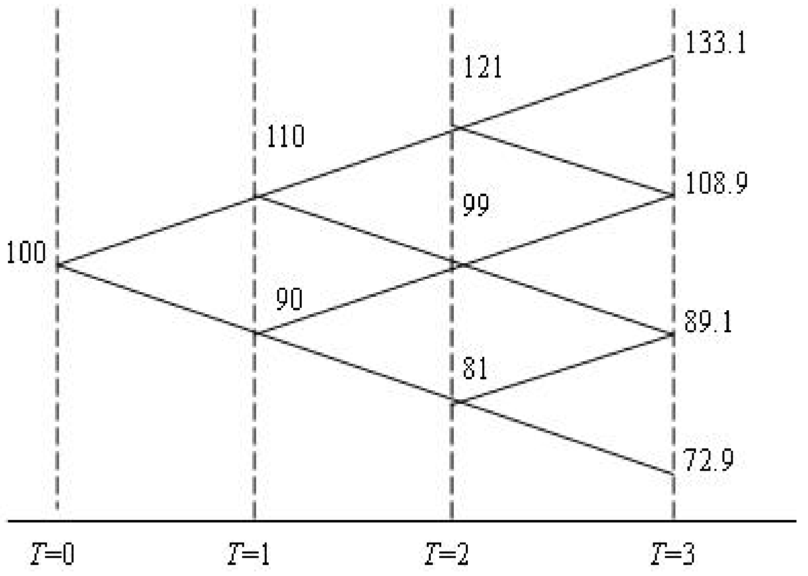
在时间T=1的期望值：$E[S_1]=puS_0+qdS_0=(pu+qd)S_0$,
在时间T=3的期望值：$E[S_3]=(pu+qd)^3S_0$,
一般地，

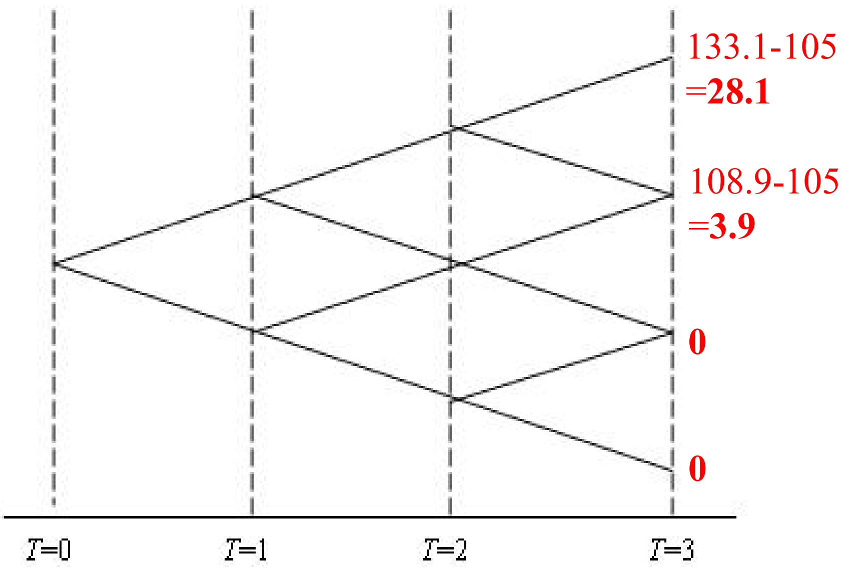
$$E[S_k]=(pu+qd)E[S_{k-1}]=(pu+qd)^kS_0.$$



例： 假设不支付红利的3期欧式看涨期权，股票的初始价格为 S_0=\$100，执行价格 X=\$105。无风险利率为5%（按复利计算），u=1.1, d=0.9。 试用期权的二叉树定价方法计算该期权的理论价格。

解 根据题设可以得到股票价格的二叉树图为

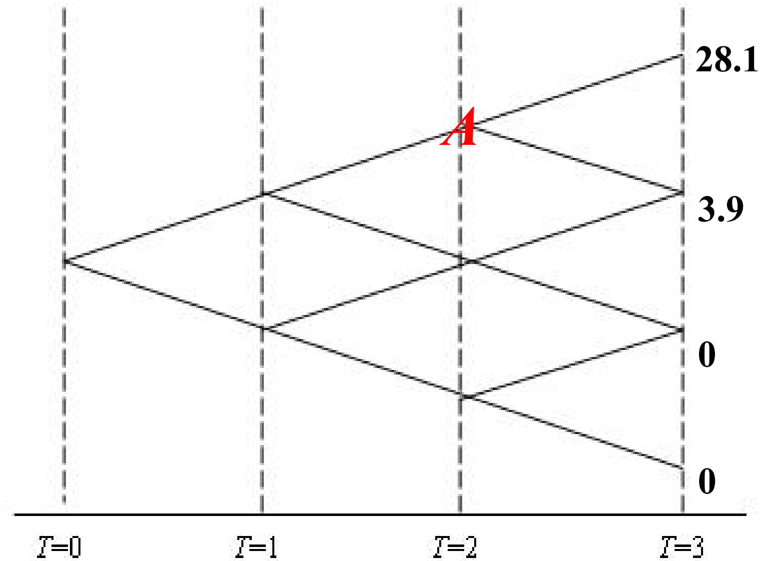




运用连锁法则，可以求出其他节点看涨期权的价格。先求出风险中性价格

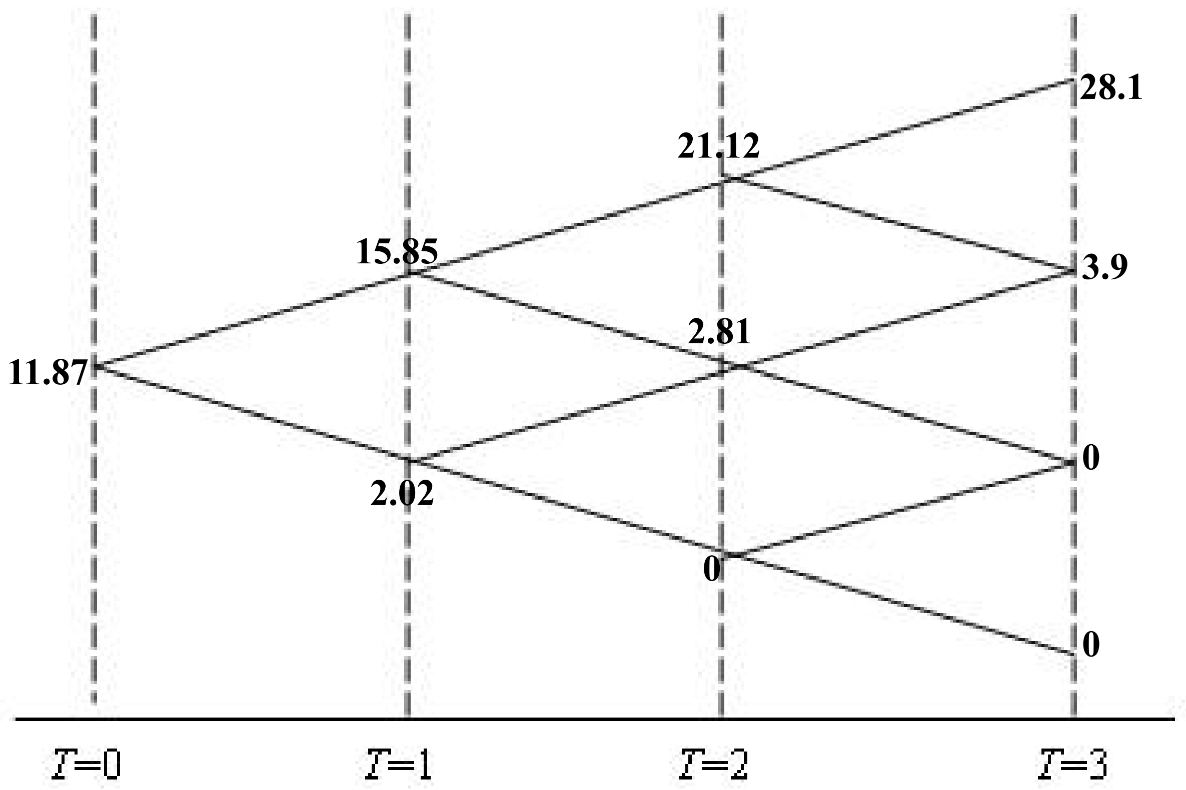
$$p=\frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d}=\frac{1.05-0.9}{1.1-0.9}=0.7564$$

则 $1-p=0.2436$



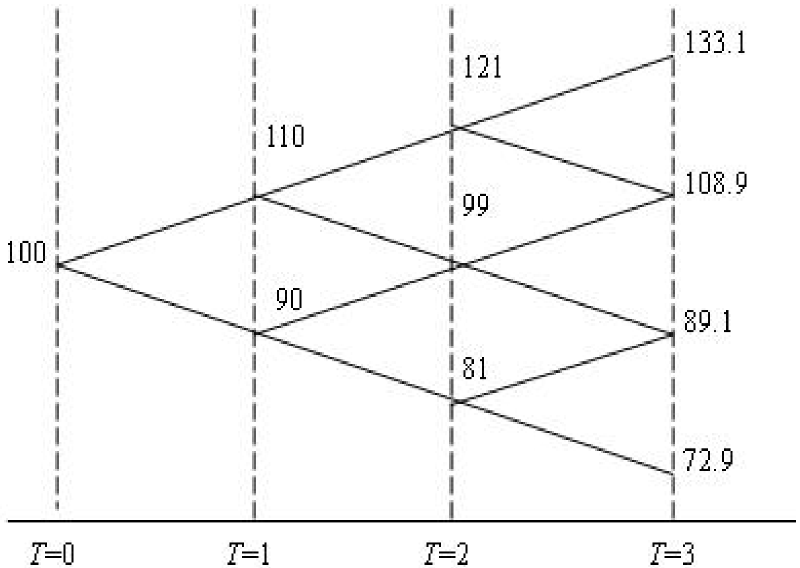
根据定价公式，进行贴现。这样可以求出A点的价格：

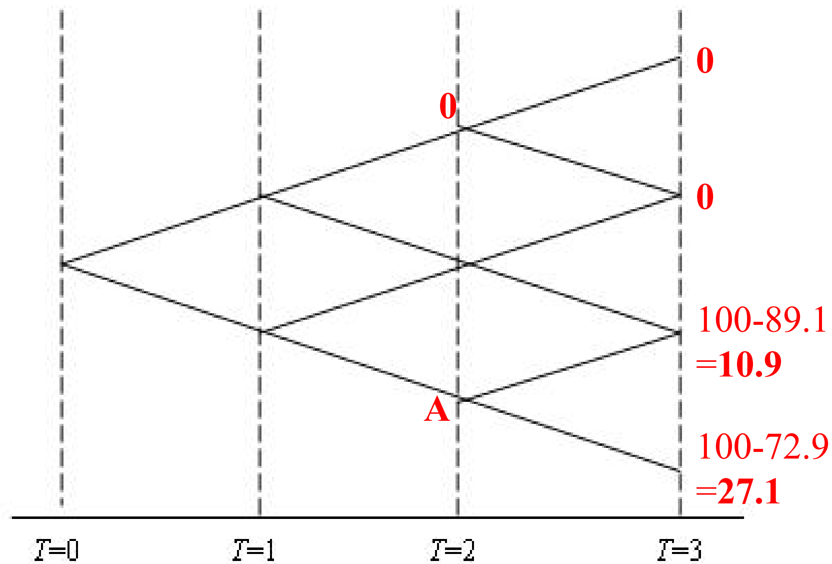
$$A=e^{-0.05}[0.7564\times 28.1+0.2436\times 3.9]=21.12$$



这个方法的好处是可以求各种不同类型期权的价格。

美式看跌期权 （K=100）


133.1
121
110
108.9
99
100
90
89.1
81
72.9
T=0
T=1
T=2
T=3


0
0
0
100-89.1
=10.9
A
100-72.9
=27.1
T=0
T=1
T=2
T=3

在A点，由连锁法则，求得风险中性价格

$$A_1 = e^{-0.05}[0.7564 \times 10.9 + 0.2436 \times 27.1] = 14.12$$

则如果立即执行，得到

$$A_2 = 100 - 81 = 19$$

于是取两者最大值：

$$A = \max\{A_1, A_2\} = 19.$$

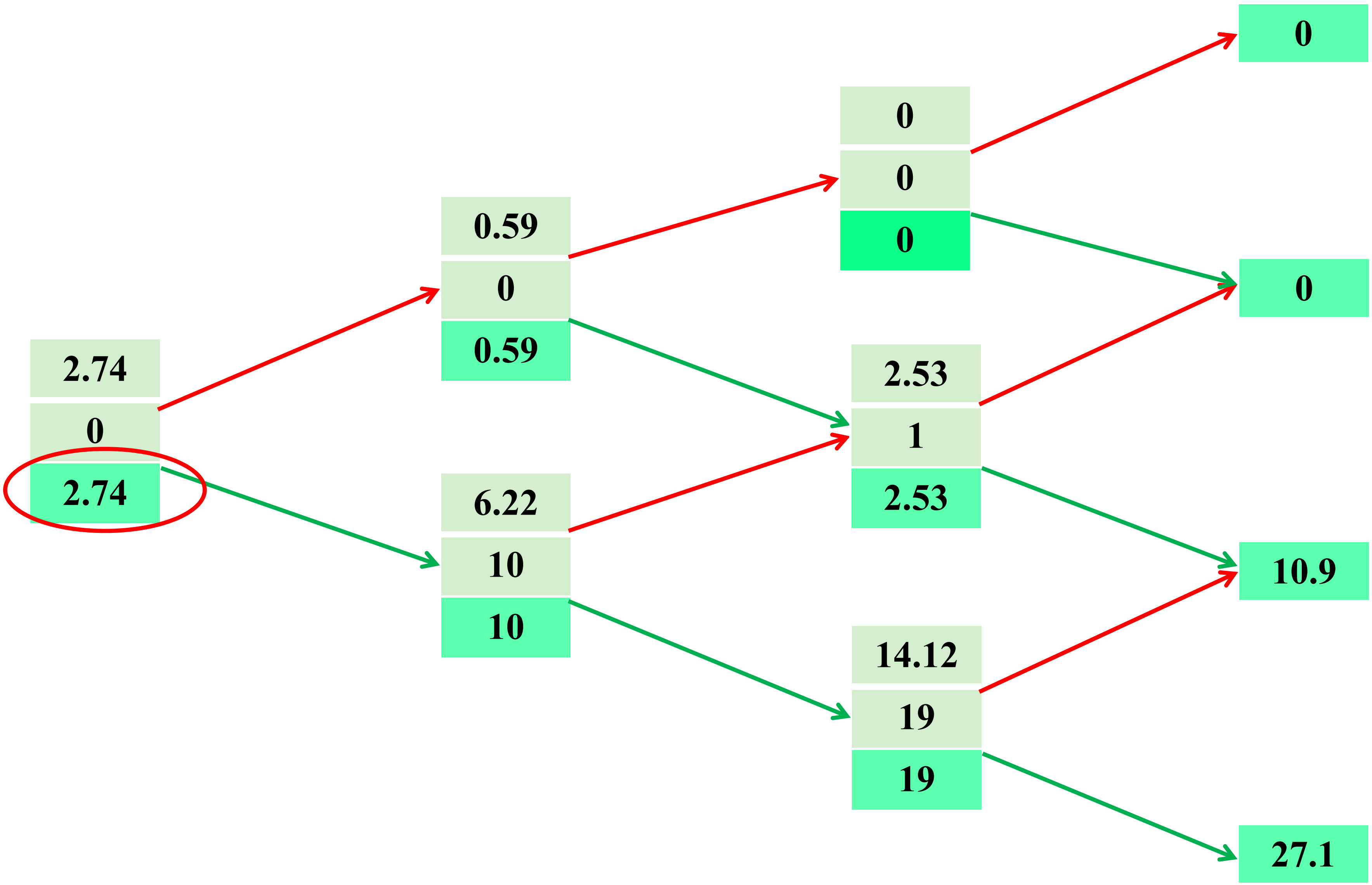
10.9

连锁法值：14.12

立刻执行值：19

两者最大值：19

27.1


0
0
0
0
0.59
0
0.59
2.53
1
2.53
2.74
0
2.74
6.22
10
10
10.9
14.12
19
19
27.1

4.5 二叉树模型在实际中的应用

- 在实际中应用二叉树图方法时，通常将期权有效期分成30或更多的时间步。在每一个时间步，就有一个二叉树股票价格运动。30个时间步意味着最后有31个终端股票价格(terminal stock prices)，并且2^{30}即大约10亿个可能的股票价格路径。
- 从股票价格波动率，可以确定u和d的值。可以有许多种不同的方式做到这一点。

定义Δt为单步时间步长，—种可能就是去设定：

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

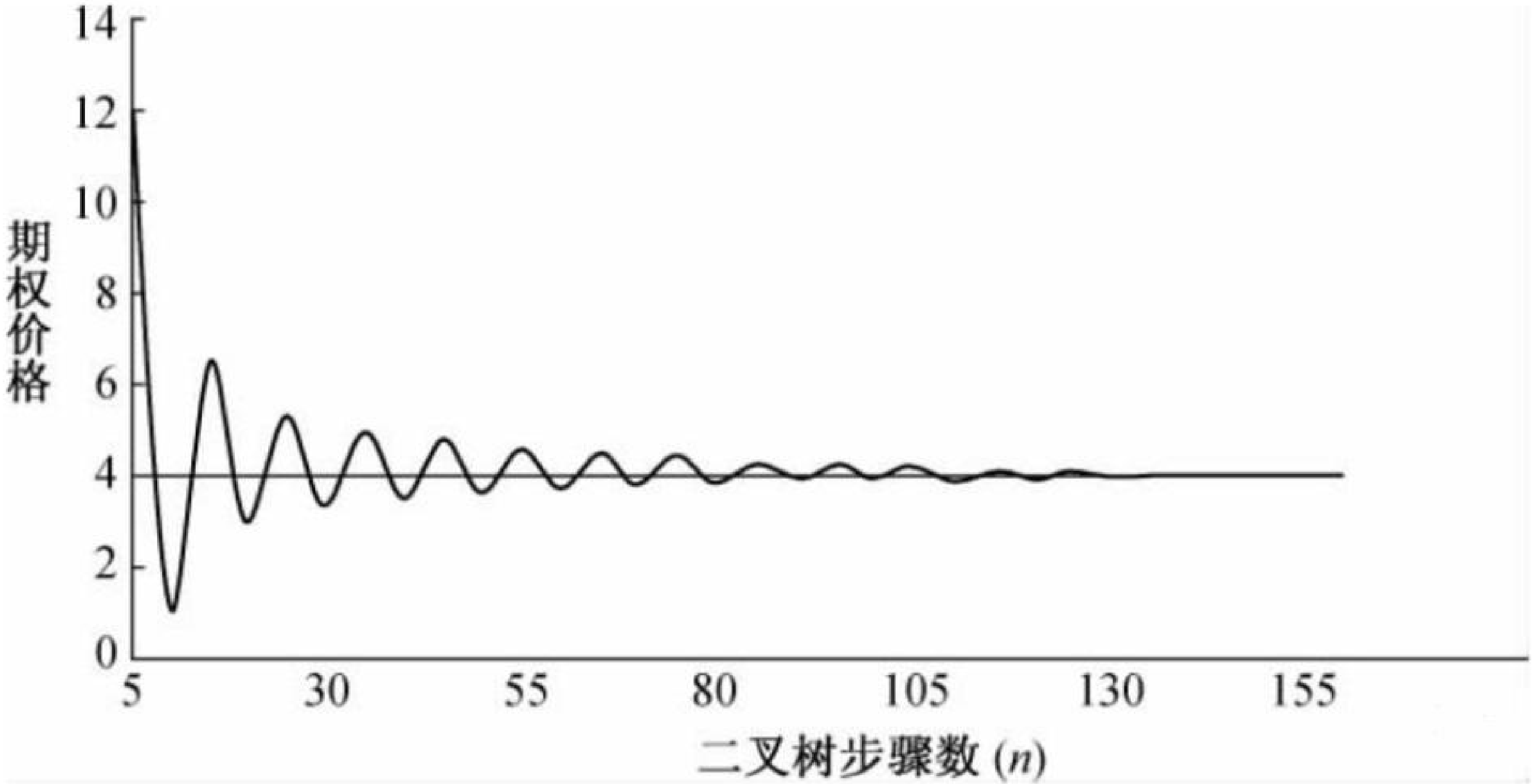
$$d = \frac{1}{u}$$

于是，定义一个树图的完整方程式为：

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$



期权价格
14
12
10
8
6
4
2
0
5
30
55
80
105
130
155
二叉树步骤数 (n)