

浙江大学 20 19 —20 20 春夏学期

《数理统计》课程期末考试试卷

课程号: 06121370, 开课学院: 数学科学学院

考试试卷: ☒ A 卷、☐ B 卷 (请在选定项上打 \checkmark)

考试形式: ☒ 闭、☐ 开卷 (请在选定项上打 \checkmark), 允许带 计算器 进场

考试日期: 2020 年 09 月 03 日, 考试时间: 120 分钟

诚信考试, 沉着应考, 杜绝违纪

考生姓名: _____ 学号: _____ 所属院系: _____

由 CC98 @Serapay 回忆整理

一. (30 分) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单样本, 其中 μ, σ 是未知参数. 记

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

判断以下说法的正误, 并说明理由:

1. $\mu, \bar{X}, \frac{X_1 + X_2}{2}$ 的期望都是 μ , 它们都是 μ 的无偏估计;
2. 在均方误差意义下, S^2 对 σ^2 的估计优于 S_n^2 ;
3. $\bar{X}S^2$ 是 $\mu\sigma^2$ 的无偏估计, 且是相合估计;
4. $\frac{\sqrt{n}(X_1 - \bar{X})}{S}$ 的分布与参数无关, 且与 \bar{X} 相独立;
5. 设 $T \sim t(n-1)$, \bar{x}, s 分别是 \bar{X}, S 的观测值, 记

$$\gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\left(|T| > \frac{\sqrt{n}|\bar{x} - \mu_0|}{s}\right).$$

假设检验

$$H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$$

在检验水平 α 下的拒绝域为 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) < \alpha\}$.

6. 设 σ 已知, 参数 μ 的广义先验分布 $\pi(\mu) \equiv 1$, 则 μ 的期望型 Bayes 估计量为 \bar{X} .

二. (25 分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 分别是取自 $\Gamma(\alpha_1, \lambda_1), \Gamma(\alpha_2, \lambda_2)$ 的简单样本, 其中 α_1, α_2 已知, λ_1, λ_2 未知, 且 $2m\alpha_1, 2n\alpha_2$ 是整数, \bar{X}, \bar{Y} 分别是它们的样本均值.

1. 求 λ_1/λ_2 的 MLE;
2. 求 $\frac{\lambda_1 \bar{X}/\alpha_1}{\lambda_2 \bar{Y}/\alpha_2}$ 的分布;
3. 求 λ_1/λ_2 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信下限.

三. (20 分) 设 X_i 是取自正态总体 $N(\mu, \sigma_i^2)$ 的简单样本 ($i = 1, 2, \dots, n$), 其中 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ 已知, μ 是未知参数.

1. 求样本 X_1, X_2, \dots, X_n 的联合密度;
2. 求 μ 关于样本的 Fisher 信息函数;
3. 求 μ 的充分完备统计量;
4. 关于以上充分完备统计量给出 μ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间.

四. (10 分) 现有一个问卷如下:

问题 I: 你母亲的出生月份是奇数还是偶数? (A) 奇数; (B) 偶数.

问题 II: 你在考试中是否曾经有过作弊行为? (A) 有; (B) 没有.

现在某高校随机抽取 400 人回答该问卷 (有放回), 每个人需要选择一个问题回答. 假设每个人选择问题 I、II 的概率相同, 且母亲的出生月份为奇数或者偶数的概率相同. 若在这 400 人中有 135 人选择了 B 选项, 求该校作弊率 θ 的点估计值.

五. (15 分) 根据遗传学理论, 某种花的花瓣颜色是红色、白色、粉红色的概率分别为 $p^2, (1-p)^2, 2p(1-p)$. 现随机观测 120 朵花, 花瓣为红色、白色、粉红色的频数分别为 24, 36, 60. 在 $\alpha = 0.05$ 的水平下, 以上数据是否与理论相符合?