



Enos Lolang

Aljabar Abstrak

Lembaga Penerbitan UKI Toraja
UKI Toraja Press

Aljabar Abstrak
Copyright © September 2013

Penyusun dan Layout:
Enos Lolang, S.Si., M.Pd.

Pembaca Naskah/Editor:
Selvi R.Tandiseru, S.Pd.,M.Sc.,
Syaiful Hamzah Nasution, S.Si.,S.Pd.,M.Pd.

Desain Sampul:
Lantana Dioren Rumpa, S.Kom.

Hak cipta dilindungi undang-undang
All rights reserved

Diterbitkan oleh UKI Toraja Press
Jl. Nusantara No.12 Makale, Telp.(0423)22887
Fax: (0423)22073
Email: ukitoraja@yahoo.com
Website: <http://www.ukitoraja.ac.id>

ISBN: 978-602-18328-3-7

KATA PENGANTAR

Buku Aljabar Abstrak ini disusun untuk mengatasi kendala keterbatasan bahan referensi bagi mahasiswa UKI Toraja, khususnya dalam mata kuliah Struktur Aljabar. Buku-buku yang tersedia di perpustakaan jumlahnya sangat terbatas dan ditulis dalam bahasa Inggris, sehingga mahasiswa tidak terlalu berminat menggunakannya. Selain itu, penulis mengamati bahwa sampai saat ini, buku rujukan utama dalam mata kuliah Struktur Aljabar belum pernah ada dan belum pernah diadakan.

Buku ini diberi judul Aljabar Abstrak, bukannya Struktur Aljabar, karena sebagian besar rujukan yang digunakan dalam menyusun buku ini adalah buku yang berjudul Aljabar Abstrak, atau Aljabar Modern. Selain itu, jika diberi judul Struktur Aljabar, maka mahasiswa berpedoman sepenuhnya pada buku ini. Dengan kata lain, meskipun buku ini dapat dijadikan sebagai rujukan utama, mahasiswa masih harus membaca berbagai sumber yang lain untuk memperkaya pemahaman mereka terhadap topik yang dipelajari.

Meskipun mungkin masih terdapat banyak kekeliruan atau kesalahan dalam penulisan buku ini, penulis berharap bahwa dengan diterbitkannya buku ini, dapat membantu mahasiswa dalam mengikuti proses perkuliahan, dan juga dapat menambah jumlah koleksi buku di perpustakaan. Penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah memberikan dukungan sehingga penyusunan buku ini dapat direalisasikan, khususnya kepada Bapak Syaiful Hamzah Nasution, S.Pd., S.Si., M.Pd., dari Universitas Negeri Malang dan Ibu Selvi Rajuati Tandiseru, S.Pd., M.Sc., dari Universitas Kristen Indonesia Toraja (UKI Toraja), yang telah bertindak sebagai pembaca naskah dan editor dalam penulisan buku ini.

Makale, 12 September 2013
Penulis.

DAFTAR ISI

Kata Pengantar.....	ii
Daftar Isi.....	iii
Bab I: Pengantar.....	1
A. Tinjauan Historis	1
B. Sejarah Teori Grup	4
Bab II: Himpunan	6
A. Teori Himpunan.....	6
A.1. Representasi Himpunan	8
A.2. Kesamaan Himpunan.....	8
A.3. Himpunan Berhingga dan Tak Hingga	9
A.4. Himpunan Kosong dan Himpunan Disjoin	9
A.5. Singleton.....	10
A.6. Subset	10
A.7. Proper Subset	11
A.8. Subset dan Superset.....	11
A.9. Proper dan Improper Subset	12
A.10. Power Set.....	12
A.11. Himpunan Comparable dan Non-Comparable	13
A.12. Himpunan Semesta.....	13
B. Operasi Himpunan	14
B.1. Gabungan dan Irisan.....	14
1. Gabungan Himpunan.....	15
2. Irisan Himpunan.....	16
B.2. Partisi	16
B.3. Selisih Himpunan	18
B.4. Komplemen Himpunan.....	19
C. Sifat-Sifat Aljabar Himpunan.....	22
C.1. Sifat-Sifat Operasi Gabungan.....	22
C.2. Sifat-Sifat Operasi Irisan.....	24

C.3. Hukum-Hukum Distributif.....	26
C.4. Sifat-Sifat Selisih Himpunan	27
C.5. Hukum De-Morgan	29
D. Definisi-Definisi	30
E. Pemetaan Atau Fungsi	31
E.1. Domain, Kodomain, dan Range	33
E.2. Peta dan Invers Peta	33
F. Operasi Biner.....	44
G. Soal-Soal.....	50
Bab III: Simetri	63
A. Pengertian Simetri.....	63
B. Tabel Perkalian	69
C. Simetri dan Matriks.....	72
D. Permutasi	76
E. Soal-Soal	86
Bab IV: Teori Grup	90
A. Pendahuluan.....	90
A.1. Operasi Biner	93
A.2. Definisi Grup	93
A.3. Grup Abelian.....	94
A.4. Subgrup.....	102
A.5. Kelas Ekuivalen.....	119
A.6. Virtues of Abstraction	121
A.7. Soal-Soal.....	126
B. Dasar-Dasar Teori Grup	127
B.1. Grup Dengan Orde Kecil	130
B.2. Hukum Asosiatif Umum	132
B.3. Subgrup dan Grup Cyclic	135
B.4. Grup Siklik dan Subgrup Siklik	137
B.5. Subgrup Dari Grup Siklik	141
B.6. Grup Dihedral	148
B.7. Soal-Soal.....	152

C. Homomorfisme dan Isomorfisme.....	155
D. Isomorfisma dan Automorfisma.....	160
E. Peta Identitas dan Peta Invers.....	165
F. Kernel Homomorfisme.....	169
G. Koset dan Teorema Lagrange	176
H. Sifat-Sifat Koset.....	177
I. Relasi Ekuivalensi dan Partisi Himpunan.....	178
J. Relasi Ekuivalensi dan Pemetaan Surjektif.	184
K Konjugasi	186
L. Soal-Soal	187
Daftar Rujukan.....	189

BAB I

PENGANTAR

A. Tinjauan Historis

Bagaimana membuktikan bahwa $(-1)(-1)=1$? Pertanyaan ini menjadi beban bagi ahli matematika Inggris pada awal abad ke-19 yang ingin meletakkan landasan aljabar pada dasar yang sama dengan geometri dengan memberikan pembuktian-pembuktian logika. Masalah tersebut di atas juga merupakan salah satu contoh justifikasi hukum-hukum aritmetika yang menyatakan hubungan antara aritmetika dengan aljabar abstrak, yang selanjutnya menghasilkan konsep-konsep ring, domain integral, struktur, orde, dan aksima-aksioma.

Mereka menyatakan bahwa aljabar adalah hukum-hukum operasi bilangan. Tetapi hal ini ditentang oleh Peacock pada tahun 1830 dalam bukunya *Treatise of Algebra*. Peacock membedakan "*aljabar aritmetika*" dengan "*aljabar simbolis*". Aljabar aritmetika hanya melibatkan operasi pada bilangan-bilangan positif saja karena itu menurut Peacock tidak perlu dibuktikan. Sebagai contoh, $a - (b - c) = a + c - b$ merupakan suatu hukum aljabar aritmetika jika $b > c$ dan $a > (b - c)$. Pernyataan-pernyataan ini menjadi hukum aljabar simbolis jika tidak ada syarat yang membatasi a , b , dan c . Kenyataannya, simbol-simbol yang digunakan tidak dapat diinterpretasikan dengan sebutan yang tetap. Jadi aljabar simbolis merupakan subjek dari operasi dengan simbol-simbol yang tidak mengacu pada objek tertentu tetapi mengikuti hukum-hukum aljabar aritmetik. Pembuktian Peacock untuk mengidentifikasi hukum-hukum aljabar simbolis dengan hukum-hukum aljabar aritmetika merupakan *Prinsip Ketetapan Bentuk-Bentuk Ekuivalen*, salah satu bentuk Prinsip Kontinuitas seperti yang telah dijabarkan setidaknya oleh Leibniz bahwa bagaimanapun, bentuk-bentuk aljabar akan ekuivalen jika simbol-simbol yang digunakan berlaku secara umum tetapi memiliki nilai yang

bersifat spesifik, akan ekivalen jika simbol-simbol memiliki nilai dan bentuk yang berlaku secara umum.

Peacock menyatakan bahwa hukum-hukum aritmetika juga merupakan hukum dari aljabar simbolis—suatu idea sama sekali tidak sama dengan pendekatan aksiomatik terhadap aritmetika. Jadi prinsip Peacock dapat digunakan untuk membuktikan bahwa $(-x)(-y)=xy$. Karena $(a-b)(c-d)=ac+bd-ad-bc$ jika $a>b$ dan $c>d$, pernyataan ini merupakan suatu hukum aritmetika dan oleh karena itu tidak perlu dibuktikan. Pernyataan ini menjadi hukum aljabar simbolis, jika tidak ada batasan pada nilai atau bentuk a , b , c , dan d . Dengan memilih $a=0$ dan $c=0$, maka diperoleh $(-b)(-c)=bd$.

Kajian masalah yang sederhana dapat memunculkan berbagai pengembangan kasus, di antaranya adalah sebagai berikut:

- (a). Bagaimana membuktikan bahwa $(-1)(-1)=1$? Pertanyaan ini akan menuntun kita pada *aksioma*. Kita tidak dapat membuktikan segalanya.
- (b). Aksioma apa yang dapat digunakan untuk menjelaskan sifat-sifat bilangan bulat? Pertanyaan ini memungkinkan kita mengenal konsep-konsep *ring*, *domain integral*, *ring berorde*, dan *prinsip urutan rapi (well ordering principle)*.
- (c). Bagaimana memastikan bila kita sudah memiliki aksioma yang cukup? Di sini akan dipelajari tentang ide aksioma kelengkapan dari sekumpulan aksioma.
- (d). Untuk apa mempelajari sifat-sifat bilangan bulat? Sifat-sifat bilangan bulat akan menuntun kita pada pengertian *isomorfisme*.
- (e). Dapatkah kita menggunakan lebih sedikit aksioma untuk memahami bilangan bulat? Misalnya, kita tidak memerlukan sifat $a+b=b+a$. Dalam kasus seperti ini, kita akan menjumpai konsep independensi dari sekumpulan aksioma.
- (f). Dapatkah kita bebas memilih aksioma sesuai keinginan kita? Pertanyaan ini memungkinkan kita mengenal pengertian *konsistensi* atau secara lebih luas masalah kebebasan memilih sebarang di dalam matematika.

Bagaimana solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2+2 = y^3$? Persamaan ini adalah *persamaan diophantine*, yang merupakan salah satu bentuk persamaan Bachet yang terkenal yaitu $x^2+k = y^3$. Persamaan ini telah diperkenalkan pada abad ke-17 dan baru dapat diselesaikan secara teoritis untuk sebarang nilai k pada abad ke-20. Permasalahan ini memadukan teori bilangan dengan aljabar abstrak yang kemudian menghasilkan konsep domain faktorisasi unik (*unique factorization domain*, UFD) dan domain euclidean – yang merupakan contoh penting dalam ring komutatif.

Untuk menentukan penyelesaian dari persamaan diophantine $x^2 + y^2 = z^2$ dengan $(x, y) = 1$, maka harus dicari semua solusi primitif tripel Pythagorean. Meskipun solusi tersebut telah diketahui sejak zaman Yunani kuno 2000 tahun yang lalu, kita tertarik pada suatu bentuk solusi aljabar – istilah yang baku sejak abad ke-19. Ide utama dari penyelesaian masalah ini adalah memfaktorkan ruas kiri dalam persamaan $x^2 + y^2 = z^2$ sehingga didapatkan $(x + yi)(x - yi) = z^2$ dalam domain bilangan bulat Gaussian, yaitu $\mathbb{G} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Domain ini berhubungan dengan sifat faktorisasi unik bilangan bulat seperti yang telah ditunjukkan oleh Gauss. Karena $x+yi$ dan $x-yi$ adalah prima relatif di dalam \mathbb{G} (karena x dan y masing-masing adalah prima relatif dalam \mathbb{Z}) dan hasil perkaliannya berbentuk kuadrat, maka $x+yi$ dan $x-yi$ adalah kuadrat dalam domain \mathbb{G} (hal ini berlaku untuk sebarang domain faktorisasi unik). Jadi $x+yi = (a+bi)^2 = (a^2-b^2)+2abi$. Dengan membandingkan bagian real dan imajiner, akan diperoleh $x = a^2-b^2$, $y = 2ab$, dan karena $x^2+y^2=z^2$, maka $z=a^2+b^2$. Sebaliknya, dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa untuk sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a^2-b^2, 2ab, a^2+b^2)$ adalah solusi dari $x^2+y^2 = z^2$. Dengan demikian kita dapatkan semua tripel Pythagoras. Jadi dengan mudah dapat dipilih suatu solusi primitif di antaranya.

Kembali ke masalah $x^2+2 = y^3$, kita melakukan langkah analogi dengan memfaktorkan ruas kiri sehingga diperoleh $(x + i\sqrt{2})(x - i\sqrt{2}) = y^3$. Faktor ini merupakan suatu persamaan dalam domain $\mathbb{D} = \{a + b\sqrt{2}i : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Di sini juga dapat ditunjukkan bahwa $(x + i\sqrt{2}, x - i\sqrt{2}) = 1$ karena $x + i\sqrt{2}$ dan

$x - i\sqrt{2}$ merupakan faktor pangkat tiga dalam domain \mathbb{D} , karena $x + i\sqrt{2} = (a + bi\sqrt{2})^3$. Dengan aljabar sederhana dapat ditunjukkan bahwa nilai $x = \pm 5$ dan $y = 3$. Faktor-faktor ini merupakan solusi dari $x^2 + 2 = y^3$. Perhitungan tersebut di atas menunjukkan bahwa nilai x dan nilai y yang diperoleh merupakan satu-satunya solusi untuk persamaan tersebut. Inilah cara Euler menyelesaikan soal tersebut. Tentu kita dapat menunjukkan bahwa \mathbb{D} adalah domain faktorisasi unik.

Persamaan Fermat $x^3 + y^3 = z^3$ dapat dianalisis dengan memandang bahwa $z^3 = x^3 + y^3 = (x + y)(x + y\omega)(x + y\omega^2)$ adalah suatu persamaan dalam domain $\mathbb{E} = \{a + b\omega : a, b \in \mathbb{Z}\}$, ω adalah akar pangkat tiga primitif dari 1. Untuk menyelesaikan ketiga persamaan diophantine tersebut di atas, diperlukan langkah-langkah yang lebih lanjut. Dalam hal ini diperlukan pemahaman mengenai domain faktorisasi unik dan domain euclidian serta pembahasan beberapa sifat-sifat aritmetikanya. Ketiga persamaan diophantine dapat diselesaikan dengan cara yang telah ditunjukkan di atas, karena domain-domain \mathbb{G} , \mathbb{D} , dan \mathbb{E} masing-masing merupakan domain faktorisasi unik.

B. Sejarah Teori Grup

Pada tahun 1854 pertama kali Cayley memberikan definisi abstrak tentang grup. Pendefinisian tersebut dilatarbelakangi oleh tulisan Cauchy mengenai grup permutasi, dan secara khusus oleh Galois. Selain itu juga dilatarbelakangi oleh ahli matematika berkebangsaan Inggris, antara lain Peacock, deMorgan, Hamilton, dan Boole. Cayley juga mendefinisikan grup berdasarkan teori invarian Wussing.

Selain Cayley, pencetus pengertian grup secara abstrak adalah Galois. Cayley menyebutkan bahwa "ide tentang grup seperti yang digunakan pada permutasi atau substitusi telah dilakukan oleh Galois, dan munculnya teori grup dianggap sebagai penanda rentang waktu perkembangan teori persamaan-persamaan aljabar". Demikian juga bagi ahli matematika Inggris, selama periode 1830an–1850an mereka menemukan aljabar simbolis, yang pada

awalnya hanya merupakan teori – bahwa topik dalam aljabar bukanlah mengenai simbol-simbol dalam pernyataan aljabar, melainkan hukum-hukum kombinasinya. Selanjutnya para ahli tersebut juga memperkenalkan berbagai sistem yang memiliki sifat yang berbeda dengan yang sudah dikenal dalam sistem bilangan tradisional. Sistem ini antara lain kuarternion dan bikuarternion (Hamilton), aljabar tripel (deMorgan), Oktonion (Graves dan Cayley), Aljabar Boolean (Boole), dan matriks (Cayley).

Cayley adalah salah seorang ahli matematika sejati yang memiliki pandangan generalitas dan berkeinginan menggabungkan beberapa sifat di atas dalam satu rumpun. Buktinya, dalam teori grup Cayley menyusun permutasi, kuarternion (dengan operasi tambah), matriks-matriks invertibel (dengan operasi kali), bentuk-bentuk kuadrat biner (dalam komposisi bentuk seperti yang didefinisikan oleh Gauss pada tahun 1801), grup yang muncul di dalam teori fungsi elips, dan dua grup yang berorde delapan belas dan dua puluh tujuh, yang didefinisikan menurut generator dan relasi.

Definisi Cayley pada tahun 1854 tentang grup hanya sedikit menarik perhatian. Satu-satunya sumber utama teori grup pada masa itu adalah persamaan-persamaan aljabar sehingga hanya sedikit keinginan para ahli untuk membuat generalisasi. Selain itu, abstraksi dan aksioma-aksioma tidak terlalu diminati pada pertengahan abad XIX. Meskipun demikian, karya Cayley dalam bidang ini menjadi contoh pertama dari suatu sistem aljabar yang menjadi aksioma, bahkan Eves menganggapnya sebagai aksioma formal yang membedakan objek-objek dalam matematika.

Pada tahun 1878, iklim matematika telah berubah. Cayley kembali menjelaskan grup abstrak, melalui empat artikel ringkas yang ditulisnya. Teori grup telah memiliki hubungan dengan teori persamaan, geometri, teori bilangan, dan analisis, dan sudut pandang abstrak sudah mempengaruhi bidang-bidang aljabar lainnya. Tulisan Cayley tersebut akhirnya menginspirasi beberapa ahli matematika yang menekuni teori grup, khususnya Holder, von Dyck, dan Burnside.

BAB II

HIMPUNAN

Sebelum memperdalam pemahaman mengenai Aljabar Abstrak, diperlukan pengetahuan yang memadai tentang Teori Himpunan, Pemetaan atau Fungsi, Operasi Biner, dan Sistem Bilangan. Kecuali Sistem Bilangan, masing-masing topik tersebut akan dijelaskan satu demi satu pada bagian ini. Mahasiswa sudah cukup mendalami sistem bilangan melalui kuliah Teori Bilangan.

A. Teori Himpunan

Aljabar Abstrak (Struktur Aljabar, Aljabar Modern) diawali dengan identifikasi masalah matematika seperti penyelesaian persamaan-persamaan polinomial dengan cara menentukan akar atau menyusun bentuk geometris secara langsung. Dari penyelesaian masalah-masalah khusus, terdapat teknik-teknik umum yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah yang sama yang selanjutnya diuji apakah generalisasi tersebut berlaku pada semua masalah yang sejenis, atau hanya berlaku pada persoalan tertentu.

Dalam mempelajari Aljabar Abstrak, pemahaman tentang sistem bilangan akan sangat membantu. Selain itu, dalam banyak kasus akan dibuktikan apakah sifat-sifat tertentu merupakan akibat dari sifat lain yang telah diketahui. Cara pembuktian seperti ini dapat memperdalam pemahaman terhadap sistem tersebut. Lebih jauh lagi, akan diselidiki secara seksama perbedaan antara sifat-sifat yang diasumsikan dan dapat diterapkan dengan sifat-sifat yang harus disimpulkan dari sifat-sifat yang diasumsikan tersebut. Beberapa istilah yang merupakan objek dasar dalam sistem matematika dapat diterima tanpa perlu berpedoman pada definisi. Asumsi awal mengenai masing-masing sistem akan dirumuskan dengan menggunakan istilah-istilah yang tak terdefinisi seperti ini.

Salah satu istilah yang tak terdefinisi seperti yang dimaksud di atas adalah himpunan. Kita dapat membayangkan suatu himpunan sebagai koleksi atau kumpulan objek yang memungkinkan ditentukannya suatu objek sebagai anggota himpunan atau bukan anggota himpunan. Himpunan biasanya dinyatakan dengan huruf kapital, atau dideskripsikan dengan mendaftar anggota-anggotanya.

Beberapa buku tidak memberikan definisi himpunan dengan alasan bahwa definisi tersebut pada hakikatnya masih memerlukan definisi lainnya. Penjelasan yang lain itu juga masih memerlukan penjelasan lebih lanjut, demikian seterusnya. Tetapi beberapa buku rujukan lainnya mendefinisikan himpunan *sebagai kumpulan dari objek yang berhingga dan jelas berdasarkan persepsi atau pemikiran manusia*. Himpunan dinyatakan dengan notasi huruf-huruf kapital, misalnya A, B, C, ..., H,

Definisi yang umumnya disepakati adalah bagian-bagian yang membangun himpunan serta sifat-sifat himpunan, misalnya anggota himpunan, himpunan berhingga, himpunan tak hingga, himpunan kosong, himpunan bagian, irisan, gabungan, dan beberapa sifat lainnya.

Objek-objek yang membentuk suatu himpunan dinamakan anggota himpunan atau sering disebut elemen atau unsur himpunan. Anggota himpunan biasanya dinyatakan dengan huruf-huruf kecil, seperti *a, b, c, d, ... e, f*, dan seterusnya. Untuk menyatakan bahwa suatu objek merupakan anggota dari suatu himpunan tertentu, digunakan simbol \bar{I} . Sedangkan untuk menyatakan bahwa suatu objek bukan anggota dari himpunan tertentu, digunakan simbol \bar{I} . Jadi misalkan A adalah himpunan yang terdiri atas bilangan-bilangan 1, 2, 3, 4, dan 5, maka notasi himpunan dan anggota-anggotanya adalah:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$4 \bar{I} A$, artinya 4 adalah anggota himpunan dari himpunan A.

$6 \bar{I} A$, artinya 6 *bukan* anggota himpunan dari himpunan A.

A.1. Representasi Himpunan

Untuk menyatakan suatu himpunan atau bukan himpunan, pada umumnya dikenal dua metode yaitu metode raster atau tabulasi, dan metode pembentuk himpunan. Dalam metode raster atau tabulasi, suatu himpunan dinyatakan dengan mendaftarkan semua anggota himpunan tersebut, masing-masing anggota dipisahkan dengan tanda koma, dan diletakkan dalam kurung kurawal {...}. Jadi untuk menyatakan himpunan A yang anggota-anggotanya terdiri atas bilangan-bilangan 1, 2, 3, 4, dan 5, maka himpunan A dituliskan dengan notasi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Sedangkan dengan metode pembentuk himpunan, suatu himpunan dinyatakan dengan mendefinisikan sifat pembentuk himpunannya. Himpunan S yang dinyatakan dengan notasi $S = \{s \mid P(s)\}$, menunjukkan bahwa himpunan S adalah suatu himpunan yang terdiri atas anggota s yang bersifat P.

Catatan:

- Urutan anggota dalam suatu himpunan tidak mempengaruhi sifat himpunan tersebut. Himpunan $\{2, 3, 4, 5\}$, $\{4, 3, 5, 2\}$, $\{2, 5, 4, 3\}$, $\{4, 2, 5, 3\}$ adalah himpunan-himpunan yang sama.
- Pengulangan anggota himpunan tidak mempengaruhi sifat himpunan. Himpunan $\{a, b, b, b, c, c, d, d, d, e, e\}$ menyatakan himpunan yang sama dengan himpunan $\{a, b, c, d, e\}$, karena itu tidak dibenarkan menyatakan anggota himpunan secara berulang.

A.2. Kesamaan Himpunan

Dua himpunan dikatakan sama jika dan hanya jika keduanya terdiri atas anggota himpunan yang tepat sama. Jika A dan B adalah himpunan-himpunan yang sama, maka $A = B \Leftrightarrow \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$. Misalkan diketahui $A = \{2, 4, 6, 8\}$ dan $B = \{4, 2, 6, 8\}$ maka $A = B$. Contoh lainnya adalah jika $C = \{1, 1\}$ dan $D = \{x \mid x^2 = 1\}$, maka $C = D$.

Definisi 2.1. Kesamaan Himpunan

Himpunan A dan B dikatakan himpunan yang sama dan dituliskan $A = B$, jika dan hanya jika setiap anggota himpunan A adalah juga anggota himpunan B. Untuk membuktikan bahwa dua himpunan adalah himpunan yang sama maka harus dibuktikan bahwa himpunan pertama merupakan subset dari himpunan kedua, dan himpunan kedua merupakan subset dari himpunan pertama. Jadi, harus ditunjukkan bahwa $A \subset B$ dan juga $B \subset A$.

Strategi: Salah satu metode untuk membuktikan bahwa himpunan $A \neq B$ adalah menunjukkan suatu elemen yang merupakan anggota A tetapi tidak berada di B, atau anggota himpunan B tetapi tidak berada di A.

Contoh 2.1. Misalkan $A = \{1, 1\}$, $B = \{-1, 1\}$, dan $C = \{1\}$. Terlihat bahwa $A \neq B$ karena $-1 \in B$ tetapi $-1 \notin A$. Terlihat juga bahwa $A = B$ karena $A \subset B$ dan $A \supset B$. ■

A.3. Himpunan Berhingga dan Tak Hingga

- (i) Suatu himpunan dikatakan *berhingga* jika himpunan tersebut memiliki anggota yang berhingga banyaknya. Himpunan A yang telah disebutkan di atas adalah himpunan berhingga, karena anggota himpunannya berhingga banyaknya, yaitu sebanyak 5. Himpunan nama ibukota kabupaten di dalam suatu propinsi juga merupakan himpunan berhingga, karena nama kabupaten di dalam propinsi tersebut berhingga banyaknya.
- (ii) Suatu himpunan dikatakan *tak hingga* jika himpunan tersebut memiliki anggota yang tidak berhingga banyaknya.

A.4. Himpunan Kosong dan Himpunan Disjoin

Definisi 2.2. Himpunan Kosong dan Himpunan Disjoin.

Himpunan Kosong adalah himpunan yang tidak memiliki anggota, yang dilambangkan dengan \emptyset atau $\{\}$. Dua himpunan dikatakan disjoin (saling lepas) jika dan hanya jika $A \cap B = \emptyset$. Himpunan-himpunan $\{1, -1\}$ dan $\{0, 2\}$

adalah himpunan-himpunan yang disjoint karena $\{1, -1\} \cap \{0, 2\} = \emptyset$. Hanya ada satu himpunan kosong \emptyset , dan \emptyset adalah subset (himpunan bagian) dari setiap himpunan. Dua himpunan tak kosong dikatakan disjoint jika irisan kedua himpunan tersebut tidak memiliki anggota. Misalkan himpunan $A = \{1, 3, 5, 7\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8\}$, maka himpunan A dan himpunan B adalah disjoint karena tidak memiliki anggota himpunan irisan, atau tidak memiliki anggota himpunan sekutu.

A.5. Singleton

Singleton adalah himpunan yang hanya memiliki satu anggota himpunan. Singleton sering juga dinamakan himpunan satuan, atau himpunan *one-point*. $\{\text{Presiden Republik Indonesia}\}$ merupakan contoh himpunan singleton. Demikian juga himpunan $A = \{p\}$, atau $B = \{q\}$. Perhatikan bahwa \emptyset dan $\{\emptyset\}$ tidak menyatakan himpunan yang sama, karena \emptyset adalah himpunan kosong, sedangkan $\{\emptyset\}$ adalah singleton.

A.6. Subset

Definisi 2.3. Subset. Misalkan A dan B adalah himpunan, maka A disebut subset dari B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen-elemen B . Notasi $A \subset B$ atau $B \supset A$ menunjukkan bahwa A adalah subset dari B . Notasi $A \subset B$ dibaca "A adalah subset dari B" atau "A termuat di dalam B". Demikian juga, $B \supset A$ dibaca "B memuat A". Simbol \in menyatakan anggota, sedangkan simbol \subset menyatakan subset.

Teorema 2.1.

Jika suatu himpunan memiliki n anggota, maka banyaknya subset dari himpunan tersebut ada 2^n .

Bukti

Banyaknya subset yang memiliki r anggota sama dengan banyaknya kelompok yang memiliki r anggota yang dapat dibentuk dari n elemen, yaitu nC_r .

Jadi:

subset yang tidak memiliki anggota ada sebanyak nC_0 .

Subset yang memiliki 1 anggota ada sebanyak nC_1

Subset yang memiliki 2 anggota ada sebanyak nC_2

.....

Subset yang memiliki n anggota ada sebanyak nC_n

Total subset ada ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \dots + {}^nC_{n-2} + {}^nC_{n-1} + {}^nC_n = 2^n$

Contoh 2.2. Keanggotaan atau subset suatu himpunan dituliskan dengan simbol $a \in \{a, b, c, d\}$ dan $\{a\} \subset \{a, b, c, d\}$. Perhatikan bahwa $a \in \{a, b, c, d\}$ dan $\{a\} \subset \{a, b, c, d\}$ merupakan penggunaan simbol yang salah dalam notasi himpunan. ■

A.7. Proper Subset

Definisi 2.4. Proper Subset.

Jika A dan B adalah himpunan, maka A dinamakan proper subset dari B jika dan hanya jika $A \subset B$ tetapi $A \neq B$. Proper subset sering juga dinyatakan dengan notasi $A \subset B$ jika A adalah proper subset dari B.

Contoh 2.3. Proper subset dan kesamaan himpunan

$\{1, 2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (proper subset)

$\{a, c\} = \{c, a\}$ (subset)

A.8. Subset dan Superset

Jika A dan B adalah dua himpunan tak kosong sedemikian sehingga setiap anggota himpunan A adalah juga anggota himpunan B, maka:

(i) A disebut *subset* dari B, dituliskan dengan notasi $A \subseteq B$.

(ii) B disebut *superset* dari A, dituliskan dengan notasi $B \supseteq A$.

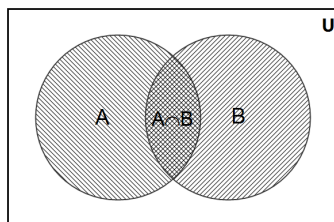
A.9. Proper dan Improper Subset

- (i) Jika A dan B adalah dua himpunan tak kosong dengan $A \subset B$ dan $A \neq B$, maka himpunan A dikatakan proper subset dari B dan dituliskan $A \subset B$.
- (ii) Jika A dan B adalah dua himpunan tak kosong sedemikian sehingga $A \subset B$ dan $A=B$, maka himpunan A dikatakan improper subset dari B dan dinyatakan dengan $A \subseteq B$. Notasi \nsubseteq menyatakan bahwa A bukan proper subset dari B , dan notasi $A \not\supset B$ menyatakan A bukan superset dari B .

A.10. Power Set

Definisi 2.5. Powerset. Untuk himpunan A sebarang, *powerset* dari A yang dilambangkan dengan $P(A)$ adalah himpunan dari semua subset A . $P(A) = \{x/x \subseteq A\}$. Misalkan suatu himpunan A didefinisikan dengan $A = \{1, 2\}$ maka $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Untuk himpunan A yang memiliki n anggota (n adalah bilangan bulat positif), semua subset dari A dapat dituliskan. Misalkan $A = \{a, b, c\}$, maka subset dari himpunan A adalah $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$.

Untuk memudahkan pemahaman, konsep himpunan biasanya dinyatakan dalam bentuk gambar atau diagram. Dengan membuat gambar atau diagram, diasumsikan bahwa semua himpunan dan irisan atau gabungannya merupakan subset dari suatu himpunan semesta, yang dilambangkan dengan U . Pada gambar di bawah ini, himpunan A dan B beririsan satu sama lain dan keduanya merupakan subset dari himpunan semesta U yang digambarkan dalam bentuk persegi. Irisan himpunan A dan B adalah daerah yang diarsir dua kali, dimana himpunan A dan B berpotongan. Representasi himpunan dengan menggunakan diagram seperti ini dinamakan diagram Venn.



A.11. Himpunan Comparable dan Non-comparable

- (i) Jika himpunan A dan B adalah dua himpunan sedemikian sehingga terdapat kemungkinan $A \subseteq B$ atau $B \subseteq A$, maka himpunan A dan B masing-masing disebut *comparable set* (himpunan setara). Misalkan $A = \{1, 3, 5, 7\}$ dan $B = \{3, 5, 7\}$ maka A dan B adalah himpunan *comparable* karena $B \subseteq A$.
- (ii) Jika himpunan A dan B adalah dua himpunan sedemikian sehingga tidak ada kemungkinan $A \subseteq B$ dan juga tidak ada kemungkinan $B \subseteq A$, maka himpunan A dan B masing-masing disebut himpunan yang *Non-Comparable*. Misalkan himpunan $A = \{1, 3, 5, 7\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8\}$ maka A dan B adalah himpunan-himpunan yang *non-comparable* karena tidak terdapat kemungkinan $A \subseteq B$ maupun $B \subseteq A$.

A.12. Himpunan Semesta

Himpunan semesta adalah suatu himpunan yang mengakibatkan semua himpunan lainnya menjadi subset. Contoh dapat diperlihatkan sebagai berikut:

$A = \{x/x \text{ adalah bilangan prima yang kurang dari } 50\}$

$B = \{x/x \text{ adalah kelapatan } 6 \text{ antara } 5 \text{ dan } 55\}$

$C = \{x/x \text{ adalah faktor dari } 60\}$

Himpunan semesta dari ketiga himpunan tersebut adalah himpunan bilangan asli dari 1 sampai dengan 60, atau $U = \{1, 2, 3, \dots, 60\}$. Jadi himpunan semesta tidak bersifat unik.

Contoh 2.4. Suatu himpunan dituliskan sebagai $A = \{0, 1, 2, 3\}$ untuk menyatakan bahwa himpunan dari A tersebut memiliki anggota 0, 1, 2, dan 3, tidak ada anggota lain. Notasi $\{0, 1, 2, 3\}$ dibaca: himpunan yang anggota-anggotanya adalah 0, 1, 2, dan 3.

Contoh 2.5. Himpunan B yang terdiri atas semua bilangan bulat tak-negatif, dituliskan sebagai $B = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Tiga tanda titik di belakang, "...", disebut elipsis, menunjukkan bahwa elemen-elemen yang dituliskan sebelum tanda elipsis, berlanjut sampai tak hingga. Notasi $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ dibaca himpunan yang anggota-anggotanya adalah 0, 1, 2, 3, dan seterusnya.

Anggota dari suatu himpunan tidak perlu didaftar secara berulang. Himpunan yang anggotanya terdiri atas elemen-elemen 1, 2, 3, ... tidak mengurangi maknanya dan tidak berbeda dengan himpunan yang anggota-anggotanya terdiri atas 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5,

Cara lain untuk menyatakan himpunan adalah dengan menggunakan *notasi pembentuk himpunan (set-builder notation)*. Notasi pembentuk himpunan menggunakan tanda kurung kurawal untuk menyatakan sifat-sifat yang menyatakan kualifikasi keanggotaan himpunan tersebut.

Contoh 2.6. Himpunan B pada Contoh 2.5 dapat digambarkan dengan notasi pembentuk himpunan sebagai berikut: $B = \{x/x \text{ adalah bilangan bulat tak-negatif}\}$. Garis vertikal digunakan untuk menyatakan "sedemikian sehingga" dan dibaca "B adalah himpunan dari semua x sedemikian sehingga x adalah bilangan bulat tak-negatif" ■

Keanggotaan suatu himpunan sering juga dituliskan dengan notasi " $x \in A$ " yang menyatakan bahwa " x adalah anggota dari himpunan A " dan " $x \notin A$ " menyatakan " x bukan anggota dari himpunan A ". Himpunan A dalam Contoh 2.4 dapat dituliskan $2 \in A$ dan $7 \notin A$.

B. Operasi Himpunan

B.1. Gabungan dan Irisan

Definisi 2.6. Himpunan Gabungan

Jika A dan B adalah himpunan, maka gabungan antara A dan B adalah himpunan $A \cup B$ (dibaca A gabung B), dan didefinisikan $A \cup B = \{x/x \in A \text{ atau } x \in B\}$. Selanjutnya, irisan antara A dan B adalah himpunan $A \cap B$ (dibaca A iris B) dan didefinisikan: $A \cap B = \{x/x \in A \text{ dan } x \in B\}$.

Gabungan dua himpunan, misalnya himpunan A dan B, adalah himpunan yang anggota-anggotanya terdapat di A atau di B. Irisan himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya merupakan anggota himpunan A dan juga anggota himpunan B.

Contoh 2.7. Misalkan $A = \{2, 4, 6\}$ dan $B = \{4, 5, 6, 7\}$, Maka $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7\}$ dan $A \cap B = \{4, 6\}$. ■

Contoh 2.8. Untuk sebarang himpunan A dan B, maka $A \cup B = B \cup A$.

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x/x \in A \text{ atau } x \in B\} \\ &= \{x/x \in B \text{ atau } x \in A\} \\ &= B \cup A \end{aligned}$$

Berdasarkan fakta bahwa $A \cup B = B \cup A$, maka dapat dikatakan bahwa operasi gabungan himpunan bersifat komutatif. Demikian juga, dengan menunjukkan bahwa $A \cap B = B \cap A$ maka disimpulkan bahwa operasi irisan himpunan bersifat komutatif. Jika dua himpunan tidak memiliki anggota himpunan irisan, maka irisannya disebut himpunan kosong. Misalkan $A = \{1, -1\}$ dan $B = \{0, 2, 3\}$, maka $A \cap B$ tidak memiliki anggota, dan dinyatakan sebagai himpunan kosong.

1. Gabungan Himpunan

(a) Gabungan dua himpunan.

Misalkan diketahui himpunan A dan himpunan B, maka gabungan dari himpunan A dan B adalah himpunan dari semua anggota himpunan A atau himpunan B, atau keduanya. Gabungan himpunan A dan himpunan B dinyatakan dengan notasi $A \cup B$ (dibaca A union B) dan didefinisikan $A \cup B = \{x/x \in A \text{ atau } x \in B\}$.

Contoh 2.9. Diketahui $A = \{1, 3, 5, 7\}$ dan $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, maka gabungan dari kedua himpunan tersebut adalah $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$.

(b) Gabungan lebih dari dua himpunan

Misalkan diketahui himpunan-himpunan A_1, A_2, \dots, A_n . Gabungan himpunan dari semua himpunan tersebut adalah himpunan semua anggota himpunan dari semua himpunan tersebut. Gabungan himpunan A_1, A_2, \dots, A_n dituliskan dengan notasi $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, atau $\bigcup_{i=1}^n A_i$ dan didefinisikan dengan pernyataan sebagai berikut:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ untuk setidaknya-tidaknya satu } i\}$$

2. Irisan Himpunan

(a) Irisan dua himpunan

Misalkan diketahui dua himpunan A dan himpunan B. Irisan dari himpunan A dengan B adalah himpunan dari semua anggota himpunan A dan anggota himpunan B. Irisan himpunan A dan B dituliskan dengan notasi $A \cap B$ (dibaca A interseksi atau irisan B) dan didefinisikan $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$. Jika diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{2, 3, 4, 5\}$, maka $A \cap B = \{2, 3, 4\}$.

(b) Irisan lebih dari dua himpunan

Misalkan diketahui himpunan-himpunan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, maka irisan dari himpunan-himpunan ini adalah himpunan semua anggota himpunan yang merupakan anggota dari himpunan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. Irisan himpunan-himpunan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ dituliskan dengan notasi

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$ atau $\bigcap_{i=1}^n A_i$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ untuk setiap } i\}$$

B.2. Partisi

Pemisahan suatu himpunan A yang tak kosong menjadi himpunan-himpunan disjoint tak kosong disebut partisi dari himpunan A. Jika $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ maka beberapa partisi dari himpunan A tersebut dapat

dinyatakan dengan $X_1 = \{a, d\}$, $X_2 = \{b, c, f\}$, $X_3 = \{e\}$, karena dapat dibentuk himpunan A sehingga $A = X_1 \cap X_2 \cap X_3$, dimana $X_1 \neq \emptyset$, $X_2 \neq \emptyset$, $X_3 \neq \emptyset$ dan $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $X_1 \cap X_3 = \emptyset$, dan $X_2 \cap X_3 = \emptyset$. Konsep partisi merupakan topik yang mendasar dalam mempelajari Aljabar Abstrak.

Operasi irisan, gabungan, dan komplemen dapat dikombinasikan dengan berbagai cara, sehingga dapat didapatkan beberapa kesamaan antara berbagai kombinasi tersebut.

Contoh 2.10. Buktikan:

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Sifat yang ditunjukkan pada kesamaan di atas adalah sifat distributif. Hubungan yang pertama dapat dibuktikan sebagai berikut:

1. Kesamaan himpunan dapat dibuktikan dengan menunjukkan bahwa keduanya adalah himpunan yang memiliki anggota yang tepat sama, yaitu dua himpunan yang saling subset. Jadi akan ditunjukkan bahwa $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dan juga $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.

Ambil sebarang $x \in A \cap (B \cup C)$

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} x &\in A \cap (B \cup C) \\ \Rightarrow x &\in A \text{ dan } x \in (B \cup C) \\ \Rightarrow x &\in A \text{ dan } x \in B \text{ atau } x \in C \\ \Rightarrow x &\in A \text{ dan } x \in B, \text{ atau } x \in A \text{ dan } x \in C \\ \Rightarrow x &\in A \cap B, \text{ atau } x \in A \cap C \\ \Rightarrow x &\in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Jadi, $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C) \dots (*)$

Sebaliknya akan dibuktikan juga bahwa $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.

Dengan cara yang sama, misalkan bahwa $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} x &\in (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ \Rightarrow x &\in (A \cap B) \text{ atau } x \in (A \cap C) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ dan } x \in B, \text{ atau } x \in A \text{ dan } x \in C$$

$$\Rightarrow x \in A, \text{ dan } x \in B \text{ atau } x \in C$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ dan } x \in (B \cup C)$$

$$\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$$

$$\text{Jadi, } (A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C) \dots (**)$$

Pembuktian yang telah dilakukan pada (*) dan (**) menunjukkan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2. Sebagai latihan, mahasiswa dapat membuktikan bagian (2) ini.

Bagian kedua dari pembuktian dapat diperoleh dari bagian pertama, dengan cara membalik langkah-langkah pembuktian, atau menelusuri pembuktian mulai dari langkah terakhir. Jika semua tanda \Rightarrow diganti dengan tanda \Leftarrow maka akan diperoleh implikasi yang benar. Faktanya, pembuktian kedua bagian dapat dilakukan dengan mengganti tanda \Rightarrow menjadi \Leftrightarrow , dimana \Leftrightarrow menyatakan makna "jika dan hanya jika". Oleh karena itu,

$$x \in A \cap (B \cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ dan } x \in (B \cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A, \text{ dan } x \in B \text{ atau } x \in C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ dan } x \in B, \text{ atau } x \in A \text{ dan } x \in C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cap B, \text{ atau } x \in A \cap C$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \blacksquare$$

Hubungan komplemen dengan gabungan atau irisan dijelaskan dengan Hukum De Morgan, yaitu $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ dan $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

B.3. Selisih Himpunan

Definisi 2.7. Selisih Himpunan.

Misalkan A dan B adalah dua himpunan yang tak kosong, maka selisih kedua himpunan tersebut adalah himpunan semua anggota himpunan yang merupakan anggota himpunan A tetapi bukan merupakan anggota himpunan

B. Selisih himpunan A dan B dituliskan dengan notasi $A - B$ (A kurang B), dan didefinisikan $A - B = \{x/x \in A, x \notin B\}$. Jika himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan $B = \{4, 5, 6\}$, maka $A - B = \{1, 2, 3\}$. Pada umumnya selisih dua himpunan yang berbeda tidak bersifat komutatif, artinya $A - B \neq B - A$.

Contoh 2.11. Diketahui himpunan $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ dan $B = \{3, 5, 7, 9, 11\}$. Berdasarkan Definisi 2.7. atau Definisi 2.1. , $A - B = \{1\}$ dan $B - A = \{11\}$. Jadi, $A - B \neq B - A$.

B.4. Komplemen Himpunan

Definisi 2.8. Komplemen Himpunan

Untuk sebarang subset A dan B dalam himpunan semesta U , komplemen B pada himpunan A didefinisikan $A - B = \{x \in U/x \in A \text{ dan } x \notin B\}$. Notasi khusus A^c atau A^c menyatakan komplemen suatu himpunan dalam himpunan semesta. Komplemen himpunan A dituliskan A^c atau $A^c = U - A = \{x \in U \text{ dan } x \notin A\}$.

Komplemen dari himpunan A adalah himpunan semua anggota himpunan semesta U , yang bukan merupakan anggota himpunan A . Komplemen dari himpunan A dituliskan dengan notasi A^c , yang didefinisikan $A^c = U - A = \{x/x \in U, x \notin A\}$. Komplemen himpunan dapat juga didefinisikan dengan cara lain, bahwa A^c adalah komplemen himpunan A di dalam U jika $A \cup A^c = U$ dan $A \cap A^c = \emptyset$.

Contoh 2.12. Misalkan :

$U = \{x/x \text{ adalah bilangan bulat}\}$

$A = \{x/x \text{ adalah bilangan bulat genap}\}$

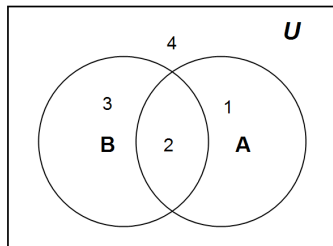
$B = \{x/x \text{ adalah bilangan bulat positif}\}$

Maka:

$$\begin{aligned} B - A &= \{x/x \text{ adalah bilangan bulat ganjil positif}\} \\ &= \{1, 3, 5, 7, \dots\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A - B &= \{x/x \text{ adalah bilangan bulat genap tak-positif}\} \\
 &= \{0, -2, -4, -6, \dots\} \\
 A^c &= \{x/x \text{ adalah bilangan bulat ganjil}\} \\
 &= \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\} \\
 B^c &= \{x/x \text{ adalah bilangan bulat tak-positif}\} \\
 &= \{\dots, -3, -2, -1, 0\}
 \end{aligned}$$

Contoh 2.13. Gambar lingkaran berpotongan di bawah ini menyatakan himpunan A dan B yang menandai daerah persegi U menjadi empat bagian, yaitu daerah 1, 2, 3, dan 4. Masing-masing bagian menyatakan subset dari U .



Daerah 1: $B - A$
 Daerah 2: $A \cap B$
 Daerah 3: $A - B$
 Daerah 4: $(A \cup B)^c$

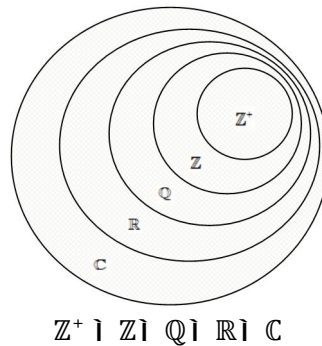
Banyak contoh soal dan latihan di dalam buku ini meliputi sistem bilangan yang sudah umum dikenal, karena itu saya menggunakan simbol-simbol baku untuk menyatakan sistem-sistem seperti berikut ini:

- \mathbb{Z} : menyatakan himpunan semua bilangan bulat.
- \mathbb{Z}^+ : menyatakan himpunan semua bilangan bulat positif.
- \mathbb{Q} : menyatakan himpunan semua bilangan rasional
- \mathbb{R} : menyatakan himpunan semua bilangan real
- \mathbb{R}^+ : menyatakan himpunan semua bilangan real positif.
- \mathbb{C} : menyatakan himpunan semua bilangan kompleks

Seperti diketahui, *bilangan kompleks* didefinisikan sebagai suatu bilangan yang berbentuk $a + bi$ dengan a dan b adalah bilangan real, dan $i = \sqrt{-1}$. Demikian juga, bilangan real x dikatakan rasional jika dan hanya jika x dapat dinyatakan dalam bentuk pembagian bilangan bulat yang penyebutnya tidak nol.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, \text{ dan } n \neq 0 \right\}$$

Hubungan antara himpunan bilangan yang satu dengan lainnya dapat dinyatakan dalam suatu diagram Venn berikut ini.



Operasi gabungan dan irisan dapat digunakan berulang-kali. Sebagai contoh, dapat dibentuk irisan A dan B sehingga diperoleh $A \cap B$, kemudian membentuk lagi irisan dari himpunan ini dengan suatu himpunan lain, misalnya C . Dengan demikian irisan yang terbentuk adalah $(A \cap B) \cap C$.

Himpunan $(A \cap B) \cap C$ dan $A \cap (B \cap C)$ adalah himpunan-himpunan yang sama karena:

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap C &= \{x/x \in A \text{ dan } x \in B\} \cap C \\ &= \{x/x \in A \text{ dan } x \in B \text{ dan } x \in C\} \\ &= A \cap \{x/x \in B \text{ dan } x \in C\} \\ &= A \cap (B \cap C) \end{aligned}$$

Analogi dengan sifat asosiatif $(x+y)+z = x+(y+z)$ pada operasi penjumlahan, operasi irisan pada himpunan juga bersifat asosiatif. Pada penjumlahan bilangan-bilangan, tanda kurung dapat dipindahkan atau dihilangkan sehingga diperoleh bentuk $x+y+z = x+(y+z) = (x+y)+z$. Demikian juga operasi irisan pada himpunan, $A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Contoh 2.14. Misalkan diketahui $U = \{a, b, c, d, \dots, x, y, z\}$ dan $A = \{a, b, c\}$. Berdasarkan Definisi 2.8, $A^c = \{d, e, f, \dots, x, y, z\}$ karena:

$$\begin{aligned} \text{(i) } A \in A^c &= \{a, b, c\} \in \{d, e, f, \dots, x, y, z\} \\ &= \{a, b, c, \dots, x, y, z\} = U \end{aligned}$$

$$(ii) A \cap A^c = \{a, b, c\} \cap \{d, e, f, \dots, x, y, z\} = \emptyset.$$

C. Sifat-sifat Aljabar Himpunan

C.1. Sifat-sifat Operasi Gabungan

Sifat 1

Jika A dan B adalah dua himpunan sebarang, maka:

- (i) $A \subseteq (A \cup B)$
- (ii) $B \subseteq (A \cup B)$

Bukti:

- (i) Misalkan x adalah sebarang anggota himpunan A .

$$\text{Maka } x \in A \Rightarrow x \in A \text{ atau } x \in B.$$

$$\Rightarrow x \in (A \cup B)$$

Jadi, setiap anggota himpunan A merupakan juga anggota dari himpunan $A \cup B$. Oleh karena itu $A \subseteq (A \cup B)$.

- (ii) Mahasiswa dapat membuktikan sendiri dengan cara yang sama dengan pembuktian (i).

Sifat 2

Jika A adalah sebarang himpunan, maka:

- (i) $A \cup \emptyset = A$
- (ii) $A \cap A = A$
- (iii) $A \cup U = U$, dengan U adalah himpunan semesta

Bukti:

- (i) Untuk membuktikan bahwa $A \cup \emptyset = A$ (ingat kesamaan himpunan) harus ditunjukkan bahwa $A \subseteq A \cup \emptyset$ dan $A \cup \emptyset \subseteq A$. Berdasarkan Sifat 1, telah ditunjukkan bahwa $A \subseteq A \cup \emptyset \dots (*)$

Selanjutnya, misalkan x adalah sebarang anggota himpunan dari $A \cup \emptyset$. Karena $x \in (A \cup \emptyset)$, berarti $x \in A$ atau $x \in \emptyset$. Telah diketahui bahwa $x \notin \emptyset$ karena \emptyset adalah himpunan kosong (tidak memiliki anggota),

sehingga dapat dipastikan bahwa $x \in A$. Karena $x \in (A \cap \emptyset)$ menunjukkan bahwa $x \in A$, maka $(A \cap \emptyset) = A \subseteq A \dots (**)$, karena untuk setiap $x \in (A \cap \emptyset) = x \in A$, maka $x \in A$.

Dari persamaan (*) dan (**) $A \subseteq A \cap \emptyset$ dan $(A \cap \emptyset) \subseteq A$ maka disimpulkan bahwa $A = A \cap \emptyset$

(ii) Mahasiswa dapat membuktikan sendiri.

(iii) Untuk membuktikan bahwa $A \cap U = U$ maka harus dibuktikan dua hal yaitu $(A \cap U) \subseteq U$ dan $U \subseteq (A \cap U)$. Telah diketahui bahwa $(A \cap U) \subseteq U$ karena semua himpunan merupakan subset dari himpunan semesta. $\dots (*)$. Demikian juga, berdasarkan sifat 1, dapat dibuktikan bahwa $U \subseteq (A \cap U)$. $\dots (**)$. Jadi dengan menggunakan (*) dan (**), dapat dibuktikan bahwa $A \cap U = U$.

Sifat 3

Operasi gabungan himpunan bersifat komutatif. Jika A dan B adalah dua himpunan sebarang, maka $A \cup B = B \cup A$.

Bukti:

$$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \text{ atau } x \in B$$

$$\Leftrightarrow x \in B \text{ atau } x \in A$$

$$\Leftrightarrow x \in (B \cup A)$$

$$\text{Jadi } A \cup B = B \cup A$$

Sifat 4

Operasi gabungan himpunan bersifat asosiatif. Misalkan diketahui A, B, dan C adalah tiga himpunan sebarang, maka $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Bukti:

Misalkan $P = (A \cup B) \cup C$ dan $Q = A \cup (B \cup C)$. untuk membuktikan bahwa $P = Q$, maka harus ditunjukkan bahwa $P \subseteq Q$ dan juga $Q \subseteq P$.

$$x \in P \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \text{ atau } x \in C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \text{ atau } x \in B) \text{ atau } x \in C.$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ atau } x \in B \text{ atau } x \in C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ atau } (x \in B \text{ atau } x \in C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ atau } x \in (B \cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in Q.$$

Jadi $P \subseteq Q \dots (*)$, dan $Q \subseteq P$ (buktikan!) $\dots (**)$

Karena $P \subseteq Q$ dan $Q \subseteq P$ maka disimpulkan bahwa $P = Q$.

C.2. Sifat-Sifat Operasi Irisan

Sifat 1.

Misalkan A dan B adalah dua himpunan sebarang, maka:

$$(i) \quad (A \cap B) \subseteq A$$

$$(ii) \quad (A \cap B) \subseteq B$$

Bukti

(i) Misalkan x adalah sebarang anggota himpunan dari himpunan $A \cap B$, maka berdasarkan definisi, $x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A$ dan $x \in B$, berarti $x \in A$. Dengan demikian $(A \cap B) \subseteq A$.

(ii) Buktikan!

Sifat 2.

Jika A adalah sebarang himpunan, maka

$$(i) \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$(ii) \quad A \cap A = A$$

$$(iii) \quad A \cap U = A, \text{ dengan } U \text{ adalah himpunan semesta.}$$

Bukti

(i) Untuk membuktikan bahwa $A \cap \emptyset = \emptyset$, maka harus ditunjukkan dua hal yaitu $\emptyset \subseteq (A \cap \emptyset)$ dan $(A \cap \emptyset) \subseteq \emptyset$. Berdasarkan sifat 1, sudah ditunjukkan bahwa $A \cap \emptyset \subseteq \emptyset$. $\dots (*)$. Selanjutnya karena \emptyset

merupakan subset dari setiap himpunan, maka $\emptyset \subseteq A \cap \emptyset \dots$ (**). Jadi dari persamaan (*) dan (**) terbukti bahwa $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(ii) Mahasiswa dapat mencoba sendiri pembuktian ini.

(iii) Untuk membuktikan bahwa $A \cap U = A$, maka menurut definisi kesamaan himpunan, seperti yang telah dilakukan dalam pembuktian yang sebelumnya, akan ditunjukkan bahwa $A \cap U \subseteq A$ dan $A \subseteq A \cap U$. Berdasarkan Sifat 1, telah ditunjukkan bahwa $A \cap U \subseteq A$(*). Selanjutnya, misalkan x adalah sebarang anggota himpunan dari himpunan A . Karena U adalah himpunan semesta, maka untuk setiap $x \in A \Rightarrow x \in U$. Dengan kata lain $x \in A \cap U$. Jadi kesimpulannya $A \subseteq A \cap U$...(**). Dari persamaan (*) dan (**), terbuktilah bahwa $A \cap U = A$.

Sifat 3.

Irisan himpunan bersifat komutatif. Misalkan diketahui himpunan A dan B adalah dua himpunan sebarang, maka $A \cap B = B \cap A$.

Bukti

$$x \in (A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ dan } x \in B$$

$$\Leftrightarrow x \in B \text{ dan } x \in A$$

$$\Leftrightarrow x \in (B \cap A)$$

Jadi terbukti bahwa $A \cap B = B \cap A$

Sifat 4.

Operasi irisan himpunan bersifat asosiatif. Misalkan diketahui sebarang himpunan-himpunan A , B , dan C maka berlaku $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Bukti:

Misalkan $P = (A \cap B) \cap C$, dan $Q = A \cap (B \cap C)$.

Untuk membuktikan bahwa $P = Q$, harus ditunjukkan bahwa $P \subseteq Q$ dan juga $Q \subseteq P$.

$$\begin{aligned}x \in P &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \text{ dan } x \in C \\&\Leftrightarrow (x \in A \text{ dan } x \in B) \text{ dan } x \in C \\&\Leftrightarrow x \in A \text{ dan } x \in B \text{ dan } x \in C \\&\Leftrightarrow x \in A \text{ dan } (x \in B \text{ dan } x \in C) \\&\Leftrightarrow x \in A \text{ dan } x \in (B \cap C) \\&\Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C) \\&\Leftrightarrow x \in Q\end{aligned}$$

Karena $x \in P \Leftrightarrow x \in Q$, maka $P \subseteq Q$(*) Demikian pula sebaliknya (buktikan), $Q \subseteq P$...(**) maka $P = Q$ yang menunjukkan bahwa operasi irisan himpunan merupakan operasi yang bersifat asosiatif.

C.3. Hukum-Hukum Distributif

Hukum 1: *Operasi irisan himpunan bersifat distributif terhadap operasi gabungan himpunan.* Misalkan diketahui A , B , dan C adalah sebarang himpunan, maka $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Bukti:

Untuk membuktikan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, maka harus ditunjukkan (kesamaan himpunan) bahwa:

(i) $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$, dan

(ii) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

Untuk membuktikan hubungan (i), ambil sebarang x anggota himpunan $A \cap (B \cup C)$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned}x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ dan } x \in (B \cup C) \\&\Leftrightarrow x \in A \text{ dan } (x \in B \text{ atau } x \in C) \\&\Leftrightarrow (x \in A \text{ dan } x \in B) \text{ atau } (x \in A \text{ dan } x \in C), \text{ (asosiatif)}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \text{ atau } x \in (A \cap C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Karena $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ maka dapat disimpulkan bahwa $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Pembuktian bagian (ii) untuk menunjukkan bahwa $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$ agar dilatih oleh mahasiswa, bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Dengan demikian Hukum I ini dapat diterima.

Hukum 2: *Operasi gabungan himpunan bersifat distributif terhadap operasi irisan himpunan.* Misalkan diketahui A, B, dan C adalah himpunan-himpunan sebarang, maka berlaku $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Bukti: *Sebagai latihan, mahasiswa dapat membuktikan hukum tersebut.*

C.4. Sifat-sifat Selisih Himpunan

Sifat 1: $A - B \neq B - A$. Dengan kata lain, selisih dua himpunan tidak bersifat komutatif. Sebagai contoh, misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{3, 4, 5\}$. Selisih kedua himpunan tersebut adalah $A - B = \{1, 2\}$ dan $B - A = \{4, 5\}$. Dengan demikian terbukti bahwa $A - B \neq B - A$ (tidak bersifat komutatif).

Sifat 2: $(A - B) - C \neq A - (B - C)$, dengan kata lain operasi pengurangan himpunan tidak bersifat asosiatif. Misalkan diketahui $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, dan $C = \{1, 5, 6\}$.

Maka:

$$(A - B) - C = \{1, 2\} - \{1, 5, 6\} = \{2\} \dots (*)$$

dan

$$A - (B - C) = \{1, 2, 3\} - \{3, 4\} = \{1, 2\} \dots (**)$$

Terlihat dari persamaan (*) dan (**) bahwa $(A - B) - C \neq A - (B - C)$ maka disimpulkan bahwa operasi pengurangan himpunan tidak bersifat asosiatif.

Sifat 3: (i). $A \cup A^c = U$, dengan U adalah himpunan semesta, dan
(ii). $A \cap A^c = \emptyset$.

Bukti:

- (i) Untuk membuktikan $A \cup A^c = U$ maka harus ditunjukkan bahwa $(A \cup A^c) \subseteq U$, dan $U \subseteq (A \cup A^c)$. Karena semua himpunan adalah subset dari himpunan semesta, maka $(A \cup A^c) \subseteq U$... (*) adalah fakta.

Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa $U \subseteq (A \cup A^c)$, maka ambil sebarang $x \in (A \cup A^c)$.

Karena $x \in (A \cup A^c)$ maka $x \in A$ atau $x \in A^c$.

$$\begin{aligned}
 x \in (A \cup A^c) &\Rightarrow x \in A \text{ atau } x \in A^c \\
 &\Rightarrow x \in A \text{ atau } x \in (U - A) \\
 &\Rightarrow x \in A \text{ atau } (x \in U, x \notin A) \\
 &\Rightarrow x \in A \text{ atau } (x \in U \text{ dan } x \notin A) \\
 &\Rightarrow (x \in A \text{ atau } x \in U) \text{ dan } (x \in A \text{ atau } x \notin A) \\
 &\Rightarrow x \in A \text{ atau } x \in U, \text{ mengimplikasikan } x \in U \\
 &\Rightarrow x \in A \text{ atau } x \notin A, \text{ mengimplikasikan } x \in U \\
 &\Rightarrow x \in U
 \end{aligned}$$

Oleh karena itu $U \subseteq (A \cup A^c)$...(**)

Dari (*) dan (**), disimpulkan bahwa $(A \cup A^c) = U$.

(ii) Buktikan!

Sifat 4: (i) $U^c = \emptyset$

(ii) $\emptyset^c = U$

Bukti:

- (i). Akan dibuktikan bahwa $U^c \cap \emptyset = \emptyset$ dan $\emptyset \cap U^c = \emptyset$

Perhatikan bahwa untuk setiap $x \in U^c \Rightarrow x \notin U$, dengan U adalah himpunan semesta. Karena semua anggota himpunan merupakan anggota himpunan semesta, maka $x \notin U$ mengimplikasikan bahwa $x \in \emptyset$. Dengan demikian $U^c \subseteq \emptyset \dots (*)$.

Selanjutnya, diketahui bahwa $\emptyset \subseteq U^c \dots (**)$ (karena himpunan kosong merupakan subset dari semua himpunan). Jadi berdasarkan persamaan (*) dan (**), disimpulkan bahwa $U^c = \emptyset$.

(ii). Buktikan!

Sifat 5: $(A^c)^c = A$

Bukti: $(A^c)^c = \{x/x \notin A^c\} = \{x/x \in A\} = A$.

C.5. Hukum de-Morgan

$$(i). (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(ii). (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Bukti:

Misalkan U adalah himpunan semesta sedemikian sehingga untuk setiap x sebarang, maka x merupakan anggota dari U .

$$\begin{aligned} (i) (A \cup B)^c &= \{x/x \notin (A \cup B)\} \\ &= \{x/x \notin A \text{ dan } x \notin B\} \\ &= \{x/x \in A^c \text{ dan } x \in B^c\} \\ &= A^c \cap B^c \end{aligned}$$

(ii) Buktikan!

D. Definisi-Definisi

1. Pasangan Terurut.

Suatu pasangan terurut terdiri atas dua elemen; misalkan a, b sedemikian sehingga a ditempatkan pada posisi pertama dan b ditempatkan pada posisi kedua. Pasangan terurut ini dituliskan dengan notasi (a,b) .

2. Perkalian Catesian Untuk Dua Himpunan

Misalkan A dan B adalah dua himpunan sebarang, maka himpunan semua pasangan terurut (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$, disebut hasilkali Cartesian dari A dan B . Hasilkali Cartesian dituliskan dengan notasi $A \times B$ (dibaca A cross B). Definisi ini dituliskan secara simbolis $A \times B = \{(a,b)|a \in A, b \in B\}$.

Contoh 2.15.

Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b\}$

maka

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

dan

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

$A \times B \neq B \times A$ mengimplikasikan bahwa sifat komutatif tidak berlaku pada perkalian Cartesian.

3. Perkalian Cartesian Untuk Tiga Himpunan

Misalkan diketahui A, B , dan C adalah tiga himpunan sebarang, maka himpunan semua pasangan berurutan triple (a, b, c) dimana $a \in A, b \in B$, dan $c \in C$, merupakan hasilkali Cartesian dari A, B , dan C , yaitu $A \times B \times C = \{(a, b, c)|a \in A, b \in B, c \in C\}$.

Contoh 2.16. Misalkan diketahui $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$, dan $C = \{4, 5\}$, maka $A \times B \times C = \{(1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 4), (1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (2, 4, 5)\}$

4. Perkalian Cartesien untuk n Himpunan

Misalkan diketahui $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ adalah sebarang n himpunan, maka himpunan dari semua pasangan berurutan n -tupel $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$, dimana $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3, \dots, a_n \in A_n$, dinamakan hasilkali Cartesien dari himpunan-himpunan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, yaitu:

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n = \{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3, \dots, a_n \in A_n\}$$

E. Pemetaan atau Fungsi

Konsep fungsi merupakan hal yang mendasar dalam hampir semua bidang matematika. Istilah *fungsi* sangat luas digunakan, tetapi dalam aljabar, fungsi dan transformasi menjadi istilah tradisional. Istilah-istilah tersebut digunakan untuk menyatakan keterkaitan antara unsur-unsur yang dipelajari. Ide utamanya adalah korespondensi dalam bentuk tertentu yang timbul antara elemen-elemen dari dua himpunan. Artinya terdapat aturan tertentu yang menghubungkan elemen pada himpunan pertama dengan elemen pada himpunan kedua. Hubungan tersebut berlaku sedemikian sehingga untuk setiap elemen pada himpunan pertama, terdapat satu dan hanya satu elemen pada himpunan kedua.

Dengan hubungan pasangan berurutan (a, b) , maka pasangan (a, b) berbeda dengan pasangan (b, a) , jika a berbeda dengan b . Jadi terdapat satu posisi pertama dan satu posisi kedua sedemikian sehingga $(a, b) = (b, c)$ jika dan hanya jika $a = c$ dan $b = d$. Pasangan berurutan (*ordered pair*) berbeda dengan notasi daftar anggota himpunan, dimana $\{a, b\}$ dan $\{b, a\}$ menyatakan himpunan yang sama, karena urutan daftar anggota himpunan tidak berpengaruh terhadap sifat himpunan tersebut. Karena itu diberikan Definisi 2.9 berikut ini.

Definisi 2.9. Perkalian Cartesien

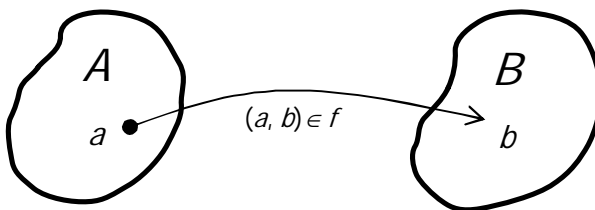
Untuk dua himpunan tak kosong A dan B , perkalian Cartesien $A \times B$ adalah himpunan semua pasangan berurutan (a, b) dari elemen-elemen $a \in A$ dan $b \in B$, yaitu $A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ dan } b \in B\}$.

Contoh 2.17. Misalkan diketahui $A = \{1, 2\}$ dan $B = \{3, 4, 5\}$, maka $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$, sedangkan $B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}$. Contoh ini memperlihatkan bahwa untuk pasangan berurutan dari anggota himpunan A dan B , maka $A \times B \neq B \times A$.

Definisi 2.10. Pemetaan dan Peta

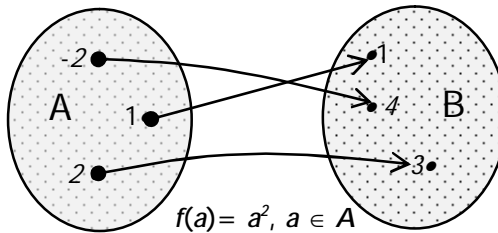
Misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan tak kosong. Suatu subset f dari $A \times B$ dikatakan *pemetaan* dari A ke B jika dan hanya jika untuk setiap $a \in A$ terdapat satu dan hanya satu (unik) elemen $b \in B$ sedemikian sehingga $(a, b) \in f$. Jika f adalah pemetaan dari A ke B dan pasangan berurutan $(a, b) \in f$, maka dituliskan $b = f(a)$ dan b disebut peta dari a oleh f .

Gambar di bawah ini menunjukkan pasangan antara a dengan $f(a)$. Suatu pemetaan f dari A ke B sama dengan suatu fungsi dari A ke B , dan peta $a \in A$ oleh f adalah sama dengan nilai fungsi f di a . Dua pemetaan, misalnya f memetakan A ke B dan g memetakan A ke B , dikatakan pemetaan yang sama jika dan hanya jika $f(x) = g(x)$ untuk semua $x \in A$.



Contoh 2.18. Misalkan $A = \{-2, 1, 2\}$ dan $B = \{1, 4, 9\}$, maka himpunan f yang dinyatakan dengan $f = \{(-2, 4), (1, 1), (2, 4)\}$ merupakan suatu pemetaan dari A ke B karena untuk setiap $a \in A$, terdapat $b \in B$ yang unik

(satu dan hanya satu) sedemikian sehingga $(a, b) \in f$. Pemetaan ini dapat dijelaskan dengan aturan pemetaan oleh f , yaitu $f(a) = a^2$, $a \in A$ sebagai berikut:



E.1. Domain, Kodomain, dan Range

Definisi 2.11: Domain, Kodomain, Range.

Misalkan f adalah suatu pemetaan dari A ke B , maka himpunan A disebut *domain* dari f , dan B disebut *kodomain* dari f . *Range* dari f adalah himpunan $C = \{y | y \in B \text{ dan } y = f(x) \text{ untuk suatu } x \in A\}$. Range dari f dilambangkan dengan $f(A)$.

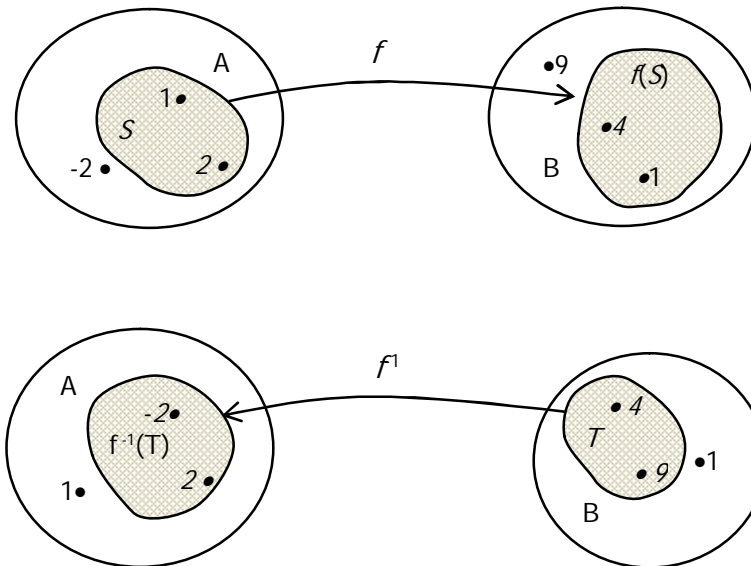
Contoh 2.19. Misalkan $A = \{-2, 1, 2\}$, $B = \{1, 4, 9\}$, dan f adalah pemetaan yang didefinisikan seperti pada contoh sebelumnya, yaitu $f = \{(a, b) | f(a) = a^2, a \in A\}$. Dalam kasus ini, domain f adalah A , kodomain f adalah B , dan range f adalah $\{1, 4\} \subset B$.

E.2. Peta dan Invers Peta

Definisi 2.12. Jika $f: A \rightarrow B$ dan $S \subseteq A$, maka: $f(S) = \{y | y \in B \text{ dan } y = f(x) \text{ untuk suatu } x \in S\}$. Himpunan $f(S)$ dinamakan peta dari S oleh f . Untuk sebarang subset T dari B , invers peta dari T dilambangkan dengan $f^{-1}(T) = \{x | x \in A \text{ dan } f(x) \in T\}$.

Peta $f(A)$ sama dengan range dari f . Notasi-notasi $f(S)$ dan $f^{-1}(T)$ adalah himpunan, bukan nilai dari suatu pemetaan. Pernyataan ini dapat dijelaskan dengan contoh sebagai berikut: Misalkan $f: A \rightarrow B$. Jika $S = \{1, 2\}$,

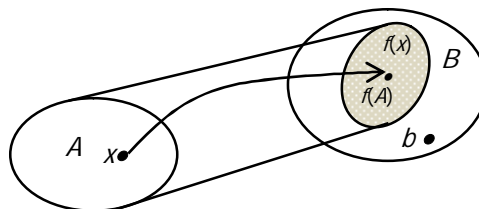
maka $f(S) = \{1, 4\}$. Selanjutnya, dengan $T = \{4, 9\}$, maka invers peta dari T adalah $f^{-1}(T) = \{-2, 2\}$.



Definisi 2.13. Pemetaan Onto (Surjektif)

Misalkan $f: A \rightarrow B$. maka f disebut onto atau surjektif jika dan hanya jika $B = f(A)$.

Cara standar untuk menunjukkan bahwa pemetaan $f: A \rightarrow B$ bersifat onto adalah dengan mengambil sebarang b anggota himpunan B kemudian menunjukkan bahwa terdapat $a \in A$ sehingga $f(a) = b$. Sebaliknya, untuk menunjukkan bahwa suatu pemetaan $f: A \rightarrow B$ tidak bersifat onto, hanya perlu ditunjukkan adanya suatu elemen $b \in B$, tetapi tidak terdapat $a \in A$ sedemikian sehingga $f(x) = b$ seperti ditunjukkan pada gambar berikut ini.



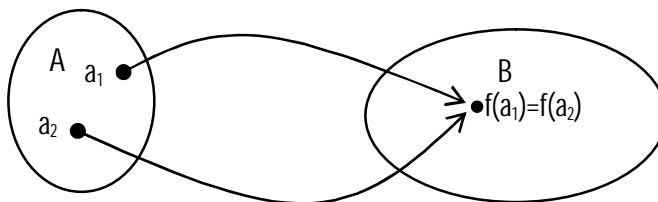
Misalkan diketahui pemetaan $f: A \rightarrow B$, dengan $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{4, -4\}$, dan $f = \{(-1, 4), (0, 4), (1, 4)\}$. Pemetaan tersebut *tidak bersifat onto*, karena tidak terdapat $a \in A$ yang memenuhi $f(a) = -4 \in B$. ■

Contohi 2.20. Misalkan $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, dengan \mathbb{Z} adalah himpunan semua bilangan bulat. Jika f didefinisikan dengan $f = \{(a, 2-a) | a \in \mathbb{Z}\}$, maka $f(a) = 2 - a$, dimana $a \in \mathbb{Z}$. Untuk menunjukkan bahwa f bersifat onto (surjektif), diambil sebarang elemen $b \in \mathbb{Z}$ sehingga terdapat $2-b \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $(2-b, b) \in f$, karena $f(2-b) = 2 - (2-b) = b$. Jadi, f bersifat onto. ■

Definisi 2.14. Satu-satu (Injektif)

Misalkan pemetaan $f: A \rightarrow B$, maka f dikatakan *one-to-one* (satu-satu) atau injektif, jika dan hanya jika untuk setiap elemen yang berbeda di himpunan A , selalu memiliki peta yang berbeda oleh pemetaan f .

Untuk menunjukkan bahwa f tidak bersifat satu-satu, hanya perlu ditemukan dua elemen himpunan A , yaitu $a_1 \in A$ dan $a_2 \in A$ sedemikian sehingga jika $a_1 \neq a_2$ maka $f(a_1) = f(a_2)$. Pasangan elemen-elemen yang memiliki sifat sedemikian itu diperlihatkan pada gambar di bawah ini.



Pada beberapa penjelasan sebelumnya, telah dipelajari bahwa untuk menunjukkan suatu sifat tidak benar, maka hanya perlu ditunjukkan satu pengecualian, sehingga pernyataan yang diberikan menjadi suatu pernyataan yang salah. Cara seperti ini dinamakan *counter example* (bukan contoh). Ingat, pembuktian dapat dilakukan dengan memberikan *contoh*, *bukan contoh*, *induksi*, *kontradiksi*, *kontraposisi*).

Contoh 2.21. Misalkan diberikan pemetaan $f: A \rightarrow B$, dengan $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{4, -4\}$, dan $f = \{(-1, 4), (0, 4), (1, 4)\}$. Di sini dapat dilihat bahwa f tidak bersifat satu-satu (*one-to-one*) karena $f(-1) = f(0) = 4$, tetapi $-1 \neq 0$. Suatu pemetaan $f: A \rightarrow B$ dikatakan satu-satu jika dan hanya jika $a_1 \neq a_2$ (yaitu elemen-elemen di A) selalu mengakibatkan $f(a_1) \neq f(a_2)$ (yaitu elemen di B). Dengan kata lain, untuk setiap elemen yang berbeda di A , selalu menghasilkan peta yang berbeda di B . Pernyataan ini menimbulkan permasalahan tersendiri, karena definisinya dinyatakan dalam bentuk *ketaksamaan* sedangkan umumnya manipulasi dalam matematika dilakukan berdasarkan *kesamaan*. Mahasiswa lebih mudah memahami konsep kesamaan dibandingkan dengan konsep ketaksamaan. Oleh karena itu, pernyataan satu-satu diubah ke dalam bentuk kontraposisifnya, yaitu $f(a_1) = f(a_2)$ selalu menunjuk pada $a_1 = a_2$. Untuk itu, pembuktian bahwa f bersifat satu-satu (injektif) dilakukan dengan mengasumsikan bahwa $f(a_1) = f(a_2)$ kemudian memperlihatkan bahwa $a_1 = a_2$.

Contoh 2.22. Misalkan $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ yang didefinisikan dengan $f = \{(a, 2-a) | a \in \mathbb{Z}\}$. Untuk membuktikan bahwa f bersifat satu-satu (injektif), maka diasumsikan bahwa untuk $a_1 \in \mathbb{Z}$ dan $a_2 \in \mathbb{Z}$, sehingga $f(a_1) = f(a_2)$. Dengan demikian $2 - a_1 = 2 - a_2$ dan hal ini mengimplikasikan bahwa $a_1 = a_2$. Jadi dalam hal ini f bersifat satu-satu (injektif). ■

Definisi 2.15. Korespondensi Satu-Satu, Bijeksi

Misalkan $f: A \rightarrow B$. Pemetaan f disebut *bijektif* jika dan hanya jika pemetaan tersebut *surjektif* dan sekaligus *injektif*. Pemetaan bijektif dari A ke B disebut *korespondensi satu-satu* dari A ke B , atau *bijeksi* dari A ke B .

Contoh 2.23.

Pemetaan $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ yang didefinisikan dengan $f = \{(a, 2 - a) | a \in \mathbb{Z}\}$ adalah pemetaan yang bersifat *onto* (surjektif) dan *satu-satu* (injektif). Karena itu pemetaan f disebut *korespondensi satu-satu* (bijektif). ■

Contoh 2.24.

Pemetaan yang onto tetapi tidak satu-satu dapat ditunjukkan pada suatu pemetaan $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2} & \text{jika } x \text{ genap} \\ \frac{x-3}{2} & \text{jika } x \text{ ganjil} \end{cases}$$

Untuk membuktikan bahwa h onto, ambil sebarang $b \in \mathbb{Z}$ dan suatu persamaan $h(x) = b$. Ada dua kemungkinan nilai untuk $h(x)$, tergantung pada nilai x , genap atau ganjil. Nilai-nilai tersebut $\frac{x-2}{2} = b$ untuk x genap, dan $\frac{x-3}{2} = b$ untuk x ganjil. Dengan menyelesaikan persamaan-persamaan ini untuk nilai-nilai x , diperoleh $x = 2b+2$ untuk x genap, atau $x = 2b+3$ untuk x ganjil. Perhatikan bahwa $2b+2 = 2(b+1)$ menyatakan suatu bilangan bulat genap untuk sebarang elemen $b \in \mathbb{Z}$. Demikian pula $2b+3$ dapat dinyatakan dalam bentuk $2(b+1)+1$, yang menunjukkan suatu bilangan bulat ganjil untuk sebarang $b \in \mathbb{Z}$. Jadi terdapat dua nilai, yaitu $2b + 2$ dan $2b + 3$ untuk sebarang $x \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga memenuhi $h(2b+2) = b$ dan $h(2b+3) = b$. Hal ini menunjukkan bahwa h bersifat onto (surjektif). Karena $2b + 2 \neq 2b + 3$ dan $h(2b+2) = h(2b+3) = b$, maka terbukti juga bahwa h tidak bersifat satu-satu (injektif).

Contoh 2.25. Misalkan suatu pemetaan $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ didefinisikan dengan $f(x) = 2x+1$.

Untuk membuktikan bahwa f onto, ambillah sebarang elemen \mathbb{Z} , misalkan b . Dengan demikian akan diperoleh

$$\begin{aligned} f(x) = b &\Leftrightarrow 2x + 1 = b \\ &\Leftrightarrow 2x = b - 1, \end{aligned}$$

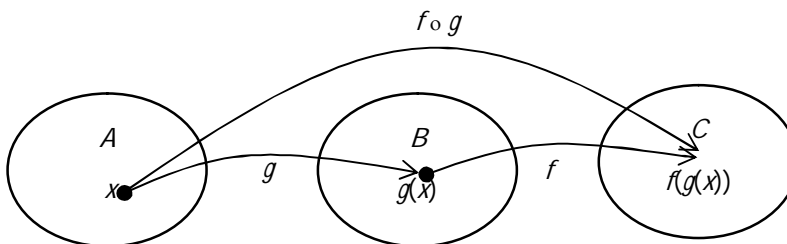
dan persamaan $2x = b - 1$ mempunyai penyelesaian $x \in \mathbb{Z}$ jika dan hanya jika $b - 1$ merupakan bilangan bulat genap – yaitu jika dan hanya jika b merupakan bilangan bulat ganjil. Jadi hanya bilangan-bilangan ganjil yang menjadi range dari f , akibatnya f tidak bersifat onto. Selanjutnya, bukti bahwa f bersifat satu-satu dapat ditunjukkan secara langsung bahwa:

$$\begin{aligned}
 f(m) = f(n) &\Rightarrow 2m + 1 = 2n + 1 \\
 &\Rightarrow 2m = 2n \\
 &\Rightarrow m = n
 \end{aligned}$$

Contoh ini menunjukkan bahwa f bersifat satu-satu (injektif), meskipun tidak bersifat onto (surjektif).

Definisi 2.16. Pemetaan Komposit

Misalkan $g: A \rightarrow B$ dan $f: B \rightarrow C$. Pemetaan komposit $f \circ g$ adalah pemetaan dari A ke C yang didefinisikan dengan $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ untuk semua $x \in A$. Proses



terbentuknya pemetaan komposit dinamakan komposisi pemetaan, dan hasil dari $f \circ g$ disebut komposisi dari f dan g . Mahasiswa sudah terbiasa dengan istilah *aturan rantai* melalui mata kuliah kalkulus. Karena itu diasumsikan mahasiswa dapat melihat analogi komposisi pemetaan dengan aturan rantai tersebut. Komposisi pemetaan $f \circ g$ digambarkan pada diagram di atas. Perhatikan bahwa domain dari f terlebih dulu harus memuat range dari g sebelum komposisi $f \circ g$ dapat didefinisikan.

Contohi 2.26. Misalkan \mathbb{Z} adalah himpunan semua bilangan bulat, A adalah himpunan bilangan bulat non-negatif, dan B adalah himpunan bilangan bulat non-positif. Misalkan pemetaan-pemetaan g dan f didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 g: \mathbb{Z} \rightarrow A, \quad g(x) &= x^2 \\
 f: A \rightarrow B, \quad f(x) &= -x
 \end{aligned}$$

Maka komposisi $f \circ g$ adalah pemetaan dari \mathbb{Z} ke B dengan $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -x^2$. Perhatikan bahwa $f \circ g$ tidak onto, karena $-3 \in B$, tetapi tidak terdapat bilangan bulat \mathbb{Z} sedemikian sehingga hubungan $(f \circ g)(x) = -x^2 = -3$

terpenuhi. Dalam kasus ini $f \circ g$ juga tidak satu-satu (injektif) karena $(f \circ g)(-2) = -(-2)^2 = -4 = (f \circ g)(2)$ tetapi $-2 \neq 2$.

Dalam komposisi pemetaan, notasi yang digunakan dalam setiap pernyataan harus diperhatikan dengan seksama. Beberapa ahli matematika menggunakan notasi xf untuk menyatakan peta x oleh f . Jadi, notasi xf maupun $f(x)$ menyatakan nilai f di x , atau dengan kata lain peta x oleh f . Apabila digunakan notasi xf , maka pemetaan dilakukan dari kiri ke kanan dan komposisi pemetaan $f \circ g$ didefinisikan dengan persamaan $x(f \circ g) = (xf)g$. Notasi yang akan digunakan dalam buku ini adalah $f(x)$ untuk menyatakan pemetaan x oleh f , dan $(f \circ g)(x)$ untuk menyatakan komposisi pemetaan f dengan g .

Jika pemetaan komposit dapat dibentuk, berarti suatu operasi yang terdefinisi pada pemetaan tersebut bersifat *assosiatif*. Jika $h: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, dan $f: C \rightarrow D$, maka

$$\begin{aligned} ((f \circ g) \circ h)(x) &= (f \circ g)(h(x)) \\ &= f(g(h(x))) \\ &= f((g \circ h)(x)) \\ &= (f \circ (g \circ h))(x) \end{aligned}$$

untuk semua $x \in A$. Jadi komposisi $(f \circ g) \circ h$ dan $f \circ (g \circ h)$ adalah pemetaan yang sama dari A ke D .

Definisi 2.17.

1. Pemetaan

Misalkan A dan B adalah dua himpunan tak kosong, maka *pemetaan* (atau *fungsi*) dari suatu himpunan A ke suatu himpunan B adalah aturan yang memasangkan setiap elemen A dengan unik suatu elemen B . Pemetaan ini sering juga dinamakan *transformator* atau *operator*. Pemetaan atau fungsi dari A ke B sering dituliskan dengan notasi

$$f: A \rightarrow B \text{ atau } A \xrightarrow{f} B$$

2. f -image dan pre -image

Misalkan $f: A \rightarrow B$, dan diketahui $x \in A$, $y \in B$ sedemikian sehingga $f(x) = y$, maka y dinamakan *f-image* (peta f , atau peta) dari x dan dituliskan dengan lambang $f(x)$, sedangkan x adalah pra-peta dari y .

3. Domain dan Kodomain

Misalkan $f: A \rightarrow B$, dan misalkan $x \in A$, $y \in B$ sedemikian sehingga $f(x) = y$, maka himpunan A disebut *domain* dari fungsi f dan himpunan B disebut *co-domain* f .

4. Range

Misalkan $f: A \rightarrow B$, maka himpunan peta dari semua anggota himpunan A disebut *range* dari f . Range f dinyatakan dengan $f(A)$, dan didefinisikan $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$.

Jenis-jenis Pemetaan

1. Pemetaan *into*

Misalkan $f: A \rightarrow B$ sedemikian sehingga terdapat setidaknya-tidaknya satu anggota himpunan B yang bukan merupakan peta f (peta) dari suatu elemen di A , maka f dikatakan pemetaan dari A ke B (*mapping from A into B*). Pemetaan dari A ke B dikatakan *into* jika dan hanya jika $\{f(x)\} \subset B$, dimana $x \in A$ dan $\{f(x)\} = \text{range dari } f$.

2. Pemetaan *onto*

Misalkan $f: A \rightarrow B$ sedemikian sehingga setiap anggota himpunan B merupakan peta f (peta) dari setidaknya-tidaknya satu anggota himpunan A , maka f disebut *peta* dari A ke B (*mapping of A onto B*). Pemetaan $f: A \rightarrow B$ dikatakan *onto* jika dan hanya jika $\{f(x)\} = B$, dimana $x \in A$ dan $\{f(x)\} = \text{range dari } f$. Pemetaan *onto* disebut juga pemetaan surjektif atau surjektif.

3. Pemetaan *one-to-one*, (atau *one-one*)

Misalkan $f: A \rightarrow B$ sedemikian sehingga untuk setiap anggota yang berbeda pada himpunan A memiliki peta yang berbeda di himpunan B, maka f merupakan pemetaan satu-satu (*one-to-one, one-one mapping*). Pemetaan $f: A \rightarrow B$ dikatakan satu-satu jika $x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, atau jika $x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$. Pemetaan satu-satu disebut juga pemetaan injeksi atau injektif. Pemetaan yang bersifat satu-satu dan sekaligus onto, atau pemetaan yang surjektif dan sekaligus injektif, disebut pemetaan bijeksi atau bijektif.

4. Pemetaan banyak-ke-satu.

Misalkan $f: A \rightarrow B$ sedemikian sehingga terdapat dua atau lebih anggota himpunan A memiliki peta yang sama di himpunan B, maka f disebut pemetaan banyak-ke-satu (*many-one mapping*). Pemetaan $f: A \rightarrow B$ dikatakan banyak-ke-satu jika $x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$.

5. Pemetaan Identitas.

Misalkan $f: A \rightarrow A$ sedemikian sehingga masing-masing anggota himpunan di A dipetakan pada dirinya sendiri, maka f disebut pemetaan identitas yang dilambangkan dengan I . Secara simbolis, pemetaan identitas dituliskan dengan notasi $f: A \rightarrow A$ jika $f(x) = x, \forall x \in A$. Pemetaan identitas bersifat *one-to-one* dan *onto*.

Contoh 2.27: Diketahui $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{4, 5\}$. Klasifikasikanlah pemetaan berikut ini:

(i) $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 5)\}$

(ii) $g = \{(1, 4), (2, 5)\}$

Jawab:

- (i) pemetaan f adalah pemetaan banyak-ke-satu
- (ii) pemetaan g tidak dapat didefinisikan karena tidak terdapat peta untuk 3.

Contoh 2.28. Diketahui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Klasifikasikanlah pemetaan di bawah ini.

- (i) $f(x) = 2x$, dengan $x \in \mathbb{R}$.
- (ii) $f(x) = x^2$, dengan $x \in \mathbb{R}$.

Jawab:

- (i) pemetaan $f(x)$ bersifat satu-satu, dan onto.
- (ii) Pemetaan $f(x)$ bersifat banyak-ke-satu, dan into.

Contoh 2.29. Diketahui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Klasifikasikanlah pemetaan di bawah ini.

- (i) $f(x) = x^2$
- (ii) $f(x) = e^x$
- (iii) $f(x) = \log(x)$
- (iv) $f(x) = \tan x$

Jawab:

- (i) Pemetaan $f(x)$ bersifat satu-satu, karena:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Selanjutnya, karena setiap bilangan real a memiliki akar kuadrat, berarti $f(\sqrt{a}) = (\sqrt{a})^2 = a$. Hal ini menunjukkan bahwa peta f adalah semua bilangan real, dan karena itu pemetaan f terhadap x bersifat onto. Dengan demikian pemetaan $f(x)$ bersifat satu-satu dan onto, atau bersifat bijektif.

- (ii) Dapat ditunjukkan bahwa pemetaan $f(x)$ bersifat satu-satu, karena $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2}$ yang mengimplikasikan bahwa $x_1 = x_2$. Selanjutnya dengan memisalkan x adalah sebarang bilangan real positif, maka $f(x) = e^x$ adalah juga bilangan real positif. Demikian pula $f(-x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ adalah bilangan real positif.

- (iii) dan (iv) diselesaikan oleh mahasiswa sebagai latihan.

a. Kesamaan Pemetaan

Misalkan $f: A \rightarrow B$ dan $g: A \rightarrow B$, maka pemetaan oleh f dan g dikatakan pemetaan yang sama jika $f = g, \forall x \in A$.

b. Invers Pemetaan

Misalkan $f: A \rightarrow B$ adalah pemetaan bijektif (satu-satu dan onto), maka pemetaan $f^{-1}: B \rightarrow A$ dimana $f(a) = b$ dengan $b \in B$ adalah peta dari $a \in A$ oleh f , dinamakan invers peta dari f .

Teorema 2.2.

Jika $f: A \rightarrow B$ adalah pemetaan yang bersifat satu-satu dan *onto*, maka invers pemetaan $f^{-1}: B \rightarrow A$ juga adalah pemetaan yang bersifat satu-satu dan *onto*.

Bukti:

Misalkan x_1 dan x_2 adalah sebarang anggota himpunan A dengan $x_1 \neq x_2$, yang memiliki peta y_1 dan y_2 sedemikian sehingga $f(x_1) = y_1$ dan $f(x_2) = y_2$(1).

Jika f^{-1} adalah invers dari f , maka $f^{-1}(y_1) = x_1$ dan $f^{-1}(y_2) = x_2$ (2).

Karena f adalah fungsi yang bersifat satu-satu, maka untuk $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Oleh karena itu, $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2) \Leftrightarrow y_1 \neq y_2$ [berdasarkan (1) dan (2)]. Jadi terbukti bahwa f^{-1} bersifat satu-satu(3).

Selanjutnya karena f bersifat onto (diketahui, lihat teorema), maka semua elemen yang berbeda pada himpunan B merupakan peta f dari elemen yang berbeda dari himpunan A . Demikian pula, semua elemen yang berbeda pada himpunan A merupakan peta f^{-1} dari elemen yang berbeda dari himpunan B . Jadi, f^{-1} adalah pemetaan *onto*.(4).

Berdasarkan persamaan (3) dan (4) disimpulkan bahwa f^{-1} merupakan pemetaan yang bersifat satu-satu dan onto.

Teorema 2.3.

Jika $f: A \rightarrow B$ adalah pemetaan yang satu-satu dan onto, maka $f^{-1}: B \rightarrow A$ adalah tunggal.

Bukti:

Misalkan $g: B \rightarrow A$ dan $h: B \rightarrow A$ adalah dua pemetaan inversi dari $f: A \rightarrow B$. Untuk membuktikan bahwa f^{-1} bersifat unik, maka harus ditunjukkan bahwa $g = h$.

Misalkan y adalah sebarang elemen himpunan B dan misalkan $g(y) = x_1$ sedemikian sehingga $f(x_1) = y$. Selanjutnya karena h adalah invers pemetaan dari f , maka $h(y) = x_2 \Rightarrow f(x_2) = y$. Karena f adalah fungsi yang bersifat satu-satu (diketahui), maka $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (menurut definisi). Jadi $g(y) = h(y)$, atau $h = g$, menunjukkan bahwa f^{-1} adalah pemetaan yang unik.

F. Operasi Biner

Mahasiswa tahun ketiga di perguruan tinggi tentu sudah memahami operasi-operasi di dalam matematika seperti operasi penjumlahan dan perkalian, dalam sistem bilangan bulat. Operasi-operasi tersebut merupakan contoh operasi biner. Operasi biner adalah proses yang mengkombinasikan dua elemen himpunan (himpunan yang sama) untuk menghasilkan elemen ketiga dari himpunan tersebut. Elemen yang ketiga ini haruslah bersifat unik, artinya haruslah terdapat satu dan hanya satu hasil dari keombinasian kedua elemen pertama, dan juga selalu terdapat kemungkinan untuk mengkombinasikan kedua elemen tersebut. Untuk menegaskan perbedaan antara proses, operasi, dan kombinasi, diberikan definisi sebagai berikut:

Definisi 2.18. Operasi Biner.

Operasi Biner pada himpunan tak kosong A adalah pemetaan f dari $A \times A$ ke A itu sendiri.

Dalam matematika, terdapat suatu kesepakatan untuk mengasumsikan bahwa jika suatu definisi formal ditetapkan, maka definisi tersebut secara otomatis bersifat bikondisional. Definisi tersebut disepakati sebagai pernyataan "jika dan hanya jika" tanpa harus dituliskan secara eksplisit. Definisi 2.18 di atas dipahami sebagai definisi yang menyatakan bahwa f adalah suatu operasi

biner pada suatu himpunan tak kosong A , "jika dan hanya jika" f adalah pemetaan dari $A \times A$ ke A .

Operasi biner sudah didefinisikan dengan jelas, tetapi sebagian makna konsep mungkin tidak tercakup di dalamnya. Misalnya f adalah pemetaan dari $A \times A$ ke A , maka $f(x,y)$ yang didefinisikan untuk setiap pasangan berurut (x,y) dari elemen-elemen A dan peta $f(x,y)$ adalah unik. Dengan kata lain, elemen-elemen x dan y dari himpunan A dapat dikombinasikan sedemikian sehingga diperoleh suatu elemen ketiga di A yang bersifat unik, yaitu $f(x,y)$. Hasil yang diperoleh dengan melakukan operasi biner terhadap x dan y adalah $f(x,y)$, dan satu-satunya hal yang tidak umum adalah notasi hasil tersebut. Biasanya hasil operasi biner dinyatakan dalam $x + y$ dan $x - y$. Notasi yang sama dapat dituliskan dengan $x * y$ untuk menyatakan $f(x,y)$. Jadi $x*y$ menyatakan hasil dari suatu operasi biner $*$ pada himpunan A , sama seperti $f(x,y)$ menyatakan sebarang nilai pemetaan dari $A \times A$ ke A .

Contoh 2.30. Dua contoh operasi biner pada \mathbb{Z} yaitu pemetaan dari $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ke \mathbb{Z} yang didefinisikan sebagai berikut:

1. $x*y = x + y - 1$, untuk $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
2. $x*y = 1 + xy$, untuk $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Contoh 2.31. Operasi pada subset-subset A dan B dari U yang membentuk irisan $A \cap B$, merupakan operasi biner pada kumpulan semua subset dari U . Hal yang sama juga berlaku pada operasi membentuk gabungan himpunan. Karena kita membahas tentang pasangan berurutan dalam hubungannya dengan operasi biner, maka hasil operasi biner antara $x*y$ dengan $y*x$ mungkin saja memiliki nilai yang berbeda.

Definisi 2.19. Komutatif, Asosiatif.

Jika $*$ adalah suatu operasi biner pada himpunan A yang tak kosong, maka $*$ disebut *komutatif* jika $x*y = y*x$ untuk semua x dan y di A . Jika $x*(y*z) =$

$(x*y)*z$ untuk semua x,y,z di A , maka operasi biner tersebut dikatakan *assosiatif*.

Contoh 2.32. Operasi biner penjumlahan dan perkalian pada bilangan bulat bersifat komutatif dan juga assosiatif. Meskipun demikian, operasi biner pengurangan pada bilangan bulat tidak bersifat komutatif dan juga tidak assosiatif. Sebagai contoh, $5 - 7 \neq 7 - 5$, dan $9 - (8 - 3) \neq (9 - 8) - 3$.

Contoh 2.33. Operasi biner $*$ yang didefinisikan di \mathbb{Z} sebagai berikut:

$$x*y = x + y - 1$$

adalah operasi yang komutatif, karena

$$x*y = x + y - 1 = y + x - 1 = y * x.$$

Operasi $*$ juga bersifat assosiatif karena

$$\begin{aligned} x* (y * z) &= x * (y + x - 1) \\ &= x + (y+x-1) - 1 \\ &= x + y + z - 2 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} (x* y) * z &= (x+ y-1) * z \\ &= (x+ y-1) + z - 1 \\ &= x + y + z - 2 \end{aligned}$$

Contoh 2.34. Operasi biner $*$ yang didefinisikan di \mathbb{Z} sebagai $x*y = 1+xy$ adalah komutatif, karena

$$x*y = 1 + xy = 1 + yx = y * x$$

tetapi tidak assosiatif, karena

$$\begin{aligned} x*(y*z) &= x*(1 + yz) \\ &= 1 + x(1 + yz) \\ &= 1 + x + xyz \end{aligned}$$

sedang

$$\begin{aligned} (x* y) * z &= (1 + xy) * z \\ &= 1 + (1 + xy)z \\ &= 1 + z + xyz \end{aligned}$$

Jadi, dalam hal ini operasi biner $*$ tidak asosiatif pada \mathbb{Z} .

Komutatif dan asosiatif merupakan sifat dari operasi biner itu sendiri. Sebaliknya, komutatif dan asosiatif dapat juga melekat pada sifat himpunan yang dioperasikan, dan sekaligus juga melekat pada operasi binernya.

Definisi 2.20. Tertutup

Misalkan $*$ adalah operasi biner pada suatu himpunan tak kosong A , dan misalkan $B \subseteq A$. Jika $x * y$ merupakan elemen B untuk semua $x \in B$ dan $y \in B$, maka B dikatakan *tertutup* terhadap operasi $*$. Dalam hal khusus dimana $B = A$ dalam Definisi 2.20, maka sifat tertutup akan berlaku secara otomatis, karena hasil $x * y$ adalah elemen A sesuai dengan definisi operasi biner di A .

Contoh 2.35. Misalkan operasi biner $*$ didefinisikan pada \mathbb{Z} , yaitu

$$x * y = |x| + |y|, (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Himpunan B yang merupakan himpunan bilangan bulat negatif, tidak tertutup terhadap operasi $*$ karena $x = -1 \in B$ dan $y = -2 \in B$, tetapi

$$x * y = (-1) * (-2) = |-1| + |-2| = 3 \notin B$$

Contoh 2.36. Definisi bilangan bulat ganjil dapat digunakan untuk membuktikan bahwa himpunan S yaitu semua bilangan bulat ganjil, bersifat tertutup dengan operasi perkalian. Misalnya x dan y adalah sebarang bilangan bulat ganjil. Berdasarkan definisi bilangan bulat ganjil, maka $x = 2m + 1$ untuk suatu bilangan bulat m dan $y = 2n + 1$ untuk suatu bilangan bulat n . Operasi perkalian antara x dan y adalah:

$$\begin{aligned} xy &= (2m + 1)(2n + 1) \\ &= 4mn + 2m + 2n + 1 \\ &= 2(mn + m + n) + 1 \\ &= 2k + 1 \end{aligned}$$

dimana $k = mn + m + n \in \mathbb{Z}$, oleh karena itu xy adalah bilangan bulat ganjil, yang mengimplementasikan bahwa operasi biner pada S tertutup pada operasi perkalian.

Definisi 2.21. Elemen Identitas

Misalkan $*$ adalah operasi biner pada suatu himpunan tak kosong A . Suatu elemen e di dalam A disebut elemen identitas terhadap operasi biner $*$ jika e memiliki sifat sedemikian sehingga

$$e * x = x * e = x$$

untuk semua $x \in A$.

Contoh 2.37. Bilangan bulat 1 merupakan suatu identitas dengan operasi perkalian (karena $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$), tetapi bukan elemen identitas untuk penjumlahan (karena $1 + x = x + 1 \neq x$).

Contoh 2.38. Elemen 1 merupakan identitas untuk operasi biner $*$ yang dinyatakan dengan

$$x * y = x + y - 1, (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

karena

$$x * 1 = x + 1 - 1 = 1 * x = 1 + x - 1 = x$$

Contoh 2.39. Tidak ada elemen identitas untuk operasi biner $*$ yang didefinisikan sebagai berikut

$$x * y = 1 + xy, (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

karena tidak ada bilangan bulat z yang tetap sehingga

$$x * z = z * x = 1 + xz = z \text{ untuk semua } x \in \mathbb{Z}.$$

Definisi 2.22. Invers Kanan, Invers Kiri, Invers

Misalkan e adalah elemen identitas untuk operasi biner $*$ pada himpunan A , dan misalkan $a \in A$. Jika terdapat suatu elemen $b \in A$ sedemikian sehingga $a * b = e$, maka b disebut *invers kanan* dari a terhadap operasi yang

bersangkutan. Demikian juga, jika $b * a = e$, maka b disebut *invers kiri* dari a . Jika $a * b = e$ dan $b * a = e$ maka b disebut *invers* dari a , dan a disebut *elemen terbalikkan* pada himpunan A . Suatu invers pada elemen terbalikkan sering disebut suatu invers dua sisi untuk menyatakan bahwa invers kiri dan invers kanan menghasilkan elemen identitas untuk operasi biner yang bersangkutan.

Contoh 2.40. Setiap elemen $x \in \mathbb{Z}$ memiliki invers dua sisi $(-x + 2) \in \mathbb{Z}$ dengan operasi biner $*$ yang didefinisikan

$$x * y = x + y - 1, (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

karena

$$x * (-x + 2) = x - x + 2 - 1 = (-x + 2) * x = -x + 2 + x - 1 = 1 = e$$

G. Soal-Soal

Untuk setiap pernyataan di bawah ini, tentukan pernyataan yang benar dan pernyataan yang salah.

1. Dua himpunan dikatakan sama jika dan hanya jika keduanya memiliki anggota himpunan yang tepat sama.
2. Jika A adalah subset dari B dan B adalah subset dari A , maka A dan B adalah himpunan yang sama.
3. Himpunan kosong adalah subset dari semua himpunan kecuali dirinya sendiri.
4. $A - A = \emptyset$ untuk semua himpunan A .
5. $A \in A = A \subset A$ untuk semua himpunan A .
6. $A \cap A$ untuk semua himpunan A .
7. $\{a, b\} = \{b, a\}$
8. $\{a, b\} = \{b, a, b\}$
9. $A - B = C - B$, menunjukkan bahwa $A = C$ untuk semua himpunan A, B , dan C .
10. $A - B = A - C$, menunjukkan bahwa $B = C$ untuk semua himpunan A, B , dan C .
11. $A \times A = A$, untuk setiap himpunan A .
12. $A \times \emptyset = \emptyset$ untuk setiap himpunan A .
13. Jika diketahui $f: A \rightarrow B$ dengan A dan B adalah himpunan tak kosong, maka $f^{-1}(f(S)) = S$ untuk setiap subset S dari A .
14. Jika diketahui $f: A \rightarrow B$ dengan A dan B adalah himpunan tak kosong, maka $f^{-1}(f(S)) = T$ untuk setiap subset T dari B .
15. Misalkan $f: A \rightarrow B$, maka $f(A) = B$ untuk semua himpunan tak kosong A dan B .
16. Setiap pemetaan yang bijektif adalah juga pemetaan yang satu-satu dan onto.

17. Suatu pemetaan dikatakan onto jika dan hanya jika kodomain dan rangenya sama.
18. Misalkan $g: A \rightarrow A$, maka $(f \circ g)(a) = (g \circ f)(a)$ untuk setiap $a \in A$.
19. Komposisi pemetaan merupakan operasi yang asosiatif.

Selesaikanlah latihan-latihan di bawah ini.

20. Gambarkanlah himpunan A dengan menyebutkan sifat-sifat keanggotaannya.
 - a. $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$
 - b. $A = \{1, -1\}$
 - c. $A = \{-1, -2, -3, \dots\}$
 - d. $A = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$
21. Jika didefinisikan $A = \{2, 7, 11\}$ dan $B = \{1, 2, 9, 19, 11\}$, apakah setiap pernyataan di bawah ini benar?
 - a. $2 \in A$
 - b. $2 = A \cap B$
 - c. $A \in B$
 - d. $\{11, 2, 7\} \in A$
 - e. $\{7, 11\} \notin A$
 - f. $\{7, 11, 2\} = A$
22. Jika diketahui A dan B adalah sebarang himpunan, tentukanlah apakah pernyataan berikut ini benar atau salah.

a. $B \subseteq A \mid A$	f. $B \subset A \mid A \in B$
b. $\emptyset \in A$	g. $0 \notin \emptyset$
c. $\emptyset \in \{\emptyset\}$	h. $\emptyset \in \{\emptyset\}$
d. $\{\emptyset\} \in \emptyset$	i. $\{\emptyset\} = \emptyset$
e. $\emptyset \notin \emptyset$	j. $\emptyset \in \emptyset$
23. Untuk semua himpunan A, B, C, nyatakanlah pernyataan berikut ini benar atau salah.

a. $A \cap A^c = \emptyset$	f. $A \cap \emptyset = A \in \emptyset$
b. $A \cap (B \in C) = A \in (B \cap C)$	g. $A \in (B^c \cap C^c) = A \in (B \in C)^c$

- c. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ h. $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$
 d. $A \cap (B \cup C) = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
 e. h. $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

24. Tentukanlah anggota dari himpunan-himpunan berikut, jika:

$$U = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$$

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$C = \{2, 3, 5, 7\}$$

- | | | |
|---------------------------|---------------------------|------------------------|
| a. $A \cap B$ | f. $A \cup C$ | k. $A^c \cap B$ |
| b. $A \cup B \cup C$ | g. $A^c \cap B \cup C$ | l. $A \cap (B \cup C)$ |
| c. $A \cup (B \cap C)$ | h. $(A \cap B^c)^c$ | m. $A - B$ |
| d. $B - A$ | i. $A - (B - C)$ | n. $C - (B - A)$ |
| e. $(A - B) \cup (C - B)$ | j. $(A - B) \cup (A - C)$ | |

25. Nyatakan himpunan di bawah ini sebagai himpunan A , A^c , U , atau \emptyset , jika A adalah sebarang himpunan, dan U adalah himpunan semesta.

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| a. $A \cup A$ | h. $A \cap A$ |
| b. $A \cup A^c$ | i. $A \cap A^c$ |
| c. $A \cap \emptyset$ | j. $A \cup \emptyset$ |
| d. $A \cup U$ | k. $A \cap U$ |
| e. $U \cap A^c$ | l. $A - \emptyset$ |
| f. \emptyset^c | m. U^c |
| g. $(A^c)^c$ | n. $\emptyset - A$ |

26. Tuliskan himpunan kuasa (power set) $P(A)$ dari himpunan A di bawah ini.

- | | |
|------------------------|---------------------------------------|
| a. $A = \{a\}$ | e. $A = \{0, 1\}$ |
| b. $A = \{a, b, c\}$ | f. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ |
| c. $A = \{1, \{1\}\}$ | g. $A = \{\{1\}\}$ |
| d. $A = \{\emptyset\}$ | h. $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ |

27. Tuliskan dua partisi dari masing-masing himpunan di bawah ini.
- $\{x/x \text{ adalah semua bilangan bulat}\}$
 - $\{1, 5, 9, 11, 15\}$
 - $\{a, b, c, d\}$
 - $\{x/x \text{ adalah semua bilangan bulat}\}$
28. Tuliskan semua partisi yang berbeda dari himpunan A di bawah ini.
- $A = \{1, 2, 3\}$
 - $A = \{1, 2, 3, 4\}$
29. Misalkan himpunan A memiliki n anggota, dengan $n \in \mathbb{Z}^+$.
- Tentukan banyaknya anggota himpunan kuasa (*power set*) $P(A)$.
 - Jika $0 \leq k \leq n$, tentukan banyaknya anggota himpunan kuasa (*power set*) $P(A)$ yang terdiri atas k elemen.
30. Tentukan syarat yang paling umum yang harus terpenuhi agar subset-subset A dan B (di dalam U) memenuhi kesamaan berikut ini.
- $A \cap B = A$
 - $A \subseteq B = A$
 - $A \cap B = U$
 - $A \cap \emptyset = U$
 - $A \cap B^c = A$
 - $A \cap B^c = A$
 - $A^c \cap B^c = \emptyset$
 - $A^c \cap U = \emptyset$
31. Diketahui \mathbb{Z} adalah himpunan semua bilangan bulat, dan
- $$A = \{x/x = 3p - 2 \text{ untuk suatu } p \in \mathbb{Z}\}$$
- $$B = \{x/x = 3q + 1 \text{ untuk suatu } q \in \mathbb{Z}\}$$
- Buktikan bahwa $A = B$
32. Diketahui \mathbb{Z} adalah himpunan semua bilangan bulat, dan
- $$C = \{x/x = 3r - 1 \text{ untuk suatu } r \in \mathbb{Z}\}$$
- $$D = \{x/x = 3s + 2 \text{ untuk suatu } s \in \mathbb{Z}\}$$
- Buktikan bahwa $C = D$
- Buktikanlah setiap pernyataan berikut ini.
- $A \cap B \subseteq A \subseteq B$
 - Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$ maka $A \subseteq C$
 - $A \subseteq (B \subseteq C) = (A \subseteq B) \subseteq C$
 - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

37. $A \cap (A^c \cup B) = A \cap B$
38. $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B)$
39. Jika $A \cap B$ maka $A \cap C \cap B \cap C$
40. $A \cap (B - A) = \emptyset$
41. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$
42. $(A^c)^c = A$
43. $A \cap B$ jika dan hanya jika $B^c \in A^c$
44. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
45. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
46. $A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$
47. Jika $A \cap B$ maka $A \cup C \cap B \cup C$
48. $B - A = B \cap A^c$
49. $A \cup (B - A) = A \cup B$
50. $(A - B) \cup (A \cap B) = A$
51. $A \cap B$ jika dan hanya jika $A \cap B = A$
52. $A \cup B = A \cup C$ berarti $B = C$
53. $A \cap B = A \cap C$ berarti $B = C$
54. $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$.
55. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.
56. $P(A - B) = P(A) - P(B)$.
57. Nyatakan $(A \cup B) - (A \cap B)$ dalam bentuk gabungan dan irisan dari himpunan-himpunan A , A^c , B , dan B^c .
58. Misalkan operasi penjumlahan subset A dan B didefinisikan dengan $A + B = (A \cup B) - (A \cap B)$. Gambarkanlah masing-masing pernyataan dibawah ini dengan menggunakan diagram Venn.
 - a. $A + B = (A - B) \cup (B - A)$
 - b. $A + (B + C) = (A + B) + C$
 - c. $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$

59. Dengan menggunakan operasi penjumlahan, buktikanlah bahwa

a. $A + A = \emptyset$

b. $A + \emptyset + A$

60. Tentukan hasil perkalian Cartesien untuk masing-masing himpunan di bawah ini.

a. $A \times B; A = \{a, b\}, B = \{0, 1\}$

b. $B \times A; A = \{a, b\}, B = \{0, 1\}$

c. $A \times B; A = \{2, 4, 6, 8\}, B = \{2\}$

d. $B \times A; A = \{1, 5, 9\}, B = \{-1, 1\}$

e. $B \times A; A = B = \{1, 2, 3\}$

61. Untuk setiap pemetaan di bawah ini, tentukanlah domain, kodomain, dan rangenya, jika $f: E \rightarrow \mathbb{Z}$.

a. $f(x) = x/2, x \in E$.

b. $f(x) = |x|, x \in E$.

c. $f(x) = x, x \in E$.

d. $f(x) = x + 1, x \in E$.

62. Tentukanlah $f(S)$ dan $f^{-1}(T)$ untuk setiap S dan T dengan $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

a. $f(x) = |x|; S = \mathbb{Z} - E, T = \{1, 3, 4\}$

b. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{jika } x \text{ genap} \\ x & \text{jika } x \text{ ganjil} \end{cases} S = \{0, 1, 5, 9\}, T = \mathbb{Z} - E$.

c. $f(x) = x^2; S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, T = \{2, 7, 11\}$

d. $f(x) = |x| - x; S = T = \{-7, -1, -, 2, 4\}$

63. Untuk setiap pemetaan berikut ini, $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

a. $f(x) = 2x$

g. $f(x) = x + 3$

b. $f(x) = 3x$

h. $f(x) = x^3$

c. $f(x) = |x|$

d. $h. f(x) = x - |x|$

e. $f(x) = \begin{cases} x & \text{jika } x \text{ genap} \\ 2x - 1 & \text{jika } x \text{ ganjil} \end{cases}$

f. $f(x) = \begin{cases} x & \text{jika } x \text{ genap} \\ x - 1 & \text{jika } x \text{ ganjil} \end{cases}$

64. Untuk setiap pemetaan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di bawah ini, nyatakan pemetaan tersebut bersifat onto, atau bersifat satu-satu.

a. $f(x) = 2x$

d. $f(x) = x^3$

b. $f(x) = 3x$

e. $f(x) = |x|$

c. $f(x) = x + 3$

f. $f(x) = x - |x|$

65. Untuk himpunan-himpunan A dan B yang merupakan subset-subset \mathbb{Z} di bawah ini, misalkan $f(x) = 2x$, tentukan apakah pemetaan $f: A \rightarrow B$ bersifat onto (surjektif) atau satu-satu (injektif).

a. $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{E}$.

b. $A = \mathbb{E}, B = \mathbb{E}$

66. Untuk himpunan-himpunan A dan B yang merupakan subset-subset dari \mathbb{Z} , misalkanlah $f(x) = |x|$, kemudian tentukan apakah $f: A \rightarrow B$ bersifat onto (surjektif) atau satu-satu (injektif).

a. $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

b. $A = \mathbb{Z}^+, B = \mathbb{Z}^+$

c. $A = \mathbb{Z}^+, B = \mathbb{Z}$

d. $A = \mathbb{Z} - \{0\}, B = \mathbb{Z}^+$

67. Untuk pemetaan $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, tentukanlah apakah f bersifat onto atau satu.

a. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{jika } x \text{ genap} \\ 0 & \text{jika } x \text{ ganjil} \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x \text{ genap} \\ 2x & \text{jika } x \text{ ganjil} \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{jika } x \text{ genap} \\ \frac{x + 1}{2} & \text{jika } x \text{ ganjil} \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{jika } x \text{ genap} \\ \frac{x - 3}{2} & \text{jika } x \text{ ganjil} \end{cases}$

68. Misalkan $A = \mathbb{R} - \{0\}$ dan $B = \mathbb{R}$. Untuk suatu pemetaan $f: A \rightarrow B$, buktikanlah f onto atau satu-satu.

a. $f(x) = \frac{x-1}{x}$

c. $f(x) = \frac{2x-1}{x}$

b. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

d. $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$

69. Untuk masing-masing pemetaan $f: A \rightarrow B$ di bawah ini, buktikanlah f onto atau satu-satu.

a. $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, f(x,y) = (y, x)$

b. $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z}, f(x,y) = x + y$

c. $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z}, f(x,y) = x$

d. $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, f(x) = (x, 1)$

e. $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, B = \mathbb{Q}, f(x,y) = x/y$

f. $A = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}, B = \mathbb{R}, f(x,y) = 2x + y$

70. Untuk setiap $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dan $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ yang didefinisikan di bawah ini, tentukanlah $(f \circ g)(x)$, dengan $x \in \mathbb{Z}$.

a. $f(x) = 2x, g(x) = \begin{cases} x & \text{untuk } x \text{ genap} \\ 2x-1 & \text{untuk } x \text{ ganjil} \end{cases}$

b. $f(x) = 2x, g(x) = x^3$

c. $f(x) = x + |x|, g(x) = \begin{cases} x & \text{untuk } x \text{ genap} \\ \frac{x}{2} & \text{untuk } x \text{ ganjil} \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{untuk } x \text{ genap} \\ x+1 & \text{untuk } x \text{ ganjil} \end{cases}$

dan

e. $g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{untuk } x \text{ genap} \\ 2x & \text{untuk } x \text{ ganjil} \end{cases}$

f. $f(x) = x^2, g(x) = x - |x|$

71. Misalkan $f: A \rightarrow B$, dengan A dan B adalah himpunan-himpunan tak kosong.
- Buktikan bahwa $f(S_1 \cap S_2) = f(S_1) \cap f(S_2)$ untuk semua subset S_1 dan S_2 dari himpunan A .
 - Buktikan bahwa $f(S_1 \cup S_2) \subseteq f(S_1) \cup f(S_2)$ untuk semua subset S_1 dan S_2 dari himpunan A .
 - Berikan contoh yang menunjukkan bahwa ada subset S_1 dan S_2 dari himpunan A sedemikian sehingga $f(S_1 \cup S_2) \neq f(S_1) \cup f(S_2)$.
 - Buktikan bahwa $f(S_1) - f(S_2) \subseteq f(S_1 - S_2)$ untuk semua subset S_1 dan S_2 dari himpunan A .
 - Berikan contoh yang menunjukkan bahwa ada subset S_1 dan S_2 dari himpunan A sedemikian sehingga $f(S_1) - f(S_2) \neq f(S_1 - S_2)$.
72. Jika suatu operasi biner pada suatu himpunan tak kosong A bersifat komutatif, maka terdapat elemen identitas untuk himpunan A tersebut.
73. Jika $*$ adalah suatu operasi biner pada himpunan tak kosong A , maka A tertutup pada operasi $*$.
74. Misalkan $A = \{a, b, c\}$. Powerset $P(A)$ tertutup pada operasi biner \cap .
75. Misalkan $A = \{a, b, c\}$, maka himpunan kosong \emptyset adalah elemen identitas dari $P(A)$ dengan operasi biner \cap .
76. Misalkan $A = \{a, b, c\}$, maka power set $P(A)$ tertutup terhadap operasi gabungan \cup .
77. Misalkan $A = \{a, b, c\}$, maka himpunan kosong \emptyset adalah elemen identitas dari $P(A)$ dengan operasi biner \cap .
78. Sebarang operasi biner yang didefinisikan pada suatu himpunan yang hanya memiliki satu elemen, selalu bersifat komutatif dan asosiatif.
79. Elemen identitas dan invers selalu terdapat di dalam suatu himpunan yang hanya memiliki satu elemen, yang padanya operasi biner dapat didefinisikan.

80. Himpunan semua bijeksi dari A ke A bersifat tertutup dengan operasi biner komposisi yang didefinisikan pada himpunan semua pemetaan dari A ke A.

81. Tentukanlah, apakah himpunan B yang diberikan di bawah ini bersifat tertutup pada operasi biner yang didefinisikan pada himpunan bilangan bulat \mathbb{Z} . Jika B tidak tertutup, tunjukkan elemen-elemen $x \in B$ dan $y \in B$ sedemikian sehingga $x * y \notin B$.

a. $x * y = xy$, $B = \{-1, -2, -3, \dots\}$

b. $x * y = x - y$, $B = \mathbb{Z}^+$.

c. $x * y = x^2 + y^2$, $B = \mathbb{Z}^+$.

d. $x * y = \operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} y$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{jika } x > 0 \\ 0 & \text{jika } x = 0 \\ -1 & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

e. $x * y = |x| - |y|$, $B = \mathbb{Z}^+$.

f. $x * y = x + xy$, $B = \mathbb{Z}^+$.

g. $x * y = xy - x - y$, B himpunan bilangan bulat ganjil.

h. $x * y = xy$, B = Bilangan bulat ganjil yang positif.

82. Pada setiap pernyataan di bawah ini, diberikan suatu aturan yang menentukan operasi biner $*$ pada himpunan \mathbb{Z} . Tentukanlah sifat masing-masing pernyataan tersebut, apakah komutatif, asosiatif, dan apakah memiliki identitas. Tentukan juga invers dari elemen yang terbalikkan.

a. $x * y = x + xy$

b. $x * y = x$

c. $x * y = x + 2y$

d. $x * y = 3(x + y)$

e. $x * y = 3xy$

f. $x * y = x - y$

g. $x * y = x + xy + y$

h. $x * y = x + y + 3$

i. $x * y = x - y + 1$

j. $x * y = x + xy + y - 2$

k. $x * y = |x| - |y|$

l. $x * y = |x - y|$

m. $x * y = x^y$, $x, y \in \mathbb{Z}^+$

n. $x * y = 2^{xy}$, $x, y \in \mathbb{Z}^+$

83. Misalkan S adalah suatu himpunan yang terdiri atas tiga elemen, yaitu $S = \{A, B, C\}$. Dalam tabel yang diberikan di bawah ini, $x * y$ menyatakan perkalian antara elemen pertama pada kolom paling kiri, dengan elemen kedua pada baris paling atas. Contohnya, $B * C = C$ dan $C * B = A$.

*	A	B	C
A	C	A	B
B	A	B	C
C	B	A	C

- Apakah operasi biner $*$ bersifat komutatif? Mengapa?
 - Apakah ada elemen identitas di S untuk operasi $*$?
 - Jika terdapat elemen identitas, elemen mana yang memiliki invers?
84. Pada tabel di bawah ini, $S = \{A, B, C\}$

*	A	B	C
A	A	B	C
B	B	C	A
C	C	A	B

- Apakah operasi biner $*$ bersifat komutatif? Mengapa?
- Adakah elemen identitas di S untuk operasi $*$?
- Jika terdapat elemen identitas, elemen mana yang memiliki invers?

85. Pada tabel di bawah ini, $S = \{A, B, C, D\}$.

*	A	B	C	D
A	B	C	A	B
B	C	D	B	A
C	A	B	C	D
D	A	B	D	D

- Apakah operasi biner $*$ bersifat komutatif? Mengapa?
- Adakah elemen identitas di S untuk operasi $*$?
- Jika terdapat elemen identitas, elemen manakah yang memiliki invers?

86. Pada tabel di bawah ini, $S = \{A, B, C, D\}$.

*	A	B	C	D
A	A	A	A	A
B	A	B	A	B
C	A	A	C	C
D	A	B	C	D

- Apakah operasi biner $*$ bersifat komutatif? Mengapa?
- Adakah elemen identitas di S untuk operasi $*$ tersebut?
- Jika terdapat elemen identitas, elemen mana yang memiliki invers?

- Buktikan bahwa himpunan bilangan bulat tak nol bersifat tertutup terhadap operasi pembagian
- Buktikan bahwa himpunan semua bilangan bulat ganjil bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan.
- Berdasarkan definisi bilangan bulat genap (yaitu bilangan yang dapat dinyatakan dengan $2m$), buktikan bahwa himpunan \mathbb{E} yaitu bilangan bulat genap bersifat tertutup terhadap:

- a. Operasi penjumlahan
 - b. Operasi perkalian
90. Asumsikan bahwa $*$ merupakan operasi biner yang asosiatif pada suatu himpunan tak kosong A . Buktikan bahwa $a * [b * (c * d)] = [a * (b * c)] * d$ untuk semua a, b, c, d di A .
91. Asumsikan bahwa $*$ adalah operasi biner pada himpunan tak kosong A , dan misalkan bahwa $*$ komutatif dan asosiatif. Dengan menggunakan definisi komutatif dan asosiatif, buktikan bahwa $[(a * b) * c] * d = (d * c) * (a * b)$ untuk semua a, b, c, d di A .
92. Misalkan $*$ adalah operasi biner pada himpunan tak kosong A . Buktikanlah bahwa jika A memiliki suatu elemen identitas pada operasi $*$ tersebut, maka elemen identitasnya unik. (Asumsikan ada dua elemen identitas yaitu e_1 dan e_2 untuk operasi $*$, kemudian tunjukkan bahwa $e_1 = e_2$).
93. Asumsikan bahwa $*$ merupakan suatu operasi biner yang asosiatif pada A yang memiliki suatu elemen identitas. Buktikan bahwa invers dari suatu elemen (jika ada) bersifat unik.

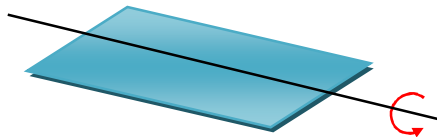
BAB III

SIMETRI

A. Pengertian Simetri

Apakah yang dimaksud simetri? Bayangkan beberapa benda yang dimetris dan beberapa benda yang tidak simetris. Apa yang menyebabkan benda simetris menjadi simetris? Apakah benda simetris yang berbeda, simetris dengan cara berbeda? Luangkan waktu untuk memikirkan hal ini. Mulailah dengan membuat daftar dari benda-benda yang simetris misalnya bola, lingkaran, kubus, persegi, persegi panjang, dan sebagainya. Apa sebenarnya yang kita pikirkan ketika mengatakan bahwa benda-benda tersebut simetris? Bagaimana sifat umum simetri dari benda-benda tersebut? Adakah perbedaan simetri antara benda yang satu dengan benda lainnya?

Misalkan kita memilih suatu benda yang simetris, misalnya selembar kartu berbentuk persegi panjang yang polos dan tidak bergambar. Apa yang menyebabkan kartu tersebut simetri? Ada jawaban sederhana yang digunakan oleh ahli matematika. Kartu tadi dikatakan simetri bila kartu telah mengalami perpindahan, tetapi perubahan posisinya tidak terlihat. Misalkan seorang mahasiswa meletakkan kartu di atas meja kemudian keluar meninggalkan ruangan. Jika seseorang temannya memutar atau membalikkan kartu tersebut dapatkan mahasiswa tadi mengetahui bahwa kartunya telah terputar atau terbalik?

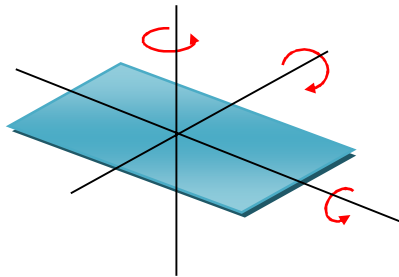


Gambar 3.1. Simetri

Untuk memahami masalah simetri, lakukanlah percobaan berikut ini:

1. Buatlah daftar semua simetri dari suatu kartu yang berbentuk persegi panjang. Perhatikan kartu tersebut dan putar sejauh 180° . Tandai bagian-bagian yang anda anggap perlu. Catatlah hasil pengamatan dan kesimpulan anda.
2. Lakukan hal yang sama dengan nomor (1) untuk kartu yang berbentuk persegi.
3. Lakukan juga hal yang sama dengan nomor (1) untuk benda berbentuk balok, misalnya batu bata. Apakah simetri (3) sama dengan simetri pada nomor (1) dan (2)?

Berapa simetri yang anda identifikasi pada suatu kartu berbentuk persegi? Misalkan anda mendapatkan tepat tiga gerak yaitu dua rotasi 180° pada sumbu yang searah bidang permukaan kartu, dan satu rotasi 180° pada sumbu yang tegak lurus dengan permukaan dan melalui titik pusat kartu.



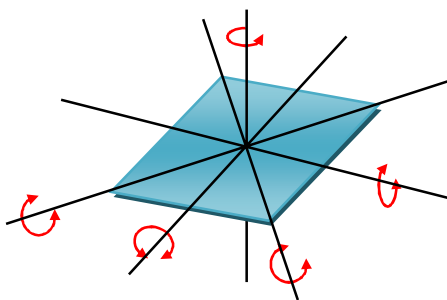
Gambar 3.2.Simetri persegi panjang

Selain perpindahan melalui cara rotasi pada sumbu simetri, penting juga dipertimbangkan rotasi sebesar 0° pada masing-masing sumbu tersebut. Dalam hal ini tidak dilakukan putaran sama sekali pada kartu tersebut, dan kartu tetap berada pada posisinya. Dengan demikian, dapat diketahui ada empat simetri pada kartu persegi panjang. Meskipun demikian, pertanyaan lain yang perlu dijawab adalah apakah simetri pada kartu tersebut ada empat, atau sebenarnya tak berhingga banyaknya? Mengapa pertanyaan ini muncul? Jika kartu dapat dibalik sejauh π atau $-\pi$, maka posisi yang sama juga diperoleh dengan membalikkannya sejauh $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 4\pi$, dan seterusnya.

alam semesta diciptakan dan tidak disertai dengan buku manual untuk menyelesaikan semua masalah yang akan muncul, maka manusia harus memilih sendiri menyelesaikannya kemudian menunggu apa yang akan terjadi sebagai konsekuensi pilihannya itu.

Jadi untuk menjelaskan adanya empat atau tak berhingga banyaknya simetri pada kartu persegi panjang, manusia memilih untuk menganggap bahwa rotasi sejauh 2π pada salah satu sumbu simetri, akan menempati posisi yang sama dengan rotasi sejauh 0 derajat. Demikian juga rotasi sejauh -3π akan menempati posisi yang sama dengan rotasi sejauh π . Rotasi dengan cara bagaimanapun, posisi akhir akan memperlihatkan bahwa semua bagian atau sisi-sisi kartu akan menempati tempat yang tepat sama sebelum dilakukan rotasi.

Dengan melakukan pilihan yang sama pada kartu yang berbentuk persegi (untuk simetri yang meliputi rotasi 0 derajat, dengan simetri berhingga, dan tidak memperhitungkan simetri pencerminan), akan diperoleh adanya delapan simetri. Kedelapan simetri tersebut terdiri atas rotasi 0 derajat (atau 0π), rotasi $\pi/2$, π , dan $3\pi/2$ pada sumbu-sumbu yang tegak lurus terhadap permukaan kartu dan melalui titik pusat bidang kartu, serta terdapat dua simetri *lipat* yang melalui garis diagonal dan titik pusat bidang kartu tersebut.

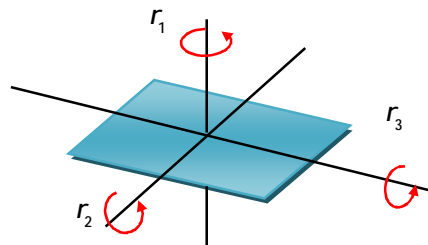


Gambar 3.3: Simetri persegi.

Simetri pada bidang (dalam hal ini kartu) persegi, dapat dijelaskan sebagai berikut: *Seorang mahasiswa meletakkan sehelai kartu persegi di atas meja kemudian meninggalkan ruang kelas. Kemudian mahasiswa lainnya*

membalikkan dua kartu tersebut sebanyak dua kali, berdasarkan rotasi pada gambar di atas. Ketika mahasiswa yang meletakkan kartu tadi kembali ke dalam ruang kelas, maka ia tidak dapat mengetahui bahwa kartu tersebut telah berubah posisi sebanyak dua kali, karena setiap bagian dan sisi-sisinya berada pada posisi yang sama. Hasil dari dua kali simetri adalah juga simetri.

Untuk mempertegas tiga rotasi pada kartu persegi panjang, masing-masing rotasi diberi label sebagai penanda, yaitu r_1 , r_2 , dan r_3 , dan posisi tanpa rotasi ditandai dengan simbol e . Jika seseorang melakukan rotasi r_1 kemudian rotasi r_2 berturut-turut, maka hasil rotasi tersebut adalah r_1, r_2, r_3 , atau e , yaitu salah satu rotasi terdapat pada kartu. Rotasi yang mana? Rotasi r_1 kemudian dilanjutkan dengan rotasi r_2 akan menghasilkan r_3 . Demikian pula, pada bidang yang sama, jika rotasi r_2 diteruskan dengan rotasi r_3 maka akan menghasilkan rotasi r_1 . Mahasiswa dapat membuat kartu sendiri untuk menguji rotasi apa yang akan dihasilkan dari dua rotasi berturut-turut, misalnya r_1 kemudian r_3 .



Gambar 3.4: Label simetri rotasi pada bidang persegi

Berdasarkan posisi akhir yang diperoleh dari dua rotasi berturut-turut, diperoleh suatu bentuk "perkalian" simetri komposisi yang dapat dinyatakan sebagai berikut: Hasil kali xy dari simetri-simetri x dan simetri y adalah hasil dari rotasi pada simetri y kemudian dilanjutkan dengan rotasi pada simetri x .

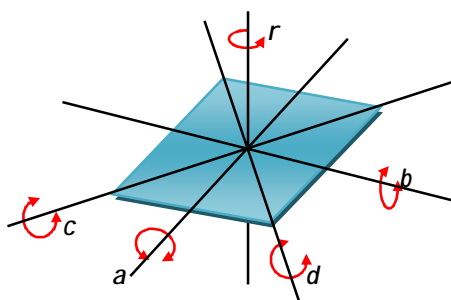
Cara yang paling baik untuk menguji semua hasil kali rotasi simetri pada bidang persegi maupun persegi panjang adalah dengan mengisi tabel perkalian seperti yang diberikan pada Gambar 3.5. Banyak baris dan kolom disesuaikan dengan banyak simetri pada masing-masing bidang. Untuk bidang persegi panjang, diperlukan empat baris dan empat kolom sedangkan untuk

bidang persegi diperlukan delapan baris dan delapan kolom. Mahasiswa dapat mencoba juga untuk berbagai bentuk lain yang memungkinkan misalnya segi tiga sama sisi, segi tiga sama kaki, atau bentuk lainnya. Setiap sel diisi dengan hasil perkalian ssimetri pada baris dan kolom yang bersesuaian. Misalnya pada baris dan kolom r_2 diisi dengan hasil kali kedua rotasi tersebut jika dilakukan berturut-turut. Tabel ini akan memudahkan mahasiswa memahami Tabel Cayley yang akan dibahas pada bagian selanjutnya.

	e	r_1	r_2	r_3
e				
r_1			r_3	
r_2				
r_3				

Gambar 3.5. Tabel perkalian simetri persegi panjang

Setelah selesai mengisi tabel perkalian untuk bidang persegi panjang, lanjutkan dengan tabel perkalian untuk bidang persegi. Label pada masing-masing simetri dapat ditentukan sendiri, tetapi untuk tujuan keseragaman, di sini digunakan label seperti yang diperlihatkan pada Gambar 3.6. dan 3.7.



Gambar 3.6: Label simetri pada persegi

Label pada gambar di atas dipilih dengan kesepakatan sebagai berikut:

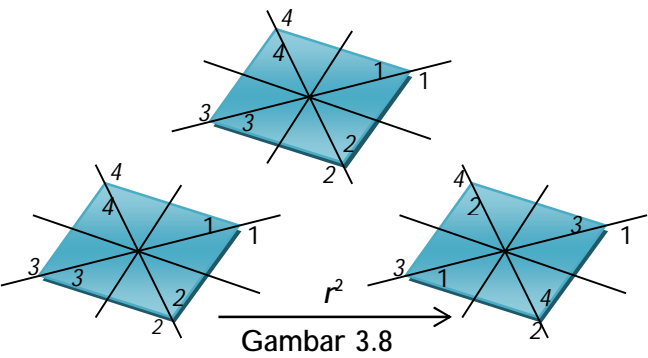
- Rotasi sebesar $\pi/2$ melalui sumbu yang tegak lurus pada titik tengah bidang kartu diberi label r .
- Rotasi sebesar $\pi/2$ lainnya pada sumbu yang sama masing-masing diberi label r^2 dan r^3 (ada tiga rotasi pada sumbu yang tegak lurus permukaan bidang kartu).
- Posisi kartu sebelum dilakukan rotasi adalah e .
- Simetri lipat sebesar π melalui garis yang menghubungkan titik tengah dua sisi berhadapan diberi label a , dan b .
- Sedangkan simetri lipat sebesar π melalui garis-garis diagonal berturut-turut diberi label c dan d .

Hasilkali dari dua rotasi yang dilakukan berturut-turut, dapat dipahami setelah mahasiswa mengisi tabel perkalian simetri rotasi untuk bidang persegi yang diberikan pada Gambar 3.7.

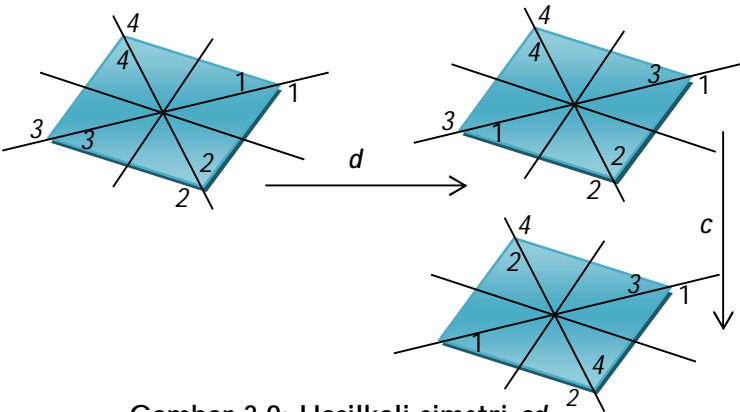
	e	r	r^2	r^3	a	b	c	d
e				r^3				
r								
r^2								
r^3								
a								
b								
c							e	
d								

Gambar 3.7. Tabel perkalian simetri rotasi persegi

B. Tabel Perkalian



Untuk menghitung tabel perkalian dari simetri-simetri pada suatu bidang persegi atau persegi panjang, biasanya buku yang berbeda menggunakan lambang yang berbeda pula. Karena itu untuk mempertahankan konsistensi, digunakan bahan peraga dan memberi label pada setiap titik sudutnya, maupun pada setiap sudut bidang bingkai persegi tersebut. Dengan demikian, label yang tertera pada kartu akan bergerak apabila kartu diputar, tetapi label pada bidang bingkai tidak bergerak. Rotasi r yang dilakukan dua kali berturut-turut diperlihatkan pada Gambar 3.9. Demikian pula simetri lipat yang dilakukan berturut-turut melalui garis-garis diagonal, dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.9: Hasil kali simetri cd

Berdasarkan Gambar 3.8 dan Gambar 3.9, hasilkali simetri cd sama dengan hasilkali simetri r^2 . Dengan kata lain, simetri putar pada bidang persegi yang dilakukan dua kali berturut-turut akan menghasilkan posisi yang sama dengan simetri lipat d yang dilanjutkan dengan simetri lipat c ($cd = r^2$). Tabel perkalian untuk simetri-simetri pada bidang persegi panjang yang diperlihatkan pada Gambar 3.6 dapat dilihat selengkapnya pada Gambar 3.10 di bawah ini. Aturan sederhana untuk menentukan hasilkali dari dua simetri pada suatu bidang persegi dapat dinyatakan dalam dua pernyataan sebagai berikut:

- Hasilkali simetri yang sama akan menghasilkan posisi awal, yaitu e .
Jadi $r. r = a. a = b. b = c. c = d. d = e$.
- Hasilkali simetri yang berbeda yang bukan e , akan menghasilkan simetri yang ketiga dari kedua simetri tersebut.
Jadi $r_1. r_2 = r_3; r_2. r_3 = r_1; a. b = c; c. a = b$.

	e	r_1	r_2	r_3
e	e	r_1	r_2	r_3
r_1	r_1	e	r_3	r_2
r_2	r_2	r_3	e	r_1
r_3	r_3	r_2	r_1	e

Gambar 3.10. Tabel perkalian simetri persegi panjang

Untuk tabel perkalian ini, dapat dikatakan bahwa perkalian sebarang urutan dari dua simetri tidak akan mempengaruhi hasil akhir. Tabel ini memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

- Hasil perkalian dengan pangkat tertentu (yaitu dua rotasi melalui titik pusat permukaan bidang) akan menghasilkan dengan pangkat tertentu juga.
- Pangkat dua dari sebarang elemen $\{a, b, c, d\}$ akan menghasilkan posisi asal, e .

	e	r	r^2	r^3	a	b	c	d
e	e	r	r^2	r^3	a	b	c	d
r	r	r^2	r^3	e	d	c	a	b
r^2	r^2	r^3	e	r	b	a	d	c
r^3	r^3	e	r	r^2	c	d	b	a
a	a	c	b	d	e	r^2	r	r^3
b	b	d	a	c	r^2	e	r^3	r
c	c	b	d	a	r^3	r	e	r^2
d	d	a	c	b	r	r^3	r^2	e

Gambar 3.11. Tabel perkalian bidang persegi

- Perkalian sebarang dua elemen dari $\{a, b, c, d\}$ menghasilkan r dengan pangkat tertentu.
- Perkalian r pangkat tertentu dengan salah satu elemen dari $\{a, b, c, d\}$ akan menghasilkan salah satu dari elemen $\{a, b, c, d\}$.

Sifat yang terakhir ini sangat meyakinkan, tanpa melakukan suatu perhitungan hasil kali, jika kita berpikir sebagai berikut: Simetri $\{a, b, c, d\}$ akan mempertukarkan dua permukaan (yaitu permukaan atas dan bawah) dari kartu yang berbentuk persegi, sedangkan r pangkat tertentu, tidak mempertukarkan permukaan. Sebagai contoh, perkalian dua simetri yang mempertukarkan dua permukaan, tidak mengubah posisi kartu permukaan atas dan permukaan bawah. Dengan demikian perkalian tersebut sama dengan r berpangkat tertentu.

Perlu dicatat bahwa dalam Gambar 3.11, urutan perkalian simetri akan mengakibatkan perbedaan hasil kali. Misalnya $ra = d$, sedangkan $ar = c$. Pada akhir bagian ini akan dijelaskan sifat-sifat simetri pada suatu bentuk geometri (misalnya kartu berbentuk persegi atau berbentuk persegi panjang).

1. Hasil perkalian tiga simetri tidak bergantung pada bagaimana hubungan ketiga simetri tersebut. Perkalian dua simetri yang diikuti oleh satu simetri ketiga akan memberikan hasil yang sama dengan perkalian simetri pertama yang diikuti perkalian simetri

kedua dengan simetri ketiga. Hasil ini menunjukkan bahwa hukum asosiatif berlaku pada perkalian simetri. Misalkan s , t , dan u adalah tiga simetri sebarang, maka $s(tu) = (st)u$ untuk sebarang simetri.

2. Posisi asal e , yang dikomposisikan dengan sebarang simetri lainnya (dengan urutan sebarang) akan menghasilkan simetri itu sendiri. Dapat dinyatakan dengan notasi $eu = ue = u$ untuk sebarang simetri u .
3. Untuk setiap simetri, terdapat suatu invers sedemikian sehingga komposisi simetri tersebut dengan inversnya (dalam urutan sebarang) akan menghasilkan posisi asal, e . (Invers mengembalikan posisi akhir menjadi posisi asal: invers dari suatu rotasi melalui sumbu tertentu adalah rotasi pada sumbu dan besar sudut yang sama, tetapi dengan arah berlawanan). Misalkan invers dari simetri u adalah u^{-1} maka relasi kedua simetri tersebut adalah $uu^{-1} = u^{-1}u = e$.

C. Simetri dan Matriks

Sambil memperhatikan beberapa contoh, kita juga telah memperdalam pemahaman mengenai simetri dari suatu bangun geometris. Faktanya, kita mengembangkan model matematika untuk menjelaskan fenomena fisika – simetri benda fisik seperti bola atau balok, atau kartu. Sedemikian jauh, kita telah memutuskan hanya akan memperhatikan posisi akhir bagian-bagian objek, dan mengabaikan lintasan yang dilaluinya selama diputar atau dibalik, sampai menempati posisinya yang terakhir. Hal ini berarti bahwa simetri suatu bangun \mathbb{R} merupakan transformasi atau pemetaan dari \mathbb{R} ke \mathbb{R} . Secara implisit juga diasumsikan bahwa simetri-simetri tersebut bersifat utuh, artinya objek atau bangun yang dirotasikan atau diputar tidak mengalami perubahan bentuk dalam lintasannya menuju posisi akhir.

Kita dapat merumuskan ide bahwa suatu transformasi bersifat utuh atau tidak berubah karena transformasi tersebut adalah *jarak yang tetap* atau isometris. Transformasi $\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ disebut isometri jika untuk semua titik $a, b \in \mathbb{R}$, terdapat $d(\tau(a), \tau(b)) = d(a, b)$, dimana d adalah fungsi jarak Euclidean biasa.

Isometri $\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ yang didefinisikan pada subset \mathbb{R} dari \mathbb{R}^3 selalu mengarah pada isometri \mathbb{R}^3 , yaitu suatu vektor b dan isometri linier $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sedemikian sehingga $\tau(x) = b + T(x)$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$. Selain itu jika \mathbb{R} tidak terdapat di dalam suatu bidang datar berdimensi dua, maka perluasan tadi ditentukan secara unik oleh τ . (Perhatikan bahwa jika $0 \in \mathbb{R}$ dan $\tau(0) = 0$, maka haruslah $b = 0$ sehingga τ mencakup suatu isometri linier \mathbb{R}^3).

Selanjutnya, misalkan \mathbb{R} adalah persegi panjang maupun persegi, yang diandaikan terdapat pada bidang (x, y) , di dalam ruang berdimensi tiga. Andaikan suatu isometri $\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dapat dibuktikan bahwa τ pasti memetakan himpunan titik-titik sudut pada \mathbb{R} ke \mathbb{R} itu sendiri. (Titik sudut haruslah dipetakan pada titik sudut juga). Sekarang terdapat tepat satu titik di \mathbb{R} yang memiliki jarak yang sama dari keempat titik sudut tadi, yang disebut titik pusat bidang, yaitu perpotongan kedua diagonal \mathbb{R} . Misalkan titik pusat tersebut diberi nama C . Apakah yang dimaksud dengan $\tau(C)$? Karena τ adalah suatu isometri dan memetakan himpunan titik sudut ke titik sudut itu sendiri, maka $\tau(C)$ tetap berjarak sama dari keempat titik sudut, maka $\tau(C) = C$. Tanpa mengurangi sifat generalitasnya, dapat diasumsikan bahwa bidang tersebut terletak pada lokasi dengan titik pusat 0, yaitu titik pusat koordinat. Dengan demikian, sesuai dengan pernyataan sebelumnya, τ meliputi isometri linier dari \mathbb{R}^3 .

Penjelasan dan kesimpulan yang sama juga berlaku pada bangun-bangun geometri lainnya (misalnya poligon dalam bidang datar, atau polihedra dalam ruang). Untuk bangun-bangun geometri seperti itu, terdapat (setidak-tidaknya) satu titik yang dipetakan ke dirinya sendiri oleh setiap simetri dari bangun geometri tersebut. Jika titik tersebut ditempatkan pada

titik pusat koordinat, maka setiap simetri dari bangun geometri itu akan meliputi isometri linier \mathbb{R}^3 .

Uraian di atas dapat dinyatakan secara ringkas dalam bentuk proposisi sebagai berikut:

Proposisi 3.1. Misalkan \mathbb{R} menyatakan suatu poligon atau polihedra dalam ruang berdimensi tiga, dengan titik pusatnya terletak pada titik pusat koordinat. Maka setiap simetri \mathbb{R} adalah batas terhadap \mathbb{R} dari suatu isometri linier yang terletak di \mathbb{R}^3 . Karena simetri tersebut meliputi transformasi linier dalam ruang, maka transformasi tersebut dapat dinyatakan dengan matrik berukuran 3×3 . Jadi, untuk setiap simetri σ dari salah satu dari bangun geometri, maka terdapat suatu matriks A yang terbalikkan sedemikian sehingga untuk semua titik x pada bidang tersebut berlaku $\sigma(x) = Ax$.

Penting: Misalkan τ_1 dan τ_2 adalah dua simetri dari benda tiga dimensi, \mathbb{R} . Misalkan juga T_1 dan T_2 adalah transformasi linier (yang ditentukan secara unik) di \mathbb{R}^3 , dan meliputi τ_1 dan τ_2 . Dengan demikian komposisi transformasi linier T_1T_2 adalah perluasan linier yang unik dari komposisi simetri $\tau_1\tau_2$. Selain itu, jika A_1 dan A_2 adalah matriks-matriks yang menyatakan T_1 dan T_2 , maka hasilkali matriks A_1A_2 menyatakan T_1T_2 . Dengan sendirinya komposisi simetri dapat ditentukan dengan menghitung hasilkali matriks-matriks yang bersesuaian.

Kita dapat menyusun bidang-bidang (persegi maupun persegi panjang) yang terletak pada bidang datar (x,y) yang sisi-sisinya sejajar dengan sumbu-sumbu koordinat serta titik pusatnya berada pada titik pusat sumbu koordinat. Maka sumbu simetri tertentu akan berimpit dengan sumbu-sumbu koordinat. Sebagai contoh, arah persegi panjang dapat disesuaikan di dalam bidang datar tadi sehingga sumbu rotasi r_1 berimpit dengan sumbu x , sumbu rotasi r_2 berimpit dengan sumbu y , dan sumbu rotasi r_3 berimpit dengan sumbu z .

Rotasi r_1 tidak mengubah kedudukan koordinat x dari suatu titik pada bidang, tetapi mengubah tanda pada kedudukan koordinat y dan z . Matriks yang mengimplementasikan r_1 dapat dihitung dengan mengingat

kembali bagaimana matriks standar dari transformasi linier dapat ditentukan. Perhatikan basis standar \mathbb{R}^3 sebagai berikut:

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jika T adalah transformasi linier dari \mathbb{R}^3 , maka matriks M_T 3×3 dengan kolom-kolom $T(\hat{e}_1)$, $T(\hat{e}_2)$, dan $T(\hat{e}_3)$ memenuhi $M_T x = T(x)$ untuk semua $x \in \mathbb{R}^3$. Jadi, $r_1(\hat{e}_1) = \hat{e}_1$; $r_2(\hat{e}_2) = \hat{e}_2$; $r_3(\hat{e}_3) = \hat{e}_3$ dan matriks \mathbb{R}_1 yang mengimplementasikan rotasi r_1 adalah

$$\mathbb{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Demikian juga, r_2 dan r_3 dapat ditelusuri sehingga diperoleh matriks-matriks:

$$\mathbb{R}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ dan } \mathbb{R}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mengimplementasikan rotasi}$$

r_2 dan r_3 . Tentu saja matriks identitas $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ menyatakan posisi asal

(tidak terjadi perpindahan).

Mahasiswa dapat memahami bahwa kuadrat dari \mathbb{R}_i adalah E dan hasil kali dari sebarang \mathbb{R}_i akan menghasilkan \mathbb{R} yang ketiga. Jadi matriks-matriks \mathbb{R}_1 , \mathbb{R}_2 , \mathbb{R}_3 dan E memiliki tabel perkalian yang sama dengan tabel perkalian untuk simetri-simetri r_1 , r_2 , r_3 , dan e pada suatu persegi panjang.

Dengan cara yang sama, matriks dari simetri persegi dapat disusun sebagai berikut: Pilih orientasi persegi di dalam ruang sedemikian sehingga sumbu-sumbu simetri rotasi-rotasi a , b , dan r , berimpit dengan x -, y -, dan z -. Dengan demikian simetri a dan b dapat dinyatakan dengan matriks A dan B , yaitu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dan rotasi r dinyatakan

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dengan matriks

Selanjutnya, $\mathbb{R}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $\mathbb{R}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Simetri c dan d dinyatakan dengan matriks-matriks sebagai berikut:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ dan } D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Oleh karena itu, himpunan matriks-matriks $\{E, \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, A, B, C, D\}$ memiliki tabel perkalian yang sama dengan himpunan simetri-simetri $\{e, r, r^2, r^3, a, b, c, d\}$. Dapat ditunjukkan bahwa $CD = \mathbb{R}^2$ dan disimpulkan bahwa $cd = r^2$

D. Permutasi

Misalkan seseorang meletakkan suatu benda identik di atas meja dengan posisi tertentu seperti terlihat pada gambar di bawah ini.



Gambar 3.12. Simetri benda identik

Konfigurasi atau posisi objek pada gambar di atas, juga memiliki simetri, tanpa memperhitungkan bahan atau sifat dari objek itu, atau posisinya relatif satu sama lain, melainkan hanya memperhatikan bahwa objek-objek tersebut identik satu sama lain. Jika seseorang mempertukarkan letak masing-masing objek tersebut, maka tidak akan terlihat bahwa posisinya telah berubah dari posisi awal, karena ketiga objek adalah identik. Jadi, *simetri tidak sepenuhnya dipahami menurut konsep geometris*.

Bagaimanakah bentuk semua simetri dari konfigurasi ketiga objek tadi? Jika dua dari tiga objek dapat dipertukarkan dan objek ketiga tidak dipindahkan, maka terdapat tiga simetri. Jika objek pertama ditempatkan pada letak objek kedua, objek kedua ditempatkan pada letak objek ketiga, dan objek ketiga ditempatkan pada letak objek pertama, maka terdapat dua simetri seperti itu. Selanjutnya terdapat satu posisi dimana masing-masing objek tidak dipindahkan dari posisi aslinya. Jadi secara keseluruhan terdapat enam simetri berdasarkan masing-masing objek. Berdasarkan gambaran tersebut di atas, maka dapat dikatakan bahwa *simetri dari suatu konfigurasi objek-objek identik dinamakan permutasi*.

Bagaimanakah tabel perkalian untuk himpunan enam permutasi dari tiga objek identik? Sebelum membahas hal ini lebih lanjut, dapat diberikan gambaran kontekstual yang dapat mendekatkan konsep yang dipikirkan mahasiswa dengan definisi formal.

Andaikan terdapat tiga kotak tempat buku yang masing-masing dapat diisi dengan sebanyak-banyaknya satu buku. Dengan memperhatikan kotaknya saja, dapat digambarkan bahwa masing-masing simetri untuk setiap i , maka terdapat $1 \leq i \leq 3$ posisi akhir dari buku yang mula-mula posisinya berada pada kotak ke- i . Sebagai contoh, permutasi yang mempertukarkan buku dari kotak ke-1 dengan buku pada kotak ke-3 dan buku pada kotak kedua tetap berada di tempatnya, digambarkan dengan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Permutasi yang mempertukarkan buku dari kotak pertama ke posisi kedua, buku di kotak kedua ke kotak ketiga, dan buku di kotak ketiga ke kotak pertama, digambarkan dengan permutasi sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan notasi-notasi permutasi yang digunakan untuk menggambarkan pemindahan buku dari kotak yang satu ke kotak yang lainnya, maka terdapat enam permutasi untuk ketiga buku dan ketiga kotak yaitu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Perkalian permutasi ditentukan dengan menelusuri setiap objek pada saat dipindahkan menurut dua permutasi. Jika permutasi pertama memindahkan objek dari posisi i ke posisi j dan permutasi kedua memindahkan objek dari posisi j ke posisi k maka komposisi (perkalian) permutasi tersebut memindahkan objek dari posisi i ke posisi k . Contoh komposisi (perkalian) permutasi seperti itu dapat digambarkan sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Sebagaimana biasanya disepakati dalam suatu operasi perkalian atau komposisi permutasi bahwa elemen yang berada di sebelah kiri merupakan permutasi kedua, sedang elemen yang berada di sebelah kanan merupakan permutasi pertama. Mahasiswa harus memperhatikan bahwa urutan dalam perkalian permutasi, umumnya sangat berarti. Jika permutasi pertama dilakukan mendahului permutasi kedua maka komposisi permutasinya akan berbeda jika operasi permutasi kedua dilakukan lebih dulu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

tetapi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Untuk sebarang bilangan asli n , permutasi dari n objek-objek identik dapat dinotasikan dengan array bilangan dua-baris yang terdiri atas bilangan-bilangan 1 sampai n dalam masing-masing baris. Jika permutasi π memindahkan objek dari posisi i ke posisi j maka array dua baris yang bersesuaian dengan permutasi tersebut adalah dengan menempatkan posisi j di bawah baris yang menyatakan posisi i . Bilangan-bilangan pada baris pertama biasanya diurutkan dari yang terkecil sampai yang terbesar, tetapi hal ini tidak terlalu mutlak. Permutasi yang diperkalikan atau dikomposisikan berdasarkan aturan yang sama dengan permutasi tiga objek yang telah dipelajari sebelumnya. Perkalian permutasi untuk tujuh objek identik digambarkan sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Himpunan permutasi dari n objek identik memiliki sifat-sifat yang sama dengan himpunan simetri dari suatu objek geometris, yaitu:

1. Perkalian permutasi bersifat asosiatif.
2. Terdapat suatu permutasi identitas e , yaitu permutasi yang tidak memindahkan objek. Hasil kali permutasi e dengan sebarang permutasi lainnya, σ , dengan urutan sebarang, menghasilkan σ .
3. Untuk setiap permutasi σ , terdapat satu invers permutasi σ^{-1} , yang merupakan kebalikan dari σ . Untuk semua i, j , jika σ memindahkan objek dari posisi i ke posisi j , maka σ^{-1} memindahkan objek dari posisi j ke posisi i . Perkalian σ dengan σ^{-1} dalam sebarang urutan, menghasilkan e , yaitu permutasi identitas.

Pendekatan yang sedikit berbeda dapat dilakukan untuk lebih memperjelas sifat-sifat tersebut di atas. Mahasiswa sudah memahami bahwa suatu pemetaan $f: X \rightarrow Y$ dikatakan satu-satu (*injektif*) jika $f(x_1) \neq f(x_2)$ dengan $x_1 \neq x_2$ adalah elemen-elemen yang berbeda dari himpunan x . Pemetaan $f: X \rightarrow Y$ dikatakan onto (*surjektif*) jika range dari f adalah semua elemen di Y , yaitu

untuk setiap $y \in Y$, terdapat $x \in X$ sedemikian sehingga $f(x) = y$. Pemetaan $f: X \rightarrow Y$ dikatakan invertibel (terbalikkan) atau *bijektif* jika pemetaan tersebut *injektif* dan juga *surjektif*. Untuk setiap pemetaan *bijektif* $f: X \rightarrow Y$, terdapat pemetaan $f^{-1}: Y \rightarrow X$ yang disebut invers dari f dan yang memenuhi $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$ dan $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$. Notasi id_X melambangkan pemetaan identitas yaitu $\text{id}_X: x \mapsto x$ di X , demikian juga id_Y melambangkan pemetaan identitas yaitu $\text{id}_Y: y \mapsto y$ di Y . Untuk $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ adalah elemen unik di X sedemikian sehingga $f(x) = y$.

Misalkan terdapat suatu pemetaan dari himpunan X ke X . Pemetaan dari himpunan X ke himpunan itu sendiri dapat dikomposisikan, dan komposisi pemetaan bersifat asosiatif. Jika f dan g adalah pemetaan bijektif di X , maka komposisi $f \circ g$ juga bijektif (dengan invers $g^{-1} \circ f^{-1}$). Pemetaan bijektif dari X ke X yang dilambangkan dengan $\text{Sym}(X)$, yaitu singkatan untuk "simetri dari X ". $\text{Sym}(X)$ memenuhi sifat-sifat berikut ini:

1. Komposisi pemetaan menyatakan perkalian yang bersifat asosiatif pada himpunan $\text{Sym}(X)$.
2. Pemetaan identitas id_X adalah elemen identitas untuk perkalian tersebut, yaitu bahwa untuk sebarang $f \in \text{Sym}(X)$, komposisi id_X dengan f dengan sebarang urutan, akan menghasilkan f .
3. Inversi suatu pemetaan adalah invers dari perkalian ini: untuk sebarang $f \in \text{Sym}(X)$, maka komposisi dari f dan f^{-1} dengan urutan sebarang adalah id_X .

Permutasi dari n objek dapat diidentifikasi melalui suatu fungsi yang *bijektif* pada himpunan $\{1, 2, 3, \dots, n\}$; permutasi yang memindahkan suatu objek dari posisi i ke posisi j jika fungsi tersebut memetakan i ke j . Misalkan permutasi

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

di S_7 diidentifikasi melalui pemetaan bijektif dari $\{1, 2, \dots, 7\}$ yang memindahkan 1 ke 4, 2 ke 3, 3 ke 1, dan seterusnya. Perkalian permutasi sama dengan komposisi dari pemetaan bijektif. Jadi ketiga sifat-sifat permutasi yang

disebutkan di atas diturunkan secara langsung dari sifat-sifat yang bersesuaian dengan pemetaan bijektif.

Secara umum S_n melambangkan permutasi dari suatu himpunan dari n elemen, selain notasi $Sym(\{1, 2, 3, \dots, n\})$. Faktanya, S_n adalah $n! = n(n-1) \dots (2)(1)$. Peta dari 1 melalui suatu pemetaan yang terbalikkan (*bijektif*) dapat menghasilkan salah satu dari bilangan-bilangan 1, 2, 3, \dots n yaitu n kemungkinan; untuk setiap kemungkinan ini, terdapat $n - 1$ peta yang mungkin untuk 2, terdapat $n - 2$ peta yang mungkin untuk 3, demikian seterusnya. Jika n cukup besar, maka himpunan S_n dari permutasi menjadi sangat banyak. Misalnya permutasi yang terdiri atas 52 kartu adalah perkalian dari ke-52 bilangan asli pertama, yaitu

$$(52)(51)(50) \dots (3)(2)(1) =$$

80658175170943878571660636856403766975289505440883277824000000000000.

Dalam kasus ini tabel perkalian tidak dapat disusun untuk S_{52} maupun mendaftarkan semua elemen dari S_{52} . Lagi pula perbedaan S_{52} dengan S_5 misalnya, tidaklah terlalu mendasar meskipun S_5 hanya memiliki 120 elemen.

Terdapat notasi alternatif yang sangat bermanfaat untuk berbagai tujuan dalam matematika untuk menyatakan permutasi. Misalkan permutasi

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

di S_7 . Permutasi ini memindahkan 1 ke 4, 4 ke 2, 2 ke 3, dan 3 kembali ke 1; permutasi ini juga memindahkan 5 ke 6 dan 6 kembali ke 5, sedangkan 7 tidak berpindah dari posisinya. Dengan demikian dapat dituliskan $\pi = (1432)(56)$. Permutasi $(1\ 4\ 2\ 3)$ yang mempermutasikan beberapa bilangan secara siklis (1 ke 4, 4 ke 2, 2 ke 3, dan 3 ke 1) dan tidak memindahkan semua bilangan lainnya, dinamakan suatu *cycle*. Perhatikan bahwa $(1\ 4\ 2\ 3) = (4\ 2\ 3\ 1) = (2\ 3\ 1\ 4) = (3\ 1\ 4\ 2)$. Tidak terdapat acuan mengenai notasi elemen pertama dari *cycle*, tetapi orde setiap elemen *cycle* tidak berubah. Dua *cycle* dikatakan *disjoin* jika masing-masing elemen dalam *cycle* digeser oleh elemen yang lainnya. Pernyataan $\pi = (1\ 4\ 2\ 3)(5\ 6)$ digunakan untuk π yang merupakan perkalian dari *cycle* yang disjoin dan disebut *notasi cycle*.

Contoh 3.1. Hitunglah perkalian dari $[(1\ 3)(4\ 7\ 6\ 5)][(1\ 4\ 2\ 3)(5\ 6)]$

Jawab: Telah disebutkan sebelumnya bahwa dalam operasi perkalian permutasi, permutasi yang terletak di sebelah kanan menyatakan operasi yang harus dilakukan lebih dulu. Operasi pertama dari permutasi tersebut memindahkan 1 ke 4, sedang operasi pertama pada permutasi kedua memindahkan 4 ke 7, jadi perkalian permutasi tersebut menghasilkan permutasi yang memindahkan 1 ke 7. Demikian juga, permutasi pertama tidak menyebabkan perpindahan bilangan 7, permutasi kedua memindahkan 7 ke 6, sehingga perkalian permutasi tersebut menghasilkan permutasi yang memindahkan 7 ke 6. Selanjutnya, permutasi pertama memindahkan 4 ke 2, permutasi kedua tidak memindahkan bilangan 2, jadi perkalian permutasinya memindahkan 4 ke 2. Demikian selanjutnya, sehingga hasil perkalian permutasi adalah

$$[(1\ 3)(4\ 7\ 6\ 5)][(1\ 4\ 2\ 3)(5\ 6)] = (1\ 7\ 6\ 4\ 2)$$

Permutasi $\pi = (1\ 4\ 2\ 3)(5\ 6)$ adalah perkalian dari *cycle* $(1\ 4\ 2\ 3)$ dan $(5\ 6)$. *Cycle* yang disjoint bersifat komutatif. Hasil perkaliannya tidak bergantung pada orde di mana kedua *cycle* tersebut diperkalikan. Contoh dapat diberikan sebagai berikut:

$$[(1\ 4\ 2\ 3)][(5\ 6)] = [(5\ 6)(1\ 4\ 2\ 3)] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Suatu permutasi π dikatakan memiliki orde k jika pangkat ke- k dari π adalah identitas dan tidak terdapat pangkat yang lebih rendah di π yang merupakan identitas. *Cycle* k (yaitu *cycle* yang panjangnya k) memiliki orde k . *Cycle* $(2\ 4\ 3\ 5)$ memiliki orde 4. Hasil perkalian dari *cycle-cycle* disjoint memiliki orde yang sama dengan kelipatan persekutuan terkecil dari panjang kedua *cycle* tersebut. Jadi $(2\ 4\ 3\ 5)(1\ 6)(7\ 9\ 10)$ memiliki orde 12, yaitu kelipatan persekutuan terkecil dari 4, 2, 3.

Contoh 3.2. Misalkan dilakukan pengacakan sempurna terhadap kartu bridge yang terdiri atas $2n$ kartu. Setelah diacak, susunan kartu dipisahkan atas dua

bagian sedemikian sehingga masing-masing susunan kartu terdiri atas jumlah yang tepat sama. Jadi susunan pertama sebanyak n kartu ditempatkan di sebelah kiri dan susunan kartu yang lain juga sebanyak n kartu ditempatkan di sebelah kanan. Selanjutnya tumpukan kedua kartu tersebut digabungkan kembali di mana kartu pertama dari tumpukan pertama diselipkan dibawah kartu pertama dari tumpukan kedua. Demikian juga kartu kedua dari tumpukan pertama ditempatkan di bawah kartu kedua dari tumpukan kedua, demikian seterusnya. Jika susunan terdiri atas 10 lembar kartu, maka pengacakan sempurna untuk kesepuluh kartu dapat dinyatakan dengan permutasi sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 4 \ 8 \ 5 \ 10 \ 9 \ 7 \ 3 \ 6)$$

Dengan demikian susunan dari acakan sempurna yang terdiri atas 10 kartu adalah 10. Sedangkan acakan sempurna dari 8 kartu dapat dinyatakan dengan permutasi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 4 \ 8 \ 7 \ 5)(3 \ 6)$$

Jadi orde dari pengacakan sempurna untuk susunan yang terdiri atas 8 kartu adalah 6.

Berikut ini adalah ringkasan algoritma untuk menuliskan suatu permutasi $\pi \in S_n$ yang dinyatakan dengan notasi *cycle*. Misalkan a_1 adalah bilangan pertama ($1 \leq a_1 \leq n$) yang tidak dibatasi oleh π . Jika dituliskan:

$$\begin{aligned} a_2 &= p(a_1) \\ a_3 &= p(a_2) = p(p(a_1)) \\ a_4 &= p(a_3) = p(p(p(a_1))) \end{aligned}$$

dan seterusnya. Bilangan-bilangan a_1, a_2, \dots tidak dapat berbeda semua karena masing-masing terdapat di dalam $\{1, 2, \dots, n\}$. Hal ini menunjukkan bahwa terdapat suatu bilangan k sedemikian sehingga a_1, a_2, \dots, a_k semuanya berbeda, dan $p(a_k) = a_1$. Permutasi p mempermutasikan bilangan-bilangan dalam himpunan $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ dan bilangan-bilangan $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, serta

pembatasan p terhadap $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ merupakan cycle (a_1, a_2, \dots, a_k) . Jika p mempertahankan semua bilangan di dalam $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, maka $p = (a_1, a_2, \dots, a_k)$. Pada kasus lain, misalkan bilangan pertama $b_1 \notin \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ yang tidak ditetapkan oleh p . Jika dituliskan:

$$\begin{aligned} b_2 &= p(b_1) \\ b_3 &= p(b_2) = p(p(b_1)) \\ b_4 &= p(b_3) = p(p(p(b_1))) \end{aligned}$$

dan seterusnya. Dengan demikian, seperti sebelumnya, terdapat bilangan bulat l sedemikian sehingga setiap elemen $\{b_1, b_2, \dots, b_l\}$ adalah berbeda, dan $p(b_l) = b_1$. Sekarang, p mempermutasikan semua elemen dari irisan himpunan $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \cap \{b_1, b_2, \dots, b_l\}$ dengan elemen-elemen itu sendiri, demikian juga bilangan lainnya $\{1, 2, \dots, n\} \setminus (\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \cap \{b_1, b_2, \dots, b_l\})$ dipermutasikan oleh p dengan elemen-elemen itu sendiri. Pembatasan p terhadap $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \cap \{b_1, b_2, \dots, b_l\}$ adalah perkalian dari cycle-cycle disjoint yaitu $(a_1, a_2, \dots, a_k)(b_1, b_2, \dots, b_l)$.

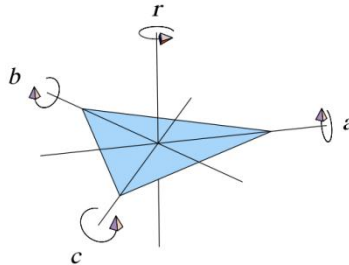
Teorema 3.1. Setiap permutasi dari suatu himpunan berhingga dapat dinyatakan secara unik sebagai suatu perkalian cycle-cycle yang disjoint.

Bukti: Kardinalitas dari suatu himpunan berhingga X dapat dibuktikan dengan induksi, bahwa setiap permutasi di dalam $\text{Sym}(X)$ dapat dinyatakan secara unik sebagai perkalian dari cycle-cycle yang disjoint. Jika $|X| = 1$, maka pernyataan ini tentu saja benar karena pada kasus ini satu-satunya permutasi di dalam X adalah e . Oleh karena itu hipotesis induksi menyatakan bahwa untuk semua himpunan berhingga dengan kardinalitas yang kurang dari $|X|$, pernyataan tersebut di atas juga berlaku. Misalkan p adalah permutasi X yang bukan identitas. Pilih $x_0 \in X$ sedemikian sehingga $p(x_0) \neq x_0$. Tuliskan $x_1 = p(x_0)$, $x_2 = p(x_1)$, dan seterusnya. Karena $|X|$ tak berhingga, maka terdapat k sedemikian sehingga x_0, x_1, \dots, x_k yang semuanya berbeda dan $p(x_k) = x_0$. Himpunan $X_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ dan $X_2 = X \setminus X_1$ masing-masing

merupakan invarian p , yaitu $p(X_i) = X_i$ untuk $i = 1, 2$, dan oleh karena itu p adalah hasil perkalian dari $p_1 = p|_{X_1}$ dan $p_2 = p|_{X_2}$. Tetapi diketahui bahwa p_1 adalah cycle $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$, dan berdasarkan hipotesis induksi p_2 adalah perkalian dari cycle-cycle yang disjoint. Karena itu dekomposisi cycle p juga merupakan perkalian dari cycle-cycle yang disjoint. Cycle yang memuat x_0 ditentukan secara unik dari x_0, x_1, \dots . Setiap pernyataan bahwa p adalah perkalian dari cycle-cycle yang disjoint pasti memuat cycle ini. Hasil perkalian dari cycle yang lainnya akan menghasilkan p_2 ; tetapi berdasarkan hipotesis induksi, dekomposisi p_2 sebagai hasil perkalian dari cycle-cycle disjoint adalah unik. Dengan demikian dekomposisi cycle p adalah unik. ■

Soal-Soal

- 3.1. Daftarlah semua simetri pada suatu bidang segitiga sama sisi (ada enam simetri), dan buatlah tabel perkaliannya (lihat Gambar 3.13).



Gambar 3.13. Simetri rotasi pada segitiga sama sisi

- 3.2. Perhatikanlah simetri-simetri pada bidang persegi.
- Tunjukkanlah bahwa sebarang pangkat positif dari r pasti salah satu dari $\{e, r, r^2, r^3\}$. Mulailah dengan menyelesaikan beberapa contoh. Cobalah sampai dengan r^{10} . Tunjukkanlah bahwa untuk sebarang bilangan asli k , maka $r^k = r^m$ dengan m adalah bilangan tak-negatif yang merupakan sisa hasilbagi k dengan 4.
 - Selidikilah bahwa r^3 adalah simetri yang sama dengan rotasi sebesar $\pi/2$ pada sumbu yang melalui titik pusat bidang permukaan dari suatu persegi, dalam arah putaran jarum jam, dengan melihat dari atas bidang persegi tersebut; yaitu bahwa r^3 memiliki arah yang berlawanan dengan r , sehingga $r^3 = r^1$. Definisikan $r^k = (r^1)^k$ untuk sebarang bilangan bulat k . Tunjukkan bahwa $r^k = r^{3k} = r^m$, dengan m adalah elemen unik (tunggal) dari $\{0, 1, 2, 3\}$ sedemikian sehingga $m+k$ dapat dibagi 4.
- 3.3. Soal latihan ini adalah contoh cara lain untuk membuat daftar simetri dari suatu bangun persegi yang memudahkan menghitung hasilkali simetri dengan cepat.
- Periksalah bahwa keempat simetri a, b, c , dan d yang mempertukarkan permukaan atas dan permukaan bawah dari kartu yang berbentuk

bangun datar adalah a , ra , r^2a , dan r^3a dalam urutan tertentu. Urutan manakah yang dimaksud? Daftar lengkap simetri tersebut adalah $\{e, r, r^2, r^3, a, ra, r^2a, r^3a\}$

- b) Tunjukkanlah bahwa $ar = r^1a = r^3a$
 - c) Simpulkanlah bahwa $ar^k = r^{-k}a$ untuk semua bilangan bulat k .
 - d) Tunjukan bahwa relasi ini cukup untuk menentukan hasilkali sebarang simetri.
- 3.4. Susunlah tabel perkalian dari matriks-matriks $E, \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, A, B, C, D$, dan tunjukkan bahwa hasil perkalian matriks-matriks tersebut sama dengan tabel perkalian simetri persegi.
 - 3.5. Tentukanlah matriks-matriks yang mengimplementasikan keenam simetri dari segitiga sama sisi. Untuk keseragaman notasi dan koordinat, anggap titik-titik sudut segitiga berada pada koordinat $(1, 0, 0)$, $(-1/2, \sqrt{3}/2, 0)$, dan $(-1/2, -\sqrt{3}/2, 0)$. Bila perlu, pelajari kembali Aljabar Linier tentang cara menentukan matriks dari simetri; cara menentukan matriks dari suatu transformasi linier). Tunjukkan bahwa perkalian matriks-matriks tersebut sama dengan tabel perkalian simetri pada segitiga sama sisi.
 - 3.6. Suatu segmen garis $[a_1, a_2]$ dalam \mathbb{R}^3 didefinisikan sebagai himpunan $[a_1, a_2] = \{sa_1 + (1-s)a_2; 0 \leq s \leq 1\}$. Tunjukkan bahwa jika $T(x) = Ax + b$ merupakan transformasi geser dari \mathbb{R}^3 , maka $T([a_1, a_2]) = [T(a_1), T(a_2)]$.
 - 3.7. Buat dan lengkapilah tabel perkalian untuk himpunan permutasi dari tiga objek.
 - 3.8. Selesaikanlah dekomposisi dalam cycle-cycle disjoint berikut ini:
 - a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
 - b. $(12)(12345)$
 - c. $(14)(12345)$
 - d. $(12)(2345)$
 - e. $(13)(2345)$
 - f. $(12)(23)(34)$

g. $(12)(13)(14)$

h. $(13)(1234)(13)$

- 3.9. Jelaskan bagaimana menentukan invers dari suatu permutasi yang dinyatakan dengan notasi dua baris. Tentukanlah invers dari

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- 3.10. Jelaskan mengapa suatu cycle yang panjangnya k , memiliki orde k . Jelaskan mengapa orde dari suatu hasil perkalian cycle-cycle yang disjoint merupakan kelipatan persekutuan terkecil dari panjang cycle-cycle tersebut. Berikan contoh.
- 3.11. Carilah invers dalam notasi dua baris, dari susunan acak sempurna untuk kartu-kartu yang berjumlah 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16. Tentukanlah suatu aturan yang menggambarkan invers dari susunan acak sempurna secara umum.

Dua soal berikut ini memberikan rincian penting untuk membuktikan eksistensi dan keunikan dekomposisi cycle-cycle disjoint dari suatu permutasi himpunan berhingga.

- 3.12. Misalkan X adalah gabungan dari himpunan X_1 dan X_2 yang disjoint, yaitu $X = X_1 \dot{\cup} X_2$ dan $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Misalkan X_1 dan X_2 adalah invarian untuk permutasi $p \in \text{Sym}(X)$. Tusliskan p_i untuk permutasi $p|_{X_i} \in \text{Sym}(X_i)$ untuk $i = 1, 2$, dan juga p_i untuk permutasi dari X yaitu p_i di X_i dan identitas pada $X \setminus X_i$. Tunjukkan bahwa $p = p_1 p_2 = p_2 p_1$.
- 3.13. Misalkan p adalah permutasi yang bukan identitas di dalam $\text{Sym}(X)$, dengan X adalah suatu himpunan berhingga. Anggap x_0 adalah suatu anggota dari X yang tidak dipertahankan oleh p . Nyatakan $x_1 = p(x_0)$, $x_2 = p(x_1)$, dan seterusnya. Tunjukkan bahwa terdapat suatu bilangan k sedemikian sehingga x_0, x_1, \dots, x_k semuanya berbeda dan $p(x_k) = x_0$. Catatan: Misalkan k adalah suatu bilangan bulat terkecil sehingga $p(x_k) = x_{k+1} \in \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$. Tunjukkan bahwa

$p(x_k) = x_0$. Untuk itu, buktikan bahwa asumsi $p(x_k) = x_l$ untuk beberapa $l, 1 \leq l \leq k$ mengakibatkan kontradiksi.

- 3.14. Buktikan bahwa $X_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ dan $X_2 = X \setminus X_1$ kedua-duanya invarian p .

BAB IV

TEORI GRUP

A. Pendahuluan

Suatu Operasi atau perkalian pada suatu himpunan G merupakan fungsi dari $G \times G$ ke G . Suatu operasi yang menentukan suatu aturan untuk menggabungkan dua elemen G untuk menghasilkan elemen G lainnya. Sebagai contoh, operasi penjumlahan bilangan asli yang dinyatakan sebagai pasangan (a, b) yaitu $a + b$. merupakan grup karena $a + b$ menghasilkan bilangan asli. Contoh lain adalah himpunan semua fungsi bernilai real dari variabel yang bernilai real, yaitu semua fungsi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. (Fungsi) komposisi merupakan operasi pada himpunan tersebut yang memiliki nilai pada pasangan (f, g) adalah $f \circ g$.

Contoh-contoh yang telah disebutkan di atas merupakan operasi yang memenuhi tiga sifat berikut:

- Hasil operasi bersifat assosiatif.
- Terdapat elemen identitas e yang memiliki sifat bahwa operasi e dengan sebarang elemen lainnya, akan tetap menghasilkan elemen tersebut.
- Untuk setiap elemen a terdapat elemen invers a^{-1} sedemikian sehingga memenuhi $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Contoh-contoh yang telah dijelaskan di atas adalah sebagai berikut:

- Himpunan simetri dari suatu bentuk geometri dengan operasi komposisi simetri.
- Himpunan permutasi dari suatu himpunan berhingga, dengan operasi komposisi permutasi.
- Himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan.
- \mathbb{Z}_n (bilangan bulat \mathbb{Z} modulo n) dengan operasi penjumlahan. (Proposisi 4.1 menjelaskan bahwa (a), (b), dan (c) menunjukkan bahwa \mathbb{Z}_n bersifat assosiatif terhadap penjumlahan, serta memiliki satu elemen

identitas yaitu $[0]$, dan bahwa semua elemen \mathbb{Z}_n memiliki invers penjumlahan.

- $K[x]$ dengan operasi penjumlahan. Proposisi 4.2 menunjukkan pada bagian (a), (b), dan (c) bahwa $K[x]$ bersifat assosiatif terhadap operasi penjumlahan dan memiliki satu elemen identitas yaitu 0 , dan bahwa semua elemen $K[x]$ memiliki invers penjumlahan.

Proposisi 4.1. Jika \mathbb{Z}_n adalah bilangan bulat modulo n , maka:

- Operasi penjumlahan pada \mathbb{Z}_n bersifat komutatif dan assosiatif; untuk semua $[a], [b], [c] \in \mathbb{Z}_n$,

$$[a] + [b] = [b] + [a]$$
 dan

$$([a] + [b]) + [c] = [a] + ([b] + [c])$$
- $[0]$ merupakan elemen identitas untuk penjumlahan; untuk semua $[a] \in \mathbb{Z}_n$

$$[0] + [a] = [a]$$
- Setiap elemen $[a]$ pada \mathbb{Z}_n memiliki invers jumlah $[-a]$, yang memenuhi hubungan $[a] + [-a] = [0]$.
- Operasi kali pada \mathbb{Z}_n bersifat komutatif dan assosiatif. Untuk semua $[a], [b], [c] \in \mathbb{Z}_n$, berlaku

$$[a][b] = [b][a]$$
 dan

$$([a][b])[c] = [a]([b][c])$$
- $[1]$ adalah elemen identitas untuk operasi perkalian. Untuk semua $[a] \in \mathbb{Z}_n$ berlaku $[1][a] = [a]$
- Untuk semua $[a], [b], [c] \in \mathbb{Z}_n$, berlaku hukum distributif.

$$[a]([b] + [c]) = [a][b] + [a][c]$$

Proposisi 4.2. Misalkan $K[x]$ adalah himpunan semua polinomial x dengan koefisien K , maka:

- (a) Operasi penjumlahan $K[x]$ bersifat komutatif dan asosiatif. Untuk semua $f, g, h \in K[x]$,
- $$f + g = g + f$$
- dan
- $$f + (g + h) = (f + g) + h$$
- (b) 0 adalah elemen identitas penjumlahan. Untuk semua $f \in K[x]$, berlaku
- $$0 + f = f.$$
- (c) Setiap $f \in K[x]$ memiliki invers jumlah yaitu $-f$ sehingga $f + (-f) = 0$.
- (d) Operasi kali pada $K[x]$ bersifat komutatif dan asosiatif. Untuk semua $f, g, h \in K[x]$, berlaku $fg = gf$ dan $f(gh) = (fg)h$
- (e) 1 adalah elemen identitas untuk operasi kali. Untuk semua $f \in K[x]$ berlaku hubungan $1f = f$.
- (f) Untuk semua $f, g, h \in K[x]$, berlaku hukum distributif.
- $$f(g + h) = fg + fh.$$

Dalam matematika, grup adalah suatu himpunan, beserta satu *operasi biner*, seperti perkalian atau penjumlahan, yang memenuhi beberapa aksioma yang diuraikan di bawah ini. Misalnya, himpunan bilangan bulat adalah suatu grup terhadap operasi penjumlahan. Cabang matematika yang mempelajari grup disebut *Teori Grup*. Asal-usul teori grup berawal dari karya Evariste Galois (1830), yang berkaitan dengan masalah persamaan aljabar yang diselesaikan cara menentukan akar-akar persamaan tersebut. Sebelum Galois, grup lebih banyak dipelajari secara kongkrit dalam bentuk permutasi; beberapa aspek teori grup abelian dikenal dalam teori bentuk-bentuk kuadrat. Banyak sekali obyek yang dipelajari dalam matematika ternyata berupa grup. Hal ini mencakup sistem bilangan, seperti bilangan bulat, bilangan rasional, bilangan nyata, dan bilangan kompleks terhadap penjumlahan, atau bilangan rasional, bilangan nyata, dan bilangan kompleks yang tak-nol, masing-masing terhadap perkalian.

A.1. Operasi Biner

Operasi Biner pada himpunan tak kosong A adalah $f: A \times A \rightarrow A$, $(a, b) \in A \times A \rightarrow f(a, b) \in A$.

A.2. Definisi Grup

Pengertian mendasar dari himpunan, pemetaan, operasi biner, dan relasi biner telah dipelajari pada bagian-bagian sebelumnya. Pengertian-pengertian ini sangat penting untuk memahami suatu sistem aljabar. Struktur aljabar, atau sistim aljabar, adalah suatu himpunan tak kosong yang di dalamnya terdapat setidaknya-tidaknya satu relasi ekuivalensi (kesamaan) dan satu atau lebih operasi biner yang terdefinisi. Struktur yang paling sederhana dapat terjadi jika di dalam himpunan tersebut terdapat hanya satu operasi biner, seperti pada kasus sistim aljabar yang dikenal sebagai *grup*.

Grup adalah suatu himpunan (tak kosong) G dengan suatu operasi, yang memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

- (a) Operasi tersebut bersifat asosiatif. Untuk semua $a, b, c \in G$, berlaku hubungan $(ab)c = a(bc)$.
- (b) Terdapat satu elemen identitas e di G sedemikian sehingga untuk setiap $a \in G$ berlaku $ea = ae = a$.
- (c) Untuk setiap $a \in G$ terdapat elemen $a^{-1} \in G$ sehingga $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Definisi 4.1. Grup. Gilbert dan Gilbert mendefinisikan Grup sebagai berikut: "G adalah himpunan yang tidak kosong dan operasi biner $*$ didefinisikan untuk elemen-elemen himpunan G ". $(G, *)$ adalah suatu grup apabila memenuhi aksioma-aksioma berikut, yaitu :

1. Operasi $*$ pada G bersifat tertutup, berarti $\forall x, y \in G$, berlaku $x * y \in G$
2. Operasi $*$ pada G bersifat asosiatif. Berarti untuk semua $x, y, z \in G$ berlaku $x * (y * z) = (x * y) * z$
3. G memuat elemen identitas. Ada $e \in G$ sedemikian sehingga $x * e = e * x = x$ untuk semua $x \in G$.

4. Setiap elemen di \mathbb{G} memiliki invers di \mathbb{G} . Untuk setiap $x \in \mathbb{G}$, ada $y \in \mathbb{G}$ sedemikian sehingga $x * y = y * x = e$

Kata-kata "terhadap operasi $*$ " harus diperhatikan. Misalkan himpunan semua bilangan bulat \mathbb{Z} , merupakan grup terhadap operasi $+$ tetapi bukan merupakan grup terhadap operasi \times karena \mathbb{Z} tidak memuat invers selain ± 1 sedemikian sehingga $a * b = b * a = e$. Demikian juga, $G = \{1, -1\}$ adalah grup terhadap operasi \times tetapi bukan grup terhadap operasi $+$. Jadi operasi biner $*$ yang mengakibatkan suatu operasi memenuhi syarat-syarat grup, tidak harus merupakan operasi $+$ atau \times tetapi dapat juga merupakan kombinasi dari operasi-operasi tertentu.

A.3. Grup Abelian

Definisi 4.2. Grup Abelian. Misalkan G adalah grup dengan operasi $*$, maka $(G, *)$ disebut grup komutatif atau grup abelian, jika operasi $*$ bersifat komutatif, yaitu $x * y = y * x$ untuk semua $x, y \in G$.

Contoh 4.1. Diberikan " \mathbb{Z} " yaitu himpunan bilangan bulat, dan " $+$ " sebagai operasi penjumlahan standar. Apakah $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup? Jika ya, apakah $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup abelian?

Jawab:

1. Memeriksa apakah operasi $+$ pada \mathbb{Z} bersifat tertutup ?

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$ sehingga $x + y \in \mathbb{Z}$

Jadi operasi $+$ pada \mathbb{Z} bersifat tertutup

2. Memeriksa apakah operasi $+$ pada \mathbb{Z} bersifat asosiatif?

Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{Z}$ sehingga $x + (y + z) = (x + y) + z$

Jadi operasi $+$ pada \mathbb{Z} bersifat asosiatif.

3. Memeriksa apakah \mathbb{Z} memuat elemen identitas?

$\exists e = 0 \in \mathbb{Z}$, sedemikian sehingga untuk sebarang $x \in \mathbb{Z}$ berlaku $x + 0 = 0 + x = x$

Jadi \mathbb{Z} mempunyai elemen identitas.

4. Memeriksa apakah setiap elemen di \mathbb{Z} memuat invers di dalam \mathbb{Z} ?

Ambil sebarang $x \in \mathbb{Z}$, $\exists y = -x \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $x + (-x) = 0 = (-x) + x$.

Karena empat aksioma dalam Definisi 4.1. terpenuhi maka $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup. Sekarang, ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$, sehingga $x + y = y + x$. Jadi operasi $+$ bersifat komutatif, sehingga $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup abelian.

Contoh 4.2. Apakah himpunan bilangan real positif, \mathbb{R}^+ dengan operasi perkalian \times , merupakan grup? Untuk operasi penjumlahan standar $+$ apakah merupakan grup?

Jawab :

1. Memeriksa apakah operasi \times pada \mathbb{R}^+ bersifat tertutup ?

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{R}^+$ sehingga $a \times b \in \mathbb{R}^+$

Jadi operasi \times pada \mathbb{R}^+ bersifat tertutup

2. Memeriksa apakah operasi \times pada \mathbb{R}^+ bersifat asosiatif?

Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ sehingga $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

Jadi operasi \times pada \mathbb{R}^+ bersifat asosiatif.

3. Memeriksa apakah \mathbb{R}^+ memuat elemen identitas ?

$\exists e = 1 \in \mathbb{R}^+$, sehingga untuk sebarang $a \in \mathbb{R}^+$ berlaku $a \times 1 = 1 \times a = a$.

Jadi \mathbb{R}^+ mempunyai elemen identitas.

4. Memeriksa apakah setiap elemen di \mathbb{R}^+ memiliki invers di dalam \mathbb{R}^+ ?

Ambil sebarang $a \in \mathbb{R}^+$, $b = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}^+$ sehingga $a \times \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \times a$.

Oleh karena empat aksioma terpenuhi, maka (\mathbb{R}^+, \times) adalah grup. Sekarang, ambil sebarang $a, b \in \mathbb{R}^+$, sehingga $a \times b = b \times a$. Jadi operasi \times bersifat komutatif, sehingga (\mathbb{R}^+, \times) merupakan grup abelian. Untuk operasi penjumlahan $+$, pada \mathbb{R}^+ , $(\mathbb{R}^+, +)$ bukanlah suatu grup, karena tidak ada $e \in \mathbb{R}^+$ sedemikian sehingga untuk sebarang $a \in \mathbb{R}^+$ berlaku $a + e = e + a = a$. Jadi \mathbb{R}^+ tidak mempunyai elemen identitas terhadap operasi penjumlahan. Karena \mathbb{R}^+ tidak mempunyai elemen identitas terhadap operasi penjumlahan, disimpulkan setiap elemen di \mathbb{R}^+ tidak mempunyai invers.

Catatan :

Apabila suatu himpunan dengan operasi $$ bukan grup, maka harus ditunjukkan bahwa setidaknya-sedikitnya satu dari empat aksioma grup tidak terpenuhi.*

Contoh 4.3.

Diberikan operasi biner $*$ pada \mathbb{Z} . Tentukan apakah \mathbb{Z} merupakan grup terhadap operasi $*$, jika operasi $*$ didefinisikan sebagai $x * y = x + y + 1$. Apakah \mathbb{Z} dengan operasi $*$ grup abelian?

Jawab:

1. Memeriksa apakah operasi $*$ pada \mathbb{Z} bersifat tertutup ?

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$ sehingga $x * y = x + y + 1 \in \mathbb{Z}$

Jadi operasi $*$ pada \mathbb{Z} bersifat tertutup

2. Memeriksa apakah operasi $*$ pada \mathbb{Z} bersifat asosiatif?

Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{Z}$ sehingga

$$x * (y * z) = x + (y * z) + 1 = x + (y + z + 1) + 1 = x + y + z + 2$$

$$(x * y) * z = (x * y) + z + 1 = (x + y + 1) + z + 1 = x + y + z + 2$$

$$\text{Disimpulkan } x * (y * z) = x + y + z + 2 = (x * y) * z$$

Jadi operasi $*$ pada \mathbb{Z} bersifat asosiatif.

3. Memeriksa apakah \mathbb{Z} memuat elemen identitas ?

$\exists e = -1 \in \mathbb{Z}$, sehingga untuk sebarang $x \in \mathbb{Z}$ berlaku $x + (-1) + 1 = 0 = (-1) + x + 1 = x$. Jadi \mathbb{Z} mempunyai elemen identitas.

Catatan :

Untuk mencari elemen identitas, kita memasukkan pada definisi sesuai dengan operasi yang diberikan. Pada contoh ini misalkan elemen identitasnya adalah e sehingga

$$x * e = x$$

$$e * x = x$$

$$x + e + 1 = x$$

$$e + x + 1 = x$$

$$e = x - x - 1 = -1$$

$$e = x - x - 1 = -1$$

Sehingga diperoleh $e = -1$

4. Memeriksa apakah setiap elemen di \mathbb{Z} memiliki invers di dalam \mathbb{Z} ?

Ambil sebarang $x \in \mathbb{Z}$, $\exists y = -x - 2 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga

$$x + y = x + (-x - 2) + 1 = x - x - 2 + 1 = -1$$

$$y + x = (-x - 2) + x + 1 = -x - 2 + x + 1 = -1$$

Jadi setiap elemen di \mathbb{Z} memiliki invers di \mathbb{Z}

Oleh karena empat aksioma terpenuhi, maka $(\mathbb{Z}, *)$ merupakan grup. Sekarang perhatikan bahwa untuk sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku

$$x * y = x + y + 1 = y + x + 1 = y * x$$

Jadi $(\mathbb{Z}, *)$ merupakan grup abelian.

Contoh 4.4. Diberikan operasi biner $*$ pada \mathbb{Z} . Apakah \mathbb{Z} merupakan grup terhadap operasi $*$, jika operasi $*$ didefinisikan sebagai $x * y = x + xy$.

Jawab: Karena $\exists x = 4, y = 2$ sedemikian sehingga

$$x * y = 4 + 4 \cdot 2 = 4 + 8 = 12$$

$$y * x = 2 + 2 \cdot 4 = 2 + 8 = 10$$

sehingga $x * y = 12 \neq 10 = y * x$

Disimpulkan operasi $*$ tidak bersifat asosiatif, sehingga disimpulkan $(\mathbb{Z}, *)$ bukan grup.

Contoh 4.5. Perkalian Matrik 2 x 2

Didefinisikan $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in Q, ad - bc \neq 0 \right\}$ dengan operasi $*$ adalah

perkalian matriks. Selidiki apakah G dengan operasi $*$ merupakan grup? Jika ya, selidiki apakah $(G, *)$ merupakan grup abelian.

Jawab:

1. Memeriksa apakah operasi $*$ pada G bersifat tertutup ?

Ambil sebarang $a, b, c, d, e, f, g, h \in Q$ dengan $ad - bc \neq 0$ dan $eh - fg \neq 0$ sehingga

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \in G.$$

Jadi operasi $*$ pada \mathbb{Z} bersifat tertutup.

2. Memeriksa apakah operasi $*$ pada G bersifat asosiatif?

Ambil sebarang $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l \in Q$ dengan $ad - bc \neq 0, eh - fg \neq 0, il - jk \neq 0$

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (ae + bg)i + (af + bh)k & (ae + bg)j + (af + bh)l \\ (ce + dg)i + (cf + dh)k & (ce + dg)j + (cf + dh)l \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Perhatikan juga bahwa

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} ei + fk & ej + fl \\ gi + hk & gj + hl \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a(ei + fk) + b(gi + hk) & a(ej + fl) + b(gj + hl) \\ c(ei + fk) + d(gi + hk) & c(ej + fl) + d(gj + hl) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} aei + afk + bgi + bhk & aej + afl + bgj + bhl \\ cei + cfk + dgi + dhk & cej + cfl + dgj + dhl \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (ae + bg)i + (af + bh)k & (ae + bg)j + (af + bh)l \\ (ce + dg)i + (cf + dh)k & (ce + dg)j + (cf + dh)l \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Jadi disimpulkan $(G, *)$ bersifat asosiatif.

3. Memeriksa apakah G memiliki elemen identitas ?

$\exists e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, sedemikian sehingga untuk sebarang matriks

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ berlaku

$$e * M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$M * e = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{Jadi } e * M = M * e = M$$

Disimpulkan G memiliki elemen identitas.

4. Ambil sebarang matriks $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, maka

$$\text{ada } M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} \text{ sehingga}$$

$$M * M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} * M = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jadi setiap elemen di G memiliki invers di G .

Karena empat aksioma di atas telah terpenuhi, maka $(G, *)$,

$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in Q, ad - bc \neq 0 \right\}$ dengan operasi $*$ yang didefinisikan

sebagai perkalian matriks, adalah grup.

Karena $M = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ dan $N = \begin{pmatrix} 2 & -20 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ sehingga

$$M * N = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -20 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$N * M = \begin{pmatrix} 2 & -20 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -20 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Tetapi $M * N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -20 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = N * M$. Jadi $(Z, *)$ bukan grup abelian.

Contoh 4.6. Tabel Cayley

Misalkan $G = \{e, a, b, c\}$ dengan perkalian seperti didefinisikan pada tabel berikut.

x	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

Dari tabel, kita lihat bahwa :

1. G tertutup pada perkalian yang didefinisikan
2. Operasi x pada G bersifat Asosiatif.
3. e adalah elemen identitas.
4. Setiap unsur di G memiliki invers.

Karena memenuhi empat aksioma grup, maka (G, x) merupakan grup.

Bukti operasi x bersifat assosiatif dapat ditunjukkan melalui tabel-tabel perkalian di bawah ini.

x	e	a	b	c
e x e	e	a	b	c
e x a	a	b	c	e
e x b	b	c	e	a
e x c	c	e	a	b

x	e x e	e x a	e x b	e x c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

x	e	a	b	c
a x e	a	b	c	e
a x a	b	c	e	a
a x b	c	e	a	b
a x c	e	a	b	c

x	a x e	a x a	a x b	a x c
e	a	b	c	e
a	b	c	e	a
b	c	e	a	b
c	e	a	b	c

x	e	a	b	c
b x e	b	c	e	a
b x a	c	e	a	b
b x b	e	a	b	c
b x c	a	b	c	e

x	b x e	b x a	b x b	b x c
e	b	c	e	a
a	c	e	a	b
b	e	a	b	c
c	a	b	c	e

x	e	a	b	c
c x e	c	e	a	b
c x a	e	a	b	c
c x b	a	b	c	e
c x c	b	c	e	a

x	c x e	c x a	c x b	c x c
e	c	e	a	b
a	e	a	b	c
b	a	b	c	e
c	b	c	e	a

Contoh 4.7. Tabel Cayley

Tabel di bawah ini menyatakan operasi biner $*$ pada himpunan $S = \{A, B, C, D\}$.

*	A	B	C	D
A	B	C	A	B
B	C	D	B	A
C	A	B	C	D
D	A	B	D	D

Dari tabel pada Contoh 4.7, dapat dilihat bahwa :

1. S tertutup pada operasi $*$. Untuk semua $a, b \in S$, $a*b \in S$.
2. C merupakan elemen identitas. Karena $A * C = A = C * A$, $B * C = B = C * B$, $C * C = C$, $D * C = D = C * D$.
3. Karena ada $D \in S$, dan tidak ada nilai a yang dapat memenuhi $Da = C$, disimpulkan D tidak mempunyai invers. Jadi, S dengan operasi $*$ bukan grup.

Definisi 4.3. Grup Berhingga, Grup Tak Hingga, Orde Grup.

Jika suatu grup G memiliki elemen yang berhingga banyaknya, maka G adalah grup berhingga, atau grup orde berhingga. Banyaknya elemen G dinamakan orde dari G dan dilambangkan dengan $|G|$ atau $O(G)$. Jika G memiliki elemen yang tak hingga banyaknya, maka G disebut grup tak hingga.

Grup G yang didefinisikan dengan $G = \{e, r, r^2, s, g, d\}$ memiliki orde $O(G) = 6$ jadi G adalah grup berhingga. Sedangkan grup \mathbb{Z} yang memiliki orde $O(\mathbb{Z}) = n$ adalah grup tak hingga.

A.4. Subgrup

Definisi 4.4. Subgrup. Misalkan $(G, *)$ adalah suatu grup, maka H disebut subgrup dari G jika:

- H kompleks dari G , yaitu $H \subseteq G$ dan $H \neq \emptyset$
- $(H, *)$ merupakan suatu grup.

Catatan: Karena $H \subseteq G$ dan pada G berlaku sifat asosiatif, maka kita dapat mengabaikan syarat asosiatif pada H .

Jenis-jenis subgrup:

1. Subgrup trivial. $(H, *)$ disebut dengan subgrup trivial dari $(G, *)$ jika
 - a) $H = \{e\}$ atau himpunan yang beranggotakan elemen identitas, atau
 - b) $H = G$

Contoh 4.8. Himpunan bilangan bulat \mathbb{Z} adalah grup terhadap operasi penjumlahan atau ditulis $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup. $(\{0\}, +)$ dan $(H = \mathbb{Z}, +)$ adalah subgrup trivial dari $(\mathbb{Z}, +)$.

2. Subgrup nontrivial

Yang termasuk subgrup nontrivial adalah semua subgrup selain subgrup trivial.

Contoh 4.9. Himpunan semua bilangan bulat \mathbb{Z} adalah suatu grup terhadap operasi penjumlahan, himpunan E adalah himpunan bilangan bulat yang genap. E adalah subgrup nontrivial dari \mathbb{Z} .

Jawab: Diberikan $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2m, m \in \mathbb{Z}\}$. Akan ditunjukkan bahwa E adalah kompleks dari \mathbb{Z}

- E adalah subset dari \mathbb{Z} yaitu " $x \in E \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$ ", jelas dari definisi
- $0 \in E$ karena $0 = 2 \cdot 0 \in E$

\Jadi, E adalah kompleks dari \mathbb{Z}

Akan ditunjukkan bahwa E adalah grup terhadap operasi biner yang sama yang didefinisikan pada grup \mathbb{Z} yaitu operasi penjumlahan.

- Tertutup
" $x = 2m, y = 2n \in E \Rightarrow x + y = 2m + 2n = 2(m + n) \in E$ ", $m, n \in \mathbb{Z}$
- Eksistensi elemen identitas
 $0 \in E$, " $x = 2m \in E \Rightarrow x + 0 = 2m + 0 = 0 + 2m = 0 + x = x$ ", $m \in \mathbb{Z}$
- Eksistensi elemen invers
" $x = 2m \in E, -x = 2(-m) \in E$ "
 $x + (-x) = 2m + 2(-m) = 2(m + (-m)) = 2 \cdot 0 = 0$, $m \in \mathbb{Z}$
 $(-x) + x = 2(-m) + 2m = 2((-m) + m) = 2 \cdot 0 = 0$

\Jadi, $(E, +)$ adalah subgrup dari $(\mathbb{Z}, +)$.

- $E \neq \mathbb{Z}$ karena $7 \in \mathbb{Z}$ tetapi $7 \notin E$
- $E \neq \emptyset$ karena $4 \in E$ tetapi $4 \notin \{0\}$

Karena $E \neq \mathbb{Z}$ dan $E \neq \emptyset$ maka $(E, +)$ subgrup nontrivial dari $(\mathbb{Z}, +)$.

Contoh 4.10. $\mathbb{C} - \{0\}$, Himpunan semua bilangan kompleks tak nol, adalah suatu grup terhadap perkalian, dan $G = \{1, -1, i, -i\}$ adalah suatu subgrup nontrivial dari grup tersebut.

Jawab: Akan ditunjukkan G adalah kompleks dari $\mathbb{C} - \{0\}$.

- G adalah subset dari $\mathbb{C} - \{0\}$ karena " $x \in G \Rightarrow x \in \mathbb{C} - \{0\}$ "
- $G \neq \emptyset$ karena $1 \in G$

\Jadi, G adalah kompleks dari $\mathbb{C} - \{0\}$

Sekarang, akan ditunjukkan bahwa G adalah grup terhadap operasi yang sama yang didefinisikan pada $\mathbb{C} - \{0\}$ yaitu operasi perkalian. Perhatikan Tabel Cayley berikut ini:

x	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

Tabel Cayley di atas menunjukkan bahwa:

- Tertutup, karena " $x, y \in G$ mengakibatkan $x \cdot y \in G$ "
- Eksistensi elemen identitas, $1 \in G$, " $x \in G \Rightarrow x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ "
- Eksistensi elemen invers, " $x \in G$, $\exists x^{-1} \in G \Rightarrow x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ "

\Jadi, (G, \cdot) adalah subgrup dari $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$

- $G \neq \mathbb{C} - \{0\}$ karena $2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ tetapi $2 \notin G$
- $G \neq \emptyset$ karena $-1 \in G$ tetapi $-1 \notin \{1\}$

Karena $G \neq \mathbb{C} - \{0\}$ dan $G \neq \emptyset$ sehingga (G, \cdot) adalah subgrup nontrivial dari $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$.

Contoh 4.11. Untuk suatu bilangan asli m dan n yang tetap, masing-masing merupakan grup terhadap operasi penjumlahan dalam susunan berikut:

$$M_{m \times n}(\mathbb{Z}) \subset M_{m \times n}(\mathbb{Q}) \subset M_{m \times n}(\mathbb{R}) \subset M_{m \times n}(\mathbb{C})$$

Contoh 4.12. Tunjukkan bahwa

$M_{2 \times 1}(\mathbb{Z}) \subset M_{2 \times 1}(\mathbb{Q}) \subset M_{2 \times 1}(\mathbb{R}) \subset M_{2 \times 1}(\mathbb{C})$ dengan $M_{2 \times 1}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ adalah grup terhadap operasi penjumlahan.

Akan ditunjukkan $M_{2 \times 1}(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$

adalah subgrup nontrivial dari $M_{2 \times 1}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Jawab:

Akan ditunjukkan bahwa $M_{2 \times 1}(\mathbb{Z})$ kompleks dari $M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$

- $M_{2 \times 1}(\mathbb{Z})$ adalah subset dari $M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ karena

$$\forall A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in M_{2 \times 1}(\mathbb{Z}) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$$

- $M_{2 \times 1}(\mathbb{Z}) \neq \emptyset$ karena $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 1}(\mathbb{Z})$

\(\Rightarrow\) Jadi, $M_{2 \times 1}(\mathbb{Z})$ adalah kompleks dari $M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $M_{2 \times 1}(\mathbb{Z})$ adalah suatu grup terhadap operasi penjumlahan yang didefinisikan pada grup $M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$

- Akan ditunjukkan tertutup terhadap operasi penjumlahan

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 1}(\mathbb{Z}), A + B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ b_1 + b_2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 1}(\mathbb{Z})$$

Karena $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$, maka $a_1 + a_2, b_1 + b_2 \in \mathbb{Z}$

- Akan ditunjukkan eksistensi elemen identitas

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 1}(\mathbb{Z}), A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 1}(\mathbb{Z})$$

$$A + O = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} = O + A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

- Akan ditunjukkan eksistensi elemen invers terhadap operasi penjumlahan

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 1}(\mathbb{Z}), A^c = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 \\ -b_1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 1}(\mathbb{Z})$$

$$A + A^c = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_1 & 0 \\ -b_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + (-a_1) & 0 \\ b_1 + (-b_1) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

$$A^c + A = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 \\ -b_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-a_1) + a_1 & 0 \\ (-b_1) + b_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

$$\setminus A + A^c = A^c + A = O$$

Jadi, $(M_{2 \times 1}(\mathbb{Z}), +)$ adalah subgrup dari $(M_{2 \times 1}(\mathbb{R}), +)$

- $M_{2 \times 1}(\mathbb{Z}) \neq M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ karena $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ tetapi $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin M_{2 \times 1}(\mathbb{Z})$

- $M_{2 \times 1}(\mathbb{Z}) \neq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ karena $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 1}(\mathbb{Z})$ tetapi $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \notin \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Karena $M_{2 \times 1}(\mathbb{Z}) \neq M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ dan $M_{2 \times 1}(\mathbb{Z}) \neq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sehingga, $M_{2 \times 1}(\mathbb{Z})$ adalah subgrup nontrivial dari $M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$

Dengan cara yang sama kita juga dapat menunjukkan bahwa $M_{2 \times 1}(\mathbb{Z}) \subset M_{2 \times 1}(\mathbb{Q}) \subset M_{2 \times 1}(\mathbb{R}) \subset M_{2 \times 1}(\mathbb{C})$. Masing-masing adalah subgrup terhadap operasi penjumlahan dari grup yang memuatnya. Jika G adalah suatu grup terhadap suatu operasi $*$, kemudian $*$ adalah suatu operasi yang bersifat asosiatif pada beberapa subset tak kosong dari G . Suatu subset H dari G adalah suatu subgrup, jika

1. H memuat elemen identitas,
2. H tertutup terhadap operasi $*$,
3. H memuat elemen invers dari masing-masing anggotanya.

Keterangan:

- Kaitannya dengan syarat 1, menganggap adanya kemungkinan bahwa H mungkin berisi elemen identitas e_H untuk setiap anggotanya yang dapat berbeda dengan elemen identitas e pada G sedemikian sehingga elemen e_H memiliki sifat $e_H * e_H = e_H$.
- Suatu elemen x pada grup perkalian G disebut *idempotent* jika $x^2 = x$. Buktikan bahwa elemen identitas e adalah satu-satunya elemen idempotent pada grup G !

Bukti:

Misalkan ada $x \in G$ sedemikian sehingga $x^2 = x$

Akan ditunjukkan bahwa $e = x$

Karena $x \in G$ dan G adalah grup maka terdapat $x^{-1} \in G$.

Perhatikan bahwa:

$$x = xx$$

$$\cup x^{-1}x = x^{-1}(xx)$$

$$\cup e = (x^{-1}x)x$$

$$\cup e = ex$$

$$\cup e = x$$

- Kaitannya dengan syarat 3, kita menganggap kemungkinan bahwa setiap $a \in H$ mungkin memiliki satu elemen invers di subgrup H dan suatu elemen invers yang berbeda di grup G . Hal ini tidak mungkin terjadi karena solusi y untuk $a * y = y * a = e$ adalah tunggal.

Sifat-sifat dari subgrup:

1. *Elemen identitas pada suatu subgrup adalah sama dengan elemen identitas pada grup*

Bukti:

Misalkan H adalah subgrup dari grup G terhadap operasi biner $*$.

Misalkan e adalah elemen identitas pada G

Misalkan e' adalah elemen identitas pada H

Akan dibuktikan bahwa $e = e'$

Ambil sebarang $a \in H$, maka $a \in G$ karena $H \subseteq G$

Karena $a \in G$ dan e adalah elemen identitas pada $G \Rightarrow a * e = a$

Karena $a \in H$ dan e' adalah elemen identitas pada $H \Rightarrow a * e' = a$

Perhatikan bahwa $a * e = a = a * e'$. Dengan menggunakan sifat kanselasi maka diperoleh, $e = e'$.

2. *Elemen invers dari tiap-tiap elemen pada subgrup adalah sama dengan elemen invers pada grup*

Bukti:

Misalkan H adalah subgrup dari grup G terhadap operasi biner $*$.

Misalkan e adalah elemen identitas pada H dan tentu saja di G . Ambil sebarang $a \in H$, maka $a \in G$ karena $H \subseteq G$. Sekarang, misalkan b dan c adalah invers dari a , tentu saja b dan c adalah elemen di H dan di G .

Oleh karena itu:

$$a * b = b * a = e$$

$$a * c = c * a = e$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $b = c$.

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} b &= b * e \\ &= b * (a * c) \\ &= (b * a) * c \\ &= e * c \\ &= c \end{aligned}$$

1. Grup perkalian $(\{1, -1\}, \cdot)$ adalah subgrup dari grup perkalian $(\{1, -1, i, -i\}, \cdot)$.
2. Grup penjumlahan dari bilangan bulat adalah subgrup dari grup penjumlahan bilangan rasional. $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan subgrup dari $(\mathbb{Q}, +)$.
3. $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$ adalah subgrup dari $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$.

Contoh 4.13. Apa syaratnya agar $A \subseteq B$ adalah subgrup dari G .

Jawab: Gabungan dua buah subgrup dari suatu grup G adalah suatu subgrup jika dan hanya jika salah satu dari subgrup tersebut termuat di dalam subgrup yang lain.

Bukti:

(\Rightarrow) Misalkan H_1 dan H_2 adalah dua subgrup dari grup G . Anggap $H_1 \subset H_2$ atau $H_2 \subset H_1$ akibatnya $H_1 \subseteq H_2 = H_2$ atau H_1 . Karena H_1, H_2 adalah subgrup dari G , maka $H_1 \subseteq H_2$ juga merupakan suatu subgrup.

(\Leftarrow) Misalkan H_1 dan H_2 adalah dua subgrup dari suatu grup G sedemikian sehingga $H_1 \subseteq H_2$ juga subgrup dari G . Akan ditunjukkan $H_1 \subset H_2$ atau $H_2 \subset H_1$. Andaikan $H_1 \not\subset H_2$ dan $H_2 \not\subset H_1$. $H_1 \not\subset H_2$ artinya ada suatu elemen

$a \in H_1$ tetapi $a \notin H_2$: $H_2 \not\subset H_1$ artinya ada suatu elemen $b \in H_2$ tetapi $b \notin H_1$.
Padahal,

$$\begin{aligned} a \in H_1 &\supset a \in H_1 \cap H_2 \\ b \in H_2 &\supset b \in H_1 \cap H_2 \end{aligned}$$

Berdasarkan asumsi $H_1 \cap H_2$ adalah suatu subgrup, maka
 $a \in H_1 \cap H_2, b \in H_1 \cap H_2 \supset ab \in H_1 \cap H_2$

Tetapi, $ab \in H_1 \cap H_2 \supset ab \in H_1$ atau $ab \in H_2$

Perhatikan bahwa: $ab \in H_1$, dan karena H_1 subgrup maka

$$\begin{aligned} a \in H_1, ab \in H_1 &\supset a^{-1} \in H_1, ab \in H_1 \\ &\supset a^{-1}ab \in H_1 \\ &\supset eb \in H_1 \\ &\supset b \in H_1 \end{aligned}$$

Kontradiksi dengan $b \notin H_1$

Misalkan $ab \in H_2$, dan karena H_2 subgrup maka

$$\begin{aligned} ab \in H_2, b \in H_2 &\supset ab \in H_2, b^{-1} \in H_2 \\ &\supset abb^{-1} \in H_2 \\ &\supset ae \in H_2 \\ &\supset a \in H_2 \end{aligned}$$

Kontradiksi dengan $a \notin H_2$

Jadi, pengandaian salah yang benar adalah $H_1 \subset H_2$ atau $H_2 \subset H_1$

Definisi 4.5 Pangkat Bilangan Bulat

Misalkan G adalah suatu grup dengan operasi biner perkalian maka untuk sebarang $a \in G$ didefinisikan pangkat bilangan bulat non negatif sebagai

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^1 &= a \\ a^{k+1} &= a^k \cdot a, \text{ untuk sebarang } k \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

Pangkat bilangan bulat negatif didefinisikan sebagai $a^{-k} = (a^{-1})^k$. Hal ini biasa digunakan untuk menuliskan operasi biner penjumlahan dalam kasus grup abelian. Pada saat operasi penjumlahan berkorespondensi dengan perkalian dari a didefinisikan dengan cara yang serupa. Tabel berikut ini menunjukkan bagaimana notasi – notasi tersebut berkorespondensi dengan k bilangan bulat positif.

Notasi Perkalian	Notasi Penjumlahan
$a^0 = e$	$0a = 0$
$a^1 = a$	$1a = a$
$a^{k+1} = a^k \cdot a$	$(k + 1)a = ka + a$
$a^{-k} = (a^{-1})^k$	$(-k)a = k(-a)$

Notasi ka pada notasi penjumlahan tidak menunjukkan hasil kali k dengan a melainkan suatu jumlah

$$ka = a + a + a + \dots + a$$

sebanyak k suku. Pada $0a = 0$, nol disebelah kiri merupakan bilangan bulat dan nol disebelah kanan menyatakan identitas penjumlahan dalam grup.

Anggap banyaknya keragaman dari operasi-operasi dan himpunan-himpunan yang terlibat dalam contoh-contoh bakal menjadi kejutan dan keyakinan untuk menentukan teorema selanjutnya yang dikenal dengan sifat-sifat pangkat yang berlaku pada grup.

Definisi 4.6. Jika $a \in G$ dan $k \in \mathbb{Z}$ maka didefinisikan :

❖ Pada operasi penjumlahan

$$ka = \begin{cases} a + a + a + \dots + a, & k > 0 \\ e, & k = 0 \\ (-a) + (-a) + (-a) + \dots + (-a), & k < 0 \end{cases}$$

❖ Pada operasi perkalian

$$a^k = \begin{cases} a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a, & k > 0 \\ e, & k = 0 \\ a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot \dots \cdot a^{-1}, & k < 0 \end{cases}$$

❖ Secara umum, pada $(G, *)$

$$a^k = \begin{cases} a * a * a * \dots * a, & k > 0 \\ e, & k = 0 \\ a^{-1} * a^{-1} * a^{-1} * \dots * a^{-1}, & k < 0 \end{cases}$$

Teorema 4.1. Sifat-Sifat Pangkat Bilangan Bulat

Jika $x, y \in G$ dan $m, n \in \mathbb{Z}$ maka

- (a) $x^n \cdot x^{-n} = e$
- (b) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
- (c) $(x^m)^n = x^{mn}$
- (d) Jika G abelian, $(xy)^n = x^n y^n$

(a) Kasus (i)

Jika e adalah elemen identitas pada grup G maka untuk sebarang n bilangan bulat, $e^n = e$

Kasus (1) : untuk $n = 0$ maka $e^0 = e$

Kasus (2) : untuk $n > 0$

- (a). Untuk $n = 1$ maka $e^1 = e$
- (b). Diasumsikan bahwa $e^k = e$, benar untuk $n = k$
- (c). Akan dibuktikan, $e^n = e$ benar untuk $n = k + 1$,

Untuk $n = k + 1$, $e^{k+1} = e^k \cdot e \cdot \dots \cdot e$ Definisi 4.6.
 $= e \cdot e \cdot \dots \cdot e$ Hipotesis induksi
 $= e$

Jadi, $e^n = e$, " $n \in \mathbb{Z}^+$ "

Kasus (3) : untuk $n < 0$

Misal. $n = -p$, untuk sebarang bilangan positif p

$e^n = e^p$
 $= (e^{-1})^p \dots \dots \dots$ Definisi 4.6.
 $= e^p \dots \dots \dots$... adalah elemen identitas G
 $= e \dots \dots \dots$ kasus (2) pada kasus (i)
 Jadi, $e^n = e$ untuk sebarang n bilangan bulat

(b) Kasus (ii)

Jika $x \in G$ dan $n \in \mathbb{Z}$

Untuk $n = 0$

$$\begin{aligned}
 x^n \cdot x^{-n} &= x^0 \cdot x^{-0} \\
 &= x^0 \cdot x^0 \dots \dots \dots - 0 = 0 \\
 &= e \cdot e \dots \dots \dots \text{Definisi 4.6.} \\
 &= e \dots \dots \dots \text{Kasus (2) pada kasus (i)}
 \end{aligned}$$

Jadi, $x^n \cdot x^n = e$, benar untuk $n = 0$

Untuk $n > 0$

- ❖ Untuk $n = 1$ maka $x^1 \cdot x^1 = x \cdot x^1 = e$ (eksistensi invers perkalian)
 Jadi, $x^n \cdot x^n = e$, benar untuk $n = 1$
- ❖ Diasumsikan $x^k \cdot x^k = e$, benar untuk $n = k$
- ❖ Akan dibuktikan $x^n \cdot x^n = e$, benar untuk $n = k + 1$

Untuk $n = k + 1$,

$$\begin{aligned}
 &x^{k+1} \cdot x^{-(k+1)} \\
 &= (x^k \cdot x) \cdot (x^{-1})^{k+1} \dots \dots \dots \text{Definisi 4.6.} \\
 &= (x^k \cdot x) \cdot \underbrace{(x^{-1})^k}_{\substack{\text{Definisi 4.6.} \\ \text{Definisi 4.6.}}} \cdot (x^{-1})^1 \dots \dots \dots \text{Definisi 4.6.} \\
 &= (x^k \cdot x) \cdot (x^{-k} \cdot x^{-1}) \dots \dots \dots \text{Eksistensi identitas perkalian} \\
 &= (x^k \cdot x) \cdot (x^{-k} \cdot x^{-1}) \cdot e \dots \dots \dots \text{Eksistensi invers perkalian} \\
 &= (x^k \cdot x) \cdot x^{-1} \cdot (x^{-k} \cdot x^{-1}) \cdot x \dots \dots \dots \text{Asosiatif} \\
 &= x^k \cdot (x \cdot x^{-1}) \cdot x^{-k} \cdot (x^{-1} \cdot x) \dots \dots \dots \text{Eksistensi invers perkalian} \\
 &= x^k \cdot e \cdot x^{-k} \cdot e \dots \dots \dots \text{Asosiatif} \\
 &= (x^k \cdot e) \cdot (x^{-k} \cdot e) \dots \dots \dots \text{Eksistensi identitas perkalian} \\
 &= x^k \cdot x^{-k} \dots \dots \dots \text{Hipotesis induksi} \\
 &= e \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Jadi, $x^n \cdot x^n = e$, untuk sebarang bilangan bulat positif.

Untuk $n < 0$

Misal. $n = -p$, untuk sebarang p bilangan bulat positif

$$\begin{aligned} x^n \cdot x^n &= x^p \cdot x^{(-p)} \\ &= x^{-p} \cdot x^p \dots \dots \dots -(-p) = p \\ &= e \dots \dots \dots p \text{ bilangan bulat positif} \end{aligned}$$

Dari kasus (i) dan(ii) dapat disimpulkan bahwa

$$x^n \cdot x^{-n} = e, \text{ untuk } x \in G \text{ dan } n \in \mathbb{Z}$$

(b) Jika m sebarang bilangan bulat positif yang tetap, maka ada tiga kasus yang perlu diperhatikan untuk n :

(i) Untuk $n = 0$, maka

$$\begin{aligned} x^m \cdot x^n &= x^m \cdot x^0 \\ &= x^m \cdot e \dots \dots \dots \text{Definisi 4.6.} \\ &= x^m \dots \dots \dots \text{Eksistensi identitas perkalian} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} x^{m+n} &= x^{m+0} \\ &= x^m \dots \dots \dots \text{Eksistensi identitas penjumlahan} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } x^m \cdot x^n = x^{m+n}, n = 0$$

(ii) Untuk n bilangan bulat positif

Untuk $n = 1$ maka

$$\begin{aligned} x^m \cdot x^n &= x^m \cdot x^1 \\ &= x^m \cdot x \dots \dots \dots \text{Definisi 4.6.} \\ &= x^{m+1} \dots \dots \dots \text{Definisi 4.6.} \\ &= x^{m+n} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } x^m \cdot x^n = x^{m+n} \text{ benar untuk } n = 1$$

$$\text{Diasumsikan } x^m \cdot x^k = x^{m+k} \text{ benar untuk } n = k$$

$$\text{Akan dibuktikan } x^m \cdot x^n = x^{m+n} \text{ benar, untuk } n = k + 1$$

Untuk $n = k + 1$ maka

$$\begin{aligned}
x^m \cdot x^{k+1} &= x^m \cdot x^{k+1} \\
&= x^m \cdot (x^k \cdot x) \quad \dots\dots\dots \text{Definisi 4.6.} \\
&= (x^m \cdot x^k) \cdot x \quad \dots\dots\dots \text{Assosiatif} \\
&= x^{m+k} \cdot x \quad \dots\dots\dots \text{Hipotesis induksi} \\
&= x^{(m+k)+1} \quad \dots\dots\dots \text{Definisi 4.6.} \\
&= x^{m+(k+1)} \quad \dots\dots\dots \text{Assosiatif} \\
&= x^{m+n}
\end{aligned}$$

Jadi, $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ benar untuk $n = k + 1$. Dengan demikian,
 $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$, " $n \in \mathbb{Z}^+$ "

(iii) Untuk n bilangan bulat negatif, artinya $n = -p$, p bilangan bulat positif

Kita perhatikan tiga kemungkinan untuk p , yaitu $p = m$, $p < m$, dan $m < p$, maka

Jika $p = m$ maka $n = -p = -m$, dan

$$\begin{aligned}
x^m \cdot x^n &= x^m \cdot x^{-m} \\
&= e \quad \dots\dots\dots \text{Teorema 3.12 (a)}
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
x^{m+n} &= x^{m-m} \\
&= x^0 \quad \dots\dots \text{Eksistensi invers jumlahan} \\
&= e \quad \dots\dots \text{Definisi 4.6.}
\end{aligned}$$

Jadi, $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ berlaku untuk $p = m$

Jika $p < m$, misal $m - p = q$ maka $m = q + p$, dimana $q, p \in \mathbb{Z}^+$

Kita telah membuktikan bahwa Teorema 4.1(b) berlaku untuk m dan n bilangan bulat positif, selanjutnya kita boleh menggunakan $x^{q+p} = x^q \cdot x^p$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned}
x^m \cdot x^n &= x^{q+p} \cdot x^{-p} \\
&= (x^q \cdot x^p) \cdot x^{-p} \\
&= x^q \cdot (x^p \cdot x^{-p}) \text{ Asosiatif} \\
&= x^q \cdot e \text{ Teorema 3.12(a)} \\
&= x^q \text{ Eksistensi identitas perkalian} \\
&= x^{q+0} \text{ Eksistensi identitas penjumlahan} \\
&= x^{q+(p-p)} \text{ Eksistensi invers penjumlahan} \\
&= x^{(q+p)-p} \text{ Asosiatif} \\
&= x^{m+n}
\end{aligned}$$

Jadi, $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ berlaku untuk $p < m$

Akhirnya, andaikan $m < p$, misal $r = p - m$ sehingga r bilangan bulat positif dan $p = m + r$

Oleh definisi x^{-p} ,

$$\begin{aligned}
x^{-p} &= (x^{-1})^p \text{ Definisi 4.6} = (x^{-1})^{m+r} \\
&= (x^{-1})^m \cdot (x^{-1})^r \text{ Teorema 3.12(b) untuk } m, r \in \mathbb{Z}^+ \\
&= x^{-m} \cdot x^{-r} \text{ Definisi 4.6}
\end{aligned}$$

Substitusikan x^{-p} ke dalam $x^m \cdot x^n$, diperoleh

$$\begin{aligned}
x^m \cdot x^n &= x^m \cdot x^p \\
&= x^m \cdot (x^m \cdot x^r) \\
&= (x^m \cdot x^m) \cdot x^r \text{ asosiatif} \\
&= e \cdot x^r \text{ Teorema 4.1(a)} \\
&= x^{-r} \text{ eksistensi identitas perkalian}
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
x^{m+n} &= x^{m-p} \\
&= x^{m-(m+r)} \\
&= x^{(m-m)-r} \text{ Asosiatif} \\
&= x^{0-r} \text{ Eksistensi invers penjumlahan} \\
&= x^{-r} \text{ Eksistensi identitas penjumlahan}
\end{aligned}$$

Jadi, $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ berlaku untuk $m < p$

Kita telah membuktikan bahwa $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ untuk m bilangan bulat positif dan n sebarang bilangan bulat. Tentu saja bukti ini belum lengkap untuk Teorema 4.1(b). Bukti tersebut akan lengkap, jika ditunjukkan berlaku juga untuk n bilangan bulat positif yang tetap, $m = 0$ dan m bilangan negatif. Bukti-bukti ini serupa dengan bukti-bukti yang telah diberikan.

(c) Jika $m, n \in \mathbb{Z}$ dan $x \in G$ maka

Kasus (i) : Untuk m dan n bilangan bulat positif

$$\begin{aligned}(x^m)^n &= x^m \cdot x^m \cdot x^m \cdot \dots \cdot x^m \text{ (sebanyak } n \text{ faktor) definisi} \\ &= x^{m+m+m+\dots+m} \text{ (sebanyak } n \text{ suku)} \\ &= x^{mn} \quad \text{Teorema 3.12(b)}\end{aligned}$$

Kasus (ii) : Untuk m bilangan bulat positif dan n bilangan bulat negatif, misal $n = -q$, untuk suatu q bilangan bulat positif

$$\begin{aligned}(x^m)^n &= (x^m)^{-q} \\ &= \frac{1}{(x^m)^q} \quad \text{Def. 4.6} \\ &= (x^{-m})^q \quad \text{Def. 4.6} \\ &= x^{-m} \cdot x^{-m} \cdot x^{-m} \cdot \dots \cdot x^{-m} \text{ (sebanyak } q \text{ faktor)} \\ &= x^{-mq} \\ &= x^{m(-q)} \\ &= x^{mn} \quad \dots \dots \dots n = -q\end{aligned}$$

Kasus (iii) : Untuk n bilangan bulat positif dan m bilangan bulat negatif, misal $m = -p$ untuk suatu p bilangan bulat positif

$$\begin{aligned}(x^m)^n &= (x^{-p})^n \\ &= x^{-p} \cdot x^{-p} \cdot x^{-p} \cdot \dots \cdot x^{-p} \text{ (sebanyak } n \text{ faktor)} \\ &= x^{-pn} \\ &= x^{(-p)n} \\ &= x^{mn} \quad \dots \dots \dots m = -p\end{aligned}$$

Kasus (iv): untuk m dan n bilangan bulat negatif, misal $m = -p$ dan $n = -q$ untuk suatu p dan q bilangan bulat positif.

$$\begin{aligned}
 (x^m)^n &= (x^{-p})^{-q} \\
 &= ((x^p)^{-1})^{-q} && \text{Definisi 4.6} \\
 &= (x^p)^{-(-q)} && \text{Definisi 4.6} \\
 &= (x^p)^q && \text{karena } -(-q) = q \\
 &= x^{pq} && \text{kasus (i)} \\
 &= x^{mn} && \text{karena } (pq = mn)
 \end{aligned}$$

Dari kasus (i) – (iv) disimpulkan bahwa $(a^m)^n = a^{mn}$, $a \in G$ dan $m, n \in \mathbb{Z}$

(d) Jika $n \in \mathbb{Z}$ dan $x, y \in G$ abelian maka

Kasus (i) : untuk $n = 0$,

$$(xy)^0 = e. \dots \dots \dots \text{Definisi 4.6}$$

dan

$$x^0 \cdot y^0 = e \cdot e. \dots \dots \dots \text{Definisi 4.6}$$

$$= e. \dots \dots \dots \text{Eksistensi identitas perkalian}$$

Jadi, $(xy)^n = x^n \cdot y^n$, untuk $n = 0$

Kasus (ii) : untuk n bilangan bulat positif

- Untuk $n = 1$ maka $(xy)^1 = xy$ dan $x^1 \cdot y^1 = xy$

Jadi, $(xy)^n = x^n \cdot y^n$, berlaku untuk $n = 1$

- Diasumsikan $(xy)^k = x^k \cdot y^k$ benar untuk $n = k$
- Akan dibuktikan, $(xy)^n = x^n \cdot y^n$, benar untuk $n = k + 1$

Untuk $n = k + 1$ maka

$$(xy)^{k+1} = (xy)^k \cdot (xy) \dots \dots \dots \text{Definisi 4.6}$$

$$= (x^k \cdot y^k) \cdot (xy) \dots \dots \dots \text{Hipotesis induksi}$$

$$= (x^k \cdot x) (y^k \cdot y) \dots \dots \dots \text{Assosiatif dan komutatif}$$

$$= x^{k+1} \cdot y^{k+1} \dots \dots \dots \text{Definisi 4.6}$$

Jadi, $(xy)^n = x^n \cdot y^n$, " $n \in \mathbb{Z}^+$ "

Kasus (iii) : untuk n bilangan bulat negatif, misal $n = -p$, untuk suatu p bilangan bulat positif

$$\begin{aligned}
(xy)^n &= (xy)^{-p} \\
&= \left((xy)^{-1}\right)^p && \text{Definisi 4.6} \\
&= \left(x^{-1} \cdot y^{-1}\right)^p \\
&= (x^{-1})^p \cdot (y^{-1})^p && \text{Kasus (ii)} \\
&= x^{-p} \cdot y^{-p} && \text{Definisi 4.6} \\
&= x^n \cdot y^n && \dots\dots\dots n = -p
\end{aligned}$$

Berdasarkan kasus (i), (ii), dan (iii) dapat disimpulkan bahwa
 $(xy)^n = x^n \cdot y^n$, " $n \in \mathbb{Z}$ dan $x, y \in G$ "

Sifat-sifat eksponen pada Teorema 4.1 dapat diterjemahkan ke dalam sifat-sifat kelipatan pada grup G dengan operasi penjumlahan.

Sifat-Sifat Kelipatan

- | | |
|--|-----------------|
| (a) $nx + (-n)x = 0x$ | Teorema 4.1 (a) |
| (b) $mx + nx = (m + n)x$ | Teorema 4.1(b) |
| (c) $n(mx) = (nm)x$ | Teorema 4.1(c) |
| (d) Jika G abelian maka $n(x+y) = nx + ny$ | Teorema 4.1(d) |

Jika G suatu grup, $a \in G$ dan $H = \{x \in G : x = a^n, n \in \mathbb{Z}\}$ maka

➤ H tidak kosong, karena $a = a^1 = a \in H$ dan $H = \{a, a^{-1}, e\} \subseteq G$

Jika $x = a^m \in H$ dan $y = a^n \in H$ maka

➤ $xy = a^m \cdot a^n = a^{m+n} \in H$ $x^{-1} = a^{-m} \in H$

➤ $x^{-1} = a^{-m} \in H, -m \in \mathbb{Z}$

Jadi, menurut Teorema 4.1 H adalah suatu subgrup.

A.5. Kelas Ekuivalen

Contoh 4.14. Himpunan $M = \{[1], [3]\} \subseteq \mathbb{Z}_8$ dengan operasi perkalian. Selidiki apakah (M, \cdot) adalah grup.

Jawab :

Dengan membuat Tabel Cayley diperoleh:

x	[1]	[3]
[1]	[1]	[3]
[3]	[3]	[1]

Selanjutnya dari tabel di atas maka diperoleh :

1. operasi x pada M bersifat tertutup.
2. $[1] \times ([1] \times [1]) = [1] = ([1] \times [1]) \times [1]$
 $[3] \times ([1] \times [1]) = [3] = ([3] \times [1]) \times [1]$
 $[1] \times ([1] \times [3]) = [3] = ([1] \times [1]) \times [3]$
 $[3] \times ([1] \times [3]) = [1] = ([3] \times [1]) \times [3]$
 $[1] \times ([3] \times [1]) = [3] = ([1] \times [3]) \times [1]$
 $[3] \times ([3] \times [1]) = [1] = ([3] \times [3]) \times [1]$
 $[1] \times ([3] \times [3]) = [1] = ([1] \times [3]) \times [3]$
 $[3] \times ([3] \times [3]) = [3] = ([3] \times [3]) \times [3]$

Disimpulkan bahwa operasi x pada M bersifat asosiatif

3. Ada $[1] \in M$, sedemikian sehingga untuk sebarang elemen $[a]$ di M berlaku $[1] \times [a] = [a]$ dan $[a] \times [1] = [a]$.
4. Setiap elemen di M memiliki invers, dengan inversnya di M invers dari $[1]$ adalah $[1]$ dan invers dari $[3]$ adalah $[3]$ karena memenuhi empat aksioma grup, maka (M, x) adalah grup. $((M, x))$ juga merupakan grup abelian, karena operasi x pada M bersifat komutatif.

Contoh-contoh grup:

- (a) Sistem bilangan \mathbb{Q} , \mathbb{R} , atau \mathbb{C} dengan operasi jumlah.
- (b) Bilangan real positif, dengan operasi perkalian.
- (c) Bilangan kompleks tak nol (bilangan real atau rasional) dengan operasi perkalian. Himpunan elemen-elemen tak-nol dalam f dilambangkan

dengan F^* , dan himpunan bilangan kompleks tak-nol dilambangkan dengan \mathbb{C}^* .

- (d) Himpunan matriks $n \times n$ dengan entri-entrinya (elemen-elemennya) terdiri atas bilangan real dengan operasi perkalian matriks. Perkalian matriks-matriks AB yang masing-masing berukuran $n \times n$ adalah matriks-matriks terbalikkan dengan invers $B^{-1}A^{-1}$. Perkalian matriks bersifat assosiatif, sehingga perkalian matriks membentuk sifat assosiatif perkalian pada himpunan matriks $n \times n$ yang terbalikkan. Matriks identitas E , yaitu matriks dengan elemen diagonal terdiri atas bilangan 1 dan elemen lainnya terdiri atas bilangan 0, merupakan elemen identitas untuk perkalian matriks, dan invers suatu matriks adalah invers perkalian matriks.

A.6. Virtues of Abstraction

Abstraksi, yaitu proses perubahan fenomena rekurensi menjadi suatu konsep, memiliki beberapa tujuan dan keuntungan. Pertama, abstraksi merupakan suatu perangkat untuk mengorganisasikan pengertian mengenai fenomena. Untuk memahami fenomena, abstraksi membantu melakukan klasifikasi menurut sifat-sifat umumnya. Kedua, abstraksi menghasilkan efisiensi dengan mengeliminasi argumen-argumen yang sebenarnya tidak diperlukan. Hasil operasi tertentu dapat berlaku pada semua grup, atau pada semua grup berhingga, atau pada semua grup yang memenuhi hipotesis-hipotesis tertentu. Pembuktian hasil operasi tidak perlu dilakukan berkali-kali setiap menemui masalah yang serupa dalam grup simetri, grup permutasi, matriks terbalikkan, dan sebagainya, tetapi cukup dengan satu kali pembuktian untuk semua sifat yang sama, untuk semua grup (untuk semua grup berhingga, untuk semua grup yang memenuhi sifat-sifat tertentu).

Keuntungan yang paling utama dari abstraksi adalah bahwa abstraksi memungkinkan kita untuk menganalisa objek-objek dari kelompok yang berbeda dan mencari hubungannya satu dengan yang lainnya. Dengan demikian pemahaman terhadap objek-objek secara terpisah dapat lebih

dipertajam. Cara pertama untuk memandang bahwa dua grup kemungkinan memiliki hubungan adalah dengan mempertimbangkan bahwa pada dasarnya kedua grup tersebut adalah grup yang sama. Misalnya pada grup simetri kartu persegi, misalkan himpunan $\mathbb{R} = \{e, r, r^2, r^3\}$. Perhatikan bahwa himpunan ini merupakan subset dari grup simetri, adalah suatu grup dengan (operasi) komposisi simetri.

Sebaliknya, himpunan $\mathbb{C}_4 = \{i, -1, -i, 1\}$ akar-akar keempat dari 1 dalam bilangan kompleks, adalah suatu grup dengan operasi perkalian bilangan kompleks. Grup \mathbb{R} pada dasarnya sama dengan grup \mathbb{H} . Bijeksi antar kedua grup ini didefinisikan sebagai berikut:

$$e \leftrightarrow 1$$

$$r \leftrightarrow i$$

$$r^2 \leftrightarrow -1$$

$$r^3 \leftrightarrow -i$$

Berdasarkan sifat bijektif ini, tabel perkalian antara dua grup dapat disusun. Jika sifat bijektif diterapkan terhadap masing-masing entri di dalam tabel perkalian \mathbb{R} , maka diperoleh tabel perkalian \mathbb{H} . Jadi, meskipun grup berasal dari konteks yang berbeda, grup-grup tersebut pada dasarnya sama. Perbedaannya hanya terletak pada nama yang diberikan menurut elemen-elemennya.

Grup \mathbb{G} dan \mathbb{H} dikatakan isomorfis jika terdapat pemetaan bijektif $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{G}$ antara kedua grup tersebut mengakibatkan tabel perkalian pada salah satu grup sama dengan tabel perkalian grup yang lainnya. Pemetaan f disebut isomorfisme. Dalam hal ini syarat untuk f adalah sebagai berikut: jika diberikan $a, b, c \in \mathbb{H}$, maka diperoleh $c = ab$ jika dan hanya jika $f(c) = f(a)f(b)$. Contoh lainnya adalah grup permutasi S_3 yang bersifat isomorfis terhadap grup simetri dari suatu kartu yang berbentuk segitiga sama sisi.

Cara lain untuk menunjukkan kemungkinan bahwa dua grup memiliki hubungan adalah bahwa grup yang satu mungkin memuat grup yang lainnya. Himpunan simetri kartu yang berbentuk persegi yang tidak berubah pada posisi atas dan bawahnya adalah $\{e, r, r^2, r^3\}$, adalah suatu grup. Jadi grup

simetri dari kartu berbentuk persegi memuat grup $\{e, r, r^2, r^3\}$ sebagai subgrup. Contoh lainnya adalah himpunan matriks berukuran 3×3 yang terbalikkan $\{E, A, B, C, D, \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\}$, merupakan suatu grup dengan operasi perkalian matriks; jadi, himpunan tersebut adalah subgrup dari grup semua matriks 3×3 yang terbalikkan.

Kemungkinan ketiga dimana dua grup dapat berhubungan satu sama lain dapat terlihat jelas. Suatu pemetaan $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{G}$ antara dua grup dikatakan homomorfis jika f memasangkan masing-masing hasil dengan hasil, identitas dengan identitas, dan invers dengan invers. Isomorfis adalah suatu homomorfis yang bijektif, tetapi pembuktian dengan sifat ini dapat dikatakan mubasir. Homomorfis cukup ditunjukkan dengan $f(ab) = f(a)f(b)$ untuk semua $a, b \in \mathbb{H}$. Sebagai contoh, pemetaan $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ yang didefinisikan dengan $f(a) = [a]$ merupakan grup homomorfis karena $f(a+b) = [a+b] = [a] + [b] = f(a) + f(b)$. Demikian juga pemetaan $x \mapsto e^x$ merupakan homomorfisma grup antara grup \mathbb{R} dengan operasi penjumlahan, terhadap grup bilangan real tak nol dengan operasi perkalian, karena $e^{x+y} = e^x e^y$.

Konsep grup ini dapat digunakan untuk mendapatkan sifat baru dari teorema Euler. Diketahui bahwa elemen $[a]$ dari \mathbb{Z}_n adalah terbalikkan jika dan hanya jika a prima relatif dengan n . Banyaknya elemen terbalikkan adalah $\phi(n)$.

Lemma 4.1.

Himpunan $\Phi(n)$ dari elemen-elemen \mathbb{Z}_n yang memiliki invers perkalian, membentuk suatu grup [kardinalitas $\phi(n)$] dengan operasi perkalian, dan dengan elemen identitas $[1]$.

Bukti:

Hal utama yang harus dilakukan adalah menunjukkan bahwa jika $[a]$ dan $[b]$ adalah elemen-elemen $\Phi(n)$, maka hasilkali $[a][b] = [ab]$ juga merupakan elemen $\Phi(n)$. Pertama, dengan hipotesis $[a]$ memiliki invers

perkalian $[x]$ dan $[b]$ memiliki invers perkalian $[y]$. Kemudian $[a][b]$ memiliki invers perkalian $[y][x]$, karena:

$$\begin{aligned} ([a][b])([y][x]) &= [a]([b]([y][x])) \\ &= [a]([b]([y])[x]) = [a]([1][x]) = [a][x] = [1] \end{aligned}$$

Cara kedua untuk membuktikan bahwa $[ab] \in \Phi(n)$ adalah bahwa keterbalikan $[a]$ dan $[b]$ menunjukkan bahwa a dan b masing-masing merupakan prima relatif dengan n , sehingga ab juga prima relatif dengan n . Oleh karena itu $[ab] \in \Phi(n)$.

Telah jelas bahwa $[1] \in \Phi(n)$. Selanjutnya karena operasi perkalian bersifat assosiatif pada \mathbb{Z}_n , maka perkalian juga assosiatif pada $\Phi(n)$, dan karena $[1]$ merupakan elemen identitas perkalian untuk \mathbb{Z}_n , maka $[1]$ juga adalah elemen identitas perkalian untuk $\Phi(n)$. Akhirnya, berdasarkan definisi, setiap elemen $\Phi(n)$ memiliki invers perkalian maka terbukti bahwa $\Phi(n)$ merupakan suatu grup.

Teorema 4.2. Grup Hingga

Jika \mathbb{G} adalah grup hingga yang berukuran n , maka untuk setiap elemen $g \in \mathbb{G}$ berlaku hubungan $g^n = e$. Teori dasar mengenai grup ini, merupakan akibat langsung dari teorema Euler.

Bukti Teorema Euler. Karena $\Phi(n)$ merupakan grup yang berukuran $|\Phi(n)| = \varphi(n)$, maka diperoleh $[a]^{\varphi(n)} = [1]$, untuk semua $[a] \in \Phi(n)$ berdasarkan teorema grup yang telah disebutkan di atas. Tetapi $[a] \in \Phi(n)$ jika dan hanya jika a adalah prima relatif dengan n dan $[a]^{\varphi(n)} = [1]$ dinyatakan sebagai $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. ■

Bukti ini digunakan untuk menunjukkan keunggulan dari abstraksi. Pembuktian pertama teorema Euler secara keseluruhan bersifat mendasar, tetapi dibutuhkan informasi yang mendetail mengenai fungsi Euler, φ . Pembuktian yang diberikan di sini hanya dilakukan dengan pemahaman

bahwa $\Phi(n)$ merupakan grup yang berukuran $\varphi(n)$ dan menerapkan suatu prinsip umum tentang grup hingga.

A.7. Soal-Soal

- 4.1. Tunjukkan bahwa himpunan simetri $\mathbb{R}_4 = \{e, r, r^2, r^3\}$ dari kartu yang berbentuk persegi, adalah grup dengan operasi komposisi simetri.
- 4.2. Tunjukkan bahwa $C_4 = \{i, -1, -i, 1\}$ adalah grup dengan operasi perkalian, yang elemen identitasnya adalah 1.
- 4.3. Misalkan grup $C_4 = \{i, -1, -i, 1\}$ dari akar keempat pada satuan bilangan kompleks dan grup $\mathbb{R}_4 = \{e, r, r^2, r^3\}$ termuat dalam grup rotasi kartu yang berbentuk persegi. Tunjukkan bahwa bijeksi
- $$\begin{aligned} e &\leftrightarrow 1 \\ r &\leftrightarrow i \\ r^2 &\leftrightarrow -1 \\ r^3 &\leftrightarrow -i \end{aligned}$$
- menghasilkan tabel perkalian yang sama dari kedua grup tersebut, yaitu bahwa jika kita menerapkan bijeksi terhadap masing-masing entri tabel perkalian \mathbb{H} maka diperoleh tabel perkalian untuk \mathbb{R} . Dengan kata lain kedua grup tersebut isomorfis.
- 4.4. Tunjukkan bahwa grup $C_4 = \{i, -1, -i, 1\}$ dari akar keempat pada satuan bilangan kompleks isomorfis dengan \mathbb{Z}_4 .

Soal-soal latihan berikut ini menunjukkan grup yang berasal dari berbagai bidang matematika dan memerlukan sedikit analisis topologi atau analisis real, atau analisis kompleks. Lewati saja soal-soal tertentu jika anda belum memiliki latarbelakang yang memadai.

- 4.5. Suatu *isometri* \mathbb{R}^3 merupakan pemetaan bijektif $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ yang memenuhi persamaan $d(T(x), T(y)) = d(x, y)$ untuk semua $x, y \in \mathbb{R}^3$. Tunjukkan bahwa himpunan isometri-isometri \mathbb{R}^3 merupakan suatu grup (anda dapat mengganti \mathbb{R}^3 dengan sebarang ruang metrik (kuliah Aljabar Linier: pelajari Aljabar Linier Elemener, Anton-Rorres)).
- 4.6. Suatu homomorfis \mathbb{R}^3 merupakan pemetaan bijektif $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sedemikian sehingga baik T maupun inversnya adalah kontinu. Tunjukkanlah bahwa

himpunan homeomorfisma \mathbb{R}^3 merupakan suatu grup dalam operasi komposisi pemetaan. Anda dapat mengganti \mathbb{R}^3 dengan sebarang ruang metrik, atau secara lebih umum, mengganti \mathbb{R}^3 dengan sebarang ruang topologi. Perhatikan perbedaan antara *homomorfisma* dengan *homeomorfisma*.

- 4.7. Suatu *diffeomorfisma* C^1 dari \mathbb{R}^3 adalah pemetaan bijektif $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ yang memiliki turunan persial pertama kontinu. Tunjukkan bahwa himpunan *diffeomorfisma* C^1 dari \mathbb{R}^3 merupakan suatu grup dalam operasi komposisi pemetaan.
- 4.8. Tunjukkan bahwa pemetaan himpunan *holomorfik bijektif* (turunan kompleks) dari suatu subset U di \mathbb{C} ke dirinya sendiri, akan membentuk suatu grup pada komposisi pemetaan.

B. Dasar-Dasar Teori Grup

Pada bagian sebelumnya telah diberikan contoh-contoh grup dan akhirnya sampai pada suatu definisi, atau sekumpulan aksioma untuk grup. Bagian ini akan dipelajari beberapa teorema grup. Bagi kebanyakan mahasiswa, hal ini merupakan pengalaman pertama dalam mengkonstruksi pembuktian-pembuktian yang melibatkan sifat-sifat aljabar yang digambarkan oleh aksioma-aksioma bersangkutan. Sangat dianjurkan agar mahasiswa meluangkan lebih banyak waktu untuk berlatih, dan tidak melangkah ke materi selanjutnya, sebelum menguasai cara-cara pembuktian tersebut.

Proposisi 4.3. Sifat Ketunggalan Identitas

Misalkan G adalah suatu grup, dan misalkan e dan e' kedua-duanya adalah elemen identitas di G . Jadi untuk semua $g \in G$, $eg = ge = e'g = ge' = g$. Hal ini menunjukkan bahwa $e = e'$, artinya elemen identitas di G adalah tunggal.

Bukti: Karena e' adalah elemen identitas, maka $e = ee'$. Selanjutnya karena e adalah juga elemen identitas, maka $ee' = e'$. Dengan demikian $e = ee' = e'$, yaitu $e = e'$. Demikian juga, invers dalam suatu grup adalah unik.

Proposisi 4.4. Sifat Ketunggalan Invers.

Misalkan G adalah suatu grup dan $h, g \in G$. Jika $hg = e$, maka $h = g^{-1}$ dan jika $gh = e$ maka $g = h^{-1}$.

Bukti. Asumsikan $hg = e$. Maka $h = he = h(gg^{-1}) = (hg)g^{-1} = eg^{-1} = g^{-1}$. Cara yang sama dapat dilakukan untuk membuktikan bahwa $gh = e$

Corollary 4.1. Misalkan g adalah salah satu elemen grup G . Maka $g = (g^{-1})^{-1}$.

Bukti: Karena $gg^{-1} = e$, maka berdasarkan proposisi bahwa g invers dari g^{-1} .

Proposisi 4.5. Misalkan G adalah suatu grup dan misalkan a, b adalah elemen-elemen grup G maka $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Bukti: Dari sifat asosiatif, $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(b(b^{-1}a^{-1})) = a((bb^{-1})a^{-1}) = a(ea^{-1}) = aa^{-1} = e$. Karena $(ab)(ab)^{-1} = e$ dan $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = e$, maka $(ab)^{-1} = (b^{-1}a^{-1})$.

Misalkan G adalah grup dan a adalah salah satu elemen grup G tersebut, maka didefinisikan suatu pemetaan $L_a: G \rightarrow G$ yaitu $L_a(x) = ax$. L_a menyatakan perkalian kiri dengan a . Sebaliknya dapat didefinisikan $R_a: G \rightarrow G$ yaitu $R_a(x) = xa$. R_a menyatakan perkalian kanan dengan a .

Proposisi 4.6. Misalkan G adalah suatu grup dan $a \in G$. Pemetaan $L_a: G \rightarrow G$ yang didefinisikan dengan $L_a(x) = ax$ adalah suatu pemetaan yang bijektif, dan pemetaan $R_a: G \rightarrow G$ yang didefinisikan dengan $R_a(x) = xa$ adalah suatu pemetaan yang bijektif.

Bukti:

$L_a^{-1}(L_a(x)) = a^{-1}(a x) = (a^{-1}a) x = e x = x$, sehingga $L_a^{-1} \circ L_a = id_G$. Perhitungan yang sama menunjukkan bahwa $L_a \circ L_a^{-1} = id_G$. Hal ini menunjukkan bahwa L_a dan L_a^{-1} merupakan invers pemetaan yang masing-masing bersifat bijektif. Pembuktian untuk R_a dilakukan dengan cara yang sama. ■

Corollary 4.2. Misalkan G adalah suatu grup dan misalkan a dan b adalah elemen-elemen di G , maka persamaan $ax = b$ memiliki solusi x yang unik di G demikian pula persamaan $xa = b$ memiliki solusi unik di G .

Bukti:

Eksistensi (adanya) solusi untuk $ax = b$ untuk semua b ekuivalen dengan sifat *surjektivitas* pemetaan L_a . *Ketunggalan* solusi untuk semua b ekuivalen dengan *injektivitas* L_a .

Demikian pula, *eksistensi* dan *ketunggalan* solusi dari $xa = b$ untuk semua b adalah ekuivalen dengan *surjektivitas* dan *injetivitas* R_a .

Corollary 4.3. Kanselasi (Penghapusan)

Misalkan x, a, y , adalah elemen-elemen dari grup G . Jika $ax = ay$, maka $x = y$. Demikian juga, jika $xa = ya$, maka $x = y$.

Bukti: Mahasiswa diharapkan sudah memahami bahwa dalam tabel perkalian, masing-masing kolom dan masing-masing baris memuat setiap elemen grup hanya satu kali. Untuk grup, pernyataan ini selalu berlaku.

Corollary 4.4. Misalkan G adalah suatu grup berhingga, maka setiap baris dan kolom pada tabel perkalian G hanya mengandung masing-masing elemen G sebanyak satu kali.

Bukti: Mahasiswa akan membuktikan pernyataan ini dalam latihan yang diberikan pada akhir bab ini.

Misalkan G adalah himpunan bilangan bulat tak nol. Diketahui bahwa persamaan $2x = 3$ tidak memiliki solusi di G , karena tidak ada $x \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi pernyataan tersebut. Demikian juga, \mathbb{Z}_{12} dengan operasi perkalian. Karena $[2][8] = [4] = [2][2]$, dan $[8] \neq [2]$ maka kanselasi tidak berlaku.

Definisi 4.3. Orde suatu grup adalah ukuran kardinalitasnya, yaitu banyaknya elemen dari grup itu sendiri. Orde suatu grup G dilambangkan dengan $|G|$.

B.1. Grup Dengan Orde Kecil

Berikut ini dijelaskan beberapa contoh grup dengan orde yang kecil.

Contoh 4.9. Untuk sebarang bilangan asli n , \mathbb{Z}_n (dengan operasi penjumlahan) adalah suatu grup berorde n . Jadi $\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \dots$ menunjukkan grup yang masing-masing berturut-turut memiliki orde 1, 2, ...

Contoh 4.10. Himpunan simetri rotasi dari suatu bidang (kartu) berbentuk persegi panjang adalah grup yang berorde 4. Perhatikan bahwa pengertian dua grup yang pada prinsipnya adalah sama:

Definisi 4.4. Dua grup G dan H adalah *isomorfis* jika terdapat pemetaan yang bijektif $\varphi: G \rightarrow H$ sedemikian sehingga untuk semua $g_1, g_2 \in G$, maka $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2)$. Pemetaan φ disebut *isomorfisme*.

Dalam soal-soal latihan, mahasiswa diminta untuk menunjukkan bahwa \mathbb{Z}_4 bukanlah isomorfis terhadap grup simetri rotasi pada suatu kartu berbentuk persegi panjang. Jadi terdapat setidaknya dua grup non-isomorfis yang berorde 4.

Definisi 4.5. Suatu grup G disebut *abelian* (atau *komutatif*) jika untuk semua elemen $a, b \in G$, berlaku $ab = ba$.

Contoh 4.11. Untuk sebarang bilangan asli n , grup simetri S_n merupakan suatu grup berorde n . Mahasiswa dapat menunjukkan bahwa untuk semua $n \geq 3$, S_n tidak abelian.

Jika dua grup isometris, maka mungkin kedua-duanya abelian, atau kedua-duanya tidak abelian. Hal ini dapat terjadi karena jika salah satu dari kedua grup tersebut abelian sedangkan grup yang lainnya tidak abelian, maka kedua grup tersebut tidak isomorfis.

Contoh 4.12. S_3 adalah grup yang tidak abelian dan \mathbb{Z}_6 adalah grup abelian. Dengan demikian kedua grup ini adalah grup tak isometrik yang berorde 6.

Grup berorde 1, 2, 3, dan 5 telah diberikan dengan masing-masing satu contoh, dan grup orde 4 dan 6 telah diberikan masing-masing dua contoh. Faktanya semua grup dapat diklasifikasikan sebagai grup yang ordenya tidak lebih dari orde 5 sebagai berikut:

Proposisi 4.7.

- (a) Berdasarkan isomorfisme, \mathbb{Z}_1 adalah grup unik yang berorde 1.
- (b) Berdasarkan isomorfisme, \mathbb{Z}_2 adalah grup unik yang berorde 2.
- (c) Berdasarkan isomorfisme, \mathbb{Z}_3 adalah grup unik yang berorde 3.
- (d) Berdasarkan isomorfisme, terdapat tepat dua grup yang berorde 4 yaitu \mathbb{Z}_4 , dan grup simetri rotasi pada suatu bidang berbentuk persegi.
- (e) Berdasarkan isomorfisme, \mathbb{Z}_5 adalah grup unik yang berorde 5.
- (f) Semua grup yang ordenya tidak lebih dari 5 adalah grup yang abelian.
- (g) Terdapat setidaknya dua grup tak isomorfis berorde 6. Salah satunya abelian dan satu tidak abelian.

Pernyataan (c) menyatakan bahwa untuk sebarang grup orde 3 adalah isomorfis dengan \mathbb{Z}_3 . Pernyataan (d) menyatakan bahwa terdapat dua grup orde 4 yang berbeda dan tidak isomorfis, dan sebarang grup orde 4 pasti isomorfis terhadap salah satu di antara grup itu.

Bukti. Mahasiswa dapat memahami bukti pernyataan (a) sampai (e) melalui latihan-latihan. Mahasiswa dapat mencoba menyusun tabel perkalian, kemudian menyelidiki batasan bahwa setiap elemen grup haruslah muncul tepat satu kali dalam setiap baris dan kolom.

Pernyataan (a) sampai (e) menghasilkan daftar yang lengkap berdasarkan sifat isomorfis, dari grup yang ordenya tidak lebih dari 5 kemudian memperhatikan daftar tersebut bahwa semuanya bersifat abelian. Akhirnya \mathbb{Z}_6 dan S_3 adalah dua grup tak isomorfis berorde 6 dengan S_3 tidak abelian.

Proposisi 4.8. Jika $\varphi: G \rightarrow H$ isomorfisme, maka $\varphi(e_G) = e_H$ dan untuk setiap $g \in G$, $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$.

Bukti. Untuk sebarang $h \in H$, terdapat $g \in G$ sehingga $\varphi(g) = h$. Akibatnya $j(e_G)h = j(e_G)j(g) = j(e_Gg) = j(g) = h$. Karena sifat ketunggalan elemen identitas di H maka $j(e_G) = e_H$. Demikian juga, $j(g^{-1})j(g) = j(g^{-1}g) = j(e_G) = e_H$. Hal ini membuktikan bahwa $j(g^{-1}) = j(g)^{-1}$.

B.2. Hukum Asosiatif Umum

Misalkan suatu himpunan M dengan operasi asosiatif yang dinyatakan dengan posisi berjajar. Operasi tersebut memungkinkan dilakukannya perkalian antara dua elemen hanya sebanyak satu kali setiap operasi, tetapi perkalian dapat dilakukan tiga kali atau lebih dengan cara mengelompokkan elemen-elemen sedemikian sehingga hanya dua elemen yang dapat diperkalikan setiap operasi. Untuk tiga elemen, terdapat dua pengelompokan yang

mungkin, yaitu $a(bc)$ dan $(ab)c$, tetapi menurut hukum assosiatif, kedua perkalian pengelompokan ini adalah sama. Jadi perkalian dari tiga elemen akan terdefinisi, tidak tergantung pada cara pengelompokan ketiga elemen tersebut. Pengelompokan untuk perkalian empat elemen-elemen dapat dilakukan dalam lima cara yaitu

$$a(bcd), a((bc)d), (ab)(cd), (a(bc))d, \text{ dan } ((ab)c)d$$

tetapi menurut hukum assosiatif, dua pengelompokan pertama dan dua pengelompokan terakhir adalah sama. Jadi paling banyak terdapat tiga pengelompokan perkalian yang dapat dilakukan pada empat elemen yaitu

$$a(bcd), (ab)(cd), \text{ dan } (abc)d$$

Dengan menggunakan hukum assosiatif, dapat ditunjukkan bahwa ketiga perkalian di atas adalah sama:

$$a(bcd) = a(b(cd)) = (ab)(cd) = ((ab)c)d = (abc)d$$

Untuk perkalian lima elemen, terdapat 14 cara pengelompokan yang masing-masing menghasilkan nilai yang sama tetapi kita tidak akan menyusun daftar semua perkalian tersebut. *Karena terdapat tiga pengelompokan untuk perkalian empat elemen atau kurang, tidak tergantung pada cara mengelompokkan elemen-elemen tersebut, maka terdapat empat pengelompokan untuk perkalian lima elemen.*

$$a(bcde), (ab)(cde), (abc)(de), \text{ dan } (abcd)e$$

menurut hukum assosiatif, diketahui bahwa

$$a(bcde) = a(b(cde)) = (ab)(cde),$$

dan seterusnya, sehingga diperoleh proposisi tentang Hukum Assosiatif Umum sebagai berikut:

Proposisi 4.9. Hukum Asosiatif Umum.

Misalkan M adalah suatu himpunan dengan operasi asosiatif, $M \times M \rightarrow M$ dituliskan berturut-turut. Untuk setiap $n \geq 1$, terdapat suatu perkalian unik $M^n \rightarrow M$,

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \mapsto a_1 a_2 a_3 \dots a_n,$$

sedemikian sehingga

- (a) Perkalian satu elemen adalah elemen itu sendiri $(a) = a$.
- (b) Perkalian dua elemen $(ab) = ab$
- (c) Untuk semua $n \geq 2$, untuk semua $a_1, a_2, \dots, a_n \in M$, dan untuk semua $1 \leq k \leq n-1$, $a_1 a_2 a_3 \dots a_n = (a_1 a_2 \dots a_k)(a_{k+1} a_{k+2} \dots a_n)$

Bukti. Untuk $n \leq 2$ hasilkalinya secara unik ditentukan oleh (a) dan (b). Untuk $n = 3$ hasil perkalian unik yang memiliki sifat (c) berdasarkan hukum asosiatif. Sekarang misalkan $n > 3$ dan andaikan bahwa untuk $1 \leq r \leq n$, maka hasil perkalian dari r elemen memenuhi sifat (a) sampai (c) secara unik. Tetapkan elemen-elemen $a_1, a_2, \dots, a_n \in M$. Dengan hipotesis induksi matematika, maka hasilkali $n-1$ elemen adalah

$$p_k = (a_1 \dots a_k)(a_{k+1} \dots a_n),$$

yang terdiri atas $n-1$ elemen. Selanjutnya, $p_k = p_{k+1}$ untuk $1 \leq k \leq n-2$, karena

$$\begin{aligned} p_k &= (a_1 \dots a_k)(a_{k+1} \dots a_n) &&= (a_1 \dots a_k)(a_{k+1}(a_{k+2} \dots a_n)) \\ &= ((a_1 \dots a_k)a_{k+1})(a_{k+2} \dots a_n) &&= (a_1 \dots a_{k+1})(a_{k+2} \dots a_n) \\ &= p_{k+1} \end{aligned}$$

Jadi semua perkalian p_k adalah sama, dan perkalian dari n elemen yang memenuhi sifat (a) sampai (c) dapat didefinisikan dengan

$$a_1 a_2 \dots a_n = a_1(a_2 \dots a_n)$$

B.3. Subgrup dan Grup Cyclic

Definisi 4.6. Suatu subset yang tak kosong H dari grup G disebut *subgrup* jika H merupakan grup dengan operasi grup yang diwariskan dari G . Untuk menyatakan bahwa H subgrup dari G maka dituliskan $H \subseteq G$ (sering juga dinyatakan dengan simbol $H \leq G$).

Untuk suatu subset H yang tak kosong, H disebut subgrup dari G jika:

1. Untuk setiap elemen h_1 dan h_2 di H , hasilkali $h_1 h_2$ juga elemen H .
2. Untuk semua h elemen H , invers h^{-1} juga elemen H .

Syarat-syarat ini merupakan syarat cukup untuk H sebagai subgrup. Asosiativitas perkalian diturunkan dari G oleh karena itu tidak perlu dibuktikan lagi. Juga, jika syarat (1) dan (2) terpenuhi, maka elemen identitas e otomatis berada di H ; karena H tak kosong, berarti H mempunyai elemen h ; berdasarkan sifat (2), maka juga terdapat $h^{-1} \in H$, dan menurut sifat (1), $e = hh^{-1} \in H$.

Langkah-langkah di atas merupakan perangkat yang sangat ampuh, karena seringkali untuk membuktikan apakah H merupakan grup dengan operasi, H itu sendiri sudah merupakan elemen dari grup lain yang telah diketahui. Jadi hanya perlu dibuktikan sifat (1) dan (2).

Subset H dari G dikatakan tertutup dengan operasi perkalian jika syarat (1) terpenuhi. Jika syarat (2) terpenuhi maka dikatakan bahwa H tertutup pada operasi invers.

Contoh 4.13. Suatu matriks A yang berukuran $n \times n$ dikatakan *ortogonal* jika $A^t A = E$. Tunjukkanlah bahwa himpunan $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ yang terdiri atas matriks-matriks ortogonal berukuran $n \times n$ adalah suatu grup.

Bukti. Jika $A \in O(n, \mathbb{R})$, maka A memiliki invers kiri A^t , sehingga A merupakan matriks yang terbalikkan dengan invers A^t . Jadi $O(n, \mathbb{R}) \subseteq GL(n, \mathbb{R})$. Oleh karena itu, cukup dibuktikan bahwa perkalian matriks-matriks ortogonal adalah ortogonal dan bahwa invers dari matriks ortogonal adalah ortogonal. Tetapi jika A dan B ortogonal, maka $(AB)^t = B^t A^t = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}$; berarti AB ortogonal. Jika $A \in O(n, \mathbb{R})$ maka $(A^{-1})^t = (A^t)^t = A = (A^{-1})^{-1}$ sehingga diperoleh $A^{-1} \in O(n, \mathbb{R})$. ■

Berikut ini diberikan beberapa contoh subgrup.

Contoh 4.14. Dalam sebarang grup G , G itu sendiri dan $\{e\}$ merupakan subgrup.

Contoh 4.15. Himpunan semua bilangan kompleks dengan modulus (nilai mutlak) sama dengan 1 merupakan suatu subgrup dari grup semua bilangan kompleks bukan nol dengan operasi biner perkalian.

Bukti. Untuk sebarang bilangan kompleks a dan b yang bukan nol, $|ab| = |a||b|$ dan $|a^{-1}| = |a|^{-1}$. Hal ini menunjukkan bahwa himpunan bilangan kompleks modulus 1 tertutup pada operasi perkalian dan invers. ■

Contoh 4.16. Pada grup simetri suatu persegi, subset $\{e, r, r^2, r^3\}$ merupakan suatu subgrup. Demikian juga, subset $\{e, r^2, a, b\}$ adalah suatu subgrup. Subgrup yang kedua ini isomorfis dengan grup simetri dari suatu persegi panjang, karena kuadrat dari setiap elemen selain identitas sama dengan identitas dan perkalian dari sebarang dua elemen bukan identitas akan sama dengan elemen yang ketiga. (Buktikan).

Contoh 4.17. Di dalam grup permutasi S_4 , himpunan permutasi π yang memenuhi $\pi(4) = 4$ adalah suatu subgrup. Karena subgrup ini mengakibatkan

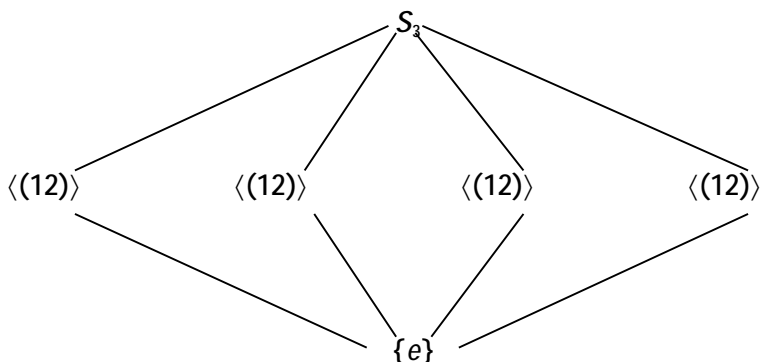
permutasi pada $\{1, 2, 3\}$ tetapi 4 tidak berubah, maka permutasi tersebut isomorfis dengan S_3 .

Proposisi 4.10. Misalkan G adalah suatu grup dan $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ adalah subgrup dari G , maka $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap \dots \cap H_n$ merupakan subgrup dari G . Secara umum, jika $\{H_\alpha\}$ adalah sebarang subgrup, maka $\bigcap_\alpha H_\alpha$ adalah subgrup.

Untuk sebarang grup G dan sebarang subset $S \subseteq G$, terdapat subgrup terkecil dari G yang memuat S , yang disebut *subgrup tergenerateasi oleh G* dan dilambangkan dengan $\langle S \rangle$. Jika $S = \{a\}$ merupakan *singelton*, maka subgrup yang dibangun oleh S dilambangkan dengan $\langle a \rangle$ dan dikatakan bahwa G digenerasikan oleh S atau S menggenerasikan G jika $G = \langle S \rangle$. Tinjauan "konstruktif" dari $\langle S \rangle$ adalah bahwa $\langle S \rangle$ terdiri atas semua kemungkinan perkalian $g_1 g_2 \dots g_n$, dengan $g_i \in S$ atau $g_i^{-1} \in S$. Dengan kata lain $\langle S \rangle$ adalah irisan dari kumpulan semua subgrup G yang memuat S . Kumpulan ini tak kosong karena G sendiri tergolong dalam subgrup ini.

B.4. Grup Siklik dan Subgrup Siklik

Ada suatu tipe subgrup yang terdapat di dalam semua grup. Misalkan G adalah sebarang grup dan $a \in G$. Perhatikan semua pangkat dari a :



Gambar 4.1. Lattice subgrup S_3

Didefinisikan $a^0 = e$, $a^1 = a$, dan untuk $k > 1$, a^k didefinisikan sebagai perkalian a sebanyak k faktor. Untuk $k > 1$ didefinisikan juga bahwa $a^{-k} = (a^{-1})^k$. Diketahui bahwa a^k terdefinisi untuk semua bilangan bulat k , dan merupakan fakta bahwa $a^k a^l = a^{k+l}$ untuk semua bilangan bulat k dan l . Demikian juga dapat ditunjukkan bahwa untuk semua bilangan bulat k , $(a^k)^{-1} = a^{-k}$ dan $a^{kl} = (a^k)^l$ untuk semua bilangan bulat k dan l . Semua pernyataan di atas dapat dibuktikan dengan induksi matematika, dan mahasiswa akan melatih pembuktian ini lebih banyak melalui kuliah Matematika Diskrit atau mata kuliah lainnya.

Proposisi 4.11. Misalkan a adalah elemen dari grup G . Subgrup $\langle a \rangle$ yang digenerasikan oleh a adalah $\{a^k: k \in \mathbb{Z}\}$.

Bukti: Rumus $a^k a^l = a^{k+l}$ dan $(a^k)^{-1} = a^{-k}$ menunjukkan bahwa $\{a^k: k \in \mathbb{Z}\}$ adalah suatu subgrup dari G yang memuat $a = a^1$. Oleh karena itu $\langle a \rangle \subseteq \{a^k: k \in \mathbb{Z}\}$. Sebaliknya, suatu subgrup selalu bersifat tertutup pada operasi pemangkatan dengan bilangan bulat, jadi $\langle a \rangle \supseteq \{a^k: k \in \mathbb{Z}\}$. ■

Definisi 4.7. Misalkan a adalah elemen dari grup G . Himpunan $\langle a \rangle = \{a^k: k \in \mathbb{Z}\}$ disebut *subgrup siklik yang digenerasikan oleh a* . Jika terdapat suatu elemen $a \in G$ sedemikian sehingga $\langle a \rangle$ maka G disebut grup siklik, dan a dikatakan *generator* dari grup siklik tersebut.

Contoh 4.18. Misalkan $G = \mathbb{Z}$ dengan operasi biner penjumlahan. Selanjutnya ambil sebarang $d \in \mathbb{Z}$. Karena operasi biner dalam grup itu adalah penjumlahan, maka himpunan d berpangkat dengan operasi penjumlahan adalah himpunan operasi perkalian bilangan bulat dari d . Sebagai contoh, pangkat 3 dari d adalah $d + d + d = 3d$. Jadi, $\langle d \rangle = d\mathbb{Z} = \{nd: n \in \mathbb{Z}\}$ adalah suatu grup siklik dari \mathbb{Z} . Perhatikan bahwa $\langle d \rangle = \langle -d \rangle$. \mathbb{Z} sendiri adalah siklik, karena $\langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle = \mathbb{Z}$.

Contoh 4.19. Dalam \mathbb{Z}_n , subgrup siklik yang digenerasikan oleh elemen $[d]$ adalah $\langle [d] \rangle = \{[kd] : k \in \mathbb{Z}\} = \{[k][d] : [k] \in \mathbb{Z}_n\}$. \mathbb{Z}_n adalah siklik karena $\langle [1] \rangle = \mathbb{Z}_n$.

Contoh 4.20. Misalkan C_n menyatakan himpunan akar-akar ke- n dari satuan bilangan-bilangan kompleks.

(a) $C_n = \{e^{2\pi i k/n} : 0 \leq k \leq n-1\}$

(b) C_n adalah grup siklik berorde n dengan generator $\xi = e^{2\pi i/n}$

Bukti: C_n merupakan subgrup dari grup perkalian dari bilangan-bilangan kompleks karena perkalian dari dua akar ke- n dari satuan bilangan kompleks adalah akar ke- n dari satuan bilangan kompleks, dan invers dari akar ke- n adalah juga akar ke- n atau satuan bilangan kompleks.

Jika z adalah salah satu akar ke- n dari satuan dalam bilangan kompleks, maka $|z|^n = |z^n| = 1$; jadi $|z|$ akar ke- n positif dari satuan, maka $|z| = 1$. Oleh itu, z akan berbentuk $z = e^{i\theta}$ dengan $\theta \in \mathbb{R}$. Selanjutnya, diketahui $1 = z^n = e^{in\theta}$. Dengan demikian $n\theta$ merupakan perkalian bilangan bulat dari 2π dan $z = e^{2\pi i k/n}$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$. Bilangan-bilangan ini adalah bilangan pangka dari $\xi = e^{2\pi i/n}$ yang berorde n . ■

Contoh 4.21. Himpunan semua pangkat dari r dalam simetri persegi adalah $\{e, r, r^2, r^3\}$. Ada dua kemungkinan grup siklik $\langle a \rangle$. Salah satu kemungkinan adalah a^k yang berbeda yaitu subgrup $\langle a \rangle$ tak berhingga. Dalam hal ini dikatakan bahwa a memiliki orde tak berhingga.

Kemungkinan kedua adalah bahwa kedua pangkat dari a adalah sama. Misalkan $k < l$ dan $a^k = a^l$. Maka $e = (a^k)^{-1}a^l = a^{l-k}$, sehingga beberapa pangkat positif dari a adalah identitas. Misalkan n adalah bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga $a^n = e$. Selanjutnya $e, a, a^2, \dots, a^{n-1}$ semuanya berbeda dan $a^n = e$. Untuk sebarang bilangan bulat k (positif maupun negatif) dapat dituliskan sebagai $k = mn + r$, dimana r menyatakan sisa, yang memenuhi $0 \leq r \leq n-1$. Karena itu $a^{mn+r} = a^{mn}a^r = e^ma^r = ea^r = a^r$. Jadi $\langle a \rangle =$

$\{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$. Selanjutnya $a^k = a^l$ jika dan hanya jika k dan l memiliki sisa hasil bagi dari n , jika dan hanya jika $k \equiv l \pmod{n}$.

Definisi 4.8. Orde dari subgrup siklik yang digenerasikan oleh a disebut *orde dari a* . Orde dari a dituliskan dengan notasi $\mathcal{O}(a)$.

Proposisi 4.12. Jika orde dari a tidak berhingga maka orde tersebut merupakan bilangan positif terkecil n sedemikian sehingga $a^n = e$. Selanjutnya $\langle a \rangle = \{a^k : 0 \leq k \leq \mathcal{O}(a)\}$.

Contoh 4.22. Tentukanlah orde $[4]$ dari \mathbb{Z}_{14} .

Jawab: Karena operasi biner pada grup \mathbb{Z}_{14} adalah operasi penjumlahan, maka pangkat dari suatu elemen adalah perkalian. Jadi $2[4] = [8]$, $3[4] = [12]$, $4[4] = [2]$, $5[4] = [6]$, $6[4] = [10]$, $7[4] = [0]$. Dengan demikian orde dari $[4]$ adalah 7.

Contoh 4.23. Tentukanlah orde dari $[5]$ dalam $\Phi(14)$.

Jawab: Diketahui $[5]^2 = [11]$, $[5]^3 = [13]$, $[5]^4 = [9]$, $[5]^5 = [3]$, $[5]^6 = [1]$, maka orde dari $[5]$ adalah 6. Perhatikan bahwa $|\Phi(14)| = \varphi(14) = 6$, sehingga perhitungan ini menunjukkan bahwa $\Phi(14)$ adalah siklik dengan generator $[5]$.

Proposisi 4.13. Misalkan a adalah elemen dari grup G .

- (a) Jika a memiliki orde yang tak berhingga, maka $\langle a \rangle$ isomorfis dengan \mathbb{Z} .
- (b) Jika a memiliki orde n berhingga, maka $\langle a \rangle$ isomorfis dengan grup \mathbb{Z}_n .

Bukti: Untuk bagian (a), definisikan pemetaan $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \langle a \rangle$ dengan $\varphi(k) = a^k$. Pemetaan ini surjektif berdasarkan definisi $\langle a \rangle$ dan juga injektif karena semua pangkat a berbeda. Selanjutnya $\varphi(k + l) = a^{k+l} = a^k a^l$, jadi φ isomorfis antara \mathbb{Z} dengan $\langle a \rangle$.

Untuk bagian (b), karena \mathbb{Z}_n memiliki n elemen yaitu $[0], [1], [2], \dots, [n-1]$ dan $\langle a \rangle$ memiliki n elemen yaitu $e, a, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}$, maka dapat didefinisikan suatu pemetaan bijeksi $\varphi: \mathbb{Z}_n \rightarrow \langle a \rangle$ dengan $\varphi([k]) = a^k$ untuk $0 \leq k \leq n-1$.

Perkalian (jumlah) dari \mathbb{Z}_n dinyatakan dengan $[k] + [l] = [r]$, dimana r adalah sisa setelah pembagian $k + l$ dengan n . Perkalian $\langle a \rangle$ diberikan dengan aturan analogi: $a^k a^l = a^{k+l} = a^r$, dimana r adalah sisa setelah pembagian $k + l$ dengan n . Karena itu, ϕ isomorfis. ■

B.5. Subgrup dari Grup Siklik

Karena semua grup siklik isomorfis dengan \mathbb{Z} maupun dengan \mathbb{Z}_n untuk beberapa n , maka subgrup dari grup siklik cukup dibuktikan dengan menentukan subgrup dari \mathbb{Z} dan subgrup dari \mathbb{Z}_n .

Proposisi 4.14.

- (a) Misalkan H adalah subgrup dari \mathbb{Z} , maka $H = \{0\}$ atau terdapat $d \in \mathbb{N}$ yang unik sedemikian sehingga $H = \langle d \rangle = d\mathbb{Z}$.
- (b) Jika $d \in \mathbb{N}$ maka $d\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$.
- (c) Jika $a, b \in \mathbb{N}$, maka $a\mathbb{Z} \subseteq b\mathbb{Z}$ jika dan hanya jika b membagi a .

Bukti: Pertama, akan ditinjau bagian (c). Jika $a\mathbb{Z} \subseteq b\mathbb{Z}$ maka $a \in b\mathbb{Z}$, sehingga b membagi a . Sebaliknya, jika $b|a$ maka $a \in b\mathbb{Z}$ sehingga $a\mathbb{Z} \subseteq b\mathbb{Z}$. Selanjutnya akan diperiksa bagian (a). Misalkan H adalah suatu subgrup dari \mathbb{Z} . Jika $H \neq \{0\}$, maka H mengandung bilangan bulat tak nol; karena H mengandung elemen negatif yang merupakan lawan dari setiap bilangan bulat positif sebarang, maka H mengandung elemen bulat positif. Misalkan d adalah elemen terkecil dari $H \cap \mathbb{N}$ maka dapat diklaim bahwa $H = d\mathbb{Z}$. Karena $d \in H$, maka $\langle d \rangle = d\mathbb{Z} \subseteq H$. Sebaliknya misalkan $h \in H$ dan menyatakan $h = qd + r$, dimana $0 \leq r < d$. Karena $h \in H$ dan $qd \in H$ maka $r = h - qd \in H$. Tetapi karena d adalah elemen terkecil dari H dan $r < d$, maka $r = 0$. Dengan demikian $h = qd \in d\mathbb{Z}$. Hal ini menunjukkan bahwa $H \subseteq d\mathbb{Z}$.

Telah diperlihatkan bahwa ada $d \in \mathbb{N}$ sehingga $d\mathbb{Z} = H$. Jika juga $d' \in \mathbb{N}$ dan $d'\mathbb{Z} = H$ maka berdasarkan (a), d dan d' saling membagi. Dan karena keduanya positif, maka d dan d' . Hal ini membuktikan bahwa d dalam bagian (a) adalah unik.

Akhirnya untuk membuktikan (b), diketahui bahwa $a \mapsto da$ merupakan isomorfisme yang onto dari \mathbb{Z} ke $d\mathbb{Z}$. ■

Corollary 4.5. Setiap subgrup dari \mathbb{Z} selain $\{0\}$ isomorfis dengan \mathbb{Z} .

Lemma 4.2. Misalkan $n \geq 2$ dan misalkan d adalah pembagi positif untuk n . Subgrup siklik $\langle [d] \rangle$ yang digenerasikan oleh $[d]$ di dalam \mathbb{Z}_n memiliki kardinalitas $|\langle [d] \rangle| = n/d$.

Bukti: Orde dari $[d]$ adalah bilangan bulat terkecil s sedemikian sehingga $s[d] = [0]$ adalah bilangan bulat terkecil s sedemikian sehingga n membagi sd . Tentu saja bilangan yang dimaksud adalah n/d , karena d membagi n .

Proposisi 4.15. Misalkan H adalah subgrup dari \mathbb{Z}_n .

- (a) $H = \{[0]\}$ atau terdapat $d > 0$ sedemikian sehingga $H = \langle [d] \rangle$.
- (b) Jika d adalah bilangan yang lebih kecil dari bilangan bulat positif s sehingga $H = \langle [s] \rangle$, maka $d|H| = n$.

Bukti: Misalkan H adalah subgrup dari \mathbb{Z}_n . Jika $H \neq \{[0]\}$ dan d menyatakan bilangan terkecil dari bilangan bulat positif s sedemikian sehingga $[s] \in H$. Penjelasan yang sama dengan yang digunakan pada Proposisi 2.2.21 (a) menunjukkan bahwa $\langle [d] \rangle = H$. Jelas hal ini menunjukkan bahwa d juga merupakan bilangan terkecil dari bilangan bulat positif s sedemikian sehingga $\langle [s] \rangle = H$. Dengan menuliskan $n = qd + r$, dimana $0 \leq r < d$ maka diketahui bahwa $[r] = -q[d] \in \langle [d] \rangle$. Selanjutnya karena $r < d$ dan d adalah bilangan terkecil dari bilangan bulat s sedemikian sehingga $[s] \in \langle [d] \rangle$ maka $r = 0$. Jadi n dapat dibagi dengan d . Berdasarkan Lemma 4.2. di atas, $|H| = n/d$.

Corollary 4.6. Ambil sebarang bilangan asli $n \geq 2$.

- (a) Sebarang subgrup dari \mathbb{Z}_n adalah subgrup siklik.
- (b) Sebarang subgrup dari \mathbb{Z}_n memiliki kardinalitas yang membagi n .

Bukti: Dapat dibuktikan secara langsung dari proposisi.

Corollary 4.7. Ambil sebarang bilangan asli $n \geq 2$.

- (a) Untuk sebarang bilangan positif pembagi q dari n , terdapat subgrup \mathbb{Z}_n yang unik dengan kardinalitas (keterbilang) q yaitu $\langle [n/q] \rangle$.
- (b) Untuk sebarang dua subgrup H dan H' dari \mathbb{Z}_n , maka $H \subseteq H'$ jika dan hanya jika $|H|$ membagi $|H'|$.

Bukti:

Jika q adalah bilangan positif yang membagi n , maka kardinalitas $\langle [n/q] \rangle$ adalah q , berdasarkan Lemma 4.2. Sebaliknya jika H adalah subgrup dengan kardinalitas q , maka menurut Proposisi 4.15. (b), n/q adalah bilangan terkecil dari bilangan bulat positif s sedemikian sehingga $s \in H$ dan $H = \langle [n/q] \rangle$. Jadi $\langle [n/q] \rangle$ adalah subgrup yang unik dari \mathbb{Z}_n dengan kardinalitas q .

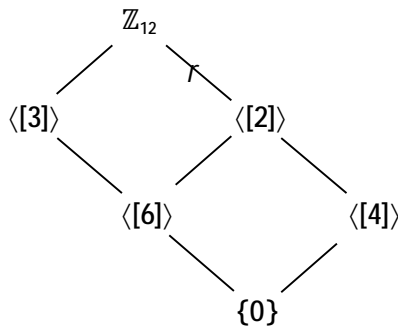
Bagian (b) sebagai latihan bagi mahasiswa untuk dibuktikan.

Contoh 4.24.

Tentukanlah semua subgrup dari \mathbb{Z}_{12} dan semua anggota antara subgrup tersebut.

Jawab:

Diketahui bahwa \mathbb{Z}_{12} memiliki tepat satu subgrup dengan kardinalitas q untuk setiap pembagi yang positif dari 12. Ukuran subgrup-subgrup tersebut adalah 1, 2, 3, 4, 6, dan 12. Generator kanonik dari subgrup-subgrup ini adalah $[0]$, $[6]$, $[4]$, $[3]$, $[2]$, dan $[1]$. Relasi inklusi antara subgrup-subgrup dari \mathbb{Z}_{12} dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 4.2. Kisi-kisi subgrup \mathbb{Z}_{12}

Corollary 4.8. Misalkan $b \in \mathbb{Z}$, dengan $b \neq 0$.

- (a) Subgrup siklik $\langle [b] \rangle$ dari \mathbb{Z}_n yang digenerasikan oleh $[b]$ adalah sama dengan subgrup siklik yang digenerasikan oleh $[d]$, dengan $d = \text{fpb}(b, n)$
- (b) Orde dari $[b]$ di dalam \mathbb{Z}_n adalah $n/\text{fpb}(b, n)$
- (c) Dalam keadaan khusus, $\langle [b] \rangle = \mathbb{Z}_n$ jika dan hanya jika b prima relatif dengan n .

Bukti. Salah satu karakteristik dari $d = \text{fpb}(b, n)$ ialah sebgaia bilangan bulat positif terkecil dalam himpunan $\{\beta b + \nu n : \beta, \nu \in \mathbb{Z}\}$. Tetapi karena d juga adalah bilangan bulat positif terkecil s sedemikian sehingga s kongruen modulo n dengan suatu hasil kali bilangan bulat dengan b , atau dengan kata lain bilangan bulat positif terkecil s sedemikian sehingga $[s] \in \langle [b] \rangle$. Berdasarkan pembuktian Proposisi 2.2.2.24., $\langle [d] \rangle = \langle [b] \rangle$. Orde dari $[b]$ adalah juga orde dari $\langle [b] \rangle$, yaitu n/d , menurut Proposisi 2.2.24 (b). Bagian (c) dapat dilatih oleh mahasiswa.

Contoh 4.25. Tentukanlah semua generator dari \mathbb{Z}_{12} . Tentukan semua $[b] \in \mathbb{Z}_{12}$ sedemikian sehingga $\langle [b] \rangle = \langle [3] \rangle$, yaitu subgrup unik yang berorde 4. Generator \mathbb{Z}_{12} adalah $[a]$ sedemikian sehingga $1 \leq a \leq 11$ dan a prima relatif dengan 12. Jadi generator \mathbb{Z}_{12} adalah $[1][5][7][11]$. Generator $\langle [3] \rangle$ adalah $[b]$ yaitu $\text{fpb}(b, 12) = \text{fpb}(3, 12) = 3$. Daftar semua generator ini adalah $[3], [9]$.

Proposisi 4.16. Setiap subgrup dari suatu grup siklik adalah siklik.

Proposisi 4.17. Misalkan a adalah suatu elemen yang memiliki orde n yang berhingga di dalam suatu grup. Maka $\langle a^k \rangle = \langle a \rangle$ jika dan hanya jika k merupakan prima relatif dengan n . Banyaknya generator $\langle a \rangle$ adalah $\phi(n)$.

Proposisi 4.18. Misalkan a adalah suatu elemen yang memiliki orde n yang berhingga di dalam suatu grup. Untuk setiap bilangan bulat positif q yang membagi n , $\langle a \rangle$ memiliki suatu subgrup unik yang berorde q .

Proposisi 4.19. Misalkan a adalah suatu elemen yang memiliki orde n yang berhingga di dalam suatu grup. Untuk setiap bilangan bulat tak nol s , a^s memiliki orde $n/\text{fpb}(n, s)$.

Contoh 4.26. Grup $\Phi(2^n)$ memiliki orde $\phi(2^n) = 2^{n-1}$. $\Phi(2)$ memiliki orde 1, dan $\Phi(4)$ memiliki orde 2, jadi $\Phi(2^n)$ adalah grup siklik. Faktanya, ketiga elemen $[2^{n-1}]$ dan $[2^{n-1} \pm 1]$ berbeda dan masing-masing memiliki orde 2. Tetapi $\Phi(2^n)$ siklik, maka grup tersebut memiliki subgrup yang unik dengan orde 2 yang merupakan elemen unik dengan orde 2.

Teorema 4.3. Misalkan G adalah grup siklik dengan $a \in G$ sebagai generator, dan misalkan H adalah subgrup dari G . maka ada:

- $H = \{e\} = \langle e \rangle$, atau
- Jika $H \neq \{e\}$, maka $H = \langle a^k \rangle$ di mana k adalah bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga $a^k \in H$.

Bukti: Misalkan $G = \langle a \rangle$, dengan $a \in G$. H subgrup G dan $H \neq \{e\}$ maka H memuat a^j untuk suatu $j \neq 0$, sedemikian sehingga terdapat $(a^j)^{-1} = a^{-j} \in H$. Selanjutnya karena a^j dan $a^{-j} \in H$ maka H memuat a^m untuk suatu m bilangan bulat positif. Karena m adalah bilangan bulat positif menurut aksioma terurut

rapi maka terdapat $k \in \mathbb{N}$ yang merupakan bilangan bulat terkecil sedemikian sehingga $a^k \in H$. Karena $a^k \in H$ maka $a^{kt} = (a^k)^t \in H$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\langle a^k \rangle = H$. Ambil sebarang $y \in H$ dan karena H merupakan subgrup dari G , maka $y \in G$ akibatnya $y = a^n \in H$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa $k \leq n$ dan dari algoritma pembagian pada \mathbb{Z} diperoleh $n = kq + r$ untuk suatu $q, r \in \mathbb{Z}$ dan $0 \leq r < k$. Dengan demikian $a^n = a^{kq+r} = a^{kq} \times a^r$ dan $a^r = (a^k)^{-q} \times a^n$. Karena $a^k, a^n \in H$ maka $(a^k)^{-q} \in H$ dan $(a^k)^{-q} \times a^n \in H$ dimana H adalah grup.

Dengan demikian didapatkan $a^r = (a^k)^{-q} \times a^n \in H$. Karena k merupakan bilangan terkecil sehingga $a^k \in H$ dan karena $0 \leq r < k$, dengan kata lain $r = 0$ sehingga $a^r = a^0 = e$. Jadi $a^n = a^{kq+r} = a^{kq} = (a^k)^q$ karena untuk sebarang $y \in H$ berlaku $y = a^n = a^{kq+r} = a^{kq} = (a^k)^q$ jadi terbukti bahwa $\langle a^k \rangle = H$.

Corollary 4.9. Sembarang Subgrup dari Grup Siklik adalah Siklik

Bukti: Misalkan G adalah Grup Siklik dan H subgrup G

a. Kasus I

Jika $H = \{e\}$, jelas bahwa $\langle e \rangle = H$ sehingga H merupakan grup siklik.

b. Kasus II

Jika $H \neq \{e\}$, berdasarkan Teorema 4.3. maka $\langle a^k \rangle = H$ dengan kata lain H merupakan grup siklik. Jadi terbukti bahwa sembarang subgrup dari grup siklik adalah Siklik

Contoh 4.27.

1. Diketahui $\mathbb{Z}_6 = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$ dengan operasi jumlah dan misalkan H merupakan subgrup dari \mathbb{Z}_6 . Carilah subgrup dari \mathbb{Z}_6

Jawab: \mathbb{Z}_6 dengan operasi penjumlahan merupakan grup siklik sehingga menurut Teorema 4.3. berakibat $H = \langle a \rangle$, untuk suatu $a \in \mathbb{Z}_6$. Perhatikan bahwa:

a. Jika $a = [0]$, maka $\langle [0] \rangle = \{[0]\}$

b. Jika $a = [1]$ maka,

$$0 [1] = [0] \qquad 4 [1] = [4]$$

$$1 [1] = [1] \qquad 5 [1] = [5]$$

$$2 [1] = [2]$$

$$3 [1] = [3]$$

$$\text{Jadi } \langle [1] \rangle = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\} = \mathbb{Z}_6$$

c. Jika $a = [2]$ maka,

$$0 [2] = [0] \qquad 3 [2] = [0]$$

$$1 [2] = [2] \qquad 4 [2] = [2]$$

$$2 [2] = [4] \qquad 5 [2] = [4]$$

$$\text{Jadi } \langle [2] \rangle = \{[0], [2], [4]\}$$

d. Jika $a = [3]$ maka,

$$0 [3] = [0] \qquad 3 [3] = [3]$$

$$1 [3] = [3] \qquad 4 [3] = [0]$$

$$2 [3] = [0] \qquad 5 [3] = [3]$$

$$\text{Jadi } \langle [3] \rangle = \{[3], [0]\}$$

e. Jika $a = [4]$ maka,

$$0 [4] = [0] \qquad 3 [4] = [0]$$

$$1 [4] = [4] \qquad 4 [4] = [4]$$

$$2 [4] = [2] \qquad 5 [4] = [2]$$

$$\text{Jadi } \langle [4] \rangle = \{[0], [4], [2]\} = \langle [2] \rangle$$

f. Jika $a = [5]$ maka,

$$0 [5] = [0] \qquad 3 [5] = [3]$$

$$1 [5] = [5] \qquad 4 [5] = [2]$$

$$2 [5] = [4] \qquad 5 [5] = [1]$$

$$\text{Jadi } \langle [5] \rangle = \{[0], [5], [4], [3], [2], [1]\} = \langle [1] \rangle = \mathbb{Z}_5.$$

Sehingga, subgrup-subgrup dari \mathbb{Z}_6 adalah $\{[0]\}$, $\{[0],[2],[4]\}$, $\{[0],[3]\}$ dan \mathbb{Z}_6 itu sendiri.

B.6. Grup Dihedral

Pada bagian ini akan dibahas mengenai grup simetri dari poligon biasa dan dari cakram piringan yang dapat dipandang sebagai suatu "limit" dari poligon biasa sebagai banyaknya sisi poligon. Bangun geometri ini dipandang sebagai keping tipis yang dapat diputar dalam arah tiga dimensi. Grup-grup simetrinya dikenal secara kolektif sebagai *grup dihedral*.

Pertama-tama akan dijabarkan suatu cakram,

$$\left\{ (x,y) : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

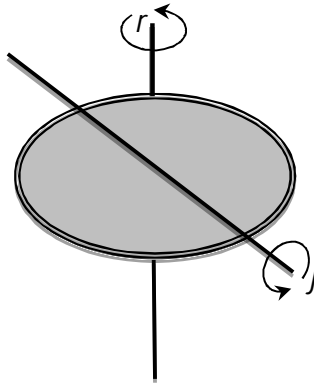
dengan grup simetri yang dilambangkan dengan D .

Perhatikan bahwa rotasi r_t melalui sebarang sudut t di sekitar sumbu z adalah simetri dari cakram tersebut. Rotasi ini memenuhi $r_t r_s = r_{t+s}$ dan secara khusus $r_t r_{-t} = r_0 = e$, dimana e adalah posisi awal, yaitu posisi tanpa perpindahan. Hal ini menunjukkan bahwa $N = \{r_t; t \in \mathbb{R}\}$ adalah subgrup dari D .

Untuk sebarang garis yang melalui titik pusat sumbu dari bidang (x,y) , simetri lipat melalui garis tersebut (yaitu rotasi sejauh π pada garis tersebut) adalah simetri dari cakram tersebut, yang mempertukarkan posisi bagian atas dengan bagian bawah dari cakram tersebut. Dengan j_t menyatakan simetri lipatan pada garis l_t yang melalui titik pusat sumbu dan titik:

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ dan menuliskan } j = j_0 \text{ untuk simetri lipatan pada sumbu } x.$$

Masing-masing j_t menggenerasikan suatu subgrup dari D yang berorde 2. Simetri dari cakram dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4.3. Simetri pada cakram

Selanjutnya dapat diselidiki bahwa setiap j_t dapat dinyatakan dalam bentuk j dan rotasi r_t . Untuk melakukan lipatan j_t melalui garis l_t maka cakram dapat dirotasikan sampai garis l_t berimpit dengan sumbu x , kemudian melakukan lipatan j terhadap sumbu x , akhirnya merotasikan cakram sedemikian sehingga l_t kembali ke posisinya semula. Jadi $j_t = r_t j_{r_t^{-1}}$, atau $j_t r_t = r_t j$. Oleh karena itu yang perlu dihitung adalah perkalian yang hanya memuat simetri lipat j dan rotasi r_t .

Perhatikan bahwa j yang diterapkan pada titik $\begin{pmatrix} r \cos(s) \\ r \sin(s) \\ 0 \end{pmatrix}$ yang terletak pada

cakram adalah $\begin{pmatrix} r \cos(-s) \\ r \sin(-s) \\ 0 \end{pmatrix}$ dan r_t yang diterapkan pada $\begin{pmatrix} r \cos(s) \\ r \sin(s) \\ 0 \end{pmatrix}$ adalah

$$\begin{pmatrix} r \cos(s+t) \\ r \sin(s+t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sebagai latihan, akan diselidiki fakta-fakta tentang grup D sebagai berikut:

1. $j r_t = r_{-t} j$, dan $j_t = r_{2t} j = j r_{-2t}$.
2. Semua perkalian di dalam D dapat dihitung dengan menggunakan relasi-relasi ini.

3. Grup simetri D dari cakram terdiri atas rotasi r_t untuk $t \in \mathbb{R}$ dan lipatan $j_t = r_{2t}j$. Dengan menuliskan $N = \{r_t; t \in \mathbb{R}\}$, diperoleh $D = N \cup Nj$.

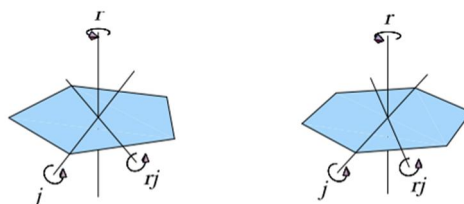
4. Subgrup N dari D memenuhi $aNa^{-1} = N$ untuk semua $a \in D$.

Selanjutnya akan diselidiki kembali mengenai simetri poligon beraturan.

Misalkan suatu segi- n beraturan dengan titik-titik sudut $\begin{matrix} 2\cos(2pk/n) \\ \sin(2pk/n) \\ 0 \end{matrix}$ untuk

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Simetri grup segi n dilambangkan dengan D_n . Dalam soal-soal latihan, fakta-fakta mengenai simetri segi n adalah sebagai berikut:

1. Rotasi $r = r_{2p/n}$ dengan sudut sebesar $2p/n$ melalui sumbu z menggenerasikan suatu subgrup siklik D_n yang berorde n .
2. "Lipatan" $j_{pk/n} = r_{2pk/n}j = r^k j$, untuk $k \in \mathbb{Z}$, adalah simetri segi- n .
3. Simetri-simetri lipatan yang berbeda dari segi n adalah $r^k j$ untuk $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.
4. Jika n ganjil, maka sumbu masing-masing lipatan melalui titik sudut dan titik tengah sisi-sisi yang berhadapan.
5. Jika n genap dan k genap, maka $j_{pk/n} = r^k j$ merupakan simetri lipatan pada suatu sumbu yang melalui sepasang titik sudut berhadapan pada segi n . Lihat Gambar 2.3.2 untuk segi 5.
6. Jika n genap dan k ganjil, maka $j_{pk/n} = r^k j$ merupakan simetri lipatan pada suatu sumbu yang melalui titik tengah pasangan sisi-sisi yang berhadapan dari segi n . Lihat Gambar 4.4. untuk segi 6.



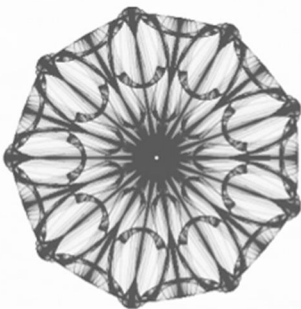
Gambar 4.4. Simetri pada pentagon dan hexagon

Simetri grup D_n terdiri atas $2n$ simetri r^k dan $r^k j$, untuk $0 \leq k \leq n-1$. Berdasarkan perhitungan simetri pada cakram bahwa $jr = r^{-1}j$, sehingga $jr^k = r^{-k}j$ untuk semua k . Relasi-relasi ini memungkinkan semua perkalian di D_n dapat dihitung.

Grup D_n dapat dipandang sebagai simetri grup bentuk geometri, atau suatu benda nyata, dalam bentuk yang agak berbeda. Bayangkanlah misalnya, bunga yang berbentuk segi lima, atau bintang laut, yang terlihat agak berbeda jika dilihat dari atas dan dari bawah. Meskipun demikian bunga atau bintang laut tersebut memiliki simetri pencerminan dan simetri putar yang tidak menyebabkan bertukarnya bagian atas dan bawah.

Perhatikanlah suatu bidang datar segi n . Pencerminan pada garis-garis yang melalui titik pusat dan salah satu titik sudut segi n tersebut, atau melalui titik pusat dengan titik tengah salah satu sisinya, merupakan simetri pencerminan yang banyaknya ada n . Dapat dilihat bahwa simetri rotasi n di dalam bidang bersama dengan simetri pencerminan n membentuk suatu grup yang isometrik dengan D_n .

Gambar 4.5. di bawah ini memiliki simetri D_9 , sedangkan Gambar 4.6. memiliki simetri \mathbb{Z}_5 . Kedua bentuk tersebut digenerasikan oleh ribuan iterasi dari suatu sistim dinamis diskrit yang terlihat *kacau*. Gambar tersebut berbayang-bayang karena adanya probabilitas partikel yang bergerak memasuki suatu wilayah pada diagram – daerah yang lebih gelap menyatakan bahwa wilayah tersebut paling banyak dimasuki partikel.



Gambar 4.5.
Benda dengan simetri D_9



Gambar 4.6
Benda dengan simetri \mathbb{Z}_5

B.7. Soal-Soal

- 4.1. Tentukanlah grup simetri pada suatu belah ketupat yang bukan persegi. Gambarkan semua simetrinya, tentukan ukuran grupnya, dan tentukan apakah grup tersebut isometrik dengan suatu grup lain yang berukuran sama. Jika ternyata grup pada belah ketupat adalah grup yang baru, tentukanlah tabel perkaliannya.
- 4.2. Buktikanlah pernyataan berikut ini. Misalkan G adalah grup dengan elemen identitas e , dan misalkan juga bahwa $e^t g = g$ maka $e^t = e$.
- 4.3. Misalkan $\varphi: G \rightarrow H$ adalah suatu isomorfisma grup. Tunjukkan bahwa untuk semua $g \in G$ dan $n \in \mathbb{N}$, maka $\varphi(g^n) = (\varphi(g))^n$. Tunjukkan bahwa jika $g^n = e$, maka $(\varphi(g))^n = e$.
- 4.4. Misalkan $\varphi: G \rightarrow H$ adalah grup isomorfis, tunjukkanlah bahwa G abelian jika dan hanya jika H abelian.
- 4.5. Tunjukkanlah bahwa syarat-syarat di bawah ini adalah ekuivalen untuk suatu grup G :
 - b. G abelian
 - c. Untuk semua $a, b \in G$, maka $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$
 - d. Untuk semua $a, b \in G$, maka $aba^{-1}b^{-1} = e$
 - e. Untuk semua $a, b \in G$, maka $(ab)^2 = a^2b^2$
 - f. Untuk semua $a, b \in G$ dan bilangan asli n , maka $(ab)^n = a^n b^n$ (gunakan induksi matematika)
- 4.6. *Buktikan* pernyataan mengenai subgrup S_3 yang diberikan dalam Contohi 2.2.9.
- 4.7. Tentukanlah *kisi* subgrup dari grup simetri pada suatu bangun geometri persegi.
- 4.8. Tentukanlah *kisi* subgrup dari grup simetri pada suatu bangun geometri persegi panjang.
- 4.9. Misalkan H adalah subset dari S_4 yang terdiri atas himpunan semua 3-cycle, himpunan semua perkalian dari 2-cycles yang disjoint, dan

identitas. Tujuan dari latihan ini adalah untuk menunjukkan bahwa H adalah subgrup dari S_4 .

- Tunjukkan bahwa $\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ adalah subgrup dari S_4 .
- Selanjutnya, perhatikan perkalian dari dua 3-cycles di dalam S_4 . Kedua 3-cycle, masing-masing memiliki tiga digit yang sama, atau keduanya memiliki dua dari tiga digit yang sama. Jika *cycle-cycle* tersebut memiliki tiga digit yang sama, maka *cycle-cycle* tersebut adalah *cycle* yang sama atau invers satu sama lain. Jika *cycle-cycle* tersebut memiliki dua digit yang sama, maka *cycle* tersebut dapat dituliskan dalam bentuk $(a_1 a_2 a_3)$ dan $(a_1 a_2 a_4)$, atau $(a_1 a_2 a_3)$ dan $(a_2 a_1 a_4)$. Tunjukkanlah bahwa dalam semua kasus, hasil perkalian merupakan identitas, atau 3-cycle yang lainnya, atau merupakan perkalian dari dua 2-cycle disjoint.
- Tunjukkan bahwa perkalian dari suatu 3-cycle dengan salah satu elemen yang berbentuk $(ab)(cd)$ akan menghasilkan suatu 3-cycle.
- Tunjukkan bahwa H merupakan suatu subgrup.

4.10. Misalkan R_θ menyatakan matriks rotasi

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Tunjukkan bahwa himpunan R_θ , dimana θ adalah bilangan real, akan membentuk suatu grup dengan operasi perkalian matriks.

Jelasnya, tunjukkan bahwa $R_\theta R_\mu = R_{\theta+\mu}$, dan $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

4.11. Misalkan J menyatakan matriks pencerminan terhadap sumbu y , yaitu

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.12. Tunjukkan bahwa $J R_\theta = R_{-\theta} J$

4.13. Misalkan J_θ adalah matriks dari pencerminan garis yang meliputi titik pusat sumbu dan titik $(\cos \theta, \sin \theta)$. Hitunglah J_θ dan tunjukkan bahwa $J_\theta = R_\theta J R_{-\theta} = R_{2\theta} J$.

- 4.14. Misalkan $\mathbb{R} = \mathbb{R}_{p/2}$. Tunjukkan bahwa kedelapan matriks yang dinyatakan dengan $\{\mathbb{R}^k J' : 0 \leq k \leq 3 \text{ dan } 0 \leq l \leq 1\}$ membentuk suatu subgrup dari $GL(2, \mathbb{R})$, isomorfis dengan grup simetri dari persegi tersebut.
- 4.15. Misalkan S adalah subset dari suatu grup G , dan misalkan S^{-1} menyatakan $\{s^{-1} : s \in S\}$. Tunjukkan bahwa $\langle S^{-1} \rangle = \langle S \rangle$. Jelasnya, untuk $a \in G$, $\langle a \rangle = \langle a^{-1} \rangle$ sehingga juga $\mathcal{O}(a) = \mathcal{O}(a^{-1})$.
- 4.16. Misalkan a adalah elemen dari suatu grup. Misalkan n adalah bilangan bulat positif terkecil sehingga $a_n = e$. Tunjukkan bahwa $e, a, a_2, \dots, a_{n-1}$ masing-masing berbeda. Buktikan juga bahwa orde dari subgrup yang digenerasikan oleh a adalah n .
- 4.17. $\Phi(14)$ adalah grup siklik berorde 6. Elemen yang mana dari $\Phi(14)$ yang merupakan generator? Tentukanlah orde dari setiap elemen $\Phi(14)$.
- 4.18. Dapatkah suatu grup Abelian memiliki tepat dua elemen berorde 2?
- 4.19. Misalkan suatu grup abelian memiliki elemen a yang berorde 4 dan elemen b yang berorde 3. Tunjukkan bahwa grup tersebut juga memiliki elemen berorde 2 dan orde 6.
- 4.20. Misalkan bahwa suatu grup G memuat elemen a dan b sedemikian sehingga $ab = ba$ dan orde dari a dan b masing-masing prima relatif. Tunjukkan bahwa orde dari ab adalah $\mathcal{O}(a)\mathcal{O}(b)$.
- 4.21. Tunjukkan bahwa elemen-elemen j dan r_t dari grup simetri D dari cakram memenuhi relasi $j_{rt} = r_{-t}j$, dan $j_t = r_{2t}j = jr_{-2t}$.
- 4.22. Grup simetri D dari cakram terdiri atas rotasi-rotasi r_t untuk $t \in \mathbb{R}$ dan "lipatan" $j_t = r_{2t}j$.
- Dengan $N = \{r_t : t \in \mathbb{R}\}$, tunjukkanlah bahwa $D = N \cup N_j$.
 - Tunjukkan bahwa semua perkalian di D dapat dihitung dengan menggunakan relasi $j_{rt} = r_{-t}j$.
 - Tunjukkan bahwa subgrup N dari D memenuhi $aNa^{-1} = N$ untuk semua $a \in D$.
- 4.23. Simetri pada cakram dinyatakan dengan transformasi linier \mathbb{R}^3 . Tuliskanlah matriks dari simetri r_t dan j dengan basis standar \mathbb{R}^3 .

Nyatakanlah matriks-matriks tersebut dengan R_t dan J , berturut-turut. Buktikan relasi $JR_t = R_{t+1}J$.

- 4.24. Perhatikan grup D_n dari simetri segi n .
- Tunjukkan bahwa rotasi $r = r_{2\pi/n}$ melalui suatu sudut $2\pi/n$ pada sumbu z menggenerasikan suatu subgrup siklik D_n yang berorde n .
 - Tunjukkan bahwa simetri lipat $j_{pk/n} = r_{2pk/n}j = r^k j$, untuk $k \in \mathbb{Z}$, adalah simetri-simetri dari segi n .
 - Tunjukkan bahwa simetri lipat yang berbeda dari segi n adalah $r^k j$ untuk $k = 0, 1, \dots, n-1$.
- 4.25. Tentukan suatu subgrup D_6 yang isomorfis dengan D_3 .
- 4.26. Tentukan suatu subgrup D_6 yang isomorfis dengan simetri grup persegi panjang.

C. Homomorfisme dan Isomorfisme

Pada dasarnya konsep *isomorfisme* antara dua grup, yaitu: Suatu isomorfisme $\varphi: G \rightarrow H$ merupakan suatu bijeksi yang menghasilkan perkalian grup (yaitu $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2)$ untuk semua $g_1, g_2 \in G$) telah diperkenalkan pada bagian sebelumnya. Sebagai contoh, himpunan matriks 3×3 $\{E, R, R^2, R^3, A, RA, R^2A, R^3A\}$, dengan E adalah identitas matriks 3×3 , dan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

adalah subgrup dari $GL(3, \mathbb{R})$. Selanjutnya, pemetaan $j: r^k a^l \mapsto R^k A^l$ ($0 \leq k \leq 3, 0 \leq l \leq 1$) merupakan isomorfisme dari grup simetri persegi terhadap grup matriks-matriks tersebut di atas. Demikian pula, himpunan matriks-matriks 2×2 yaitu $\{E, R, R^2, R^3, J, RJ, R^2J, R^3J\}$, dengan E adalah identitas matriks 2×2 , dan

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

adalah suatu subgrup dari $GL(2, \mathbb{R})$, dan pemetaan $\gamma: r^k a^l \mapsto R^k J^l$ ($0 \leq k \leq 3, 0 \leq l \leq 1$) merupakan isomorfisme dari grup simetri persegi terhadap grup matriks-matriks ini. Konsep yang lebih umum dan yang sangat bermanfaat didefinisikan sebagai berikut:

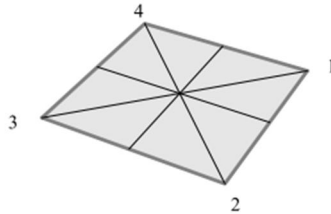
Definisi 4.8. Suatu pemetaan antara grup $j: G \rightarrow H$ disebut *homomorfisme* jika pemetaan tersebut mempertahankan perkalian grup, yaitu $j(g_1 g_2) = j(g_1) j(g_2)$ untuk semua $g_1, g_2 \in G$. Suatu *endomorfisme* di G adalah homomorfisme $j: G \rightarrow G$. Dalam hal ini j tidak perlu injektif atau surjektif.

Contoh 4.28. Pada contoh ini akan dipelajari homomorfisme dari grup simetri dari persegi terhadap grup permutasi. Letakkan kartu yang berbentuk persegi di dalam bidang $(x-y)$ sedemikian sehingga sumbu-sumbu simetri rotasinya yaitu a , b , dan r , berimpit dengan sumbu x, y , dan z . Masing-masing simetri dari kartu menimbulkan suatu pemetaan bijektif dari ruang $S = \{(x, y, 0) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ ditempati oleh kartu tersebut. Sebagai contoh, simetri a menimbulkan pemetaan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pemetaan yang berhubungan dengan masing-masing simetri mengubah himpunan V dengan keempat titik sudut S ke dirinya sendiri. Dengan demikian untuk setiap simetri s pada persegi tadi, diperoleh suatu elemen $p(s)$ dari $Sym(V)$. Komposisi simetri berhubungan dengan komposisi pemetaan dari S dan dari V , sehingga $s \mapsto p(s)$ merupakan suatu isomorfisme grup simetri dari persegi terhadap $Sym(V)$. Homomorfisme ini injektif karena simetri dari suatu persegi seluruhnya ditentukan oleh apa yang diakibatkannya terhadap titik sudut. Meskipun demikian, homomorfisme tersebut tidak mungkin surjektif, karena persegi tersebut hanya memiliki delapan simetri sedangkan $|Sym(V)| = 24$.

Contoh 4.29. Untuk menjelaskan hal tersebut di atas dan agar lebih bermanfaat dalam perhitungan, maka dimisalkan jumlah titik sudut ada sebanyak S . Artinya penomoran tidak dilakukan berdasarkan banyaknya sudut pada kartu persegi yang bergerak bersama dengan kartu itu, tetapi berdasarkan *lokasi* dari sudut-sudutnya. Lihat Gambar 4.7.

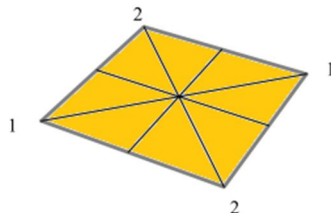


Gambar 4.7. Penomoran titik sudut persegi

Dengan memori titik sudut, diperoleh suatu homomorfisme j dari grup simetri persegi terhadap S_4 . Dapat dilihat bahwa $j(r) = (1432)$, $j(a) = (14)(23)$, dan $j(c) = (24)$. Jadi sekarang dapat disimpulkan bahwa

$$j(a)j(r) = (14)(23)(1432) = (24) = j(c) = j(ar).$$

Contoh 4.30. Terdapat himpunan lain dari objek-objek geometri yang berhubungan dengan persegi, yang dipermutasikan oleh simetri persegi: himpunan sisi, himpunan diagonal, dan himpunan pasangan sisi yang berhadapan. Perhatikanlah diagonal-diagonal pada Gambar 4.8. Penomoran pada diagonal-diagonal akan menghasilkan homomorfisme y dari grup simetri persegi dengan S_2 . Dapat dilihat bahwa $y(r) = y(a) = 12$, sedangkan $y(c) = e$.



Gambar 4.8. Penomoran diagonal-diagonal pada persegi

Contoh 4.31. Telah diketahui bahwa transformasi $T : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ memiliki sifat bahwa $T(a + b) = T(a) + T(b)$. Oleh karena itu, T merupakan suatu homomorfisme grup dari grup penjumlahan \mathbb{R}^n ke dirinya sendiri. Lebih jelasnya, untuk sebarang matriks M yang berukuran $n \times n$, didapatkan $M(a + b) = Ma + Mb$. Jadi perkalian dengan M merupakan suatu homomorfisme grup dari grup penjumlahan \mathbb{R}^n terhadap dirinya sendiri.

Contoh 4.32. Misalkan G adalah sebarang grup dan a merupakan elemen dari G . Pemetaan dari \mathbb{Z} ke G yang dinyatakan dengan $k \mapsto a^k$ adalah suatu homomorfisme grup. Hal ini ekuivalen dengan pernyataan bahwa $a^{k+l} = a^k a^l$ untuk semua bilangan bulat k dan l . Peta dari homomorfisme ini adalah subgrup siklik dari G yang digenerasikan oleh a .

Contoh 4.33. Suatu homomorfisme dari \mathbb{Z} ke \mathbb{Z}_n yang didefinisikan dengan $k \mapsto [k]$. Hal ini diturunkan langsung dari definisi penjumlahan di dalam $\mathbb{Z}_n : [a] + [b] = [a + b]$. Contoh ini merupakan kasus khusus dari contoh sebelumnya, dengan $G = \mathbb{Z}_n$ dan memilih elemen $a = [1] \in G$. Pemetaannya dinyatakan dengan $k \mapsto k[1] = [k]$.

Contoh 4.34. Misalkan G adalah grup abelian dan n adalah bilangan bulat tetap. Maka pemetaan dari G ke G yang dinyatakan dengan $g \mapsto g^n$ adalah homomorfisme grup. Hal ini ekuivalen dengan pernyataan bahwa $(ab)^n = a^n b^n$ apabila a, b adalah elemen-elemen dari suatu grup abelian.

Proposisi 4.20. Misalkan $j : G \otimes H$ dan $y : H \otimes K$ adalah homomorfisme grup. Maka komposisi $y \circ j : G \otimes K$ juga merupakan suatu homomorfisme. (Buktikan). Selanjutnya akan diselidiki bahwa homomorfisme mempertahankan identitas dan inversi grup.

Proposisi 4.21. Misalkan $j : G \rightarrow H$ adalah homomorfisme grup.

(a) $j(e_G) = e_H$.

(b) Untuk setiap $g \in G, j(g^{-1}) = (j(g))^{-1}$.

Bukti: Untuk sebarang $g \in G$, berlaku

$$j(e_G)j(g) = j(e_G g) = j(g).$$

Pernyataan ini diturunkan dari Proposisi 4.21. (a) bahwa $j(e_G) = e_H$.

Demikian pula, untuk sebarang $g \in G$, berlaku

$$j(g^{-1})j(g) = j(g^{-1}g) = j(e_G) = e_H.$$

Jadi Proposisi 4.21. (b) menyatakan bahwa $j(g^{-1}) = (j(g))^{-1}$. ■

Sebelum menyatakan proposisi selanjutnya, akan diuraikan secara ringkas mengenai beberapa kesepakatan notasi matematis. Untuk sebarang fungsi $f : X \rightarrow Y$, dan sebarang subset $B \subseteq Y$, maka prapeta dari B di X adalah $\{x \in X : f(x) \in B\}$. Notasi untuk prapeta dari B adalah $f^{-1}(B)$. Prapeta B tidak mempersyaratkan bahwa f harus memiliki suatu fungsi invers. Jika f memiliki suatu fungsi invers, maka $f^{-1}(B) = \{f^{-1}(y) : y \in B\}$. Sebagai contoh, jika $j : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_6$ adalah pemetaan $n \mapsto [n]$, maka $j^{-1}(\{[0], [3]\})$ adalah himpunan bilangan bulat yang kongruen dengan 0 atau dengan 3 mod 6.

Proposisi 4.22. Misalkan $j : G \rightarrow H$ adalah suatu homomorfisme grup.

(a) Untuk setiap subgrup $A \subseteq G, j(A)$ merupakan subgrup dari H .

(b) Untuk setiap subgrup $B \subseteq H, j^{-1}(B) = \{g \in G : j(g) \in B\}$ adalah subgrup dari G .

Bukti: Akan ditunjukkan bahwa $j(A)$ tertutup pada operasi perkalian dan invers. Misalkan h_1 dan h_2 adalah elemen-elemen dari $j(A)$ maka terdapat elemen-elemen $a_1, a_2 \in A$ sedemikian sehingga $h_i = j(a_i)$ untuk $i = 1, 2$. Karena $a_1 a_2 \in A$ maka $h_1 h_2 = j(a_1)j(a_2) = j(a_1 a_2) \in j(A)$. Demikian juga, untuk $h \in j(A)$, terdapat $a \in A$ sedemikian sehingga $j(a) = h$. Dengan menerapkan Proposisi 4.21 (b), dan sifat ketertutupan A terhadap operasi

invers, maka diperoleh $h^{-1} = (j(a))^{-1} = j(a^{-1}) \hat{=} j(A)$.

Pembuktian bagian (b) menjadi latihan bagi mahasiswa.

D. Isomorfisma dan Automorfisma

Definisi 4.10. Misalkan G adalah suatu grup dengan operasi $*$, dan misalkan G' adalah suatu grup dengan operasi x . Suatu pemetaan $f: G \mapsto G'$ disebut isomorfisma dari G ke G' jika:

1. f adalah korespondensi satu-satu dari G ke G' , dan
2. $f(x * y) = f(x) f(y)$ untuk semua x dan y di G

Jika isomorfisma dari G ke G' ada, dikatakan bahwa G *isomorfis* ke G' , dan secara singkat dinyatakan dengan notasi $G \cong G'$. Suatu isomorfisma dari suatu grup G ke G sendiri disebut *automorfisme* dari G .

Penggunaan f dan x pada definisi di atas dimaksudkan untuk menegaskan fakta bahwa operasi dari kedua grup bisa saja berbeda. Perhatikan kesamaan pada poin 2 dari definisi yaitu $f(x * y)$, $x * y$ adalah hasil operasi $*$ dari elemen-elemen G , sedangkan pada ruas kanan, yaitu $f(x) f(y)$ adalah hasil operasi x dari elemen-elemen G' . Menurut definisi tersebut isomorfisme adalah pemetaan yang mempertahankan operasi biner dari G .

Contoh 4.34. Diberikan Grup $(\mathbb{Z}_2, +)$ dan $H = \{-1, 1\}$. Tunjukkan bahwa $f: \mathbb{Z}_2 \mapsto H$ merupakan isomorfisme.

Jawab: Akan ditunjukkan $f: \mathbb{Z}_2 \mapsto H$ merupakan isomorfisme. Perhatikan Tabel Cayley dari masing-masing grup sebagai berikut:

$(\mathbb{Z}_2, +)$	[0]	[1]
[0]	[0]	[1]
[1]	[1]	[0]

$H = (\{1, -1\}, \bullet)$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Tabel di atas menunjukkan bahwa grup $(\mathbb{Z}_2, +)$ dan $H = (\{1, -1\}, \bullet)$ tidak sama, tetapi menunjukkan suatu kemiripan satu dengan yang lainnya. Jumlah sebarang dua unsur di $(\mathbb{Z}_2, +)$ berkorespondensi pada hasil kali kedua unsur yang bersesuaian di $H = \{1, -1\}$, sehingga terdapat korespondensi satu-satu dari kedua tabel tersebut. Hal ini menunjukkan bahwa kedua Grup memiliki struktur yang sama. Sekarang akan ditunjukkan bahwa $f: \mathbb{Z}_2 \rightarrow H$ memenuhi

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

Untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_2$. Dari Tabel 1.1 dan 1.2 diketahui pemetaan $f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 1 \in H$ dan $f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = -1 \in H$ sehingga

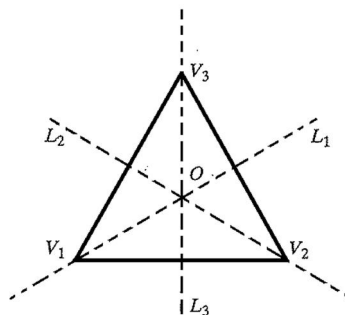
$$f([0] + [1]) = f([1]) = -1$$

$$f([0]) \cdot f([1]) = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$f([0] + [1]) = f([0]) \cdot f([1])$$

$\therefore f: \mathbb{Z}_2 \rightarrow H$ adalah suatu isomorfisme

Contoh 4.35. Diberikan segitiga sama sisi T dengan titik pusat O dan titik-titik sudut V_1, V_2 , dan V_3 . Perhatikan gambar berikut:



Gambar 4.9. Titik sudut dan titik pusat segitiga sama sisi

Segitiga sama sisi terdiri dari himpunan semua titik-titik pada ketiga sudut segitiga. Gerakan kaku (*rigid motion*) pada segitiga dikatakan suatu bijeksi

dari himpunan titik segitiga terhadap dirinya sendiri yaitu meninggalkan jarak sembarang dua titik dan kembali seperti semula. Dengan kata lain, gerakan kaku dari segitiga merupakan bijeksi yaitu mempertahankan jarak. Sehingga gerakan kaku harus memetakan titik sudut ke titik sudut, dan pemetaan seluruhnya adalah ditentukan oleh bayangandari sudut V_1 , V_2 , dan V_3 . Gerakan ini (atau biasanya disebut *simetris*) membentuk suatu grup dalam hal pemetaan komposisi. Seluruhnya ada enam elemen grup G yaitu:

1. e , pemetaan identitas, yaitu tidak meninggalkan titik semula
2. r , rotasi dengan arah berlawanan arah jarum jam sebesar 120° terhadap pusat O pada bidang segitiga;
3. $r^2 = r \circ r$, rotasi dengan arah berlawanan arah jarum jam sebesar 240° terhadap pusat O pada bidang segitiga;
4. f yaitu refleksi L_1 terhadap V_1 dan O
5. g yaitu refleksi L_2 terhadap V_2 dan O
6. h yaitu refleksi L_3 terhadap V_3 dan O

Perhatikan gambaran simetris berikut ini

$$\begin{array}{ll}
 e : \begin{array}{l} \vec{e}(V_1) = V_1 \\ \vec{e}(V_2) = V_2 \\ \vec{e}(V_3) = V_3 \end{array} & h : \begin{array}{l} \vec{h}(V_1) = V_2 \\ \vec{h}(V_2) = V_1 \\ \vec{h}(V_3) = V_3 \end{array} \\
 r : \begin{array}{l} \vec{r}(V_1) = V_2 \\ \vec{r}(V_2) = V_3 \\ \vec{r}(V_3) = V_1 \end{array} & g : \begin{array}{l} \vec{g}(V_1) = V_3 \\ \vec{g}(V_2) = V_2 \\ \vec{g}(V_3) = V_1 \end{array} \\
 r^2 : \begin{array}{l} \vec{r}^2(V_1) = V_3 \\ \vec{r}^2(V_2) = V_1 \\ \vec{r}^2(V_3) = V_2 \end{array} & f : \begin{array}{l} \vec{f}(V_1) = V_1 \\ \vec{f}(V_2) = V_3 \\ \vec{f}(V_3) = V_2 \end{array}
 \end{array}$$

Sehingga grup yang dibentuk adalah

$$G = \{e, r, r^2, h, g, f\}$$

dan G dengan operasi perkalian ditunjukkan pada tabel berikut:

\circ	e	r	r^2	h	g	f
e	e	r	r^2	h	g	f
r	r	r^2	e	g	f	h
r^2	r^2	e	r	f	h	g
h	h	f	g	e	r^2	r
g	g	h	f	r	e	r^2
f	f	g	h	r^2	r	e

Kita akan bandingkan grup G dengan grup $\mathcal{S}(A)$ dari Contoh 3 bagian 3.1,

$$e = I_A : \begin{cases} e(1) = 1 \\ e(2) = 2 \\ e(3) = 3 \end{cases} \quad s : \begin{cases} s(1) = 2 \\ s(2) = 1 \\ s(3) = 3 \end{cases}$$

$$r : \begin{cases} r(1) = 2 \\ r(2) = 3 \\ r(3) = 1 \end{cases} \quad g : \begin{cases} g(1) = 3 \\ g(2) = 2 \\ g(3) = 1 \end{cases}$$

$$t : \begin{cases} t(1) = 3 \\ t(2) = 1 \\ t(3) = 2 \end{cases} \quad d : \begin{cases} d(1) = 1 \\ d(2) = 3 \\ d(3) = 2 \end{cases}$$

dan akan tampak bahwa keduanya memiliki kesamaan kecuali notasi. Misalkan elemen G berkorespondensi dengan $\mathcal{S}(A)$ menurut pemetaan $\phi: G \rightarrow \mathcal{S}(A)$ diberikan berikut

$$\begin{aligned} \phi(e) &= I_A & \phi(h) &= \sigma \\ \phi(r) &= \rho & \phi(g) &= \gamma \\ \phi(r^2) &= \rho^2 & \phi(f) &= \delta \end{aligned}$$

Akan ditunjukkan pemetaan ini berkorespondensi satu-satu dari G ke $\mathcal{S}(A)$.

$\phi: G \rightarrow \mathcal{S}(A)$, pilih elemen $y' \in \mathcal{S}(A)$, maka ada dengan tunggal elemen $y \in G$, sedemikian sehingga $y' = \phi(y)$. \therefore Pemetaan ϕ onto.

Asumsikan $x_1 \in G$ dan $x_2 \in G$, dengan $\phi(x_1) = \phi(x_2)$

$$\begin{array}{ll} \text{Karena } \phi(e) = I_A & \phi(h) = \sigma \\ \phi(r) = \rho & \phi(g) = \gamma \\ \phi(r^2) = \rho^2 & \phi(f) = \delta \end{array}$$

Maka $x_1 = x_2$

∴ Pemetaan ϕ satu-satu

∴ Hal ini berarti pemetaan ϕ berkorespondensi satu-satu dari G ke $\mathcal{S}(A)$.

Selanjutnya, ϕ memenuhi sifat bahwa

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y)$$

untuk setiap x dan y di G . Pernyataan ini dapat dijelaskan dengan tabel perkalian untuk G dan $\mathcal{S}(A)$ dengan cara berikut: Pada seluruh tabel perkalian G , gantikan setiap elemen $x \in G$ dengan bayangan $\phi(x)$ di $\mathcal{S}(A)$.

Untuk setiap $x, y \in G$. Seperti diketahui pemetaan $\phi(r) = \rho$ dan $\phi(r^2) = \rho^2$ sehingga

$$f(r \cdot r^2) = f(e) = I_A \text{ dan}$$

$$\phi(r) \cdot \phi(r^2) = \rho \cdot \rho^2 = I_A$$

$$\therefore \phi(xy) = \phi(x) \cdot \phi(y)$$

Hasil lengkapnya dapat dilihat pada tabel dibawah, yaitu $\phi(xy)$ pada baris dengan $\phi(x)$ berada pada kolom paling kiri dan $\phi(y)$ pada baris paling atas.

Tabel 2.2

	I_A	ρ	ρ^2	σ	γ	δ
I_A	I_A	ρ	ρ^2	σ	γ	δ
ρ	ρ	ρ^2	I_A	γ	δ	σ
ρ^2	ρ^2	I_A	ρ	δ	σ	γ
σ	σ	δ	γ	I_A	ρ^2	ρ
γ	γ	σ	δ	ρ	I_A	ρ^2
δ	δ	γ	σ	ρ^2	ρ	I_A

Tabel perkalian untuk $\mathcal{S}(A)$ diberikan pada contoh 3 bagian 3.1 untuk melengkapi tabel nilai untuk $\phi(x) \cdot \phi(y)$, dan dua tabel dapat diletakkan pada posisi bersebelahan. Hal ini berarti bahwa $\phi(xy) = \phi(x) \cdot \phi(y)$ untuk semua x dan y di G . Sehingga G dan $\mathcal{S}(A)$ memiliki kesamaan kecuali notasi.

E. Peta Identitas dan Peta Invers

Teorema 4.4. Misalkan ϕ adalah isomorfisme dari grup G ke grup G' . Jika e menyatakan identitas di G dan e' menyatakan identitas di G' , maka

- a. $\phi(e) = e'$
- b. $\phi(x^{-1}) = [\phi(x)]^{-1}$ untuk semua x di G

Bukti: Misalkan e adalah identitas di G dan e' adalah identitas di G' .

a. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} e \cdot e &= e \Rightarrow \phi(e \cdot e) = \phi(e) \\ &\Rightarrow \phi(e) \cdot \phi(e) = \phi(e) \\ &\Rightarrow \phi(e) \cdot \phi(e) = \phi(e) \cdot e' \\ &\Rightarrow \phi(e) = e' \end{aligned}$$

b. untuk sebarang x di G

$$\begin{aligned} x \cdot x^{-1} &= e \Rightarrow \phi(x \cdot x^{-1}) = \phi(e) \\ &\Rightarrow \phi(x \cdot x^{-1}) = e' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi(x) \cdot \phi(x^{-1}) = e' \dots (*)$$

Demikian pula,

$$\begin{aligned} x^{-1} \cdot x &= e \Rightarrow \phi(x^{-1} \cdot x) = \phi(e) \\ &\Rightarrow \phi(x^{-1} \cdot x) = e' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi(x^{-1}) \cdot \phi(x) = e' \dots (**)$$

Dari (*) dan (**), $\phi(x) \cdot \phi(x^{-1}) = e' = \phi(x^{-1}) \cdot \phi(x)$

Hal ini berarti $\phi(x^{-1}) = [\phi(x)]^{-1}$, untuk semua x di G

∴ Dari a) dan b), ϕ adalah isomorfisme dari grup G ke grup G' . Jika e menyatakan identitas di G dan e' menyatakan identitas di G' , maka

- a. $\phi(e) = e'$
- b. $\phi(x^{-1}) = [\phi(x)]^{-1}$ untuk semua x di G

Konsep isomorfisme mengenalkan pada relasi isomorfisme dari anggota-anggota G dari grup-grup. Relasi tersebut merupakan relasi ekuivalen, yangi sebagai pernyataan berikut:

1. Untuk sebarang grup G anggota G adalah isomorpik ke dirinya sendiri. Identitas pemetaan I_G merupakan automorfisme dari G .

2. Jika G dan G' anggota \mathcal{G} dan G isomorfik ke G' , maka G' isomorfik ke G .
Faktanya, jika f merupakan isomorfisme dari G ke G' , maka f^{-1} merupakan isomorfisme dari G' ke G .
3. Andaikan G_1, G_2, G_3 anggota \mathcal{G} . Jika G_1 isomorfik ke G_2 dan G_2 isomorfik ke G_3 , maka G_1 isomorfik ke G_3 .

Pernyataan di atas dapat ditulis sebagai berikut:

Diberikan $\mathcal{G} = \{G | G \text{ grup}\}$ maka

1. Untuk sebarang grup $G \in \mathcal{G}$ maka $G \cong G$
2. Misalkan $G, G' \in \mathcal{G}$, jika $G \cong G'$ maka $G' \cong G$
3. Misalkan $G_1, G_2, G_3 \in \mathcal{G}$, jika $G_1 \cong G_2$ dan $G_2 \cong G_3$ maka $G_1 \cong G_3$

Bukti:

1. Diketahui: untuk sebarang grup $G \in \mathcal{G}$, dan

Misalkan $I_G: G \rightarrow G$ sedemikian sehingga $I_G(a) = a, \forall a \in G$

Akan ditunjukkan: $G \cong G$

Ambil sebarang $a \in G, \exists a \in G$ sedemikian sehingga $I_G(a) = a$

$\therefore I_G$ onto

Ambil sebarang $a, b \in G$ dengan

$$I_G(a) = I_G(b) \Rightarrow a = b$$

$\therefore I_G$ satu-satu

$\therefore I_G$ korespondensi satu-satu

Kemudian perhatikan $\forall a, b \in G$ maka

$$\begin{aligned} I_G(a \circ b) &= a \circ b \\ &= I_G(a) \circ I_G(b) \end{aligned}$$

$\therefore I_G$ megawetkan operasi \circ pada G

$\therefore I_G: G \rightarrow G$ merupakan isomopisma

$\therefore G \cong G$

2. Diketahui: Misalkan $G, G' \in \mathcal{G}$ dengan (G, \cdot) dan $(G', *)$, dan
 $G \cong G'$

Akan ditunjukkan: $G' \cong G$

Karena $G \cong G'$ hal ini berarti $f: G \rightarrow G'$ isomorfisme dan misalkan pemetaan f didefinisikan $f(a) = a', \forall a \in G$ dan $a' \in G'$ maka f korespondensi satu-satu (bijektif) dari G ke G' dan $f(a \cdot b) = f(a) * f(b), \forall a, b \in G$.

Karena f bijektif, maka $\forall a' \in G'$ sedemikian sehingga $a' = f(a)$ untuk $\exists! a \in G$

Selanjutnya jika dipilih $h = f^{-1}$, jelas bahwa h bijektif mengingat f bijektif

Kemudian perhatikan untuk sebarang $a', b' \in G'$ berlaku

$$\begin{aligned} h(a' * b') &= h(f(a) * f(b)) \text{ untuk suatu } a, b \in G \\ &= f^{-1}(f(a \cdot b)) \text{ karena } f \text{ mempertahankan operasi } \circ \\ &= a \cdot b \quad \text{sifat invers dari } f \\ &= f^{-1}(a') \cdot f^{-1}(b') \\ &= h(a') \cdot h(b') \end{aligned}$$

$\therefore h$ mempertahankan operasi $*$

$\therefore h: G' \rightarrow G$ merupakan isomorfisme. Dengan demikian $G' \cong G$

\therefore Jika $G \cong G'$ maka $G' \cong G$, untuk $G, G' \in \mathcal{G}$

3. Diketahui: Misalkan $G_1, G_2, G_3 \in \mathcal{G}$, dengan (G_1, \cdot) , $(G_2, *)$ dan (G_3, Δ)

$$G_1 \cong G_2 \text{ dan } G_2 \cong G_3$$

Akan ditunjukkan: $G_1 \cong G_3$

Karena $G_1 \cong G_2$ hal ini berarti ada $f: G_1 \rightarrow G_2$ isomorfisme. Selanjutnya berlaku

$$f(a \cdot b) = f(a) * f(b), \forall a, b \in G_1.$$

Dan $G_2 \cong G_3$ hal ini berarti ada $h: G_2 \rightarrow G_3$ isomorfisme. Selanjutnya berlaku

$$h(a * b) = h(a) \Delta h(b), \forall a, b \in G_2.$$

Selanjutnya jika dipilih $l = h \circ f$,

Karena h dan f bijektif, jelas $h \circ f$ bijektif

Kemudian perhatikan untuk setiap $a, b \in G_1$ berlaku

$$\begin{aligned} l(a \cdot b) &= h \circ f(a \cdot b) && \text{definisi } l \\ &= h(f(a \cdot b)) && \text{definisi } f \\ &= h(f(a) * f(b)) && f \text{ mempertahankan operasi } \cdot \\ &= h(a' * b') && \text{untuk suatu } a', b' \in G_2 \\ &= h(a') \Delta h(b') && h \text{ mempertahankan operasi } * \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a'' \Delta b'' && \text{untuk suatu } a'', b'' \in G_3 \\
&= h \circ f(a) \Delta h \circ f(b) \\
&= l(a) \Delta l(b)
\end{aligned}$$

\therefore mempertahankan operasi .

Jadi $l: G_1 \rightarrow G_3$ merupakan isomorfisme. Dengan demikian $G_1 \cong G_3$

Contoh 4.37. Misalkan $G = \{1, i, -1, -i\}$ di bawah operasi perkalian, dan $G' = \mathbb{Z}_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}$ dibawah operasi penjumlahan. Misalkan $\phi: G \rightarrow G'$ didefinisikan oleh $\phi(1) = [0], \phi(i) = [1], \phi(-1) = [2], \phi(-i) = [3]$. Definisi ini merupakan korespondensi satu-satu ϕ dari G ke G' . Untuk melihat apakah ϕ isomorfisme dari G ke G' , digunakan tabel berikut:

Tabel 3.1 Perkalian untuk G

\cdot	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

$\phi \rightarrow$

Tabel 3.2 $\phi(xy)$

	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
[1]	[1]	[2]	[3]	[0]
[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
[3]	[3]	[0]	[1]	[2]

Dimulai dari tabel perkalian G, tempatkan untuk setiap x pada tabel dengan (x) . Diperoleh tabel $\phi(xy)$ merupakan operasi penjumlahan pada \mathbb{Z}_4 , disimpulkan bahwa

$$f(x \times y) = f(x) + f(y)$$

untuk setiap $x \in G, y \in G'$, dan ϕ merupakan isomorfisme dari G ke G' .

Karena 1 elemen identitas pada G, dan [0] elemen identitas pada G' , maka

a. akan ditunjukkan $f(1) = [0]$

Dari tabel 3.1 dan 3.2 jelas terlihat bahwa $f(1) = [0]$

b. akan ditunjukkan bahwa $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

Pilih $i \in G$ berarti bahwa terdapat $-i \in G$ sedemikian sehingga

$$f(i^{-1}) = f(-i) = [3]$$

dan

$$(f(i))^{-1} = ([1])^{-1} = [3]$$

Dimana $[3] \in G'$ adalah invers dari $[1] \in G'$ dengan $f(i) = [1]$ pada $f: G \rightarrow G'$

Sebaliknya $-i \in G$, ada $i \in G$ invers dari $-i$ sedemikian sehingga $i \in G'$ adalah

invers dari $[3] \in G'$, dengan $f(-i) = [3]$, $f(i) = [3]$ pada $f: G \rightarrow G'$,

$$f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$$

F. Kernel Homomorfisme

Mungkin mahasiswa menganggap bahwa homomorfisme non-injektif $j: G \rightarrow H$ tidak terlalu penting untuk ditentukan karena homomorfisme seperti itu tidak memberikan informasi mengenai sifat-sifat G . Tetapi kenyataannya homomorfisme tersebut juga memperlihatkan informasi tertentu mengenai struktur G yang belum terungkap melalui pemetaan lain.

Sebagai contoh, homomorfisme γ dari grup simetri G pada suatu bangun persegi terhadap grup simetri S_2 ditimbulkan oleh pengaruh G terhadap kedua diagonal dari persegi tadi. Misalkan N menyatakan himpunan simetri σ dari persegi sedemikian sehingga $\gamma(s) = e$. Mahasiswa dapat membuktikan bahwa $N = \{e, c, d, r^2\}$. (Buktikan). Berdasarkan teori umum, N adalah suatu bentuk khusus dari subgrup G , yang disebut *subgrup normal*. Dengan memahami subgrup ini, maka struktur G dapat diungkapkan. Jadi, sebagai langkah awal mahasiswa harus dapat membuktikan bahwa N itu sendiri adalah suatu subgrup.

Definisi 4.11. Suatu subgrup N dari grup G dikatakan *subgrup normal* jika untuk semua $g \in G, gNg^{-1} = N$. Di sini, gNg^{-1} menyatakan $\{gng^{-1} : n \in N\}$.

Definisi 4.12. Misalkan $j: G \rightarrow H$ adalah suatu homomorfisme grup. *Kernel* dari homomorfisme j yang dilambangkan dengan $\ker(j)$, adalah $j^{-1}(e_H) = \{g \in G : j(g) = e_H\}$.

Menurut Proposisi 4.12 (b), $\ker(j)$, adalah suatu subgrup dari G karena $\{e_H\}$ adalah subgrup dari H . Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\ker(j)$, adalah subgrup normal.

Proposisi 4.23. Misalkan $j : G \rightarrow H$ adalah suatu homomorfisme grup, maka $\ker(j)$ adalah subgrup normal dari G .

Bukti: Untuk membuktikan proposisi tersebut, maka cukup ditunjukkan bahwa $g \ker(j) g^{-1} = \ker(j)$ untuk semua $g \in G$. Jika $x \in \ker(j)$, maka $j(gxg^{-1}) = j(g)j(x)j(g)^{-1} = j(g)e(j(g))^{-1} = e$. Jadi, $gxg^{-1} \in \ker(j)$. Telah ditunjukkan bahwa untuk semua $g \in G$, $g \ker(j) g^{-1} \subseteq \ker(j)$. Masih harus ditunjukkan juga bahwa $\ker(j) \subseteq g \ker(j) g^{-1}$. Jika g diganti dengan g^{-1} , diperoleh $g^{-1} \ker(j) g \subseteq \ker(j)$ untuk semua $g \in G$; pernyataan ini ekuivalen dengan $\ker(j) \subseteq g \ker(j) g^{-1}$. Karena telah terbukti bahwa $g \ker(j) g^{-1} \subseteq \ker(j)$ dan $\ker(j) \subseteq g \ker(j) g^{-1}$ maka dapat disimpulkan bahwa $g \ker(j) g^{-1} = \ker(j)$.

Jika suatu homomorfisme $j : G \rightarrow H$ injektif, maka kernel dari pemetaan tersebut hanya terdiri atas elemen identitas, yaitu $j^{-1}(e_H) = e_G$. Kebalikan dari pernyataan ini juga bernilai benar, seperti yang dinyatakan dengan proposisi berikut:

Proposisi 4.24. Suatu homomorfisme $j : G \rightarrow H$ injektif, jika dan hanya jika $\ker(j) = \{e_G\}$.

Bukti: Jika j injektif, maka e_G merupakan prapeta yang unik (tunggal) dari e_H oleh j . Sebaliknya, misalkan $\ker(j) = \{e_G\}$. Ambil sebarang $h \in H$ dan misalkan $g_1, g_2 \in G$ memenuhi $j(g_1) = j(g_2) = h$ maka akan diperoleh $j(g_1^{-1}g_2) = j(g_1)^{-1}j(g_2) = h^{-1}h = e_H$, jadi $g_1^{-1}g_2 \in \ker(j)$. Oleh karena itu $g_1^{-1}g_2 = e_G$, mengakibatkan $g_1 = g_2$. ■

Contoh 4.38. Kernel dari determinan $\det: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ adalah subgrup dari matriks yang determinannya sama dengan 1. Subgrup ini disebut *grup linier khusus* dan dilambangkan dengan $SL(n, \mathbb{R})$.

Contoh 4.39. Misalkan G adalah sebarang grup dan $a \in G$. Jika orde dari a adalah n maka kernel dari homomorfisme $k \mapsto a^k$ dari \mathbb{Z} ke G adalah himpunan semua kelipatan n , $\{kn: k \in \mathbb{Z}\}$. Jika a memiliki orde yang tak berhingga, maka kernel dari homomorfisme tersebut adalah $\{0\}$.

Contoh 4.40. Secara khusus, kernel homomorfisme dari \mathbb{Z} ke \mathbb{Z}_n yang didefinisikan dengan $k \mapsto [k]$ adalah $[0] = \{kn: k \in \mathbb{Z}\}$.

Contoh 4.41. Jika G adalah grup abelian dan n adalah bilangan bulat tetap, maka kernel homomorfisme $g \mapsto g^n$ dari G ke G adalah himpunan elemen-elemen yang ordenya dapat dibagi n .

Paritas Permutasi

Contoh-contoh lain dari homomorfisme dapat dikembangkan dalam soal-soal latihan. Secara khusus, ditunjukkan dalam soal-soal latihan bahwa terdapat suatu homomorfisme $\epsilon: S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ dengan sifat-sifat $\epsilon(\tau) = -1$ untuk sebarang 2-cycle τ . Ini adalah sebuah contoh dari homomorfisme yang tidak akan mungkin bersifat injektif.

Definisi 4.13. Homomorfisme ϵ disebut *tanda* (atau paritas) homomorfisme. Permutasi π dikatakan memiliki paritas genap jika $\epsilon(\pi) = 1$, yaitu jika π berada di dalam kernel paritas homomorfisme. Jika tidak demikian, maka π dikatakan memiliki paritas ganjil. Subgrup dari permutasi genap (yaitu kernel dari ϵ) umumnya dilambangkan dengan A_n . Subgrup ini sering dipandang sebagai *alternating grup*.

Proposisi 4.25. Permutasi π adalah genap jika dan hanya jika π dapat dituliskan sebagai hasil kali dari cycle 2 yang berjumlah genap.

Permutasi genap dan ganjil memiliki sifat-sifat berikut ini: perkalian dari dua permutasi genap menghasilkan permutasi genap; perkalian dari satu permutasi genap dan satu permutasi ganjil menghasilkan permutasi ganjil, dan perkalian dari dua permutasi ganjil menghasilkan permutasi genap.

Corollary 4.10. Himpunan permutasi ganjil di dalam S_n adalah $(12)A_n$, dimana A_n menyatakan subgrup dari permutasi-permutasi genap.

Bukti. $(12)A_n$ terdapat di dalam himpunan permutasi ganjil. Tetapi jika σ adalah sebarang permutasi ganjil, maka $(12)\sigma$ merupakan permutasi genap sehingga $\sigma = (12)((12)\sigma) \in (12)A_n$. ■

Corollary 4.11. Suatu *cycle-k* memiliki permutasi genap jika k ganjil dan ganjil jika k genap.

Bukti: Berdasarkan soal latihan 1. 5. 5. , suatu cycle k dapat dinyatakan sebagai perkalian dari $(k - 1)$ cycle-2. ■

Soal-Soal

- 4.27. Untuk sebarang subgrup A dari suatu grup G , dan $g \in G$, tunjukkan bahwa gAg^{-1} merupakan suatu subgrup dari G .
- 4.28. Buktikan bahwa setiap subgrup dari suatu grup abelian adalah subgrup normal.
- 4.29. Misalkan $j : G \rightarrow H$ adalah suatu homomorfisme dari grup dengan kernel N . Untuk $a, x \in G$, tunjukkan bahwa
$$j(a) = j(x) \cup a^{-1}x \in N \cup aN = xN.$$

Di sini, aN menyatakan $\{an : n \in N\}$.
- 4.30. Misalkan $j : G \rightarrow H$ adalah suatu homomorfisma yang *onto* dari G ke H . Jika A adalah subgrup normal di G , tunjukkan bahwa $j(A)$ merupakan subgrup normal di H .

Definisi 4.14. Elemen-elemen a dan b di grup G dikatakan *conjugate* jika terdapat suatu elemen $g \in G$ sedemikian sehingga $a = gbg^{-1}$.

- 4.31. Latihan-latihan berikut ini bertujuan untuk menentukan kapan dua elemen dari S_n dikatakan *conjugate*.

(c) Tunjukkan bahwa untuk sebarang k cycle $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k) \in S_n$, dan untuk sebarang permutasi $p \in S_n$ maka berlaku

$$p(a_1, a_2, \dots, a_k)p^{-1} = (p(a_1), p(a_2), p(a_3), \dots, p(a_k)).$$

Catatan:

Seperti biasanya, carilah beberapa contoh untuk n dan k yang kecil. Ruas kiri dan ruas kanan merupakan permutasi-permutasi (yaitu pemetaan bijektif yang terdefinisi pada $\{1, 2, \dots, n\}$). Tunjukkan bahwa permutasi-permutasi tersebut adalah pemetaan yang sama.

(d) Tunjukkan bahwa untuk sebarang dua k -cycle (a_1, a_2, \dots, a_k) dan (b_1, b_2, \dots, b_k) di S_n terdapat suatu permutasi $\pi \in S_n$ sedemikian sehingga $p(a_1, a_2, \dots, a_k)p^{-1} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$.

- (e) Misalkan a dan b adalah elemen-elemen dari S_n dan $b = gag^{-1}$ untuk beberapa $g \in S_n$. Tunjukkan bahwa jika a dan b dinyatakan sebagai perkalian dari cycle-cycle yang disjoint, maka a dan b memiliki jumlah cycle yang tepat sama pada masing-masing panjang cycle (Misalnya jika $a \in S_{10}$ adalah perkalian dari dua cycle 3, satu cycle 2, dan empat cycle 1, maka b juga demikian). Dalam hal ini a dan b memiliki struktur cycle yang sama.
- (f) Sebaliknya, misalkan a dan b adalah elemen-elemen dari S_n dan keduanya memiliki struktur cycle yang sama. Tunjukkanlah bahwa terdapat elemen $g \in S_n$ sedemikian sehingga $b = gag^{-1}$.

Hasil dari soal latihan ini adalah sebagai berikut: Dua elemen S_n adalah konjugat jika dan hanya jika kedua elemen tersebut memiliki struktur cycle yang sama.

- 4.32. Tunjukkan bahwa ϵ adalah homomorfisme unik dan onto dari S_n ke $\{1, -1\}$. Catatan: Misalkan $j : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ adalah homomorfisme. Jika $j((12)) = -1$ tunjukkan dengan menggunakan hasil dari soal 2.4.14, bahwa $j = \epsilon$. Jika $j((12)) = +1$, tunjukkan bahwa j adalah homomorfisme trivial, yaitu bahwa $j(p) = 1$ untuk semua p .
- 4.33. Untuk $m < n$, dapat dikatakan bahwa S_m adalah suatu subgrup dari S_n . Pada kasus ini, S_m adalah subgrup dari S_n yang mempertahankan $m + 1$ menjadi sama dengan n . Paritas dari suatu elemen S_m dapat ditentukan dengan dua cara: sebagai salah satu elemen dari S_m atau sebagai salah satu elemen dari S_n . Tunjukkan bahwa kedua jawaban tersebut selalu terpenuhi.

Definisi yang diberikan berikut ini digunakan untuk menyelesaikan soal-soal selanjutnya.

Definisi 4.15. Suatu *automorfisme* dari suatu grup G adalah isomorfisme yang onto dari G ke G .

- 4.34. Diberikan elemen g sebagai elemen dari grup G . Tunjukkan bahwa pemetaan $c_g : G \rightarrow G$ yang didefinisikan sebagai $c_g(a) = gag^{-1}$ merupakan automorfisme dari G . (Tipe automorfisme seperti ini disebut automorfisme *dalam*).
- 4.35. Tunjukkan bahwa konjugasi elemen-elemen dari S_n memiliki paritas yang sama. Secara umum, jika $f : S_n \rightarrow S_n$ adalah suatu automorfisme, maka f mempertahankan paritasnya.
- 4.36. Untuk $A \in GL(n, \mathbb{R})$ dan $b \in \mathbb{R}^n$, didefinisikan suatu transformasi $T_{A,b} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dengan $T_{A,b}(x) = Ax + b$. Tunjukkanlah bahwa himpunan semua transformasi seperti itu akan membentuk suatu grup G .
- 4.37. Perhatikan himpunan matriks $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dimana $A \in GL(n, \mathbb{R})$ dan $b \in \mathbb{R}^n$, dengan 0 menyatakan matriks 0 berukuran $1 \times n$. Tunjukkan bahwa $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ merupakan subgrup dari $GL(n+1, \mathbb{R})$, dan bahwa matriks tersebut isomorfis dengan grup yang digambarkan pada bagian (a).
- 4.38. Tunjukkan bahwa $T_{A,b} \in A$ adalah homomorfisme dari G ke $GL(n, \mathbb{R})$, dan bahwa kernel K dari homomorfisme ini adalah isomorfis dengan \mathbb{R}^n , dapat dipandang sebagai grup abelian dengan operasi penjumlahan vektor.
- 4.39. Misalkan G adalah grup abelian. Untuk sebarang bilangan bulat $n > 0$, tunjukkan bahwa pemetaan $j : a \mapsto a^n$ adalah homomorfisme dari G ke G . Perhatikan sifat kernel j . Tunjukkan bahwa jika n prima relatif dengan orde G , maka j adalah suatu isomorfisme; dengan demikian untuk setiap elemen $g \in G$ terdapat $a \in G$ yang unik sedemikian sehingga $g = a^n$.

G. Koset dan Teorema Lagrange

Perhatikan subgrup $H = \{e, (12)\} \subseteq S_3$. Untuk setiap enam elemen dari $p \in S_3$ dapat ditentukan himpunan $pH = \{ps : s \in H\}$. Sebagai contoh, $(23)H = \{(23), (132)\}$. Tentukanlah himpunan tersebut dan buktikan bahwa:

$$eH = (12)H = H$$

$$(23)H = (132)H = \{(23), (132)\}$$

$$(13)H = (123)H = \{(13), (123)\}.$$

Bila nilai p merupakan elemen-elemen S_3 , hanya terdapat tiga himpunan pH yang berbeda, yang masing-masing muncul sebanyak dua kali.

Definisi 4.16. Misalkan H adalah subgrup dari grup G . Suatu subset yang berbentuk gH dimana $g \in G$, disebut *koset kiri* dari H di G . Suatu subset yang berbentuk Hg dimana $g \in G$, disebut *koset kanan* dari H di G .

Contoh 4.42. S_3 dapat diidentifikasi dengan suatu subgrup S_4 yang terdiri atas permutasi-permutasi yang mempertahankan 4 dan mempermutasikan $\{1, 2, 3\}$. Untuk setiap 24 dari elemen $p \in S_4$, dapat diperoleh himpunan pS_3 . Perhitungan ini akan memerlukan usaha yang sedikit lebih giat. Jika diperlukan, mahasiswa dapat menggunakan perangkat lunak komputer untuk menyelesaikan soal-soal secara berulang-ulang; sebagai contoh, program komputasi dalam grup simetri dapat diselesaikan melalui program matematika simbolik, yaitu *Mathematica*. Untuk $H = \{s \in S_4 : s(4) = 4\}$, diperoleh:

$$H = (12)H = (13)H = (23)H = (123)H = (132)H = H$$

$$(43)H = (432)H = (21)(43)H$$

$$= (2431)H = (4321)H = (431)H$$

$$= \{(43), (432), (21)(43), (2431), (4321), (431)\}$$

$$\begin{aligned}
e(42)H &= (342)H = (421)H \\
&= (4231)H = (3421)H = (31)(42)H \\
&= \{(42), (342), (421), (4231), (3421), (31)(42)\} \\
(41)H &= (41)(32)H = (241)H \\
&= (2341)H = (3241)H = (341)H \\
&= \{(41), (41)(32), (241), (2341), (3241), (341)\}.
\end{aligned}$$

H. Sifat-Sifat Koset

Proposisi 4.26. Misalkan H adalah suatu subgrup dari grup G dan a, b adalah elemen-elemen dari G , maka syarat-syarat di bawah ini adalah ekuivalen:

- (a). $a \in bH$
- (b). $b \in aH$
- (c). $aH = bH$
- (d). $b^{-1}a \in H$
- (e). $a^{-1}b \in H$

Bukti.

Jika syarat (a) terpenuhi, maka terdapat elemen $h \in H$ sedemikian sehingga $a = bh$; tetapi kemudian $b = ah^{-1} \in aH$. Jadi (a) menyatakan (b), demikian pula (b) menyatakan (a). Selanjutnya, andaikan (a) berlaku dan pilih $h \in H$ sedemikian sehingga $a = bh$. Jadi untuk semua $h_1 \in H$, maka $ah_1 = bhh_1 \in bH$; jadi $aH \subseteq bH$. Dengan cara yang sama, (b) menyatakan bahwa $bH \subseteq aH$. Karena (a) ekuivalen dengan (b), maka keduanya menyatakan (c). Karena $a \in aH$ dan $b \in bH$, maka (c) menyatakan (a) dan (b). Akhirnya, (d) dan (e) adalah ekuivalen dengan meangambil inversnya, dan $a = bh \in bH \Leftrightarrow b^{-1}a = h \in H$, jadi (a) dan (d) ekuivalen.

Proposisi 4.27. Misalkan H adalah subgrup dari grup G .

- (a) Misalkan a dan b adalah elemen-elemen dari G maka $aH = bH$ maupun $aH \cap bH = \emptyset$.
- (b) Setiap koset kiri aH adalah himpunan tak kosong dan gabungan koset-koset kiri adalah G .

Bukti: Jika $aH \cap bH \neq \emptyset$, maka dapat diambil $c \in aH \cap bH$. Menurut proposisi sebelumnya $cH = aH$ dan $cH = bH$, sehingga $aH = bH$. Untuk setiap $a \in G$, $a \in aH$; ■

Proposisi 4.28. Misalkan H adalah subgrup dari suatu grup G dan $a, b \in G$, maka $x \mapsto ba^{-1}x$ merupakan bijeksi antara aH dengan bH .

Bukti: Pemetaan $x \mapsto ba^{-1}x$ bijeksi dari G (dengan invers $y \mapsto ab^{-1}y$). Batasan terhadap aH adalah bijeksi dari aH onto bH .

Teorema 4.5. (Teorema Lagrange). Misalkan G adalah suatu grup berhingga dan H adalah suatu subgrup, maka kardinalitas H membagi kardinalitas G dengan $\frac{|G|}{|H|}$ adalah jumlah koset H di G .

Bukti: Koset-koset kiri yang berbeda dari H adalah disjoint dengan Proposisi 2.5. 4 dan masing-masing memiliki ukuran yang sama (yaitu $|H| = |eH|$) dengan Proposisi 2.5.5. Karena gabungan dari koset-koset kiri adalah G , maka kardinalitas G adalah kardinalitas H dikali dengan jumlah koset kiri yang berbeda di H . ■

Definisi 4.17. Untuk suatu subgrup H di G , indeks H di G adalah banyaknya koset kiri H di G . Indeks dilambangkan dengan $[G:H]$.

I. Relasi Ekuivalensi dan Partisi Himpunan

Sehubungan dengan data suatu grup G dan subgrup H , dapat didefinisikan suatu relasi biner pada G dengan $a \sim b \pmod{H}$ atau $a \sim_H b$, jika dan hanya jika $aH = bH$. Menurut Proposisi 2.5.3., $a \sim_H b$ jika dan hanya jika $b^{-1}a \in H$. Relasi ini memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

1. $a \sim_H a$
2. $a \sim_H b \Leftrightarrow b \sim_H a$
3. Jika $a \sim_H b$ dan $b \sim_H c$, maka juga $a \sim_H c$.

Definisi 4.18. Suatu relasi ekivalensi \sim pada suatu himpunan X merupakan relasi biner dengan sifat-sifat sebagai berikut:

- (a) Refleksif: untuk setiap $x \in X$, $x \sim x$
- (b) Simetri: untuk $x, y \in X$, $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$
- (c) Transitif: untuk $x, y, z \in X$, jika $x \sim y$ dan $y \sim z$, maka $x \sim z$

Jika dikaitkan dengan informasi yang sama (suatu grup G dan suatu subgrup H), maka diketahui juga adanya kelompok koset kiri dari H di G . Masing-masing koset kiri adalah koset yang tak kosong, koset kiri yang berbeda adalah disjoint, dan gabungan semua koset kiri adalah G . Ini merupakan contoh dari suatu partisi himpunan.

Definisi 4.19. Suatu partisi dari himpunan X adalah kumpulan himpunan subset tak kosong yang disjoint, yang gabungannya membentuk X .

Relasi ekivalensi dan partisi himpunan adalah hal yang sangat umum dalam matematika. Relasi ekivalensi dan partisi himpunan merupakan dua aspek yang berbeda dari suatu fenomena yang sama.

Contoh 4.43.

- (a) Untuk sebarang himpunan X , kesamaan adalah relasi ekivalensi pada X . Dua elemen $x, y \in X$ berelasi satu sama lain jika dan hanya jika $x = y$.
- (b) Untuk sebarang himpunan X , nyatakan $x \sim y$ untuk semua $x, y \in X$. Ini merupakan relasi ekivalensi pada X .
- (c) Misalkan n adalah suatu bilangan asli. Perhatikan bahwa relasi dari *kongruensi modulo n* yang terdefinisi pada himpunan bilangan bulat dengan $a \equiv b \pmod{n}$ jika dan hanya jika $a - b$ dapat dibagi dengan n . Kongruensi modulo n merupakan relasi ekivalensi pada himpunan bilangan-bilangan bulat. Faktanya, ini merupakan kasus khusus dari relasi ekivalensi koset dengan grup \mathbb{Z} dan subgrup $n\mathbb{Z} = \{nd : d \in \mathbb{Z}\}$.

- (d) Misalkan X dan Y adalah sebarang himpunan dan $f: X \rightarrow Y$ adalah sebarang pemetaan. Suatu relasi pada X dengan $x \sim_f x'$ jika dan hanya jika $f(x) = f(x')$. Maka \sim_f merupakan relasi ekuivalensi di X .
- (e) Menurut geometri euklidian, *kongruensi* adalah relasi ekuivalensi pada himpunan segitiga dalam bidang datar. *Kesamaan* adalah relasi ekuivalensi lain pada himpunan segitiga di dalam bidang datar.
- (f) Juga, menurut geometri euklidian, kesejajaran garis-garis merupakan relasi ekuivalensi pada himpunan dari semua garis-garis di dalam bidang datar.
- (g) Misalkan X adalah sebarang himpunan, dan $T: X \rightarrow X$ adalah pemetaan bijektif dari X . Semua pangkat bilangan bulat dari T terdefinisi dan untuk bilangan bulat m, n didapatkan $T^n \circ T^m = T^{n+m}$. Faktanya, T adalah elemen dari grup semua pemetaan bijektif di X dan pangkat dari T didefinisikan sebagai elemen dari grup ini.

Untuk $x, y \in X$, nyatakan $x \sim y$ jika terdapat suatu bilangan bulat n sedemikian sehingga $T^n(x) = y$. Jadi \sim adalah suatu relasi ekuivalensi pada X . Faktanya, untuk semua $x \in X$, $x \sim x$ karena $T^0(x) = x$. Jika $x, y \in X$ dan $x \sim y$, maka $T^n(x) = y$ untuk suatu bilangan bulat n ; maka $T^{-n}(y) = x$, sehingga $y \sim x$. Akhirnya, misalkan bahwa $x, y, z \in X$, $x \sim y$, dan $y \sim z$. Dengan demikian terdapat bilangan bulat n, m sedemikian sehingga $T^n(x) = y$ dan $T^m(y) = z$. Tetapi, $T^{n+m}(x) = T^m(T^n(x))$ maka $x \sim T^m(y) = z$.

Suatu relasi ekuivalensi pada himpunan X selalu menghasilkan kelompok subset dari X yang berbeda.

Definisi 4.20. Jika \sim adalah suatu relasi ekuivalensi di X , maka untuk setiap $x \in X$, kelas ekuivalensi dari x adalah himpunan $[x] = \{y \in X : x \sim y\}$.

Perhatikan bahwa $x \in [x]$ karena sifat refleksif, yaitu bahwa kelas-kelas ekuivalensi merupakan subset-subset tak kosong dari X .

Proposisi 4.29. Misalkan \sim adalah suatu relasi ekivalensi pada X . Untuk $x, y \in X$, maka $x \sim y$ jika dan hanya jika $[x] = [y]$.

Bukti. Jika $[x] = [y]$ maka $x \in [x] = [y]$ sehingga $x \sim y$. Untuk sebaliknya, anggap bahwa $x \sim y$ (dan karena itu $y \sim x$, berdasarkan sifat simetri relasi ekivalensi). Jika $z \in [x]$, maka $z \sim x$. Selanjutnya berdasarkan asumsi, $x \sim y$, maka sifat transitivitas dari relasi ekivalensi menyatakan bahwa $z \sim y$ (yaitu bahwa $z \in [y]$). Hal ini menunjukkan bahwa $[x] \subseteq [y]$. Demikian juga, $[y] \subseteq [x]$. Oleh karena itu $[x] = [y]$.

Corollary 4.12. Misalkan \sim adalah relasi ekivalensi di x , dan $x, y \in X$ maka $[x] \not\subseteq [y] = \emptyset$ atau $[x] = [y]$.

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa jika $[x] \not\subseteq [y] \neq \emptyset$, maka $[x] = [y]$. Tetapi jika ternyata $z \in [x] \not\subseteq [y]$ maka $[x] = [y] = [z]$. ■

Perhatikan suatu relasi ekivalensi \sim pada X . Kelas-kelas ekivalensi dari \sim adalah himpunan tak kosong, dan memiliki himpunan gabungan yang sama dengan X , karena untuk setiap $x \in X$, $x \in [x]$. Selanjutnya, kelas-kelas ekivalensi bersifat saling lepas (*mutually disjoint*). Hal ini menunjukkan bahwa untuk sebarang dua kelas ekivalensi yang berbeda, tidak memiliki anggota himpunan irisan. Jadi koleksi dari kelas ekivalensi merupakan *partisi* dari himpunan x .

Untuk sebarang relasi ekivalensi pada himpunan x akan membentuk suatu partisi dari x dengan kelas-kelas ekivalensi. Sebaliknya, jika diberikan suatu partisi P dari X , dapat didefinisikan suatu relasi di X dengan pernyataan $x \sim_P y$ jika dan hanya jika x dan y berada di dalam subset yang sama dari partisi tersebut. Dapat diperiksa bahwa ini merupakan suatu relasi ekivlensi. Dengan menuliskan P sebagai $\{x_i; i \in I\}$ diperoleh $X_i \neq \emptyset$ untuk semua $i \in I$, dan $x_i \cap x_j = \emptyset$ jika $i \neq j$, dan $\cup_{i \in I} x_i = x$. Definisi relasi adalah $x \sim_P y$ jika dan hanya jika terdapat $i \in I$ sedemikian sehingga x maupun y adalah elemen dari X .

Untuk semua $x \in X$, $x \sim_P x$ karena terdapat $i \in I$ sehingga $x \in X_i$. Definisi $x \sim_P y$ jelas simetri dalam x dan y . Akhirnya jika $x \sim_P y$ dan $y \sim_P z$, maka terdapat $i \in I$ sedemikian sehingga x maupun y adalah elemen dari X_i dan juga terdapat $j \in I$ sedemikian sehingga y maupun z adalah elemen dari X_j . Sekarang, i harus sama dengan j karena y adalah elemen dari X_i maupun X_j dan $X_i \cap X_j = \emptyset$ jika dan hanya jika $i \neq j$. Tetapi x dan z adalah elemen dari X_i , yang mengakibatkan $x \sim_P z$.

Setiap partisi dari himpunan X akan membentuk relasi ekivalensi dengan X . Misalkan bahwa kita mulai dengan relasi ekivalensi pada suatu himpunan X , yang membentuk partisi X menjadi kelas-kelas ekivalensi, dan membentuk relasi ekivalensi yang berkaitan dengan partisi ini. Dengan demikian kita akan kembali kepada kelas ekivalensi di mana kita mulai. Faktanya, misalkan \sim adalah relasi ekivalensi pada X , misalkan $P = \{[x] : x \in X\}$ adalah partisi X yang bersesuaian dengan kelas ekivalensi, dan misalkan \sim_P menyatakan relasi ekivalensi yang diturunkan dari P . Maka, $x \sim y \Leftrightarrow [x] = [y] \Leftrightarrow$ terdapat $[z] \in P$ sedemikian sehingga x maupun y adalah elemen-elemen dari $[z] \Leftrightarrow x \sim_P y$.

Sebaliknya, misalkan bahwa kita mulai dengan partisi dari himpunan X , membentuk relasi ekivalensi yang bersesuaian, dan kemudian membentuk partisi X yang terdiri atas kelas-kelas ekivalensi untuk relasi ekivalensi tersebut. Kemudian berhenti tepat pada partisi dimana kita mulai. Faktanya, misalkan P adalah partisi dari X , dan \sim_P adalah relasi ekivalensi yang bersesuaian, dan P^\dagger adalah kelompok dari kelas ekivalensi \sim_P . Dapat dibuktikan bahwa $P = P^\dagger$.

Misalkan $a \in X$, dan $[a]$ adalah elemen unik dari P^\dagger yang memuat a , dan misalkan A adalah elemen unik dari P yang memuat a . Dengan demikian $b \in [a] \Leftrightarrow b \sim_P a$ jika dan hanya jika terdapat $B \in P$ sedemikian sehingga a maupun b adalah elemen-elemen dari B . Tetapi karena $a \in A$, maka syarat $B \in P$ terpenuhi jika dan hanya jika a dan b adalah elemen-elemen dari A yaitu $[a] = A$. Tetapi hal ini menunjukkan bahwa P dan P^\dagger memiliki subset-subset dari X yang tepat sama. Proposisi di bawah ini menjelaskan hal tersebut.

Proposisi 4.30. Misalkan X adalah sebarang himpunan, maka terdapat suatu korespondensi satu satu antara relasi ekivalensi di X dengan partisi himpunan dari X .

Catatan. Proposisi ini, dan penjelasan-penjelasan yang disebutkan sebelumnya, adalah valid (tetapi secara keseluruhan tidak penting) jika X adalah himpunan kosong. Terdapat tepat satu relasi ekivalensi pada himpunan kosong tersebut, yang dinamakan relasi kosong, dan terdapat tepat satu partisi pada himpunan kosong, yaitu kumpulan kosong dari subset-subset tak kosong.

Contoh 4.44. Misalkan suatu grup G dengan suatu subgrup H . Berdasarkan informasi-informasi tersebut, diperoleh kelompok koset kiri H di G . Selanjutnya, menurut Proposisi 2.5. 4, kelompok koset kiri H di G membentuk suatu partisi dari G . Relasi ekivalensi \sim_H yang dinyatakan dengan partisi ini, yaitu $a \sim_H b$, jika dan hanya jika $aH = bH$. Kelas ekivalensi dari \sim_H adalah koset-koset kiri dari H di G , karena $a \sim_H b \Leftrightarrow aH = bH \Leftrightarrow a \in bH$.

Contoh 4.45.

- (a) Kelas ekivalensi untuk relasi ekivalensi dari kesamaan pada suatu himpunan adalah singleton $\{x\}$ untuk $x \in X$.
- (b) Relasi ekivalensi $x \sim y$ untuk semua $x, y \in X$ memiliki hanya satu kelas ekivalensi, yaitu X .
- (c) Kelas ekivalensi untuk relasi kongruensi modulo n di \mathbb{Z} adalah $\{[0], [1], \dots, [n-1]\}$.
- (d) Misalkan $f: X \rightarrow Y$ adalah suatu pemetaan. Didefinisikan $x \sim_f x'$ jika dan hanya jika $f(x) = f(x')$. Kelas ekivalensi untuk relasi ekivalensi \sim_f adalah *serat* dari f , yaitu himpunan-himpunan $f^{-1}(y)$ untuk y dalam range f .
- (e) Misalkan X adalah sebarang himpunan, dan $T: X \rightarrow X$ adalah suatu pemetaan bijektif dari X . Untuk $x, y \in X$, nyatakan $x \sim y$ jika terdapat suatu bilangan bulat n sedemikian sehingga $T^n(x) = y$. Kelas ekivalensi

untuk relasi ini adalah *orbit-orbit* dari T , yaitu himpunan-himpunan $O(x) = \{T^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ untuk $x \in X$.

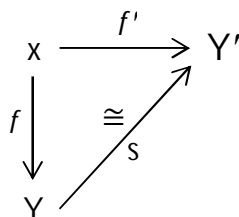
J. Relasi Ekuivalensi dan Pemetaan Surjektif.

Ada aspek ketiga dari masalah relasi ekuivalensi dan partisi. Telah diketahui bahwa untuk pemetaan f dari suatu himpunan X ke suatu himpunan lainnya, misalnya Y , maka relasi ekuivalensi dapat didefinisikan pada X yaitu $x \sim_f x'$ jika $f(x) = f(x')$. Dapat juga diasumsikan bahwa f bersifat surjektif, apabila Y diganti dengan range f tanpa mengubah relasi ekuivalensi. Kelas-kelas ekuivalensi dari \sim_f adalah serat $f^{-1}(y)$ untuk $y \in Y$.

Sebaliknya, suatu relasi ekuivalensi \sim yang diketahui pada X , didefinisikan X/\sim sebagai himpunan kelas-kelas ekuivalensi dari \sim dan definisikan suatu surjeksi π dari X terhadap X/\sim dengan $\pi(x) = [x]$. Jika kita membentuk relasi ekuivalensi \sim_π yang berhubungan dengan pemetaan surjektif ini, maka akan ditemukan relasi ekuivalensi asli. Untuk $x, x' \in X$, akan diperoleh $x \sim x' \Leftrightarrow [x] = [x'] \Leftrightarrow \pi(x) = \pi(x') \Leftrightarrow x \sim_\pi x'$.

Proposisi 4.31. Misalkan \sim adalah suatu relasi ekuivalensi pada suatu himpunan X , maka terdapat suatu himpunan Y dan suatu pemetaan surjektif $\pi: X \rightarrow Y$ sedemikian sehingga \sim sama dengan relasi ekuivalensi \sim_π . Kapankah dua pemetaan surjektif $f: X \rightarrow Y$ dan $f': X \rightarrow Y'$ menyatakan relasi ekuivalensi yang sama pada X ?

Definisi 4.21. Dua pemetaan surjektif $f: X \rightarrow Y$ dan $f': X \rightarrow Y'$ adalah sama jika terdapat suatu bijeksi $s: Y \rightarrow Y'$ sehingga $f' = s \circ f$.



Proposisi 4.32. Dua pemetaan surjektif $f: X \rightarrow Y$ dan $f^\sharp: X \rightarrow Y^\sharp$ menyatakan relasi ekivalensi X yang sama jika dan hanya jika f dan f^\sharp adalah pemetaan yang sama.

Bukti: Cukup mudah membuktikan bahwa jika f dan f^\sharp adalah pemetaan surjektif yang sama, maka kedua-duanya menyatakan relasi ekivalensi yang sama pada X .

Misalkan sebaliknya, bahwa $f: X \rightarrow Y$ dan $f^\sharp: X \rightarrow Y^\sharp$ adalah pemetaan surjektif yang menyatakan relasi ekivalensi \sim yang sama pada X . Akan ditunjukkan suatu pemetaan $s: Y \rightarrow Y^\sharp$ sehingga $f^\sharp = s \circ f$. Misalkan $y \in Y$, dan pilih sebarang $x \in f^{-1}(y)$ untuk menunjukkan bahwa $s(y) = f^\sharp(x)$ sehingga $s(f(x)) = s(y) = f^\sharp(x)$. Meskipun demikian harus selidiki dengan cermat bahwa $s(y)$ memang hanya bergantung pada y , bukan pada pilihan $x \in f^{-1}(y)$. Kenyataannya, jika \bar{x} adalah salah satu elemen lain dari $f^{-1}(y)$, maka $x \sim_f \bar{x}$ sehingga $x \sim_{f^\sharp} \bar{x}$ berdasarkan hipotesis, akibatnya $f^\sharp(x) = f^\sharp(\bar{x})$.

Dengan pemetaan $s: Y \rightarrow Y^\sharp$ sedemikian sehingga $f^\sharp = s \circ f$. Hal ini tetap menyatakan bahwa s adalah pemetaan yang bijektif. Dengan cara yang sama dalam mendefinisikan s , dapat pula didefinisikan pemetaan $s': Y^\sharp \rightarrow Y$ sehingga $f = s' \circ f^\sharp$. Karena s dan s' adalah pemetaan-pemetaan yang terbalikkan, maka kedua-duanya bijektif. Faktanya, $f = s' \circ f^\sharp = s' \circ s \circ f$, maka $f(x) = s'(s(f(x)))$ untuk semua $x \in X$. Misalkan $y \in Y$. Pilih $x \in X$ sedemikian sehingga $y = f(x)$. Dengan mensubstitusi y untuk $f(x)$ diperoleh $y = s'(s(y))$. Dengan cara yang sama, $s(s'(y)) = y^\sharp$ untuk semua $y^\sharp \in Y^\sharp$. Terbukti bahwa s bijektif.

Definisi 4.22. Himpunan koset kiri dari H di dalam G dinyatakan dengan $H|G$. Pemetaan surjektif $\pi: G \rightarrow G|H$ yang dituliskan dengan $\pi(a) = aH$ dinamakan *proyeksi kanonik* atau pemetaan hasilbagi dari G ke $G|H$.

Proposisi 4.33. Serat-serat proyeksi kanonik $\pi: G \rightarrow G/H$ merupakan koset kiri dari H di G . Relasi ekivalensi \sim_π pada G yang ditentukan oleh π adalah relasi ekivalensi \sim_H .

Bukti:

Diketahui bahwa $\pi^{-1}(aH) = \{b \in G: bH = aH\} = aH$. Selanjutnya $a \sim_\pi b \Leftrightarrow aH = bH \Leftrightarrow a \sim_H b$.

K. Konjugasi

Salah satu bentuk relasi ekivalensi yang memiliki peran yang sangat berguna dalam mempelajari struktur grup adalah konjugasi.

Definisi 4.23. Konjugasi

Misalkan a dan b adalah elemen-elemen dari grup G , maka b dikatakan *konjugat* dari a jika terdapat $g \in G$ sehingga $b = gag^{-1}$.

Definisi 4.24. Kelas-kelas ekivalensi untuk konjugasi disebut kelas konjugasi.

Center grup berkaitan dengan pengertian konjugasi dengan cara sebagai berikut: center grup terdiri atas semua elemen yang memiliki kelas konjugasi adalah suatu singleton. Jadi $g \in Z(G) \Leftrightarrow$ kelas konjugasi g adalah $\{g\}$.

L. Soal-Soal

- 4.1. Buktikanlah bahwa koset-koset kiri dari subgrup $K = \{e, (123), (132)\}$ di dalam S_3 adalah

$$eK = (123)K = (132)K = K$$

$$(12)K = (13)K = (23)K = \{(12), (13), (230)\}$$

dan bahwa masing-masing terjadi tiga kali dalam daftar $(gK)_{g \in S_3}$.

Perhatikan bahwa K adalah subgrup dari permutasi-permutasi genap dan koset-koset K yang lain adalah himpunan permutasi ganjil.

- 4.2. Misalkan $K \subseteq H \subseteq G$ adalah subgrup dan h_1K, \dots, h_RK adalah daftar koset-koset K yang berbeda di dalam H , dan g_1H, \dots, g_SH adalah daftar koset-koset H yang berbeda di dalam G . Tunjukkan bahwa $\{g_s h_r H : 1 \leq s \leq S, 1 \leq r \leq R\}$ adalah himpunan koset-koset H yang berbeda di dalam G . (Ada dua hal yang akan ditunjukkan. *Pertama*, tunjukkan bahwa jika $(r, s)^{-1} (r', s')$, maka $g_s h_r K^{-1} g_{s'} h_{r'} K$. *Kedua*, tunjukkan bahwa jika $g \in G$, maka untuk suatu (r, s) , $gK = g_s h_r K$.

- 4.3. Perhatikanlah grup S_3 .

- Carilah semua koset kiri dan semua koset kanan dari subgrup $H = \{e, (12)\}$ dari S_3 , dan selidikilah bahwa tidak setiap koset kiri merupakan koset kanan.
- Carilah semua koset kiri dan semua koset kanan dari subgrup $K = \{e, (123), (132)\}$ dari S_3 , dan selidikilah bahwa setiap koset kiri merupakan koset kanan.
- Misalkan H adalah suatu subgrup dari suatu grup G . Buktikan bahwa $aH \mapsto Ha^{-1}$ menyatakan bijeksi antara koset kiri dari H di G dan koset kanan dari H di G .

- 4.4. Untuk suatu subgrup N dari grup G , buktikan bahwa pernyataan-pernyataan di bawah ini adalah ekuivalen.

- N adalah normal.
- Setiap koset kiri dari N juga merupakan koset kanan, yaitu bahwa untuk setiap $a \in G$, terdapat $b \in G$ sedemikian sehingga $aN = Nb$.
- Untuk setiap $a \in G$, maka $aN = Na$.

- 4.5. Untuk dua subgrup H dan K dari grup G dan suatu elemen $a \in G$, koset ganda HaK adalah himpunan semua hasil perkalian hak , dimana $h \in H$. Tunjukkan bahwa dua koset ganda HaK dan HbK adalah koset-koset yang sama atau koset-koset yang disjoint.
- 4.6. Tunjukkan bahwa center dari grup G merupakan subgrup normal dari G .
- 4.7. Tentukanlah center dari grup S_3 .
- 4.8. Tentukanlah center dari grup D_4 dari simetri-simetri dari persegi.
- 4.9. Tentukanlah center dari grup dihedral D_n .
- 4.10. Misalkan terdapat suatu pemetaan surjektif f dari suatu himpunan X ke himpunan lainnya, yaitu Y . Kita dapat menetapkan suatu relasi pada X dengan $x_1 \sim x_2$ jika $f(x_1) = f(x_2)$. Periksa apakah relasi ini merupakan relasi ekuivalensi. Tunjukkan bahwa partisi dari X merupakan partisi $f^{-1}(y)$ untuk $y \in Y$.
- 4.11. Tunjukkan bahwa konjugasi dari elemen grup merupakan relasi ekuivalensi.
- 4.12. Tentukanlah kelas konjugasi di S_3 .
- 4.13. Tentukan kelas konjugasi dalam grup simetri pada persegi D_4 .
- 4.14. Tentukan kelas konjugasi pada grup dihedral D_5 .
- 4.15. Tunjukkan bahwa suatu subgrup adalah grup normal jika dan hanya jika subgrup tersebut merupakan gabungan dari kelas-kelas konjugasi.

DAFTAR RUJUKAN

- Badawi, Ayman, 2004, *Abstract Algebra Manual 2nd Edition*, Problem and Solution, New York: Nova Science Publisher, Inc.
- Beachy, John A., dan Blair, William D., 2006, *Abstract Algebra: a Study Guide for Beginners*, Illinois: Waveland Press, Inc.
- Bogopolski, Oleg, 2008. *Introduction to Grup Theory*, Switzerland: European Mathematical Society.
- Dummit, David S. dan Foote, Richard M., 2004. *Abstract Algebra*, 3rd Edition, Denver, Massacuccets: John Wiley and Sons, Inc.
- Gallian, Joseph A., *Contemporary Abstract Algebra*, 7th Edition, California: Brooks/Cole Cengage Learning.
- Gilbert, Linda dan Gilbert, Jimmie, 2009. *Elements of Modern Algebra*, 7th Edition, California: Brooks/Cole Cengage Learning.
- Golden Math Series, 2005, *Modern Algebra*, Daryaganj, New Delhi: Laxmi Publications (P) Ltd.
- Goodman, Frederick M., 2006. *Algebra: Abstract and Concrete*, Edition 2.5, Iowa City: Semisimple Press.
- Herstein, I. N., 1996. *Abstract Algebra*, 3rd Edition, Simon & Schuster/A Viacom Company, Prentice-Hall.
- Kleiner, Israel, 2007, *A History of Abstract Algebra*, Toronto, Canada: Birkhauser.
- Ledermann, W. 1979. *Introduction to Grup Theory*, London: Longman Grup Limited.
- Menini, Claudia dan Van Oystaeyen, Freddy, 2004, *Abstract Algebra a Comprehensive Treatment*, USA: Marcel Dekker, Inc.
- Redfield, Robert H. 2001, *Abstract Algebra: A Concrete Introduction*, USA: Addison Wesley Longman, Inc.
- Tahmir, Suradi, 2007, *Teori Grup*, Makassar: Andira Publisher.

Aljabar Abstrak

Buku ini menjelaskan topik-topik yang bersifat abstrak kepada mahasiswa dengan pendekatan realistik. Karena itu dalam buku ini ditambahkan materi Simetri, yang jarang diuraikan dalam buku Aljabar Abstrak lainnya. Penjelasan Simetri akan memudahkan mahasiswa memahami tabel perkalian Cayley dan Permutasi. Selanjutnya mahasiswa dapat mengembangkan konsep tersebut dan menerapkannya pada Teori Grup.

