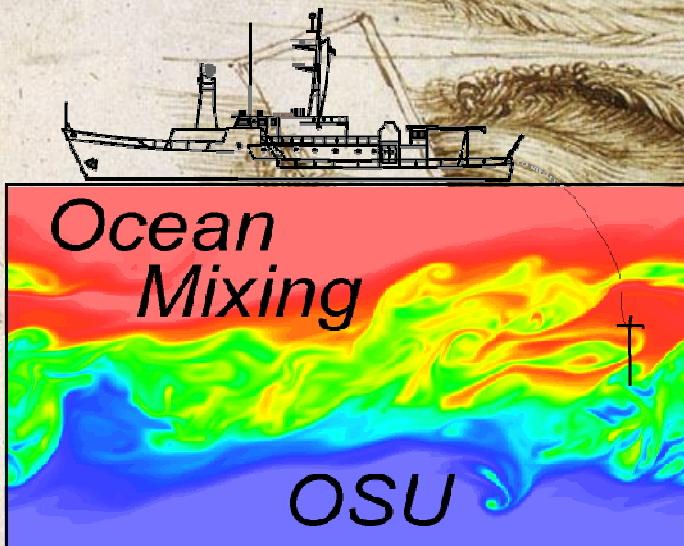


TURBULENSI LAUT BANDA



A. SULAIMAN

Alhamdulillah, selamat datang di channel YouTube ini. Saya A. Sulaiman, seorang ahli ilmu pengetahuan dan teknologi. Saya berbagi pengetahuan dan teknologi melalui video-video di channel ini. Saya juga memberikan bantuan teknis dan saran untuk para pengembang aplikasi dan game mobile. Saya berharap dengan adanya channel ini, dapat membantu para pengembang dalam menciptakan aplikasi dan game yang baik dan bermanfaat. Terima kasih atas kunjungan dan support anda.

TURBULENSI LAUT BANDA

(Studi Pendahuluan ARLINDO Microstructure)

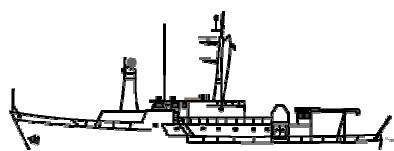
A. SULAIMAN

Direktorat Teknologi Inventarisasi Sumberdaya Alam (TISDA)
Badan Pengkajian dan Penerapan Teknologi (BPPT)

BPPT

2000

ISBN:



KATA PENGANTAR

Buku ini berbicara tentang turbulen, sesuatu yang sukar didefinisikan tetapi sangat penting dalam kehidupan. Turbulensi terjadi diseluruh penjuru alam semesta: di dalam bintang, di atmosfer, di laut, di pabrik, di gedung DPR, dikantor, bahkan sampai di dapur. Dalam aktivitas kita sehari-hari, kita akan bertemu dengan turbulen. Sebagai contoh, bila kita menyeduh secangkir susu coklat maka tentu saja kita akan mengaduknya supaya susu dan coklat bercampur sehingga bila diminum kita akan merasakan nikmat, sambil geleng-geleng kepala dan berkata "*pas susunya !!*". Pada dasarnya kita telah menciptakan turbulen dengan pengaduk sebagai gaya penggeraknya.

Di laut turbulensi juga terjadi. Jika di laut tidak ada turbulen atau sering juga disebut proses **mixing** (pencampuran) maka massa air yang di dasar akan tetap di dasar dan massa air yang diatas akan tetap diatas, sehingga kita tidak akan pernah menjumpai laut seperti sekarang ini. Laut dari jaman nenek moyang akan sama dengan jaman kita karena adanya proses mixing yang membawa massa air ke atas dan sebaliknya. Turbulen akan membawa nutrien dari dasar ke permukaan sehingga permukaan menjadi subur dan banyak ikannya, sehingga nelayan senang karena banyak tangkapannya dan kita mendapat suplai ikan laut yang menyebabkan badan menjadi sehat dan otak tambah cerdas. Turbulensi merupakan penopang kehidupan di laut.

Dalam buku ini kita akan berbicara tentang turbulensi yang ada dilaut, khususnya dilaut yang dinamakan laut Banda. Ada hal yang menarik dari laut Banda ini. Cobalah anda lihat peta dunia, kita akan melihat bahwa laut Banda merupakan satu-satunya laut yang tertutup atau semi tertutup yang terletak di ekuator. Laut Banda dapat dibayangkan seperti mangkok raksasa dengan diameter 400 km dalam arah utara-selatan dan diameter 800 km dalam arah timur-barat, serta kedalaman rata-rata 5000m. Banyak pengukuran turbulen yang telah dilakukan di ekuator tetapi lautnya merupakan laut terbuka, dan banyak pula pengukuran telah dilakukan di laut tertutup atau semi tertutup tetapi tidak terletak di ekuator. Laut Banda mengabungkan keduanya. Saya barangkali termasuk orang yang beruntung dapat mengikuti ekspedisi turbulensi di laut Banda yang pertama kali.

Ekspedisi ini dinamakan *Arlindo Microstructure* dan ekspedisi pertama ini termasuk sukses dengan didapatkannya banyak data dan fenomena yang menarik. Seseorang mengelitik saya sampai saya "njondal-njondil" saking gelinya, untuk menuliskan hasil ekspedisi ini dalam sebuah buku. Interaksi saya dengan prof Michael C. Gregg [Pak Gregg merupakan salah seorang tokoh sentral (pendekar) dalam pengukuran turbulensi dilaut] yang menyebabkan saya berani melakukan ini. Sudah selayaknya saya berterima kasih atas ilmu dan informasinya. Iklim akademis yang diberikannya sangat kondusif, dan wataknya yang sabar dan bijaksana menyebabkan saya cepat menyerap ilmu yang diberikannya. Seperti buku pada umumnya, buku ini akan dimulai dengan suatu pendahuluan yang memberikan gambaran singkat tentang turbulensi di laut serta latar belakang mengapa kita mengadakan ekspedisi turbulensi di laut Banda. Kondisi laut yang berlapis secara alamiah sangat menguntungkan karena ketakstabilan yang muncul dari keadaan ini merupakan sumber utama terjadinya turbulen. Adanya beda kecepatan antar lapisan di laut dinamakan shear. Jika gangguan muncul dan kondisi menjadi tak stabil maka turbulen akan tercipta. Gangguan yang menjalar dalam fluida berlapis (yang disebut gelombang internal) suatu saat akan mencapai kondisi kritis sehingga dia akan pecah, pecahnya gelombang ini akan menimbulkan turbulensi. Hasil pengukuran selama ini menunjukkan shear dan pecahnya gelombang internal merupakan dua sumber utama turbulensi dilaut. Penjelasan dari keduanya akan dibahas secara mendalam dalam bab kedua. Bab ketiga akan membicarakan tentang bagaimana caranya kita mengukur turbulensi di laut. Bab ke empat berisikan hasil pengukuran serta penjelasan fenomena yang kita jumpai selama ekspedisi. Beberapa peneliti telah mencoba mengestimasi kekuatan mixing dengan menghitung difusivitas diapiknalnya dengan data hidrografi. Hasil perhitungan mereka mencapai kesimpulan bahwa mixing dilaut Banda sangat kuat dengan harga dalam orde $10^{-4} \text{ m}^2 / \text{s}$. Hasil pengukuran dengan modular microstructure profiler (MMP) menunjukkan harga yang lemah yaitu dalam orde $10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$. Hasil mengejutkan inilah yang menyebabkan penelitian turbulensi di laut Banda masih terbuka lebar lebar.

Alasan utama saya menuliskan buku ini dalam bahasa Indonesia adalah supaya buku ini mudah dibaca. Saya mulai jatuh cinta pada turbulen semenjak saya mahasiswa, waktu itu saya tertarik pada proses pembalikan medan magnet bumi akibat gerak turbulen di dalam inti luar bumi. Saat itu saya mengalami masa-masa sulit untuk bisa memahami turbulen, karena saya mempelajarinya secara otodidak. Saya tengah belajar bagaimana menyampaikan konsep yang susah ini ke dalam bahasa yang sederhana sehingga saya berharap buku ini mudah dibaca oleh semua orang. Tetapi dengan sangat menyesal saya ingin mengatakan bahwa buku ini akan mudah dimengerti oleh mereka yang mempunyai landasan yang baik dalam

metode matematika (analisis vektor, analisis Fourier, persamaan diferensial biasa/parsial) dan dasar-dasar dinamika fluida. Kita akan membicarakan secara ringkas metode-metode matematika diatas di apendiks. Saya tidak mengasumsikan pembaca mempunyai pengetahuan tentang turbulensi, tetapi bagi pembaca yang mempunyai dasar yang kuat mekanika statistik dan teori kinetik gas, akan sangat membantu sekali, karena dasar filosofis dari teori statistik turbulensi (*yang di gunakan dalam penelitian ini*) adalah mengadopsi dari mekanika statistik. Saya telah berusaha sekuat tenaga untuk menyajikan buku ini sedemikian rupa sehingga semua orang pada garis besarnya dapat memahaminya dengan mudah. Hanya pembaca yang menilai usaha saya berhasil atau tidak. Meskipun penelitian dilaut Banda belum selesai tetapi toh saya berani menuliskannya dalam sebuah buku. Tujuan saya semata-mata supaya banyak ilmuwan kita yang mau bersusah-susah untuk ikut menyelidiki turbulensi atau proses mixing yang terjadi dilaut kita ini. Sangat ironis kalau orang asing justru lebih tahu tentang laut kita dari pada ilmuwan kita sendiri. Saya melihat tanda-tanda kearah itu sudah tampak, dilain pihak saya juga optimis bahwa ternyata banyak ilmuwan laut kita yang sudah berada di garis depan sains. Itu suatu prestasi yang membanggakan. Insya Allah, dengan usaha yang pantang menyerah pada akhirnya kita dapat berada di garis depan sains kelautan.

Jakarta, Oktober 2000

(A. Sulaiman)

UCAPAN TERIMAKASIH

Andaikata saya ibaratkan buku ini sebagai bayi, maka saya adalah ibunya sedangkan orang-orang dibawah ini adalah bidan-bidannya. Saya beruntung, karena kelahiran buku ini dibantu oleh banyak bidan. Sudah selayaknya saya mengucapkan banyak terimakasih karena bantuan mereka yang sangat berharga. Pertama-tama kepada Prof. Dr. Mike C. Gregg (prof. Oseanografi di Universitas Washington, Seattle) yang telah memberikan ilmu tentang turbulensi dilaut. Dr. M. Alford (APL – UW) atas diskusinya tentang gelombang internal di laut Banda. Dr. David Winkel (APL – UW) atas diskusinya tentang turbulen dan bantuannya selama saya di Seattle. Jenifer Mc.Kinnon (Ph.D APL – UW) atas diskusinya selama cruise. Ir. M. Ilyas teman seperjuangan pada saat berguru di Seattle. Pak Ismail sekeluarga atas bantuannya yang tak ternilai selama saya di Seattle dan teman-teman pengajiannya sehingga saya merasa tidak terasing di negeri orang. I. Soesilo, Ph.D; Dpl-Ing. Basri M. Ganie dan Dwi Susanto Ph.D yang mendukung program ekspedisi ini sehingga berjalan sukses. Mayor Suriya Cendra Kelana dan seluruh awak kapal Baruna Jaya IV, khususnya kepada Kapten Edi dengan candanya sehingga saya tidak merasa bosan selama cruise. Handoko Manoto, Iksan , the Jack, Tatang Up-welling dan Soeyatmin atas partisipasinya selama cruise. Terimakasih juga kepada istri saya tercinta Sri Lestari atas pengertiannya karena saya banyak mengambil waktunya. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

PENULIS



Albert Sulaiman,

Lahir di Purworejo 28 April 1970. Lulus SMAN 1 Purworejo 1988. S1 jurusan Geofisika & Meteorologi, ITB, Bandung 1994. S2 Universitas Indonesia: Fisika Nuklir & Partikel 2005. 2007 melanjutkan S3 bidang Biofisika Molekular Teoritik di Institut Teknologi Bandung (ITB). Bekerja di TISDA BPPT (1997-sekarang). Minat penelitian: Nonlinear Wave; Coastal Geomorphodynamics ; Regional & Satellite Oceanography, Continuum Geophysics, Georadar &, Molecular Biophysics. Keanggotaan ilmiah: Himpunan Fisikawan Indonesia (HFI), Grup Fisikawan Teoritik Indonesia (GFTI), Masyarakat Komputasi Indonesia , Masyarakat Pengideraan Jauh Indonesia (MAPIN) dan Ikatan Sarjana Oseanologi Indonesia (ISOI). Bidang lain yg diminati: 1. Tatah, sungging dan filsafat wayang kulit. 2. Musik: heavy metal (guitarist sebuah band Rock).

DAFTAR ISI

Kata Pengantar	2
Ucapan terimakasih	5
Daftar Isi	6
1. Pendahuluan	8
1.1 Turbulensi dan proses mixing di laut.	8
1.2 Turbulensi dan proses mixing di laut Banda.	12
2. Teori Turbulensi dalam Fluida Berlapis.	17
2.1 Persamaan dasar dinamika fluida.	17
2.1.1 Persamaan kontinuitas	18
2.1.2 Persamaan gerak	19
2.1.3 Persamaan difusi	20
2.2 Mekanisme turbulensi.	22
2.2.1 Generasi turbulen dalam teori statistik turbulensi	25
2.2.2 Generasi turbulen dalam teori deterministik chaos	26
2.3 Teori statistik turbulensi.	31
2.3.1 Persamaan keseimbangan kecepatan	34
2.3.2 Persamaan keseimbangan medan skalar	36
2.3.3 Persamaan keseimbangan energi potensial	37
2.4 Pengaruh stratifikasi fluida.	37
2.4.1 Turbulensi homogen isotropis	38
2.5 Struktur turbulensi skala kecil.	43
2.5.1 Teori Kolmogorov	43
2.5.2 Dinamika bilangan gelombang	46
3. Akusisi dan Pengolahan Data.	50
3.1 Akusisi data	51
3.2 Instrumen dan sensor.	54
3.3 Pengolahan data	59
4. Diapycnal Mixing di laut Banda.	67
4.1 Hidrografi perairan laut Banda dan sekitarnya.	67
4.2 Estimasi Diapycnal mixing dengan data hidrografi.	75
4.3 Diapycnal mixing dan gelombang internal semi-inersia.	80
Diskusi dan Penutup	102

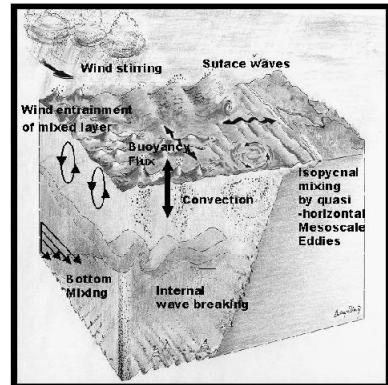
Daftar Pustaka	105
Apendiks	
A. Analisis Vektor	110
B. Analisis Fourier	119
C. Persamaan Diferensial Parsial	127
Oceanographer	

BAB I

Pendahuluan

I do not believe that God plays dice with
the world !

B. A. Einstein



1.1. Turbulensi dan Proses Mixing di Laut

Tanpa adanya turbulen atau proses mixing (pencampuran) maka kita tidak akan pernah melihat laut seperti sekarang ini. Laut tetap sama sejak jaman dahulu kala, jamannya manusia purba, jaman ken arok, jaman majapahit sampai jaman kita ini, diakibatkan adanya proses mixing yang selalu terjadi setiap waktu. Turbulen akan membawa nutrien dari dasar laut ke permukaan sehingga plankton dapat tumbuh subur. Kehidupan laut akan tetap lestari karena adanya proses mixing ini. Disamping itu turbulen dekat permukaan yang bisanya digerakkan oleh angin dan proses pendinginan akan mentransmisikan panas ke dalam dan keluar lautan sehingga laut dapat berperan sebagai reservoir panas dinama reservoir ini sebagai komponen utama penggerak iklim di bumi kita tercinta. Turbulensi yang terjadi didasar laut akan mempengaruhi deposisi, resuspensi serta pergerakan dari sedimen [Caldwell,D.R & J.N Moum 1996;]. Turbulensi menciptakan suatu lingkungan mikro yang merupakan dasar penopang kehidupan di laut.

Turbulensi (vertikal) yang merupakan gerakan acak dan tak teratur, dilaut mempunyai orde 0.01 sampai 100 meter. Suatu orde yang sangat kecil sehingga sering disebut struktur mikro dari dinamika laut. Meskipun ordenya kecil tetapi sangat penting untuk mempelajari dinamika arus secara global, perubahan iklim, dispersi polutan, produktivitas plankton dll. Disamping mempengaruhi proses diatas, ternyata turbulensi juga mempengaruhi penjalaran gelombang akustik dan gelombang optik dilaut melalui peristiwa hamburan, refraksi dan difleksi [Monin, A.S & R.V Ozmiodov, 1985]. Karena gerakan yang ada dalam turbulensi sangat acak dan alirannya saling tumpang-tindih sebagai hasil dari transport horisontal dan

vertikal, maka sukar bagi kita untuk memecahkan secara analitik serta sukar membuat pengukuran secara kinematik.

Gerakan turbulensi di laut diklasifikasikan menurut sifat alamiahnya, skala spatio-temporal, arah mixing (isopiknal/diapiknal) dan intensitasnya. Berdasarkan hal diatas maka turbulensi dilaut dikategorikan dalam dua katagori:

Turbulensi skala meso: Pada skala ini turbulensi diciptakan terutama oleh ketakstabilan (misalnya: ketakstabilan baroklinik, barotropik dll) dan biasanya terjadi disepanjang permukaan dengan densitas konstan (isopiknal). Turbulensi skala meso mempunyai skala dari 10-100 km atau sering disebut skala radius Rossby. Para oceanographer sering memandang turbulen dalam skala ini sebagai 2D quasi geostrophic turbulence.

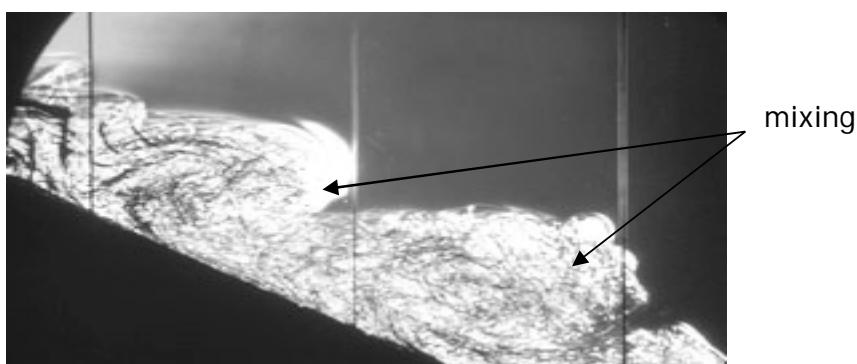
Turbulensi skala mikro: Pada skala ini turbulensi terutama diciptakan oleh shear dan pecahnya gelombang internal dan mempunyai orde 1mm – 1m. Umumnya terjadi dalam arah vertikal. Meskipun skala mikro tetapi sifatnya yang vertikal, turbulen ini mengontrol dinamika arus skala global serta pertukaran vertikal dalam sirkulasi di estuari dan pesisir. Disamping hal diatas, turbulensi skala mikro juga berperan sebagai pengontrol interaksi udara-laut.

Biasanya oceanographer hanya tertarik pada hasil akhir dari suatu proses mixing atau turbulensi yaitu the rate of dissipation (ϵ). Ini adalah salah satu kuantitas fundamental dalam pengukuran turbulensi di laut. The rate of dissipation ini menyatakan kuantitas fraksi energi yang dikonversi menjadi panas oleh gesekan internal. Berarti kita berurusan dengan energi kinetik, atau gerakan partikel fluida. Kuantitas ini berperan dalam transfer momentum di laut. Kuantitas lain yang tak kalah penting adalah the rate of destruction of temperature variance (χ) yaitu rata-rata banyaknya gradien temperatur yang disebarluaskan oleh proses difusi termal. Kuantitas lain adalah N (braunt-vaisalla frequency) atau frekuensi gaya apung. Kuantitas ini adalah manifestasi dari hukum archimedes yang dapat digunakan sebagai skala waktu untuk suatu aliran fluida yang berlapis. Fisikawan oseanografi, disamping mengukur kuantitas diatas juga mengukur fluks turbulen diapiknal yang terdiri dari fluks diapiknal momentum, temperatur dan salinitas. Dalam riset laut, studi turbulensi dapat dilakukan dalam berbagai pendekatan yaitu:

- **Persamaan Keseimbangan.** Dengan mengasumsikan bahwa keadaan turbulen dan medan utama (rata-rata) dapat dipisahkan maka persamaan keseimbangan momentum, massa dan energi harus dipenuhi oleh kedua sistem diatas. Studi dilakukan dengan mencari solusi persamaan yang terkopling tersebut. Salah satu cara yang banyak digunakan adalah momen closure.

- **Analisis Dimensional & Similaritas.** Dengan mengasumsikan beberapa proses yang dominan dari persamaan keseimbangan dilakukan penskalaan dan akan mereduksi menjadi persamaan yang sederhana sehingga mudah diselesaikan.
- **Analisis Spektral.** Analisis ini dilakukan karena transfer energi ke spatial yang kecil dan frekuensi yang besar bersifat inherent.
- **Pengukuran Langsung.** Mengukur fluktuasi dengan instrument, yang diukur adalah the rate of dissipation.
- **Visualisasi dan Simulasi Numerik.** Mencoba mensimulasi dan menyelesaikan persamaan gerak untuk mendapatkan kelakuan turbulensi dengan teknologi komputer.

Karena temperatur, densitas maupun salinitas merupakan fungsi dari kedalaman maka kita katakan bahwa laut adalah fluida berlapis. Tidak realistik kalau kita menganggap laut hanya terdiri dari satu lapis saja. Pertanyaan menarik adalah bagaimana proses mixing terjadi dilaut?. Turbulensi dalam fluida berlapis tersebut sangat acak dan sedikit sekali dimengerti mekanismenya. Salah satunya adalah adanya pecahnya gelombang internal. Adanya fluida berlapis memungkinkan timbulnya shear yaitu adanya perbedaan sifat dinamik (diwakili oleh kecepatan misalnya) antar lapisan. Adanya shear menyebabkan sistem fluida tersebut menjadi tak stabil. Jika ketakstabilitan dibiarkan terus maka akan terjadi turbulensi. Jika variabelnya kecepatan maka ketakstabilitan tersebut sering dinamakan ketakstabilitan Kelvin-Helmhotz. Suatu gangguan yang menjalar dalam sistem tersebut dinamakan gelombang internal. Semakin besar shear yang terjadi semakin kuat gelombang internal yang ditimbulkannya. Pada suatu saat shear akan mengalami kondisi kritis dan akhirnya setelah melewati kondisi kritis ini yang ditandai dengan pecahnya gelombang internal, terjadilah turbulensi atau proses mixing telah terjadi. Pecahnya gelombang internal dapat diungkapkan dalam gambar berikut ini:



Gambar-1: Gelombang internal pecah dalam fluida berlapis
(sumber:<http://www.cwr.uwa.edu.au/~ivey/indexgeofd.html>)

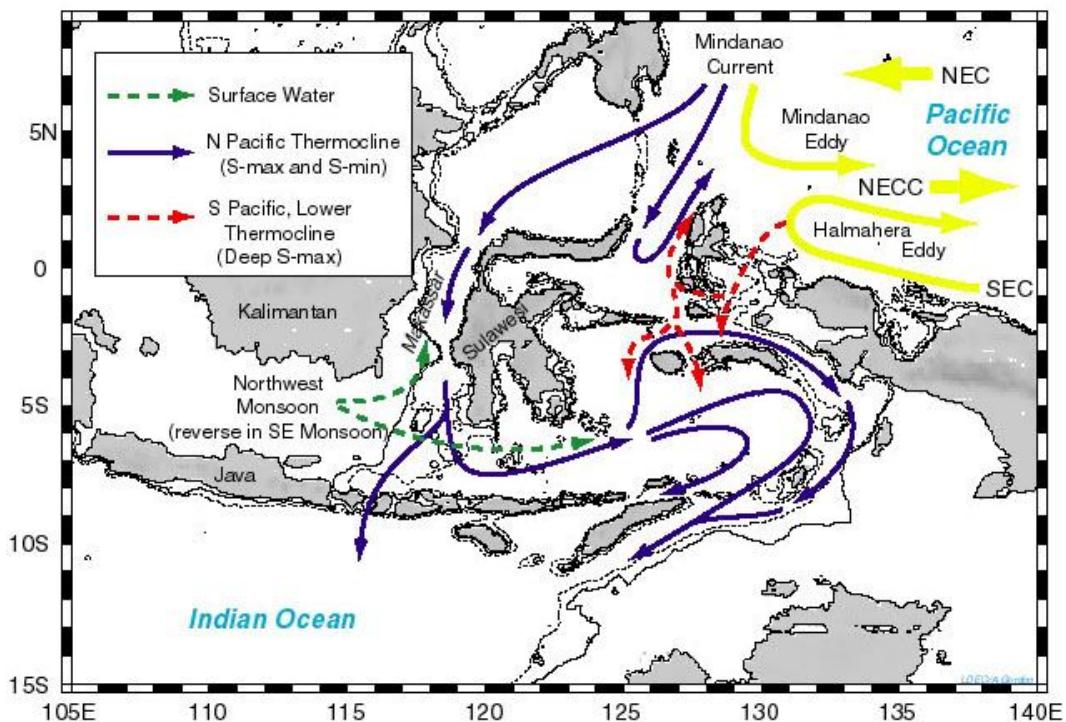
Dalam kita mempelajari model dinamika laut, kita akan berhadapan dengan apa yang dinamakan koefisien transport. Dalam studi numerik biasanya koefisien ini ditentukan dengan cara trial and error atau kita mengecilkan gridnya tetapi hal ini akan dibayar oleh lamanya proses komputasi. Koefisien transport ini menyatakan kelakuan skala mikro dari suatu perairan dan ini jelas proses turbulensi atau mixing. Pengukuran turbulen yang dilakukan di laut pada dasarnya adalah mencoba untuk menentukan koefisien transport (κ) ini. Koefisien transport ini merupakan karakteristik dinamik dari suatu perairan sehingga ilmuwan mencoba memetakan koefisien ini untuk seluruh laut yang ada di bumi.

1.2. Turbulensi dan proses mixing di laut Banda

Pengukuran turbulensi di laut Banda pertama kali dilakukan dalam Suatu pelayaran yang bernama Arlindo Mixing pada tanggal 13 Oktober smapai 14 November 1998 dengan kapal riset Baruna Jaya IV. Program ini merupakan kerjasama antara Badan Pengkajian dan Penerapan Teknologi (BPPT) dengan Applied Physics laboratory University of Washington, Seattle. Program ini masih bagian dari program besar Arlindo (kerjasama riset kelautan antara Indonesia dan USA) yang bertujuan antara lain:

1. Untuk mengetahui sirkulasi, stratifikasi dan produktivitas massa air di Indonesia sehingga bisa dideskripsikan secara detail tentang sumber, arah dan jalur penyebaran serta proses pencampuran massa air di lautan Indonesia dan pengaruhnya terhadap produktivitas populasi plankton.
2. Mengembangkan model sirkulasi lautan, prediksi iklim dan hubungannya dengan ENSO.
3. Mengetahui lingkungan laut Indonesia.

Arus laut yang mengalir dari pasifik utara masuk ke perairan Indonesia menuju samudra India akan mempengaruhi sirkulasi arus laut dan sirkulasi atmosfer dunia. Disamping fluks panas yang dibawa oleh arus lintas Indonesia, Arlindo juga akan mereduksi volume dari Warm Pool (kutub panas) di Pasifik barat sehingga akan mempengaruhi sirkulasi ENSO (El Nino –Southern Oscillation). Pemahaman yang baik tentang sirkulasi arus ini akan sangat berguna dalam prediksi dinamika laut global. Prediksi yang baik tentang dinamika laut akan menyebabkan kita mendapatkan prediksi yang lebih baik pula tentang dinamika iklim dunia. Antara laut dan atmosfer, mereka saling berinteraksi dan saling membutuhkan, seperti suami-istri, yang kadang-kadang juga ada pertengkarannya. Dari hasil yang dicapai dapat dibuat skematik arus lintas Indonesia sebagai berikut:



Gambar-2: Diagram skematik dari arus lintas Indonesia
 (sumber:<http://www.Ideo.columbia.edu>)

Survei arlindo yang telah dilakukan mulai tahun 1993 sampai tahun 1997 telah mencapai suatu kesimpulan penting antara lain:

- Gordon & Fine 1997: "*In order to realistically models the throughflow pathway and source, it is becoming increasingly clear that it is critical to model the vigorous vertical mixing and geometry of the Indonesian region very accurately.*"
- Godfrey 1996: "*Observed water mass transformation in Indonesian water demand a vertical eddy diffusivity of about $10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, large enough to generate turbulent heat fluxes of order 40 W m^{-2} at the base mixed layer.*"

Pada dasarnya kesimpulan diatas menyatakan bahwa untuk studi yang akurat tentang sirkulasi arus lintas Indonesia diperlukan studi yang mendalam tentang proses mixing secara vertikal di perairan Indonesia. Barubaru ini ditemukan bahwa SST (sea surface temperatur/temperatur muka laut) bervariasi secara empat belas harian dan bulanan di perairan Indonesia dan ini mengindikasikan adanya proses mixing yang digenerasi oleh pasang surut (Ffield & Gordon 1996). Periode 14 harian secara kuat muncul di laut Seram-maluku dan laut Banda. Lebih lanjut Ffield dan Gordon

menghipotesakan bahwa proses mixing atau turbulen yang kuat digenerasi di termoklin selama pasut kuat. Mereka menghitung bahwa dengan pendinginan permukaan $0,2^\circ\text{ C}$ dalam periode 14 hari mensyaratkan difusivitas diapiknal di termoklin adalah:

$$K_p = D \frac{\partial T / \partial t}{\partial T / \partial z} = 5.5 \times 10^{-5} \quad m^2 s^{-1}$$

Dimana kedalaman lapisan permukaan $D = 20\text{ m}$ dan temperatur dibawah lapisan permukaan menurun secara linier pada $\partial T / \partial z = 0.06^\circ\text{ C/m}$. Difusivitas ini berharga sepuluh kali lebih besar dibandingkan laut terbuka. Jika periodisitas dari fluktuasi SST merupakan signature dari variasi mixing maka mixing dapat dipandang dimodulasi atau digenerasi pasut dengan latar belakangnya adalah gelombang internal solibore.

Dari survei Arlindo fase pertama 1993-1994 telah mengidentifikasi sumber dan jalur arus lintas dan menentukan dimana arus yang dipengaruhi oleh mixing. Beberapa hasilnya telah dipublikasikan di Journal of Geophysical Research. Arlindo fase ke dua 1996-1998 melihat kembali transport yang melalui jalur utama dan pengukuran struktur mikro sebagai hasil dari survei Arlindo fase pertama. Dari Arlindo fase pertama Ffield & Gordon mengkuantifikasi proses mixing dengan menghitung persamaan difusi sepanjang streamline sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = -K_p \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}$$

Hasil perhitungan menunjukkan harga difusivitas diapiknal $K_p \geq 10^{-4}\text{ m}^2\text{ s}^{-1}$. Hautala dkk juga telah menghitung konduktivitas diapiknal dilaut Banda sebesar $K_p = (1-3.3) \times 10^{-4}\text{ m}^2\text{ s}^{-1}$. (kita akan membahas bagaimana cara mereka menghitung di bab selanjutnya). Telah diketahui dari pengukuran CTD dari survei yang terdahulu bahwa dilaut Banda mempunyai tingkat mixing yang kuat. Pada umumnya turbulensi di perairan tertutup akan digenerasi oleh gelombang internal (Gregg et al 1997). Dengan menggunakan model spektrum Garrett dan Munk 1975 yang telah dimodifikasi oleh Heney et al 1986 menunjukkan bahwa disipasi energi turbulen akibat gelombang internal adalah:

$$\epsilon = 7 \times 10^{-10} \frac{N^2}{N_o^2} \cdot \frac{E^2}{E_o^2} \quad [W kg^{-1}]$$

Ekspresi standar untuk difusivitas diapiknal dari pengukuran disipasi energi gelombang adalah:

$$K_p \leq 5 \times 10^{-6} \frac{E^2}{E_o^2} \quad [m^2 s^{-1}]$$

Dari hasil pengamatan Ffield dan Gordon dari flukstuasi SST maka Gregg,M menghitung bahwa dilaut banda mempunyai energi $E \sim 9E_0$ sehingga dengan hasil ini maka difusivitas diapiknal dilaut banda adalah: $\kappa_p = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Hasil ini sesuai dengan prakiraan Arlindo fase pertama.

Survei microstructure yang pertama kali dilaut Banda ini (yang merupakan subyek utama dalam tulisan ini) akan mencoba menjawab beberapa pertanyaan yang mendasar yaitu:

1. Apa gaya pembangkit mixing yang ada dilaut Banda, sebagai contoh:
 - Apakah difusivitas diapiknal dibangkitkan oleh gelombang internal?
 - Apakah disipasi turbulen dihasilkan oleh gelombang internal solibore?
 - Apakah turbulensi dibangkitkan oleh pasang surut?
2. Apakah hasil pengukuran sesuai dengan hasil estimasi berdasarkan parameter skala besar seperti yang dilakukan survei Arlindo fase pertama?

Peralatan survei, metodologi survei, pengolahan data serta analisis hasil akan dibahas dalam bab-bab selanjutnya. Dasar matematika berupa analisis vektor, analisis Fourier dan persamaan diferensial parsial diberikan di apendiks.

BAB II

TEORI TURBULENSI DALAM FLUIDA BERLAPIS

*Big whorls have, little whorls
And little whorls have looser whorls
Which feed on their velocity
And so on to viscosity*

Lewis F. Richardson



Turbulen adalah permasalahan fisika klasik yang paling tua, paling sukar dan sering membuat orang frustasi. Sekarang ini turbulensi disebut-sebut sebagai permasalahan fisika klasik modern karena beberapa perkembangan pesat teori tentang turbulensi dewasa ini. Turbulensi terjadi diberbagai kehidupan, mulai dari proses pencampuran coklat disecangkir susu sampai dispersi polutan di atmosfer. Dari pembentukan galaksi pada awal terciptanya alam semesta sampai konveksi termal air dalam panci yang mendidih. Aliran fluida disekeliling mobil formula satu, kapal laut, pesawat boeng 747 sampai pesawat angkasa Buck Roger waktu melintasi atmosfer Mars. Proses luar biasa pembalikan medan magnet Bumi juga diakibatkan oleh mahluk memusingkan turbulensi ini. Hampir di segenap penjuru alam semesta baik di pusat galaksi, matahari, gedung MPR, kediaman mbah Harto, real estate sampai perumahan kumuh dapat ditemui turbulensi. Setiap fisikawan terkemuka selalu menaruh minat pada mahluk aneh ini baik secara formal maupun informal.

Kita akan menunjau turbulensi lebih detail nanti, sekarang akan dibahas dasar formalisme yang membahas kelakuan dinamika fluida. Telaah lebih lanjut penulis rekomendasikan bukunya Landau.L.D & E.M Lifshitz 1989 "Fluid Mechanics" Pergamon Press. Buku tersebut merupakan buku tentang mekanika fluida dalam pandangan seorang fisikawan yang sangat menguasai bidangnya.

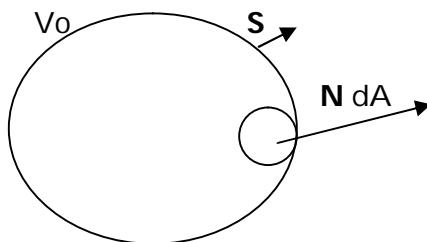
2.1. Persamaan dasar dinamika fluida.

Dinamika fluida adalah studi yang berhubungan dengan gerakan fluida (cairan dan gas). Karena yang dipelajari adalah fenomena makroskopis maka fluida dipandang sebagai medium kontinu. Hal ini berarti sebuah elemen volume dari suatu fluida akan cukup kecil sehingga dapat dipandang sebagai infinitesimal (pandangan ini dimaksudkan supaya kalkulus dapat diterapkan), tetapi elemen tersebut harus cukup besar sehingga masih dapat berisi banyak molekul supaya kita boleh memandangnya sebagai makroskopis. Elemen tersebut kita namakan partikel fluida atau titik fluida. Jadi kalau kita berbicara tentang pergeseran (displacement) maka berarti bukanlah pergeseran molekul secara individual tetapi pergeseran elemen fluida yang masih terkandung cukup banyak molekul.

Diskripsi matematik untuk gerakan fluida akan dinyatakan dalam fungsi ruang dan waktu. Fungsi-fungsi itu adalah kecepatan $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$; tekanan $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ dan densitas $\rho(\mathbf{r},t)$. Fungsi-fungsi ini menyatakan secara lengkap fenomena dinamika fluida. Seperti fenomena fisika yang lainnya maka dinamika fluida dibangun oleh hukum-hukum dasar fisika yaitu hukum kekekalan massa, hukum kekekalan momentum (hukum Newton-2) dan hukum kekekalan energi.

2.1.1 Persamaan Kontinuitas

Hukum pertama yang mendasar adalah hukum kekekalan massa. Massa fluida tidak dapat diciptakan dan tidak dapat dimusnahkan. Massa fluida adalah sesuatu yang kadem, dia hanya berubah bentuk. Ini hanyalah sebuah konsep supaya serasi dengan hukum fisika yang lain. Jika kita lihat suatu volume fluida sebagai berikut:



Misalkan kita mempunyai sebuah ruang dengan volume V_o maka massa fluida dalam volume tersebut adalah:

$$\text{Massa} = \iiint_{V_o} \rho(\vec{r}, t) d^3 r$$

Massa fluida yang mengalir persatuan waktu menembus suatu permukaan S dengan volumenya V_o akan dinyatakan oleh:

$$\frac{Massa}{sat.waktu} = \iint_S \rho(\vec{r}, t) \vec{u}(\vec{r}, t) \cdot \vec{N} dA$$

Hukum kekekalan massa menyatakan bahwa banyaknya massa yang keluar persatuan waktu dari suatu luasan permukaan S yang volumenya V_o adalah sama dengan berkurangnya massa fluida yang berada didalam. Secara matematis pernyataan diatas ditulis sebagai:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_o} \rho(\vec{r}, t) d^3 r = \iint_S \rho(\vec{r}, t) \vec{u}(\vec{r}, t) \cdot \vec{N} dA$$

Dengan menggunakan teorema Gauss disisi kiri maka kita dapatkan:

$$\iiint_{V_o} \left[\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) \right] d^3 r = 0$$

Karena persamaan tersebut selalu dipenuhi oleh sembarang volume dalam fluida (ingat fluida adalah medium kontinu) maka integran diatas harus nol. Jadi kita dapatkan persamaan yang dinamakan persamaan kontinuitas sebagai berikut:

$$\left[\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) \right] = 0 \quad 2.1.1.1$$

2.1.2 Persamaan Gerak

Persamaan fundamental yang lain adalah hukum Newton ke dua atau hukum Newton tentang gerak, atau hukum kekekalan momentum. Menurut hukum Newton, pada dasarnya suatu fluida akan bergerak karena ada gaya yang bekerja kepadanya. Gaya yang paling mendasar adalah gradien tekanan. Hal ini mudah dimengerti dengan analisis dimensional. Tekanan adalah gaya persatuan luas, jadi gaya adalah tekanan kali satuan luas. Kalau kita berbicara gaya persatuan volume maka kita akan mendapatkan tekanan dibagi satuan panjang, ini adalah demensi dari gradien. Gaya tersebut secara umum akan kita beri simbol:

$$\vec{F} = \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j}$$

Hukum Newton dua ($F=ma$) akan dituliskan untuk fluida sebagai berikut:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}(\vec{x}, t)}{\partial t} = - \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j}$$

Tekanan tersebut berupa suatu tensor rank dua. Tensor tekanan secara umum akan dinyatakan sebagai tekanan skalar, tensor simetri dan tensor tak simetri, yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\Pi_{ij} = P\delta_{ij} + \rho u_i u_j - \sigma_{ij}$$

Tensor σ_{ij} disebut sebagai tensor tekanan viskositas. Tensor ini menyatakan proses disipasi energi dalam gerak fluida. Proses ini terjadi akibat adanya peristiwa irreversibilitas akibat gerakan gesekan internal atau lebih tepat adanya transfer momentum internal. Karena tensor viskositas adalah transfer momentum maka dia akan sebanding dengan gradien kecepatan. Syarat lain yang harus dipenuhi adalah ketika fluida bergerak berotasi secara uniform tensor akan nol karena dalam gerak tersebut tidak ada transfer momentum internal. Secara matematis tensor viskositas ini akan sebanding dengan gradien dan seperti rotasi atau curl, dan akan dinyatakan oleh:

$$\sigma_{ij} = A \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + B \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Koefisien A dan B secara formal dapat diturunkan teori kinetik gas melalui persamaan transport Boltzmann. Berikut ini hasilnya (Huang,K 1986):

$$\sigma_{ij} = (\xi - \frac{2}{3}\eta)\delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Hasil ini menyebabkan persamaan gerak menjadi:

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + (\xi + \frac{1}{3}\eta) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)$$

Persamaan ini dikenal dengan nama persamaan Navier-Stokes. Koefisien η dan ξ berturut turut menyatakan koefisien viskositas kinematik dan dinamik. Biasanya dalam dinamika laut kita menganggap bahwa laut adalah inkompresibel, kondisi ini disyaratkan dengan divergensi kecepatan nol ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) sehingga persamaan Navier-Stokes menjadi:

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad 2.1.2.1$$

2.1.3 Persamaan Difusi

Persamaan difusi ini sering disebut persamaan yang menyatakan evolusi suatu medan skalar. Dalam kasus kita, medan skalar ini meliputi temperatur, salinitas atau konsentrasi suatu zat misalnya polutan, BOD dll. Semua medan ini mempunyai bentuk persamaan yang sama, maka untuk menurunkannya kita ambil contoh medan temperatur. Evolusi dari suatu medan temperatur di suatu fluida akan sebanding dengan penyebaran fluks termalnya serta suatu sumber panas. Karena temperatur $T(x,t)$ adalah fungsi ruang dan waktu maka evolusi dari $T(x,t)$ akan dinyatakan oleh dT/dt . Bentuk tersebut kita cari sebagai berikut. Karena $T = T(x,t)$ maka difensial total dari T akan dinyatakan oleh:

$$dT(\vec{x}, t) = \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial \vec{x}} \cdot d\vec{x} \quad \text{sehingga } dT/dt \text{ menjadi} \quad \frac{dT(\vec{x}, t)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}(T)$$

Penyebaran fluks termal secara matematis akan dinyatakan oleh operasi divergensi. Fluks termal mengikuti hukum Fick yaitu fluks termal akan sebanding dengan gradien temperatur. Kesebandingan itu akan dinyatakan oleh suatu besaran (umumnya tensor rank dua) yang dinamakan konduktivitas termal. Fluks tersebut dituliskan sebagai berikut:

$$\vec{F} = -\vec{K} \cdot \vec{\nabla} T$$

Jika suatu elemen volume dengan luasan V dan luasan permukaan S dan spesifik panas fluida dalam volume tersebut C dengan densitas ρ maka perubahan kalor Q persatuan waktu untuk seluruh volume adalah (ingat rumus kalor $Q=mc \Delta T$; untuk fluida $Q = \rho C \Delta T$):

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_V \rho C \frac{dT}{dt} d^3 r$$

Perubahan kalor tersebut sama dengan fluks termal yang mengalir memotong seluruh permukaan S yang dapat dituliskan sebagai:

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_V \rho C \frac{dT}{dt} d^3 r = - \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = - \iint_S -\vec{K} \cdot \vec{\nabla} T \cdot d\vec{A}$$

Kembali kita gunakan teorema divergensi atau teorema Gauss disisi kanan, sehingga persamaan diatas menjadi:

$$\iiint_V \rho C \frac{dT}{dt} d^3 r = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{K} \cdot \vec{\nabla} T) d^3 r$$

Dengan memasukkan suku sumber maka evolusi medan temperatur akan mengikuti persamaan:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}(T) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{K}_T \vec{\nabla} T) + Q_T(\vec{x}, t) \quad 2.1.3.1$$

Koefisien yang muncul dalam persamaan diatas disebut koefisien difusi termal yang dinyatakan secara umum oleh:

$$\vec{\kappa}_T = \frac{\vec{K}}{\rho C}$$

Bentuk persamaan tersebut juga berlaku untuk distribusi salinitas (S) dan medan skalar lain katakanlah (C), yang dapat dituliskan sebagai berikut:

Persamaan difusi untuk salinitas:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}(S) = \vec{\nabla} \cdot (\kappa_s \vec{\nabla} S) + Q_s(\vec{x}, t) \quad 2.1.3.2$$

Persamaan difusi untuk konsentrasi:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}(C) = \vec{\nabla} \cdot (\kappa_c \vec{\nabla} T) + Q_c(\vec{x}, t) \quad 2.1.3.3$$

Persamaan – persamaan 2.1.1.1; 2.1.2.1; 2.1.3.1; 2.1.3.2 dan 2.1.3.3 menyatakan secara lengkap dinamika laut.

2.2. Mekanisme Turbulensi.

Hal yang paling sulit dalam turbulensi adalah untuk menjawab pertanyaan mengenai bagaimana mekanismenya sehingga turbulen bisa terbentuk. Ada banyak penjelasan tentang itu tetapi ternyata tidak ada teori yang general, penjelasan yang ada hanya cocok untuk suatu kasus tetapi gagal untuk kasus yang lain. Masalah trnasisis dari keadaan laminer ke keadaan turbulen merupakan masalah yang paling sulit dan kompleks di mekanika fluida. Biasanya kajian teoritik tentang mekanisme turbulensi didasarkan pada asumsi bahwa aliran laminer mengalami suatu gangguan kecil. Jika gangguan tersebut meluruh dengan waktu maka kita katakan aliran stabil, jika gangguan tersebut selalu tumbuh maka kita katakan gangguan tak stabil dengan ketakstabilan ini kemungkinan aliran akan menjadi turbulen. Penjelasan mengenai mekanisme turbulensi sampai sekarang merupakan PR yang masih belum terselesaikan secara memuaskan. Salah satu kriteria penting untuk eksistensi turbulen adalah dengan melihatnya pada suatu bilangan yang menyatakan kondisi fisis suatu fluida. Misalkan kita mempunyai fluida dengan viskositas ν dan bergerak dengan kecepatan V , jika skala panjang sistem kita L maka perbandingan antara kecepatan dengan viskositas akan memberikan tingkat turbulensi yang dinyatakan sebagai bilangan Reynold:

$$R_e = \frac{V \cdot L}{\nu}$$

Dengan bertambahnya gangguan maka V semakin besar sehingga bilangan Reynold juga semakin besar. Bilangan ini akan mencapai suatu kondisi kritis, dimana jika bilangan Reynold melebihi kondisi kritis aliran fluida menjadi turbulen. Dalam fluida berlapis, katakanlah berlapis secara termal, maka dalam sistem tersebut kita mempunyai tiga macam jenis energi yaitu: energi dalam karena viskositas, energi dalam karena termal dan energi kinetik. Secara kuantitatif energi tersebut dinyatakan berturut-turut sebagai berikut:

$$R_v \approx \nu \frac{V^2}{L^2} ; \quad R_T \approx \frac{g}{T_o} V.T ; \quad R_K \approx \frac{V^2}{L}$$

Fluida dikatakan stabil jika terjadi keseimbangan diantara ketiga besaran tersebut yaitu $R_K = R_v + R_T$. Kondisi turbulen terjadi jika $R_K > R_v + R_T$. Jika fluida tak berlapis maka $R_T = 0$, sehingga kondisi turbulen akan dinyatakan oleh:

$$\begin{aligned} R_K &> R_v \\ V^2 / L &> \nu V^2 / L^2 \\ VL/\nu &> 1 \\ R_v &> 1 \end{aligned}$$

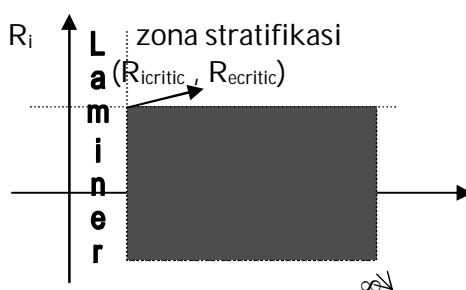
Jadi kondisi turbulen jika bilangan Reynold (R_e)> 1.

Jika sekarang viskositas kecil maka kondisi turbulen disyaratkan dengan:

$$\begin{aligned} R_K &> R_T \\ V^2 / L &> (g/T_o) V.T \\ 1 &> g.T / T_o.V = g.L.T / T_o.V^2 = R_i \end{aligned}$$

Bilangan R_i disebut bilangan Richardson, jadi turbulensi terjadi bila bilangan Richardson

$(R_i) < 1$. Bilangan Richardson mengukur turbulensi karena termal dan bilangan Reynold mengukur turbulensi karena viskositas. Berikut ini adalah ilustrasi hubungan antara keduanya:



Jadi turbulensi akan timbul (*bukan pimpinan ketoprak humor*) jika bilangan Reynold lebih besar dari harga kritisnya dan bilangan Richardson lebih kecil dari harga kritisnya.

Ketakstabilan dalam fluida tergantung dari gaya penyebabnya, jika ketakstabilan akibat termal, misalnya fluida yang dipanasi dari bawah, disebut ketakstabilan Benard. Jika ketakstabilan akibat stratifikasi karena perbedaan kecepatan antar (shear) lapisan dinamakan ketakstabilan Kelvin-Helmholtz. Pembahasan ketakstabilan fluida dalam kerangka teori linier telah dibahas dengan sangat excellent dalam buku: Chandrasekar,S 1962 "Hydrodynamics and Hydromagnetics Instability" Dover, Pub, New York. Dalam fluida yang mengalami ketakstabilan Kelvin-Helmholtz seringkali terpicu munculnya gelombang internal. Penjalaran gelombang internal dilaut ditandai dengan lapisan termokline yang naik turun, biasanya kita bisa menggunakan parameter temperatur atau salinitas yang akan terlihat naik turun bila gelombang internal lewat. Ketakstabilan tadi ternyata sering berinteraksi dengan gelombang nonlinier yang menghasilkan fluktuasi random yang sama dengan fluktuasi yang dihasilkan oleh turbulen. Hal yang sangat sukar untuk memisahkan sinyal yang dihasilkan oleh gelombang internal tersebut dengan sinyal yang dihasilkan oleh turbulen. Turbulen dan gelombang internal pun sering kali berinteraksi dan bila gelombang internal pecah dapat membangkitkan turbulensi. Pada umumnya ada perbedaan antara gelombang internal dan turbulen. Turbulensi mempunyai dissipasi yang tinggi serta sifat diffusi sedangkan gelombang internal mempunyai dissipasi yang lemah dan non difusi. Tetapi untuk gelombang internal tak linier sering kali dihasilkan oleh efek dissipasi yang tinggi. Yah, kita mempunyai masalah yang kompleks dan saling terkait, persis seperti suasana negara Indonesia saat ini.

Studi tentang turbulensi sampai sekarang didasarkan pada dua paradigma yaitu:

1. *Turbulen adalah hasil dari penguatan dan transformasi tak linier dari noise (gangguan) internal atau eksternal dalam suatu medium kontinu atau suatu medan.*
2. *Turbulen adalah chaos deterministik spatial-temporal, yaitu suatu osilasi (tak perlu periodik) dari suatu sistem yang terdistribusi yang stokastik di dalam ruang dan waktu.*

Paradigma yang pertama adalah yang tertua dan dipelopori oleh Von Karman, Taylor, Prandtl dll, yang diwakili oleh teori statistik turbulensi. Sedangkan paradigma yang kedua muncul belakangan dengan berkembangnya teori chaos atau nonlinear dynamics, pelopornya antara lain Henri Poincare, Edward Lorentz dll. Eksperimen tentang turbulen yang dibuat dewasa ini ternyata lebih sesuai dengan paradigma yang kedua. Hal ini artinya bahwa keadaan yang turbulen/kacau bukanlah mahluk statistik

yang selalu berhubungan dengan keacakan sehingga kita harus berbicara dengan probabilistik, melainkan sesuatu yang deterministik atau sesuatu yang pasti. Kita akan memberikan contoh tentang mekanisme turbulensi berdasarkan kedua paradigma diatas:

2.2.1 Generasi turbulen dalam teori statistik turbulensi

Sekarang kita tinjau proses generasi turbulen didalam keadaan dimana suatu aliran stasioner mengalami gangguan sehingga dia menjadi tak stabil. Teori statistik turbulensi memandang gerak turbulen sebagai penjumlahan garak rata-rata (laminer) dan fluktuasinya (turbulen) yang dinyatakan oleh $U = U_0 + U'$. Jika gangguan infinitesimal bekerja pada suatu aliran maka medan kecapatan akibat gangguan tersebut dinyatakan dalam bentuk:

$$U'(x,t) = e^{\lambda t} f_o(x) = A(t)f_o(x)$$

Dimana $\lambda = \gamma + i\omega$

Dalam persamaan linier solusi diatas memenuhi persamaan harga eigen dengan harga eigen λ (kompleks). Jika semua harga eigen λ mempunyai bagian real yang negatif ($\gamma < 0$) maka gangguan tersebut akan teredam. Ada suatu nilai dimana harga eigen bersesuaian dengan bilangan Reynold ($Re=LU/v$) yang kritis, jika ini tercapai kondisi aliran akan netral. Jika harga Reynold melebihi harga kritis maka bagian real dari harga eigen akan positif ($\gamma > 0$) sehingga gangguan akan berkembang dan tercapailah keadaan turbulen. Landau tahun 1944 (Landau,L.D & E.M Lifshitz) menyatakan bahwa transisi dari keadaan periodik ke keadaan turbulen, amplitude $A(t)$ akan memenuhi persamaan linier:

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma|A|^2 - \delta|A|^4$$

Jika $\delta > 0$ maka solusi persamaan tersebut menjadi:

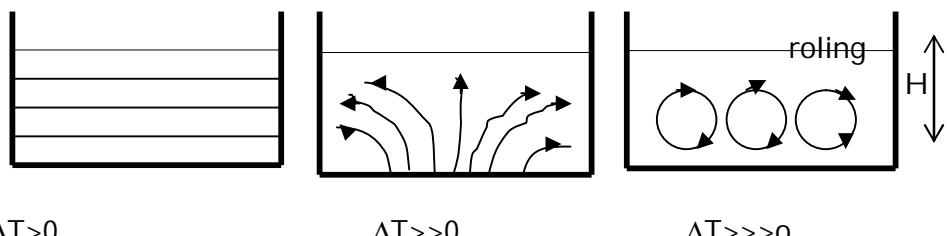
$$|A(t)| = \frac{A_o^2 A_\infty^2}{A_o^2 + (A_\infty^2 - A_o^2) e^{-2\gamma t}} ; \quad A_\infty = \left(\frac{2\gamma}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Jika suatu gangguan awal A_0 maka amplitude $A(t)$ akan naik secara eksponensial, tetapi kemudian rata-rata kenaikan menjadi kecil. Pada $t \rightarrow \infty$ amplitude berkecenderungan untuk mencapai harga tertentu A_∞ yang tak bergantung pada harga awal dan aliran menjadi quasi periodik dengan periode $2\pi/\omega_1$ dan $2\pi/\omega_2$ dengan berlalunya waktu maka periode akan ememcah menjadi $2\pi/\omega_1$, $2\pi/\omega_2$, $2\pi/\omega_3$, dan $2\pi/\omega_4$ demikian seterusnya sehingga kita mendapatkan aliran yang tak periodik atau turbulen.

2.2.2 Generasi turbulen dalam teori deterministic chaos

Perkembangan teori ini pada awalnya didasari oleh pemikiran matematikawan dan fisikawan termasyur dari Prancis yaitu Henri Poincaré. Pak Poincaré menyadari bahwa kalau kita mencari suatu solusi dari suatu persamaan yang nonlinier tak perlu kita mendapatkan hasil yang kuantitatif tetapi cukuplah jika kita bisa mendapatkan hasil yang kualitatif yaitu kita bisa menggambarkan perilaku dari suatu solusi tanpa harus mengetahui harganya secara pasti. Penggambaran solusi yang kualitatif ini dinyatakan atau diperikan dalam suatu ruang khayal yang dinamakan ruang fase. Kurva dalam suatu ruang fase menyatakan perilaku dari suatu solusi atau fenomena alam. Jika kurva dalam ruang fase (bagaimanapun dia bergerak) akan kembali lagi ketitik awal menyatakan bahwa solusi adalah periodik, jika tidak maka solusi tak periodik. Suatu sistem persamaan diferensial biasa yang linier akan memunculkan solusi yang periodik atau invarian terhadap waktu, artinya berapapun nilai awal yang kita ambil maka kita dengan pasti akan dapat menentukan harga solusi pada sembarang waktu t . Jika solusi tersebut tak periodik maka keadaan solusi akan sangat berbeda terhadap pemilihan harga awal, hasil pengambarannya dalam ruang fase adalah suatu bentuk yang aneh yang takpernah ketemu dengan titik awal tadi. Bentuk yang aneh tadi biasanya dinamakan "strange attractor". Jika aliran turbulen adalah tak periodik dan tak invarian terhadap waktu maka adalah mungkin menggambarkan aliran turbulen dalam suatu ruang fase yang dinyatakan dalam bentuk kurva yang aneh atau strange attractor. Pertanyaan "apakah benar gagasan diatas?". Untuk menjawabnya mari kita lihat contoh berikut ini:

Sekarang anda ke dapur dan ambilah panci yang telah diisi air secukupnya dan taruh diatas kompor yang telah menyala. Anda akan mengamati kejadian seperti berikut:



Jika air dalam panci dipanaskan dari bawah maka akan terjadi beda temperatur antara dibagian bawah dan bagian atas air. Pertama-tama air akan tenang karena beda temperatur tidak begitu besar. Semakin besar beda temperatur maka air mulai mengalami gangguan yaitu dia mulai akan bergolak, semakin besar beda temperatur maka sistem menjadi tak stabil dan

gangguan tumbuh semakin besar sehingga terjadilah konveksi yang ditandai dengan bergolaknya air (adanya roling). Ini tandanya air telah mendidih dan siap untuk membikin kopi susu. Dalam hidrodinamika ketastabilan seperti diatas dinamakan ketakstabilan Bernard. Bagaimana hidrodinamika menjelaskan peristiwa ini? Mari kita tanya Galileo...eh salah..mari kita tanya Edward Lorentz. Prof Edward Lorentz adalah profesor meteorologi dinamik dari MIT-USA yang pada tahun 1963 menjelaskan fenomena diatas berdasarkan konsep deterministik yaitu mencari solusi dari persamaan Navier-Stokes dan persamaan difusi termal tanpa menggunakan aproksimasi statistik ($U = U_0 + U'$). Penjelasan E. Lorentz sebagai berikut:

Persoalan diatas melibatkan dua fenomena yaitu fenomena gerak dan fenomena difusi termal. Pada dasarnya untuk membahas keseluruhan fenomena itu adalah dengan mencari solusi dari persamaan Navier-Stokes (gerak) dan persamaan difusi termal. Kedua persamaan itu dapat dituliskan (untuk menyederhanakan masalah kita asumsikan fluida invarian terhadap translasi dalam sumbu y). sebagai berikut:

Persamaan Navier-Stokes (dalam 2D karena hanya variabel x dan z yang berperan):

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial P}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial P}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \rho g \end{aligned} \quad 2.2.1.1$$

Persamaan difusi termal:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad 2.2.1.2$$

Pendekatan Boussinesq yaitu menyatakan densitas sebagai fungsi temperatur sebagai berikut: $\rho = \langle \rho \rangle (1 - \alpha \Delta T)$. Fluida inkompresibel sehingga kita dapat menyatakan kecepatan dalam suatu fungsi stream sebagai berikut:

$$u = - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Temperatur dinyatakan dalam suatu aproksimasi sebagai berikut:

$$T(x, z, t) = T_o + \Delta T - \frac{\Delta T}{H} z + \theta(x, z, t)$$

Dimana H adalah kedalaman air , konduktivitas termal konstan dan $\nu = \eta / \rho$ adalah viskositas kinematik. Jika a adalah diameter roling maka dengan

mensubtitusikan fungsi – fungsi diatas ke persamaan 2.2.1.1 dan 2.2.1.2. maka persamaan diatas menjadi (coba dilakukan untuk latihan):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) = -\frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, z)} + \nu \nabla^4 \psi + g \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad 2.2.1.3$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, z)} + \frac{\Delta T}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \kappa \nabla^2 \theta \quad 2.2.1.4$$

dimana:

$$\frac{\partial(A, B)}{\partial(x, z)} = \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial B}{\partial x} ; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Reyleigh mengemukakan bahwa solusi persamaan ini untuk kasus yang linier berbentuk:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_o \sin\left(\frac{a\pi}{H}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{H}z\right) \\ \theta &= \theta_o \cos\left(\frac{a\pi}{H}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{H}z\right) \end{aligned}$$

Jika solusi ini disubtitusikan ke persamaan 2.2.1.3 dan persamaan 2.2.1.4 untuk versi liniernya maka kita akan mendapatkan suatu kuantitas Ra yang dinamakan bilangan Reyleigh sebagai berikut:

$$R_a = \frac{g \alpha H^3 \Delta T}{\kappa \nu}$$

dan suatu bilangan Reyleigh kritis sebagai berikut:

$$R_c = \frac{\pi^2 (1+a^2)^3}{a^2}$$

Karena bentuk solusi diatas hanya berlaku untuk kasus yang linier maka untuk mengekspan ke kasus yang nonlinier Edward Lorentz mengambil solusi berbentuk:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\kappa(1+a^2)} \psi &= \sqrt{2} X(t) \sin\left(\frac{a\pi}{H}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{H}z\right) \\ \frac{\pi R_a}{R_c \Delta T} \theta &= \sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{a\pi}{H}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{H}z\right) - Z(t) \sin\left(\frac{2\pi}{H}z\right) \end{aligned}$$

Lorentz menggunakan kondisi batas bebas sebagai berikut:

$$\theta(0,0,t) = \theta(0,H,t) = \psi(0,0,t) = \psi(0,H,t) = \nabla^2\psi(0,0,t) = \nabla^2\psi(0,H,t) = 0$$

Jika kita substitusikan solusi dan syarat batas ini ke persamaan 2.2.1.3 dan 2.2.1.4 dan abaikan suku harmonis lebih tinggi (orde empat ke atas) maka akan kita peroleh suatu sistem persamaan diferensial biasa nonlinier sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= -\sigma X + \sigma Y \\ \frac{dY}{d\tau} &= -XY + rX - Y \\ \frac{dZ}{d\tau} &= XY - bZ \end{aligned} \quad 2.2.1.5$$

Dimana $\tau \equiv \pi^2 H^{-2} (1+a^2)\kappa t$ adalah waktu terrenormalisasi; $\sigma = v/\kappa$ adalah bilangan Prandl, $b = 4(1+a^2)^{-1}$ dan $r = Ra/Rc \propto \Delta T$ merupakan parameter kontrol. Kita melihat bahwa beda temperatur menjadi parameter kontrol yang akan menentukan bagaimana suatu solusi terbentuk. Persamaan diatas adalah sistem persamaan diferensial nonlinier. Seperti yang telah disinggung diatas bahwa kita tertarik kelakuan solusi secara kualitatif dengan merepresentasikannya dalam suatu ruang fase. Secara umum persamaan diatas mempunyai bentuk:

$$\frac{dX_i}{dt} = F_i(X_1, \dots, X_M) \quad i = 1 \dots M$$

F adalah suatu fungsi kontinu. Suatu ruang fase Γ adalah ruang Euclidean dengan dimensi- M yang vektor basisnya adalah X_1, \dots, X_M . Jika $\partial F_i / \partial X_j$ kontinu maka untuk suatu t_0 dan X_{10}, \dots, X_{M0} adalah sembarang titik diruang fase Γ maka persamaan diatas mempunyai solusi yang unik:

$$X_i = F_i(X_{10}, \dots, X_{M0}, t) \quad i = 1 \dots M$$

Dan memenuhi kondisi:

$$X_{i0} = F_i(X_{10}, \dots, X_{M0}, t) \quad i = 1 \dots M$$

Suatu solusi akan dinyatakan oleh suatu trayektori dalam ruang fase Γ . Pembahasan lengkap tentang masalah ini terletak dalam teori dynamical system (Perko, E 1992). Kita tidak akan membicarakannya secara detail, tetapi kita akan mengambil suatu konsep yang berguna bagi penjelasan turbulensi. Suatu trayektori dinyatakan oleh suatu fungsi $P(t)$ dan dia dikatakan quasi-periodik jika ada suatu interval waktu yang besar τ , maka $P(t+\tau)$ akan dekat

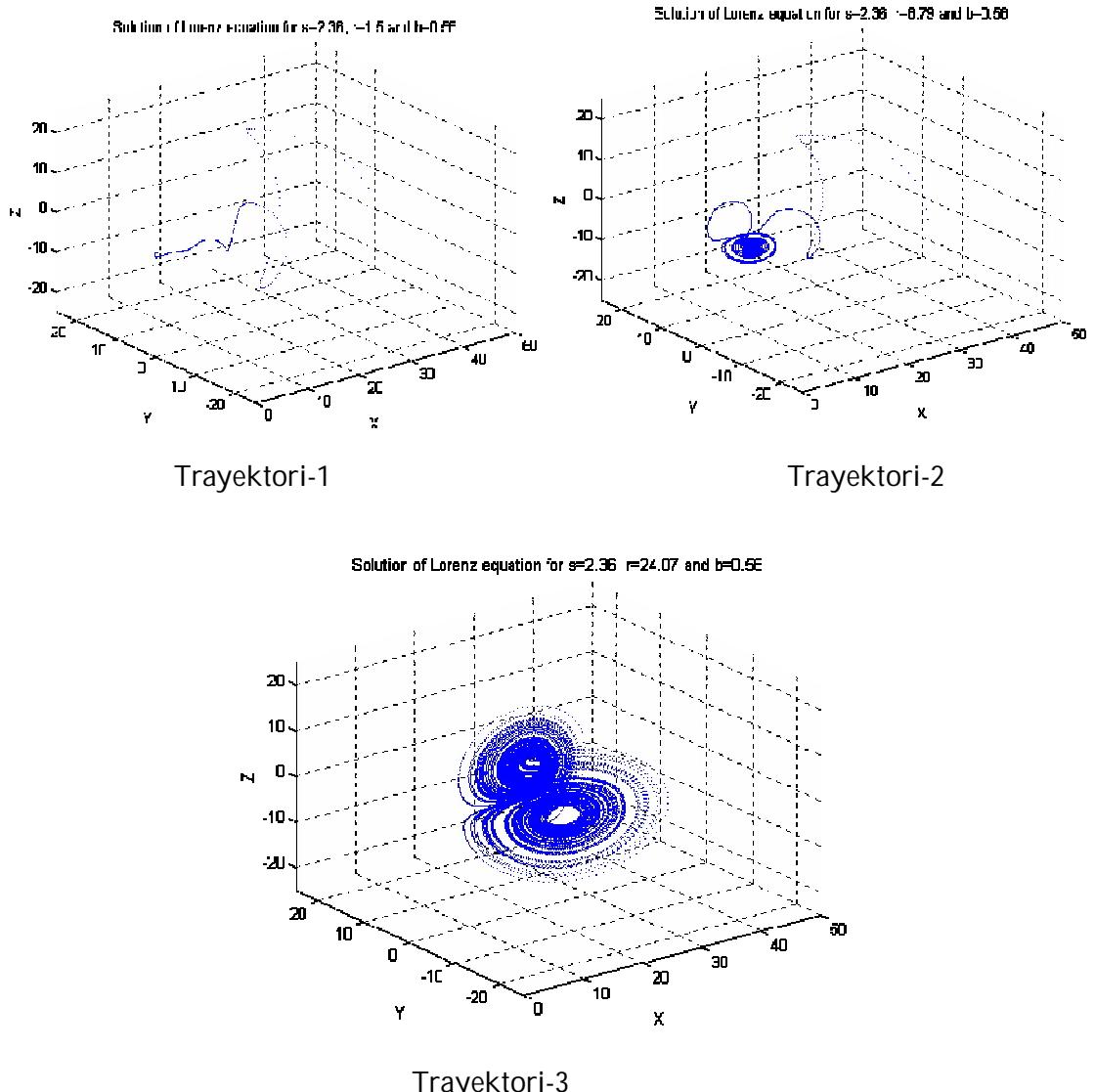
ke $P(t)$. Atau secara lebih formal $P(t)$ dikatakan quasi-periodik jika untuk sembarang $\varepsilon > 0$ dan untuk sembarang interval waktu τ_0 , disana ada interval waktu $\tau(\varepsilon, \tau_0) > \tau_0$ dan waktu $t_1(\varepsilon, \tau_0)$ sehingga jika $t_1 > t_2$ maka $|P(t_2 + \tau) - P(t_2)| < \varepsilon$. Trayektori $P(t)$ yang tidak quasi-periodik disebut nonperiodik. Untuk aliran nonperiodik tentu saja trayektori tidak memenuhi prinsip diatas sehingga trayektori bisa berbentuk sembarang yang tidak harus dekat ke suatu titik limit. Trayektori yang nonperiodik merepresentasikan aliran tak periodik. Program numerik persamaan 2.2.1.5 dalam Matlab dan hasil plot solusinya adalah:

```

Program Lorentz equation di Matlab:
%Program persamaan Lorentz
b=0.58;
s=2.36;
r=47.07;
a=[-b 0 0;0 -s s;0 r -1];
y=[35 -10 -7]';
h=.01;
p=plot3(y(1),y(2),y(3),':',...
'EraseMode','none','MarkerSize',2)
axis([0 50 -25 25 -25 25])
grid
title('Solution of Lorenz equation for s=2.36, r=47.07 and b=0.58');
xlabel('X');
ylabel('Y');
zlabel('Z');
hold on
while 1
a(1,3)=y(2);
a(3,1)=-y(2);
ydot=a*y;
y=y+h*ydot;
set(p,'XData',y(1),'YData',y(2),'ZData',y(3))
drawnow
end

```

Hasil diperoleh sebagai berikut:



Ketiga trayektori diperoleh dengan menvariasikan harga r. Kita tahu bahwa r sebanding dengan beda temperatur. Beda temperatur ini berperan sebagai parameter kontrol keadaan solusi, trayektori-1 pada saat r kecil yaitu beda temperatur kecil maka kita dapatkan solusi yang quasi-periodik hal ini menyatakan air masih belum bergolak karena beda temperatur yang masih kecil. Jika pemanasan berlangsung maka beda temperatur semakin besar sehingga air mulai panas. Trayektori-2 aliran masih quasi periodik yang menyatakan air belum bergolak. Pada trayektori-3 maka kita mendapatkan aliran yang nonperiodik, hal ini menyatakan air telah bergolak atau aliran turbulen telah terjadi. Hal ini merupakan penjelasan tentang mekanisme

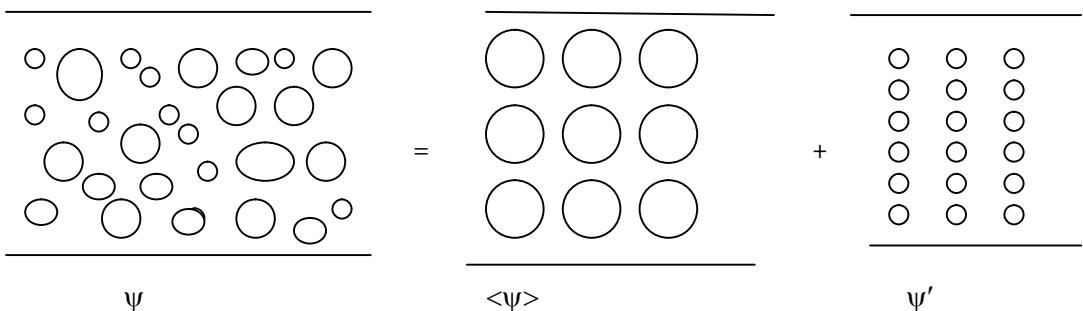
turbulensi. Kalau kita bandingkan teori statistik dengan deterministic chaos menunjukkan bahwa teori statistik tidak bisa menjelaskan mekanisme turbulensi secara memuaskan, tetapi jika turbulen telah terjadi maka teori statistik sangat powerful karena kesederhanaan dan keampuhannya. Untuk kebanyakan pengukuran dilaut, turbulen dianggap telah terjadi sehingga kebanyakan para oceanographer menggunakan teori statistik ini. Untuk selanjutnya kita akan mengeksplor teori statistik turbulensi dengan cukup detail. Tujuannya supaya pembaca mendapatkan gambaran yang jelas sehingga tidak akan ketemu dengan rumus yang misterius serta dapat mengikuti paper-paper yang membahas tentang turbulensi di laut.

2.3. Teori statistik turbulensi

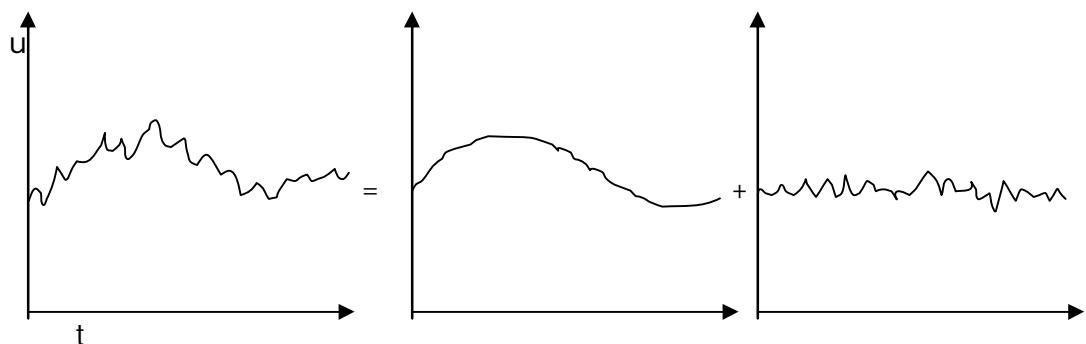
Turbulen ternyata sukar didefinisikan secara tepat. Berikut ini adalah ciri-ciri dari turbulensi:

- **Acak.** Parameter yang menggambarkan dinamika fluida dalam keadaan turbulen adalah variabel acak, tidak ada relasi dispersi yang menghubungkan antara frekuensi dan bilangan gelombang.
- **Tiga Dimensi.** Aliran turbulen dicirikan dengan adanya vortisitas yang merupakan bentuk alamiah tiga dimensi.
- **Bilangan Reynold Tinggi.** Aliran turbulen mempunyai bilangan Reynold yang tinggi, sebagai konsekuensinya suku adveksi (non linier) menjadi penting.
- **Dissipatif.** Aliran turbulen akan mempunyai the rate of dissipation yang besar.
- **Difusi.** Fluks turbulen akan menaikkan momentum dan pertukaran medan skalar diantara daerah dengan konsentrasi tinggi ke daerah dengan konsetrasi rendah.

Dengan fakta diatas sukar bagi kita untuk mencari solusi analitik dari persamaan gerak secara langsung. Cara yang paling mudah adalah menggunakan konsep statistik. Tujuan awal dari pendekatan statistik ini adalah untuk memperoleh himpunan persamaan untuk aliran rata-rata yang tertutup dan tertentu. Beberapa kemajuan baru yang didasarkan pada pendekatan ini seperti model klosur lebih tinggi dan teori grup terrenormalisasi menunjukkan kekuatan pandangan ini. Pendekatan statistik menyatakan bahwa aliran turbulen dipandang sebagai superposisi dari aliran rata-rata dan fluktuasinya. Keadaan ini dapat diilustrasikan sebagai gambar berikut ini:



Atau dapat digambarkan sebagai berikut: misalkan kita mempunyai data laju angin, maka karena keadaan turbulen grafik tidak akan menunjukkan keadaan yang teratur, sehingga pendekatan statistik diilustrasikan sebagai berikut:



Dalam aliran turbulensi sering digambarkan dalam bentuk eddi (aliran yang berputar-putar). Kumpulan dari eddi baik yang besar maupun yang lecil membentuk sebuah sistem. Kumpulan dari sistem tersebut membentuk suatu ensamble. Didalam suatu sistem eddi boleh saling berinteraksi. Sedangkan dalam ensambel interaksi antar sistem ditentukan oleh suatu aturan. Misalnya ensambel mikro kanonik menyatakan interaksi antar sistem hanya diperbolehkan untuk tetangga terdekatnya saja. Kita mendekomposisi aliran fluida sebagai superposisi dari rata-rata dan fluktuasinya ini dikenal dengan Reynold's decomposition.

Dari gambar diatas, jika u adalah kecepatan angin maka Reynold's decomposition akan dinyatakan oleh:

$$u = \bar{u} + u'$$

Dengan harga rata-rata dinyatakan oleh:

$$\bar{u} = \frac{1}{T_o} \int_t^{t+T_o} u dt$$

dan harga rata-rata flukstuasi nol:

$$u' = \frac{1}{T_o} \int_t^{t+T_o} (u - \bar{u}) dt = \bar{u} - \bar{u} = 0$$

beberapa sifat yang harus dipenuhi dalam Reynold's decomposition [Gregg,M 1994 ,Streeter, V.L et al 1998].

Jika α adalah skalar, f dan g adalah vektor maka relasi berikut harus dipenuhi:

$$\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g} ; \quad \overline{fg} = \bar{f}\bar{g} + \overline{f'g'}$$

$$\overline{\alpha f} = \alpha \bar{f} ; \quad \overline{\bar{f}g} = \bar{f}\bar{g}$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial \tau}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \tau} ; \quad \overline{\bar{f}g'} = \bar{f}\bar{g}' = 0$$

Dengan relasi diatas kita dapat menentukan persamaan keseimbangan untuk medan rata-rata , flukstuasi serta energi kinetik dari medan kecepatan, temperatur dan salinitas yang dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Lakukan Reynold's decomposition ke persamaan momentum, difusi temperatur atau salinitas.
2. Letakkan prosedur rata-rata sehingga kita dapatkan persamaan keseimbangan untuk medan rata-rata.
3. Kurangkan persamaan rata-rata dengan persamaan keseimbangan semula untuk mendapatkan persamaan keseimbangan medan flukstuasi.
4. Untuk mendapatkan persamaan energi medan rata-rata, kalikan persamaan rata-rata dengan variabel rata-rata dan lakukan prosedur perata-rataan.
5. Untuk mendapatkan persamaan energi medan flukstuasi, kalikan persamaan flukstuasi dengan variabel flukstuasi dan lakukan prosedur perata-rataan.

2.3.1. Persamaan keseimbangan kecepatan

Lakukan Reynold decomposition untuk medan kecepatan, variabel tekanan dan variabel densitas di persamaan momentum (Navier-Stoke) kita dapatkan:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} + \bar{u} \cdot \nabla u' + u' \cdot \nabla \bar{u} + u' \cdot \nabla u' = -\frac{\nabla \bar{P}}{\bar{\rho}} - \frac{\nabla P'}{\bar{\rho}} - \frac{g}{\bar{\rho}} - \frac{\rho' \vec{g}}{\bar{\rho}} + \nu \nabla \cdot \nabla \bar{u} + \nu \nabla \cdot \nabla u' \quad 2.3.1.1$$

dimana kita telah memasukkan gaya gravitasi dan adalah ν viskositas kinematik persatuan massa. Tanpa mengurang arti kita abaikan dahulu indeksnya. Kita juga telah mengasaskan aproksimasi yaitu fluktuasi densitas relatif kecil dibandingkan dengan densitas rata-rata ($\rho' / \langle \rho \rangle < 10^{-4}$) sehingga fluktuasi densitas hanya berperan dalam gaya apung (gaya archimedes) saja. Pendekatan ini biasanya disebut pendekatan Boussinesq. Dalam skala mikro, gaya koriolis tidak signifikan sehingga umunya diabaikan. Lakukan prosedur perata-rataan kita dapatkan persamaan keseimbangan untuk medan kecepatan rata-rata sebagai berikut:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \cdot \nabla \bar{u}_i + \overline{u'_j \cdot \nabla u'_i} = -\frac{\nabla \bar{P}}{\bar{\rho}} - \frac{g}{\bar{\rho}} \delta_{i3} + \nu \nabla \cdot \nabla \bar{u}_i \quad 2.3.1.2$$

Jika persamaan 2.3.1.2 kita kalikan dengan \mathbf{u} rata-rata dan letakkan prosedur rata-rata maka kita dapatkan persamaan energi kinetik dari medan kecepatan utama (rata-rata) sebagai berikut:

$$\frac{\partial \frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{u}_i \left(\frac{\bar{P}}{\bar{\rho}} + \frac{1}{2} \bar{u}_j \bar{u}_j \right) + \overline{u'_i u'_j} \bar{u}_i + \nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] = \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - g \bar{u}_3 - \nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad 2.3.1.3$$

Suku pertama dari kiri adalah evolusi dari energi kinetik, suku kedua menyatakan kerja yang dilakukan oleh tekanan dinamik pada aliran rata-rata, suku ketiga menyatakan transport dari energi kinetik turbulen pada aliran rata-rata, suku ke empat menyatakan kerja yang dilakukan oleh stress viskositas pada aliran rata-rata, suku ke lima kerja yang dilakukan oleh stress turbulen yang mendeformasi aliran utama, suku ke tujuh menyatakan kerja yang dilakukan melawan gravitasi, dan seku kedelapan menyatakan disipasi viskositas oleh stress geser.

Jika kita kurangkan persamaan 2.3.1.2 dengan persamaan 2.1.2.1 kita dapatkan persamaan untuk fluktuasi kecepatan sebagai berikut:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla u' + u' \cdot \nabla \bar{u} + u' \cdot \nabla u' - \overline{u' \cdot \nabla u'} = -\frac{\nabla P'}{\bar{\rho}} - \frac{\rho' \vec{g}}{\bar{\rho}} + \nu \nabla \cdot \nabla u' \quad 2.3.1.4$$

Dengan mengalikan fluktuasi kecepatan u' dan lakukan prosedur rata-rata kita dapatkan persamaan energi kinetik untuk fluktuasi kecepatan (turbulen) sebagai berikut:

$$\frac{\partial \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{u_j' \left(\frac{P'}{\rho} + \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'} \right)} + \nu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) \overline{u_j'} \right] = -\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{\rho' u_3'} \frac{g}{\rho} - \nu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad \dots \dots \dots \quad 2.3.1.5$$

Suku pertama dari kiri adalah evolusi dari energi kinetik turbulen, suku kedua menyatakan kerja yang dilakukan oleh tekanan dinamik pada fluktuasi kecepatan, suku ketiga stress viskositas pada fluktuasi kecepatan, suku ke empat kerja yang dilakukan oleh stress turbulen yang mendeformasi aliran utama (mempunyai tanda yang berlawanan dengan persamaan aliran rata-rata yang berarti selalu bernilai positif sehingga dia berperan sebagai sumber energi kinetik turbulensi), suku ke lima menyatakan kerja yang dilakukan melawan gravitasi/gaya apung (biasanya diberi simbol J_B), dan suku keenam menyatakan disipasi viskositas oleh stress geser yang selalu bertanda negatif dan diberi simbol ϵ yang berarti sebagai sink (pengurang).

2.3.2. Persamaan keseimbangan medan skalar

Lakukan Reynold decomposition untuk medan temperatur dan medan kecepatan tekanan di persamaan difusi temperatur 2.1.3.2 kita dapatkan:

$$\frac{\partial (\bar{T} + T')}{\partial t} + (\bar{u} + u') \vec{\nabla}(\bar{T} + T') = \vec{\nabla} \cdot (\kappa_T \vec{\nabla}(\bar{T} + T')) \quad 2.3.2.1$$

Lakukan prosedur rata-rata dan gunakan persamaan kontinuitas ($\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0$) maka kita dapatkan persamaan keseimbangan untuk rata-rata temperatur sebagai berikut:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + (\bar{u}) \vec{\nabla}(\bar{T}) = \vec{\nabla} \cdot (\kappa_T \vec{\nabla} \bar{T}) - \vec{\nabla} \cdot \overline{u' T'} \quad 2.3.2.2$$

Jika kita kurangkan dengan persamaan difusi temperatur 2.1.3.2 dan kalikan dengan variabel fluktuasi temperatur serta latakan prosedur rata-rata (Reynold decomposition) maka kita dapatkan persamaan untuk varian temperatur (energi temperatur) sebagai berikut:

$$\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \overline{u \bar{T'^2} + u' T'^2} - \kappa_T \vec{\nabla} \overline{T'^2} = -2 \overline{u' T'} \cdot \vec{\nabla} \bar{T} - 2 \kappa_T \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} T') \quad 2.3.2.3$$

Suku pertama menyatakan evolusi varian temperatur, suku kedua transport adveksi dari varian temperatur oleh rata-rata aliran, suku ketiga adveksi oleh turbulen, suku keempat adveksi oleh difusi molekular (bisa diabaikan), suku kelima difusi akibat adanya shear dan suku terakhir menyatakan dissipation rate. Bentuk dissipation rate seringkali dilambangkan oleh:

$$\chi_T \equiv 2\kappa_T \overline{(\tilde{\nabla} T')^2} \quad [K^2 s^{-1}] \quad 2.3.2.4$$

The rate of dissipation ini definit positif sehingga dia berperan sebagai sink dari energi turbulen.

Dengan cara yang sama kita dapatkan persamaan varian salinitas sebagai berikut:

$$\frac{\partial \overline{S'^2}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[\overline{u S'^2} + \overline{u' S'^2} - \kappa_s \vec{\nabla} \overline{S'^2} \right] = -2\overline{u' S'} \cdot \vec{\nabla} \bar{S} - 2\kappa_s \overline{(\tilde{\nabla} S')^2} \quad 2.3.2.5$$

The rate of dissipation dari salinitas adalah:

$$\chi_S \equiv 2\kappa_s \overline{(\tilde{\nabla} S')^2} \quad [s^{-1}] \quad 2.3.2.6$$

2.3.3. Persamaan keseimbangan energi potensial

Persamaan ini diturunkan karena sangat berguna dalam pengkuran turbulensi yaitu kita akan berurusan dengan paramater gaya apung. Kita ingat bahwa densitas memenuhi persamaan keadaan (persamaan termodinamika pertama) yaitu $f(\rho, T, S) = 0$. Jika T dan S memenuhi persamaan difusi maka begitu pula dengan densitas. Jika densitas adalah fungsi dari tekanan, temperatur dan salinitas maka turunan pertama terhadap waktu dari fungsi densitas itu dapat dinyatakan sebagai berikut [Gregg,M 1994, Greeg,M 1998]

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho \left(-\alpha \frac{dT}{dt} + \beta \frac{dS}{dt} \right)$$

dimana koefisien α dan β adalah konstant kesebandingan. Persamaan difusi akan dipenuhi oleh persamaan diatas. Dengan mengingat bahwa d/dt adalah operasi total drivatif maka suku sebelah kiri akan ekspresikan dalam bentuk total dervatif sedangkan sebelah kanan akan dinyatakan dalam bentuk difusinya. Dengan menggunakan Reynold's decomposition maka kita dapatkan persamaan:

$$\frac{\partial(\bar{\rho} + \rho')}{\partial t} + (\bar{u} + u') \vec{\nabla} \cdot (\bar{\rho} + \rho') = -\alpha \bar{\rho} \kappa_T \nabla^2 (\bar{T} + T') + \beta \bar{\rho} \kappa_s \nabla^2 (\bar{S} + S') \quad 2.3.3.1$$

Jika kita terapkan prosedur rata-rata kita dapatkan persamaan untuk rata-rata densitas. Kurangkan dengan persamaan difusi untuk densitas maka kita dapatkan persamaan untuk fluktuasi densitas. Jika hasil ini kita kalikan dengan fluktuasi densitas dan terapkan prosedur rata-rata maka kita dapatkan persamaan keseimbangan untuk varian densitas sebagai berikut:

$$\frac{\partial \overline{\rho'^2}}{\partial t} + \nabla \cdot [\overline{\rho'^2} + \overline{u' \rho'^2} - \bar{\rho}^2 \beta^2 \kappa_S \nabla^2 \overline{s'^2} - \bar{\rho}^2 \alpha^2 \kappa_{TS} \nabla^2 \overline{T'^2} + 2\bar{\rho}^2 \alpha \beta (\kappa_T \overline{s' \nabla(T')} + \kappa_S \overline{T' \nabla(s')})] = -2\overline{u' \rho' \cdot \nabla \bar{\rho}} - \chi \rho$$

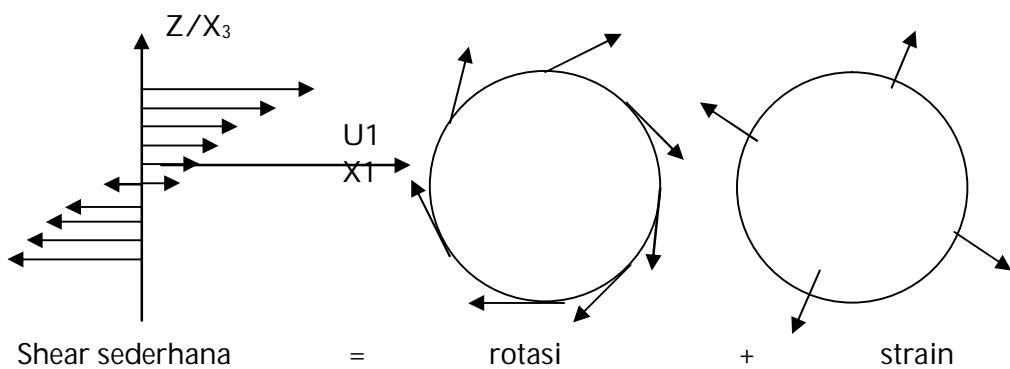
.....2.3.3.2

dimana dissipation rate didefinisikan sebagai:

$$\chi_\rho \equiv \bar{\rho}^2 \alpha^2 \chi_T + \bar{\rho}^2 \beta^2 \chi_S - 2\bar{\rho}^2 \alpha \beta (\kappa_T + \kappa_S) \overline{s' \cdot \nabla T'} \quad 2.3.3.3$$

2.4. Pengaruh Stratifikasi Fluida

Seperti telah dinyatakan diatas laut merupakan bentuk fluida berlapis. Dengan ada fluida berlapis maka proses mixing terutama terjadi dalam arah vertikal. Sifat penting dari fluida berlapis adalah adanya shear. Misalkan shear berupa kecepatan, maka shear ini akan mendekomposisikan diri dalam bentuk rotasi dan strain pada fluida yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Adanya shear dicirikan dengan aliran turbulen yang saling tumpang tindih serta overturns. Jika ζ adalah panjang karakteristik dari overturns maka fluktuasi densitas akan sebanding dengan gaya apung (N) dikalikan skala panjang ini yang dinyatakan oleh [Greg,M 1994]:

$$\rho'(x_3) = \frac{\rho N^2}{g} \zeta_3$$

Energi potensial akibat fluktuasi densitas tersebut adalah:

$$\overline{\phi'^2} = \frac{g}{\rho_o} \int_0^{\zeta_3} \rho'(x_3) dx_3 = \frac{1}{2} N^2 \zeta_3^2 = \frac{1}{2} N^2 \overline{\rho'^2}$$

Dengan menggunakan persamaan 2.3.3.2 dan kalikan dengan $(g/\rho N)^2$ serta abaikan suku fluktuasi salinitas kita dapatkan energi potensial turbulen sebagai berikut:

$$\frac{\partial \overline{\phi'^2}}{\partial t} + \nabla \cdot [\overline{\phi'^2 \bar{u}} + \overline{\bar{u} \phi'^2}] = -J_B - \chi_{PE} \quad 2.4.1$$

dimana the rate of dissipation adalah:

$$\chi_{PE} = \left(\frac{g}{\rho N} \right)^2 \chi_\rho \quad [W/kg] \quad 2.4.2$$

Jadi dalam fluida berlapis harga fluks gaya apung selalu negatif sehingga akan menaikkan energi potensial turbulen. Dengan harga fluks gaya apung yang negatif menunjukkan air yang berat akan digerakkan ke atas dan air yang ringan akan ditenggelamkan. Jika harga fluks gaya apung positif maka turbulen akan melemah. Jelas besarnya suatu proses mixing dapat dilihat dari besarnya fluks gaya apung.

Persamaan keseimbangan untuk gaya apung dapat dicari dengan langkah sebagai berikut: Kalikan fluktuasi densitas dan fluktuasi kecepatan, lakukan deferensiasi terhadap t serta terapkan prosedur rata-rata sebagai berikut:

$$\frac{\partial \overline{\rho' u'}}{\partial t} = \overline{\rho' \frac{\partial u'}{\partial t}} + \overline{u' \frac{\partial \rho'}{\partial t}}$$

Dengan mengambil arah vertikal dan menggunakan definisi persamaan keseimbangan untuk fluktuasi densitas dan fluktuasi kecepatan kita dapatkan persamaan:

$$\frac{\partial \overline{\rho' u'_3}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{g}{\rho} \overline{\rho' u'^2_3} \right) + \left(\frac{g^2}{\rho c^2} \right) \overline{\rho' u'^2_3} = \left(\frac{g}{\rho} \right)^2 \overline{\rho'^2} - \overline{u'^2_3} N^2 + \left(\frac{g}{\rho} \right)^2 \overline{\rho' \frac{\partial p'}{\partial x_3}}$$

Dengan mengalikan oleh $-g/\rho$ dan mengabaikan suku kedua dan kompresibilitas serta menggunakan 2.4.1 kita dapatkan persamaan keseimbangan gaya apung sebagai berikut:

$$\frac{\partial J_B}{\partial t} = -\overline{u'^2_3} N^2 + 2\overline{\phi'^2} N^2 + \left(\frac{g}{\rho} \right)^2 \overline{\rho' \frac{\partial p'}{\partial x_3}} \quad 2.4.3$$

Dari persamaan 2.4.3 kita melihat bahwa perilaku turbulensi dapat kita pelajari hanya dengan melihat masalah dalam arah vertikal, sedangkan secara horisontal dapat kita asumsikan homogen.

2.4.1. Turbulensi Homogen Isotropis

Dalam praktek dilapangan sangat sukar bagi kita untuk mengukur turbulensi berdasarkan formalisme yang telah diberikan diatas. Kesulitan itu dapat kita atasi dengan suatu aproksimasi. Seperti kita lihat pada subbab diatas bahwa adanya shear akan menyebabkan turbulensi dominan dalam arah vertikal sehingga kita menganggap secara horisontal homogen. Turbulen dikatakan homogen jika dia invarian terhadap transformasi translasi. Dari pengambaran sub-Bab 2.4 menunjukkan bahwa shear sederhana dapat dikomposisikan sebagai penjumlahan rotasi dan strain. Jika strain adalah simetri kita dapat menganggap bahwa turbulen isotropis. Isotropis adalah turbulen invarian terhadap transformasi rotasi. Sekarang kita asumsikan fluida menjalar hanya dalam arah x dengan kecepatan u_1 dan aliran secara horisontal homogen sehingga suku divergensi dapat diabaikan. Dengan asumsi diatas persamaan energi kinetik turbulensi (flukstuasi) 2.3.1.5 dapat kita tuliskan dalam bentuk yang sederhana sebagai berikut:

$$\frac{\partial \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'}}{\partial t} = -\overline{u_1' u_3'} \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3} + J_B - \varepsilon + \frac{\overline{P'} \frac{\partial u_i'}{\partial x_i}}{\overline{\rho}} \quad 2.4.1.1$$

Dalam bentuk komponennya dapat dituliskan berturut-turut.

$$\frac{\partial \frac{1}{2} \overline{u_1' u_1'}}{\partial t} = -\overline{u_1' u_3'} \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3} - \varepsilon + \frac{\overline{P'} \frac{\partial u_1'}{\partial x_1}}{\overline{\rho}}$$

$$\frac{\partial \frac{1}{2} \overline{u_2' u_2'}}{\partial t} = -\varepsilon + \frac{\overline{P'} \frac{\partial u_2'}{\partial x_2}}{\overline{\rho}}$$

$$\frac{\partial \frac{1}{2} \overline{u_3' u_3'}}{\partial t} = J_B - \varepsilon + \frac{\overline{P'} \frac{\partial u_3'}{\partial x_3}}{\overline{\rho}}$$

Jika kita mengabaikan ε maka energi kinetik turbulen akan ditopang oleh gaya apung dan stress Reynold ($\overline{u_1' u_3'}$). Stress Reynold ini akan memproduksi turbulen dalam arah x saja yaitu akibat adanya mean shear (du/dx), sehingga komponen energi kinetik turbulen dalam arah x akan lebih besar dari komponen yang lain yaitu y dan z .

Dalam praktek sangat sukar untuk menentukan stress Reynold, sebagai gantinya yang diukur adalah koefisien turbulen atau koefisien eddi. Koefisien eddi dapat diestimasi dari persamaan keseimbangan. Dalam

pandangan yang paling sederhana koeffisien eddi dinyatakan sebagai rasio antara rate dissipation dan varian dari mean gradien. Jika kita tuliskan kembali persamaan 2.4.1.1 tanpa suku tekanan menjadi:

$$\frac{\partial \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'}}{\partial t} = -\overline{u_1' u_3'} \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3} + J_B - \varepsilon \quad 2.4.1.2$$

Kita definisikan bilangan Fluks Richardson R_F (Gregg,M 1994; Sorbjan,Z 1988) sebagai berikut:

$$R_F \equiv \frac{J_B}{\overline{u_1' u_3'} \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3}} \quad 2.4.1.3$$

Dari persamaan 2.4.1.2 kita melihat bahwa gaya gerak utama turbulen adalah mean shear. Kita ingat kembali dengan hukum Fick bahwa fluks suatu medan skalar akan sebanding dengan gradien medan skalar tersebut. Pendekatan sederhana ini akan kita adopsi untuk transport turbulen, yaitu transport momentum turbulen sebagai hasil dari kerja yang dilakukan untuk melawan hear, sehingga transport momentum turbulen (flukstuasi) akan sebanding dengan mean shear (gradien kecepatan). Kesebandingan ini akan dinyatakan oleh suatu bilangan yang dinamakan koefisien eddi. Hal tersebut kita tuliskan sebagai berikut:

$$\overline{u_1' u_3'} = -K_M \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3} \quad [\text{m}^2 \text{s}^{-2}] \quad 2.4.1.4$$

Dengan memanfaatkan definisi fluks bilangan Richardson 2.4.1.3 maka persamaan 2.4.1.2 menjadi:

$$\frac{\partial \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'}}{\partial t} = -\overline{u_1' u_3'} \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3} + \overline{u_1' u_3'} \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3} R_F - \varepsilon \quad 2.4.1.5$$

asumsikan kondisi tunak ($d/dt=0$) maka kita dapatkan persamaan:

$$-(1 - R_F) \overline{u_1' u_3'} \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3} = \varepsilon \quad 2.4.1.6$$

Dengan mensubtitusikan persamaan 2.4.1.4 kita dapatkan koefisien eddi sebagai berikut:

$$K_M = \frac{\varepsilon}{(1 - R_F) \left(\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3} \right)^2} \quad [\text{m}^2 \text{s}^{-1}] \quad 2.4.1.7$$

Dengan cara yang sama maka untuk medan skalar (misal temperatur) akan dinyatakan oleh:

$$K_{heat} = \frac{\chi_T}{2 \left(\frac{\partial T}{\partial x_3} \right)^2} \quad [m^2 s^{-1}]$$

Untuk keadaan riel lautan biasanya fluks bilangan Richardson R_F lebih kecil dari 0.2 sehingga dapat diabaikan. Metode dissipasi diatas ternyata tidak dapat diterapkan ketika turbulensi dihasilkan oleh pecahnya gelombang internal. Untuk mendapatkan bentuk yang lebih umum maka dalam pengukuran microstructure (seperti di laut Banda) diperkenalkan koefisien difusivitas diapiknal (κ_ρ). Koefisien tersebut diturunkan sebagai berikut:

Didalam fluida berlapis fluks gaya apung J_B akan sebanding dengan gaya apung yaitu N . Kesebandingan itu dinyatakan oleh koefisien difusivitas diapiknal sebagai berikut:

$$J_B = -\kappa_\rho N^2 \quad W kg^{-1} \quad 2.4.1.8$$

Gabungkan persamaan 2.4.1.3 dan 2.4.1.2 kita dapatkan persamaan dalam bentuk J_B sebagai berikut:

$$\frac{J_B}{R_F} = J_B - \varepsilon$$

Substitusi definisi dari J_B diatas maka persamaan menjadi:

$$\kappa_\rho = \left(\frac{R_F}{1 - R_F} \right) \frac{\varepsilon}{N^2} \quad [m^2 s^{-1}]$$

Dalam penelitian laut telah diketahui bahwa harga bilangan Richardson $R_F < 0.15$ sehingga kita dapatkan aproksimasi:

$$\kappa_\rho \leq 0.2 \frac{\varepsilon}{N^2} \quad [m^2 s^{-1}] \quad 2.4.1.9$$

Faktor numerik tersebut mengukur efisiensi mixing di suatu perairan, maka secara umum dapat dituliskan:

$$\kappa_\rho \equiv \gamma_{mix} \frac{\varepsilon}{N^2} \quad 2.4.1.10$$

Efisiensi mixing tersebut untuk turbulen dan dufusi ganda akan mempunyai harga yang berbeda. Koefisien difusivitas diapiknal ini merupakan

parameter yang diukur dalam riset turbulen di laut. Osbone dan Cox telah melakukan estimasi efisiensi mixing sebagai berikut:

$$\gamma_{mix} = \frac{\chi_T N^2}{2\epsilon \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right)^2} \quad 2.4.1.11$$

Rumus ini dapat digunakan untuk menghitung efisiensi mixing yang diakibatkan oleh difusi ganda maupun turbulen. Untuk pasang surut maka koefisien difusivitas diapiknal telah dihitung sebagai berikut:

$$\kappa_\rho^{tides} \leq \frac{0.2 \epsilon_{tides}}{N_o^2} = 2 \times 10^{-5} \quad m^2 s^{-1}$$

Untuk koefisien difusivitas diapiknal karena angin dihitung dengan rumus yang sama dengan pasut tetapi dengan harga ϵ yang berbeda tergantung dari kondisi suatu daerah.

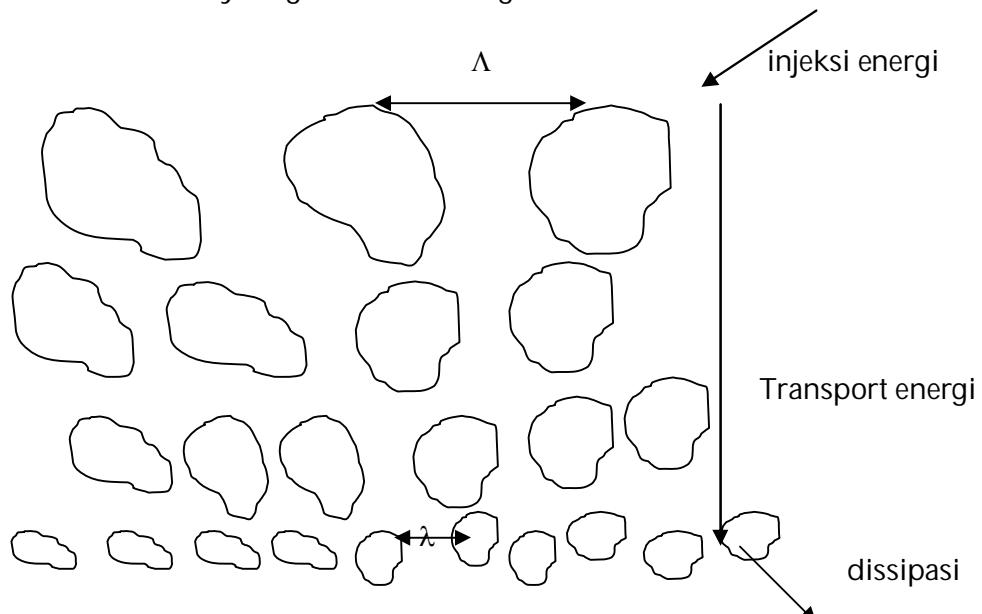
2.5. Struktur Turbulensi Skala Kecil

Sejauh ini kita telah membicarakan turbulensi secara umum yaitu dapat terjadi dimana saja mulai dari pusat galaksi samapi di secangkir kopi panas. Dalam riset oceanografi pada umumnya oceanographer melakukan pengukuran turbulensi dalam suatu skala panjang antara beberapa kilometer sampai 0.01 mm. Turbulensi yang terjadi dalam rang ini dinamakan turbulensi skala kecil. Skala waktunya paling lama hanya beberapa bulan saja. Gerak turbulen dalam skala ini sangat penting karena tidak hanya mempengaruhi sirkulasi arus dan gelombang saja tetapi juga mempengaruhi distribusi kimiawi serta produktivitas biologis disuatu perairan. Turbulensi skala kecil ini merupakan faktor dominan dalam transfer energi secara vertikal di suatu kolom air. Salah satu teori yang fundamental dalam turbulensi skala kecil adalah teori Kolmogorov. Penerapan dari ide Kolmogorov ke riset turbulensi dilaut akan dinyatakan dalam analisis spektral. Berikut ini gambaran keduanya:

2.5.1. Teori Kolmogorov

Suatu konsep yang sangat mendasar dalam teori turbulensi skala kecil adalah konsep "energy cascade" (cascade = air terjun). Konsep ini pertama kali dilontarkan oleh fisikawan Inggris Lewis Richardson. Ide dasarnya sebagai berikut: Konsep[energy cascade menyatakan adanya suatu

pancaran/cascade energi dari suatu energi ke keadaan energi yang lebih rendah. Ilustrasinya digambarkan sebagai berikut:



Gambar:2.5.1-1. Konsep energy cascade dari Richardson

Misalkan kita mempunyai eddy yang ukurannya Λ maka jika kita injeksikan energi pada eddy tersebut maka transport energi yang terjadi akan memecah eddy menjadi eddy yang lebih kecil. Karena transport energi terus berlangsung maka eddy yang telah terpecah tadi akan terpecah lagi menjadi eddy dengan ukuran yang lebih kecil. Demikian seterusnya sehingga dia mencapai suatu ukuran λ yang tak terpecah lagi. Proses ini berhenti dengan ditandai berubahnya energi tadi menjadi panas. Proses perubahan energi kinetik tadi menjadi energi panas disebut dissipasi. Parameter disipasi energi ini adalah bentuk energi karena viskositas yang dinyatakan oleh:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad 2.5.1.1$$

Dari ide Richardson diatas Kolmogorov mengkuantisasikannya dalam model matematis. Pada dasarnya Kolmogorov beranggapan bahwa turbulensi homogen isotropis yaitu turbulen terdistribusi secara merata di seluruh ruang. Secara formal dikatakan bahwa turbulensi isotropis jika harga rata-rata dari fluktuasinya adalah invarian terhadap transformasi rotasi dan refleksi. Turbulensi dikatakan homogen jika harga rata-rata fluktuasinya adalah invarian terhadap transformasi translasi. (Sulaiman, 1994 apendiks E.)

Dalam turbulensi isotropis harga korelasi dari sembarang variabel acak hanya tergantung pada jarak antara dua titik tersebut dan tidak pada orientasi dua titik tersebut pada ruang dan waktu. Kolmogorov mendekomposisikan medan kecepatan fluktuasi dalam transform Fourier sebagai berikut:

$$u(x,t) = \int \tilde{u}(k,t) e^{ikx} dk \quad 2.5.1.2$$

Maka energi kinetik persatuan massa dari kecepatan fluktuasi ini (abaikan tanda aksen) adalah:

$$\begin{aligned} \hat{E} &= \int E dV = \frac{1}{2} \int (u^2 + v^2 + w^2) dk \\ &= \frac{1}{2} \int (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2) dk \quad 2.5.1.3 \\ &= \int \epsilon(k) dk \end{aligned}$$

ϵ disebut spektrum energi. Karena asumsi homogen isotropis maka $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Karena teori Kolmogorov berurusan dengan dimensi maka berikut ini adalah tabel dimensi dari kuantitas diatas:

Kuantitas	Dimensi
Bilangan gelombang (k)	$1/L$
Energi persatuan massa (E)	L^2 / T^2
Apektrum energi (ϵ)	L^3 / T^2
Fluks energi (ϵ)	L^2 / T^3
Viskositas (ν)	L^2 / T

Kolmogorov mendasarkan teorinya pada dua hipotesis sebagai berikut:

1. Distribusi statistik turbulen secara unik ditentukan oleh ϵ dan ν jika berada dalam rang dissipasi (skala mikro).
2. Distribusi statistik turbulen hanya tergantung pada ϵ jika skala jauh dari dissipasi.

Berdasarkan hipotesis-1, Kolmogorov menentukan skala panjang dimana effek viskositas akan signifikan. Skala panjang itu diberi simbol l_v . Dari hipotesis-1 (l_v juga karakteristik turbulen):

$$\begin{aligned} l_v &\approx \epsilon^a \nu^b \\ L &\approx (L^2 / T^3)^a (L^2 / T)^b \\ L^1 &\approx L^{2a+2b} T^{-3a-b} \end{aligned}$$

Dengan mudah kita dapatkan $a=-1/4$ dan $b=3/4$. Jadi:

$$l_v \approx \left(\frac{v^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad 2.5.1.4$$

Misal untuk kondisi lautan pasifik ekuator yang mempunyai $\epsilon = 10^{-6}$ WKg⁻¹ dan $v = 1.4 \cdot 10^{-6}$ m² s⁻¹ maka $l_v = 1.3$ m. Untuk daerah dimana viskositas tidak signifikan maka distribusi statistik turbulen hanya tergantung pada ϵ . Menurut hipotesis-2 maka spektrum energi dalam rang ini akan sebanding ϵ dengan dan bilangan gelombang saja.

$$\epsilon \approx \epsilon^a k^b$$

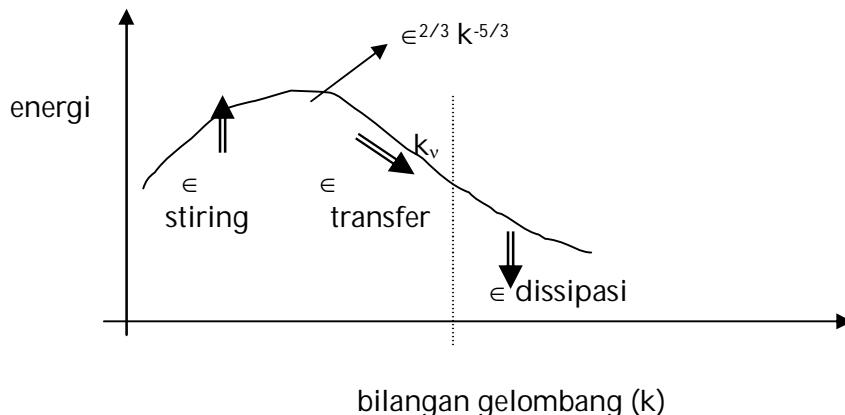
$$\frac{L^3}{T^2} \approx \left(\frac{L^2}{T^3} \right)^a \left(\frac{1}{L} \right)^b$$

$$L^3 T^{-2} \approx L^{2a-b} T^{-3a}$$

Mudah dihitung bahwa $a=2/3$ dan $b=-5/3$. Jadi:

$$\epsilon(k) \approx \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad \text{atau} \quad \epsilon(k) = C \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad 2.5.1.5$$

Konstanta C disebut konstanta universal. Hasil ini terkenal dengan "hukum -5/3 Kolmogorov". Konstanta C adalah konstanta tanpa dimensi yang ditentukan dari eksperimen, yang hasilnya sekitar 1.5. Konsep energy cascade dalam teori Kolmogorov dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.5.1-2. Distribusi energi menurut konsep energy cascade.

Rumus energi 2.5.1.5 itulah yang akan digunakan sebagai basis dalam mempelajari turbulensi dalam bahasa analisis spektral. Ternyata dalam banyak pengukuran lapangan spektrum energi yang pada garis besarnya menyerupai bentuk spektrum Kolmogorov diatas.

2.5.2. Dinamika bilangan gelombang (analisis spektral).

Persamaan-persamaan dinamika turbulensi yang telah kita tuliskan sebelumnya diatas mengekspresikan pertukaran energi antara gerakan rata-rata (laminer/frekuensi rendah) dengan gerakan fluktuasi(turbulen/frekuensi tinggi). Interaksi yang umumnya nonlinier dari frekuensi rendah ke frekuensi tinggi dapat diperiksa dengan perubahan bilangan gelombang. Fluks energi dari bilangan gelombang rendah (gerakan rata-rata) ke bilangan gelombang tinggi/besar akan berhenti ketika dissipasi viskositas yang irreversibel merubah energi kinetik turbulen menjadi energi termal. Perilaku ini dapat kita lihat digambar-2.5.1-2. Estimasi seberapa besar dari dissipation rate dan fluks turbulen yang mengikutinya merupakan tujuan utama pengukuran turbulen dilaut. Karena sifatnya yang kompleks dan nonlinier kebanyakan para oceanographer mendekatinya dengan menggunakan analisis dimensional dan argumen kinematik sederhana. Salah satu contoh yang terkenal adalah teori similaritas. Dengan cara ini oceanographer mencoba untuk mengobservasi dan melakukan parameterisasi turbulen didalam bentuk variabel skala besar.

Salah satu cara mengamati perilaku turbulen yang kompleks adalah dengan melihat dinamika bilangan gelombang atau frekuensi. Pendekatan ini disebut dengan nama analisis spektral. Dasar dari analisis tersebut adalah suatu besaran yang disebut "power spectra". Power spectra ini pada dasarnya mengukur energi serta bagaimana energi ini didistribusikan dalam suatu perairan.

Dalam bab yang lalu kita menyatakan frekuensi dan bilangan gelombang dalam satuan radian, tetapi para oceanographer lebih suka menggunakan satuan cyclic. Jika dalam satuan radian frekuensi dan bilangan gelombang mempunyai satuan berturut-turut $1/s$ dan $1/m$ maka dalam satuan cyclic frekuensi dan bilangan gelombang mempunyai satuan berturut-turut adalah Hz dan $1/cpm$ ($cpm = \text{cycle per meter}$). Berikut ini adalah tabelnya:

	<u>Frekuensi</u>	<u>Bilangan gelombang</u>
Radian	$\omega = 2\pi/T$ [s ⁻¹]	$.k = 2\pi/\lambda$ [m ⁻¹]
Cyclic	$f = 1/T$ [Hz]	$\kappa = 1/\lambda$ [cpm]

Sekarang misalkan kita bicarakan dahulu besaran skalar untuk contoh potensial temperatur (diukur secara vertikal dengan kedalaman perairan

diberi simbol z atau x_3). Jika Φ_θ adalah spektrum dari suatu data flukstuasi potensial temperatur maka varian dari potensial temperatur (yang menyatakan energi) adalah:

$$\overline{\theta'^2} = \int_{0.01\text{cpm}}^{100\text{cpm}} \Phi_\theta(\kappa_3) d\kappa_3 \quad [K^2] \quad 2.5.2.1$$

Biasanya para oceanographer lebih suka menggunakan absis logaritmik sehingga varian potensial temperatur menjadi:

$$\overline{\theta'^2} = \int \Phi_\theta(\kappa_3) d \ln \kappa_3 \quad [K^2] \quad 2.5.2.2$$

Power spektra dihitung dari data potensial temperatur dengan menerapkan transform fourier. Dalam bentuk diskrit jika $\theta' = \theta'(n\Delta z)$ adalah data flukstruasi potensial temperatur maka transform Fourier dari data tersebut adalah:

$$F_\theta(m\Delta k_3) \equiv \sum_{n=0}^{N-1} \theta'(n\Delta z) e^{-i \frac{2\pi mn}{N}} \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad 2.5.2.3$$

dimana Δz adalah interval sampling (misalkan 0.1 m) ; N adalah banyaknya sampel dan $\Delta k_3 = (2\pi/N) \Delta z$ adalah lebar pita bilangan gelombang.

Power spektra dari potensial temperatur akan dinyatakan oleh:

$$\Phi_\theta(m\Delta k_3) = \frac{2}{N\Delta z} F_\theta(m\Delta k_3) F_\theta^*(m\Delta k_3) \quad [K^2 m] \quad 2.5.2.4$$

Tanda asterik menyatakan konjugate kompleks. Dalam praktek, teknik komputasi power spektra tersebut dilakukan dengan cara FFT (fast fourier transfor). Metode ini sangat mudah dilakukan dengan Matlab. Bentuk dari power spectra mencerminkan dinamika turbulen disuatu perairan. Perubahan slope (kemiringan) dari suatu spektrum menyatakan sifat dinamika dominan yang memproduksi turbulen. Dalam observasi telah banyak ditemukan bentuk spektra, misalnya GM76 menyatakan turbulensi akibat gelombang internal.

Spektrum energinya akan dinyatakan oleh:

$$E_\theta(k) \equiv 4\pi k^2 \Phi_\theta(k) \quad [K^2 m] \quad 2.5.2.5$$

yang menyatakan energi dalam bentuk bilangan gelombang.

Untuk flukstuasi kecepatan maka power spektra merupakan pasangan transfor fourier yang dinyatakan oleh:

$$\Phi_{vel}^{jl}(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{vel}^{jl}(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{r} \quad [m^2 s^{-1}] \quad 2.5.2.6$$

$$B_{vel}^{jl}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{vel}^{jl}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k} \quad 2.5.2.7$$

dimana fungsi korelasi B_{vel} merupakan tensor rank dua yang dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$B_{vel}^{jl}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} \overline{u_1'(\vec{x})u_1'(\vec{x} + \vec{r})} & \overline{u_1'(\vec{x})u_2'(\vec{x} + \vec{r})} & \overline{u_1'(\vec{x})u_3'(\vec{x} + \vec{r})} \\ \overline{u_2'(\vec{x})u_1'(\vec{x} + \vec{r})} & \overline{u_2'(\vec{x})u_2'(\vec{x} + \vec{r})} & \overline{u_2'(\vec{x})u_3'(\vec{x} + \vec{r})} \\ \overline{u_3'(\vec{x})u_1'(\vec{x} + \vec{r})} & \overline{u_3'(\vec{x})u_2'(\vec{x} + \vec{r})} & \overline{u_3'(\vec{x})u_3'(\vec{x} + \vec{r})} \end{bmatrix}$$

Bagian trace adalah axial (sb utama) dan transfersal (sumbu horisontal / bidang normal) sedangkan bagian diagonal matriks adalah cros. Jika $r=0$ maka bagian diagonal akan mengkompres turbulensi. Dalam asusmsi turbulen isotropis maka bagian axial dan tranversal tidak saling bebas akibatnya hanya satu komponen saja yang diukur. Misalnya sensor pengukuran dengan hot film atau pitot maka yang diukur adalah flukstuasi axial sedangkan airfoil akan mengukur transversal. Jika flukstuasi kecepatan tidak isotropis maka spektrum energi kinetik adalah jumlah dari spektrum traceny.

Energi kinetik turbulen dinyatakan oleh:

$$E_{KE}(k) = 4\pi k^2 \Phi_{KE}(k) \quad 2.5.2.8$$

Turbulen cenderung menjadi isotropis pada bilangan gelombang besar. Pada keadaan ini dissipasi akan mengekstrak turbulen menjadi energi panas. Aliran spektrum energi akan mengecil dengan besarnya bilangan gelombang yang menunjukkan adanya energy cascade seperti yang diramalkan oleh Richardson. Dissipasi energi dihitung dari energi kinetik dinyatakan oleh [Gregg,M 1989]:

$$\bar{\varepsilon} = 2\nu \int_0^{\infty} k^2 E(k) dk \quad [Wkg^{-1}] \quad 2.5.2.9$$

Distribusi energi $E(k)$ terhadap bilangan gelombang menyatakan karakteristik suatu daerah. Beberapa model telah dikembangkan misalnya model Kolmogorov yang menyatakan bahwa distribusi energi kinetik terhadap bilangan gelombang mengikuti:

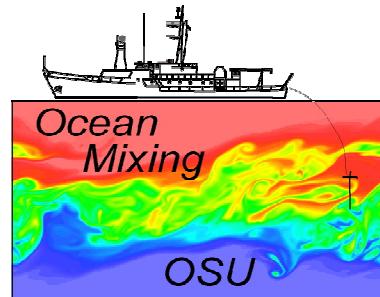
$$E_{KE}(k) = C\varepsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}} \quad \left[\frac{m^2 s^{-2}}{m^{-1}} \right]$$

Yang biasanya disebut spektrum Kolmogorov. Misalnya observasi yang dilakukan di kanal pasang surut [Grant et al 1968] dengan kedalaman pengukuran 100m serta kecepatan arus rata-rata 1m/s mereka menemukan $C = 0.47 \pm 0.02$. Hasil ini mengatakan bahwa turbulensi terdistribusi merata diseluruh perairan dan proses mixing telah terjadi secara sempurna.

BAB III

Akusisi dan Pengolahan Data

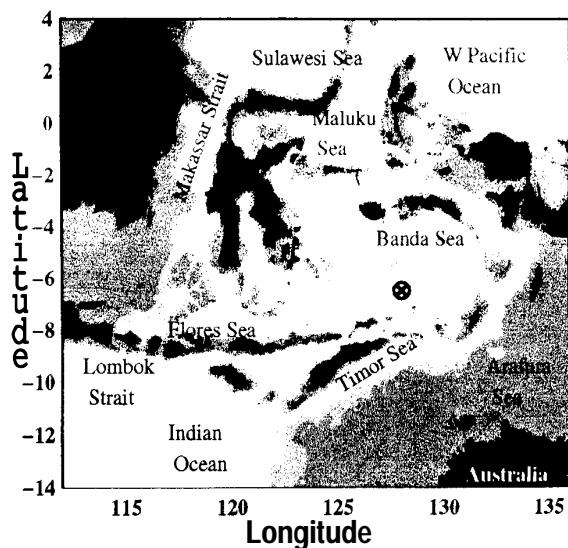
*The main goal of physics is to describe
a maximum of phenomena with
a minimum of variable !*



C. CERN Courier

3.1 Akusisi data

Pengukuran turbulensi di laut Banda pertama sekali dilaksanakan pada tahun 1998 oleh Applied Physics Laboratory, University of Washington dengan Badan Pengkajian dan Penerapan Teknologi (BPPT). Eksperimen yang dinamakan ARLINDO microstructure dilaksanakan mulai tanggal 22 Oktober sampai tanggal 7 November 1998 dengan kapal riset Baruna Jaya IV milik BPPT. Kapal riset Baruna Jaya IV mempunyai panjang 60.4 meter, lebar 12.1 meter, draft kapal 4.15 meter, berat kapal 1.219 ton serta kecepatan maximum 13 knot. Lokasi penelitian terletak dalam koordinat (6.5°S ; 128°E) yang merupakan pusat dari laut Banda. Lokasi penelitian dapat dilihat dalam gambar berikut:



Gambar-1: Peta batimetri secara kasar untuk laut Banda, warna abu-abu menunjukkan kedalaman 0-300m; warna abu-abu muda menunjukkan kedalaman 300-1000m dan warna putih menunjukkan kedalaman \geq 1000 meter.

Tanda \otimes menunjukkan lokasi penelitian dengan kedalaman 4700 meter.
(sumber: Alford,M et al 1999).

Metode pengukuran adalah deret waktu (time series) selama dua minggu (14 hari) penuh. Peralatan yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

- Modular Microstructure Profiler (MMP) yang mengukur parameter: potensial temperatur, salinitas, potensial densitas, tekanan serta energi kinetik dissipation rate.
- Sea-Bird thermistor floating dalam Tygon tube yang mengukur SST (suhu muka laut secara time series 14 hari).
- RDI broadband ADCP untuk mengukur profil kecepatan arus.
- Aandera system untuk mengukur parameter meteorologi.

Untuk mempertahankan posisi di koordinat (6.5° S; 128° E) maka kapal bergerak dengan kecepatan 2 knot disekitar koordinat tersebut. Karena kemampuan kapal yang tidak dapat bergerak dengan kecepatan dua knot secara terus menerus maka survei dilakukan dengan cara kapal bergerak dengan kecepatan 2 knot selama 4 jam dan bergerak dengan kecepatan 4 knot atau lebih selama 2 jam. Selama kapal bergerak dengan kecepatan 2 knot MMP diturunkan (jatuh bebas) dan ditarik lagi. MMP diturunkan sampai kedalaman 300 meter. Waktu penurunan dan naik kembali ke deck memerlukan waktu sekitar 15 menit. Selama survei kita melakukan 519 kali penurunan. Pada saat kapal bergerak 4 knot atau lebih tidak ada pengambilan data turbulen (MMP tidak diturunkan). Memang itu mengurangi kemulusan time series data yang kita inginkan, tetapi itulah hasil terbaik yang dapat dilakukan. Sedangkan peralatan lain seperti ADCP, Aandera system dan Sea-Bord thermistor floating beroperasi secara terus menerus selama 14 hari. Survei MMP dapat dilihat pada gambar berikut:

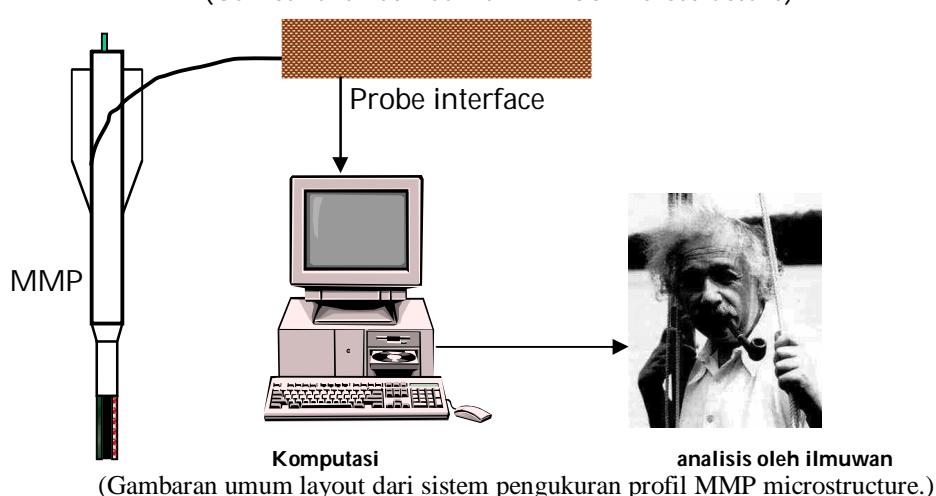
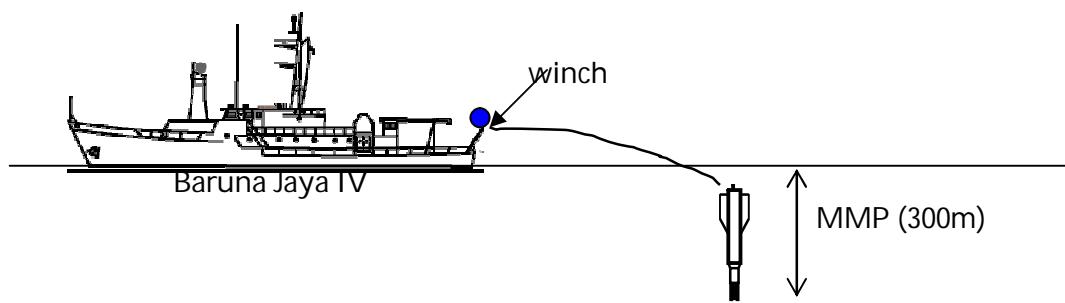


Gambar-2: Akusisi data MMP pada sore hari di buritan kapal Baruna Jaya IV. Tampak ilmuwan & engineer dari BPPT dan APL-UW sedang menarik MMP ke deck (penulis dengan baju garis-garis). (sumber: foto oleh Jenifer)



Gambar-3: Akusisi data MMP pada siang hari di buritan kapal Baruna Jaya IV. Kelihatannya seperti orang memancing ikan paus, tapi ternyata bukan! mereka sedang memancing turbulen!!!. (sumber: foto oleh penulis)

Berikut ini adalah penggambaran dari survei turbulen:



Secara umum survei berjalan lancar, kebetulan cuaca sangat cerah dan kondisi laut umumnya tenang. Hasil eksperimen ARLINDO microstructure selama 14 hari diperoleh data-data sebagai berikut:

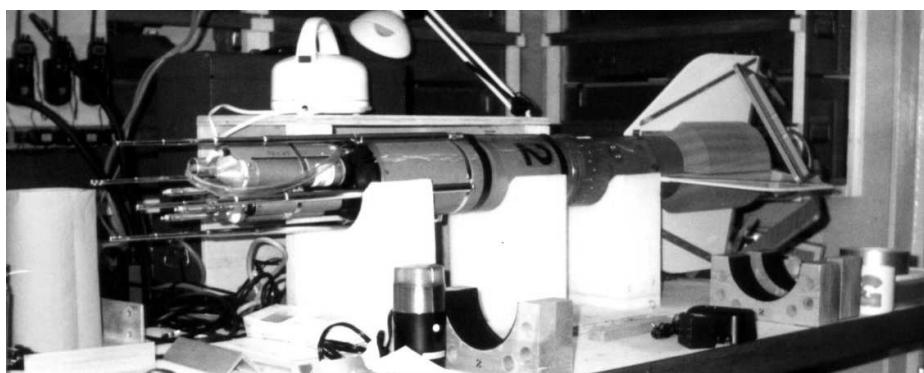
- Profil arus secara vertikal hingga kedalaman \pm 200 meter secara kontinu. Data arus berupa komponennya dalam arah vertikal dan horisontal, laju dan arahnya.
- Suhu muka laut dengan sensor Sea-Bird thermistor secara kontinu.
- Data meteorologi standard (kecepatan dan arah angin, kelembaban, temperatur, curah hujan, radiasi dll) secara kontinu.
- Data posisi dengan GPS Asthech secara kontinu.
- Data MMP berupa potensial temperatur, salinitas, potensial densitas, tekanan serta energi kinetik dissipation rate, sejumlah 519 profil secara time series.

Semua data tersebut dapat diperoleh di UPT Baruna Jaya – BPPT, Jakarta.

3.2 Instrumen dan sensor

Alat utama dalam pengukuran turbulensi di laut Banda ini adalah MMP

(Modular Microstructure Profiler). Dalam bab ini kita hanya berkonsentrasi pada instrumen dan sensor MMP saja. Bentuk instrumen MMP ini dapat dilihat dalam gambar berikut:



Gambar-4: Instrumen MMP yang dikembangkan oleh Applied Physics Laboratory, University of Washington, sedang parkir di lab basah kapal riset Baruna Jaya IV. (sumber: foto oleh penulis)

Instrumen MMP ini dikembangkan oleh kelompok microstructure applied physics laboratory, university of Washington yang diketuai oleh prof. Michael C. Gregg. Dalam dunia riset microstructure atau proses mixing di laut, prof Gregg merupakan salah satu tokoh utama.



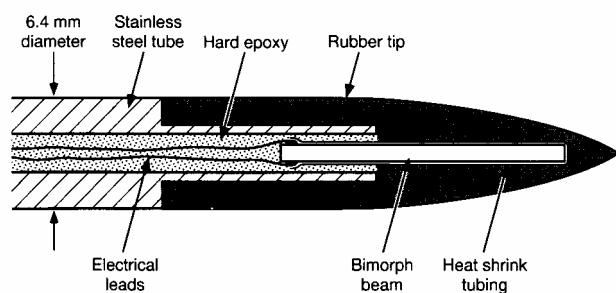
Gambar-5: Penulis dan Prof Mike C. Gregg di Applied Physics Laboratory, University of Washington, Seattle. Latar belakang berupa instrumen MSP yang digunakan dalam eksperimen mixing di selat Florida. (sumber: foto oleh Ilyas)

Instrumen MMP ini dilengkapi dengan sensor CTD tipe Seabird yang lebih presisi yaitu waktu respon dari sensor harus dalam rank milidetik. Kita tidak akan membicarakan lebih jauh tentang sensor CTD ini karena telah banyak digunakan orang dan telah tersedia di pasaran bebas. Parameter selain yang diukur dalam CTD, adalah turbulence kinetic energy dissipation rate (TKE dissipation rate) yang diberi simbol ϵ (epsilon). Pada dasarnya sensor untuk menentukan ϵ adalah mengukur fluktuasi kecepatan. Untuk mengukur fluktuasi kecepatan sensor harus mampu mengukur kecapatan arus dalam resolusi spatial lebih kecil dari 1 cm. Beberapa tipe yang telah dikembangkan untuk pengukuran fluktuasi arus dalam pengukuran turbulen di laut adalah:

- Thermoanemometers
- Acoustical current meter
- Electromagnetic current meters
- Differential pressure transducers
- Airfoil shear probes.

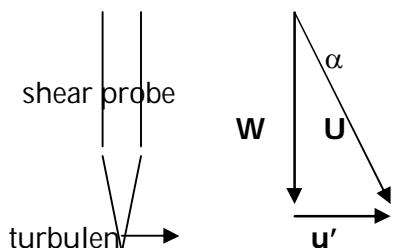
Yang pertama kali digunakan orang adalah thermoanemometers, tetapi sensor ini mempunyai keterbatasan yang berkaitan dengan pemisahan arah arus, ketakpastian dalam kalibrasi serta pengaruh efek termal yang sensitif, sehingga dalam eksperimen sekarang ini sensor tersebut jarang dipakai. Sedangkan acoustical current meter juga jarang digunakan karena keterbatasan ketelitian yaitu hanya dalam orde beberapa centimeter.

Pengukuran dengan menggunakan electromagnetic current meters hanya dilakukan oleh beberapa peneliti saja seperti Prof Tom Sanford dari Applied Physics Laboratory, University of Washington. Instrumen ini sangat mahal meskipun menjanjikan hasil observasi yang lebih baik. Differential pressure transducers juga sedikit digunakan orang karena kesulitan dengan adanya noise hidrodinamik. Metode yang paling populer adalah dengan menggunakan airfoil shear probe. Instrumen MMP yang digunakan dalam eksperimen di laut Banda ini menggunakan airfoil shear probe untuk mengukur flukstuaasi kecepatan. Sensor ini telah dikembangkan lebih dari 20 tahun. Airfoil yang digunakan dalam MMP sebagai berikut:



Gambar-6: Sensor turbulen berupa airfoil yang dikembangkan oleh Applied Physics Laboratory, University of Washington, Seattle.

Geometri dari shear probe ditunjukkan oleh gambar berikut:



Kecepatan jatuh dari instrumen adalah **W** yang bergerak konstan. Karena adanya turbulen (eddy) maka shear probe mengalami gaya (pembengkokkan) kearah horisontal. Pemberkokan tadi menyatakan flukstuaasi kecepatan (u'). Hubungan antara gaya pembengkokan dengan kecepatan jatuh dinyatakan oleh relasi:

$$F = \frac{1}{2} \rho U^2 A \sin 2\alpha \quad 3.2.1$$

Dimana ρ adalah densitas air laut, A adalah luas penampang airfoil di dalam arah axial (jatuh). Jika dinyatakan dalam kecepatan jatuh (W) maka dengan memanfaatkan rumus trigonometri $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, maka kita dapatkan:

$$F = A\rho W u' \quad 3.2.2$$

Dari relasi ini dapat kita estimasi bahwa oleh karena shear harus mempunyai orde 1 s^{-1} (ingat shear adalah $\partial u / \partial x$ maka dimensinya $m s^{-1}/m = s^{-1}$), maka kecepatan jatuh (W) harus dalam mempunyai rank 0.4m/det sampai 0.7 m/det.

Rate disipasi dari energi kinetik turbulen (the TKE dissipation rate) dapat dihitung dari formulasi (ingat bab-2):

$$\overline{\epsilon} = \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)$$

Dengan asumsi turbulen homogen isotropis maka the TKE dissipation rate menjadi:

$$\overline{\epsilon} = \frac{15}{2} \nu \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2} \quad 3.2.3$$

Persyaratan homogen isotropis biasanya harus memenuhi relasi (J.N Moum et al 1995):

$$\overline{\epsilon} / \nu N^2 > 20, \quad N^2 = - \left(\frac{g}{\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{g^2}{c^2}$$

Dengan c adalah kecepatan rambat bunyi di air laut.

Keluaran dari airfoil adalah menghitung harga shear flukstuasi arus, yang hasilnya berupa sinyal voltase AC. Voltase keluaran ini dinyatakan oleh:

$$E_o(t) = S_v \left(\frac{W^2}{2g} \right) \frac{u'}{W} \quad volt$$

Dimana S_v adalah sensitifitas sensor. Besaran ini harganya ditentukan dengan kalibrasi berupa aliran yang mengalir dengan kecepatan konstan. Sensitivitas ini akan berubah umumnya setelah 159 kali operasi. Sinyal ini dikuatkan dengan tiga buah high-pass filter. Setelah itu untuk pembacaan dalam Hz dilakukan low-pass filter yang dinamakan Tchebyscheff filter.

Untuk menghitung TKE dissipation rate, pada dasarnya kita menggunakan rumus 3.2.3 tetapi karena datanya berupa sinyal maka yang kita punyai adalah spektrumnya yang diberi simbol $\Phi_R(f)$. Setelah mengalami penfilteran maka spektrum kecepatan akan dinyatakan oleh:

$$\Phi_{vel}(f) = \frac{(2g/S_v W)^2 (10/2^{16})^2}{H_{electronic}^2(f) H_{probe}^2(f, w)} \Phi_R(f) \quad (m^2 s^{-2} Hz^{-1})$$

Dimana masing-masing filter dinyatakan oleh:

$$H_{probe}^2(f, w) = \frac{1}{1 + (\lambda_c f / w)^2}$$

serta

$$\begin{aligned} H_{electronic}^2(f) &= H_{ca}^2(f) H_{diff}^2(f) H_{gainc}^2(f) H_{Tc}^2(f) \\ H_{ca}^2(f) &= \frac{(C_s/C_F)^2 (f/f_L)^2}{[1 + (f/f_L)] [1 + (f/f_H)^2]} \quad ; \quad H_{diff}^2(f) = \frac{K^2 f^2}{[F_1^2 + f^2] [F_2^2 + f^2]} \\ H_{gain}^2(f) &= \left(\frac{R_{GF}}{R_{GI}} \right)^2 \quad ; \quad H_{Tc}^2(f) = \frac{1}{1 + \alpha^2 [32(f/f_o)^6 - 48(f/f_o)^4 + 18(f/f_o)^2 - 1]} \end{aligned}$$

Dimana masing-masing konstanta telah ditentukan, tergantung dari bahan sensor yang digunakan. Maka THE dissipation rate akan dihitung berdasarkan persamaan:

$$\varepsilon = \frac{15}{2} \nu \int_2^{k_c} \Phi_{shear}(k_3) dk_3 \quad (W kg^{-1})$$

dimana :

$$\Phi_{shear}(k_3) = (2\pi k_3)^2 w \Phi_{vel}(f) \quad (s^{-2} [cpm]^{-1})$$

Dengan hasil ini maka difusivitas diapiknal dapat dihitung dengan rumus:

$$\kappa_\rho \equiv \gamma_{mix} \frac{\varepsilon}{N^2}$$

Mixing efisiensi diambil 0.2 (Alford,M & M.C Gregg 1999).

3.3 Pengolahan data

Data yang kita dapatkan dari lapangan adalah data arus (dari ADCP), data CTD dan ε (dari MMP), data suhu muka laut (dari Seabird thermistor) serta data meteorologi dari Aanderaa system. Karena pengolahan data suhu muka laut serta data meteorologi sudah banyak dilakukan orang maka kita berkonsentrasi pada pengolahan data MMP, CTD dan ADCP saja. Kembali kita ingatkan bahwa semua data kita peroleh secara deret waktu (time series) dengan satu titik pengamatan.

Pengolahan data ADCP dilakukan sebagai berikut:

- **Ini untuk mengolah data ADCP dari kapal yang bergerak.**

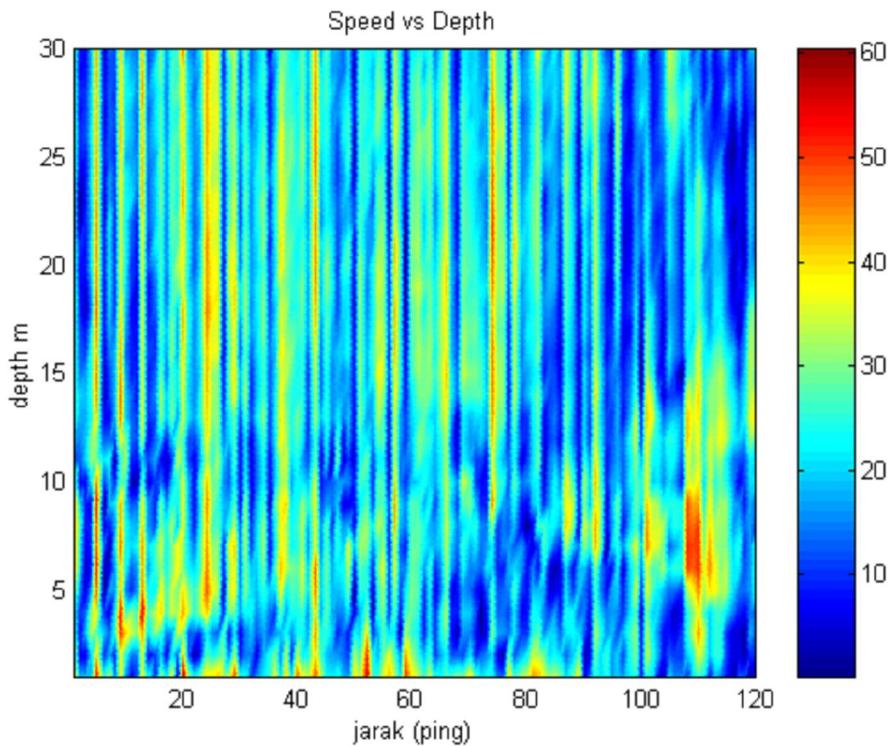
CONTOH UNTUK SATU FILE DATA YANG NAMANYA

ADCPDATA.TXT

Program dengan Matlab sebagai berikut:

```
fid=fopen('adcpdata.txt','r');
fseek(fid,0,-1);
line01=fscanf(fid,'%f',[1,7]);
i=1
while 1
line02=fscanf(fid,'%f',[1,13]);
[message err]=ferror(fid)
if abs(err)>0,break,end
line03=fscanf(fid,'%f',[1,12]);
line04=fscanf(fid,'%f',[1,5]);
line05=fscanf(fid,'%f',[1,5]);
line06=fscanf(fid,'%f',[1,9]);
line07=fscanf(fid,'%s',[1,6]);%karena karakternya huruf maka %
data=fscanf(fid,'%f',[13,40]);
data=char(data);
speed(:,i)=data(:,2);
i=i+1
end
speed;
pcolor(speed(1:30,1:120))%ini menyatakan speed adalah matrik 30x120
shading interp
colorbar
title('Speed vs Depth')
xlabel('speed (m/s)');
ylabel('depth m');
```

Hasilnya sebagai berikut:



- **Ini untuk sistem time series**

Semua data telah dirata-ratakan dalam selang 8 m dan 30 menit. Hasilnya dinyatakan dalam file.mat

Disini kita punya data yaitu:

u	60x672	322560 double array %kecepatan E-W
uz	60x672	322560 double array %shear dari u
v	60x672	322560 double array %kecepatan N-S
vz	60x672	322560 double array %shear dari v
epsilon	60x672	322560 double array %rate of dissipation
N2	60x672	322560 double array %rekursi apung
Theta	60x672	322560 double array %potensial temperatur
Sal	60x672	322560 double array %salinitas
yday	1x672	5376 double array %time series (hari)
z_adcp	1x60	480 double array %kedalaman 0-300m

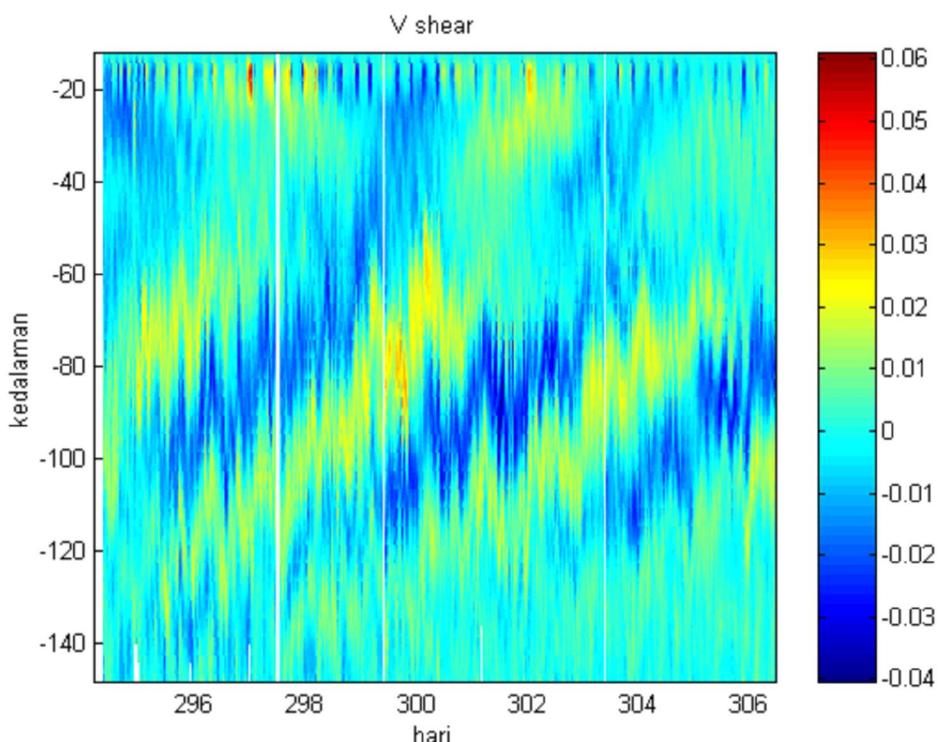
- jika kita ingin memplot vz sebagai fungsi dari kedalaman dan hari maka perintahnya adalah:

```
>>pcolor(yday,-z_adcp,uz);
>>shading interp;
>>colorbar;
```

tetapi karena ada error mulai kedalaman 150m kebawah dan pada awal serta akhir hari maka kita modifikasi sbb:

```
>>pcolor(yday,-z_adcp(1,1:40),vz(1:40,:));
>>shading interp;
    >>colorbar;title('Vshear'); xlabel('hari'); ylabel('kedalaman')
```

Hasilnya dinyatakan dalam gambar berikut:



Dengan cara yang sama kita dapat memplot besaran yang lain, karena semua data yaitu temperatur, salinitas, potensial temperatur, densitas, rate of dissipation (epsilon), frekuensi Brounvaisala (gaya apung) telah dinyatakan dalam file.mat.

Pengolahan data CTD dilakukan sebagai berikut:

**INI PROGRAM UTAMANYA: NAMANYA KATAKANLAH SAMPLE.M
DENGAN DATANYA ADALAH GUATCTD.TXT.**

Program dalam Matlab sebagai berikut:

```
%Program pengolahan data CTD
fid=fopen('guatctd.txt','r');
fseek(fid,0,-1);
data=fscanf(fid,'%f',[3,inf]);
```

```

press=data(1,:);
temp=data(2,:);
cond=data(3,:);
[n m]=size(data);
for i=1:m
zdepth(i,1)=-1.0*depth(press(i,1),15);%data pada lintang 15 derajat
salinity(i,1)= SAL78(cond(i,1),temp(i,1),press(i,1));
dens(i,1)=density(salinity(i,1),temp(i,1),press(i,1));
Sigmat(i,1)=sigmat(salinity(i,1),temp(i,1),press(i,1));
soundvel(i,1)=SVEL(salinity(i,1),temp(i,1),press(i,1));
end
subplot(2,2,1)
plot(soundvel,zdepth)
grid
ylabel('depth (m)');
title('Sound velocity vs Depth ')
subplot(2,2,2)
plot(salinity,zdepth)
grid
ylabel('depth(m)');
title('Salinity vs Depth');
subplot(2,2,3);
plot(dens,zdepth)
grid
ylabel('depth(m)');
title('Density vs Depth')
subplot(2,2,4)
plot(temp,zdepth)
grid
ylabel('depth (m)');
title('Temperature vs Depth ');
gtext('A. Sulaiman')
gtext('February 03,2000'); gtext('gurune mbah Brian Lewis')

```

fungsi-fungsinya dinyatakan oleh (<http://www.fish.washington.edu>):

1. konversi tekanan ke kedalaman

```

function z=depth(p,lat)
x=sin(lat/57.29578);
x=x*x;
%' gr=gravity variation with latitude: Anon (1970)
%' Bulletin Geodesique
gr=9.780318*(1.0+(5.2788E-3+2.36E-5*x)*x)+1.092E-6*p;
depth1=(((-1.82E-15*p+2.279E-10)*p-2.2512E-5)*p+9.72659*p);
z=depth1/gr;
2. menghitung salinitas
function z=SAL78(CND,T,P)

```

```

R=CND;
DT=T-15.0;
RT=R/(RT35(T)*(1.0+C(P)/(B(T)+A(T)*R)));
RT=sqrt(abs(RT));
z=SAL(RT,DT);
%end function

%
% **** SAL78 converts conductivity to salinity ****
% the conductivity ratio (CND)=1.000000 for salinity=35
% PSS-78. temperature=15.0 deg. celcius, and atmospheric
% pressure.
%
% references: also located in UNESCO Report NO. 37 1981
% Practical Salinity Scale 1978: E.L. Lewis IEEE Ocean Eng.
% Jan. 1980
%
% **** units:
%      pressure   P    decibars
%      temperature T    deg. celcius (IPTS-68)
%      conductivity CND  ratio (M=0)
%      salinity    SAL78 (PSS-78) (M=0)
% checkvalues:
%      SAL78=1.888091:CND=40.0000,T=40degC,P=10000dcbars:M=1
%      SAL78=40.00000:CND=1.888091,T=40degC,P=10000dcbars:M=0
% SAL78 ratio: returns zero for conductivity ratio: <0.0005
%
% SAL78: returns zero for salinity: <0.02
%
% **** Practical Salinity Scale 1978 definition with temperature
% correction ****
%
% convert conductivity to salinity

function z=SAL(XR,XT)
z=((((2.7081*XR-7.0261)*XR+14.0941)*XR+25.3851)*XR -0.1692)*XR+0.0080
+(XT/(1.0+0.0162*XT))*(((((-0.0144*XR+ 0.0636)*XR-0.0375)*XR-0.0066)*XR-
0.0056)*XR+0.0005);
%End function

function z=RT35(XT)
z=((((1.0031E-9*XT-6.9698E-7)*XT+1.104259E-4)*XT +2.00564E-2)*XT+0.6766097;
%End function
function z=C(XP)
z=(3.989E-15*XP-6.370E-10)*XP+2.070E-5)*XP;

```

```
%End function
```

```
function z=B(XT)
z=(4.464E-4*XT+3.426E-2)*XT+1.0;
%End function
```

```
function z=A(XT)
z=-3.107E-3*XT+0.4215;
%End function
```

```
% density(S,T,p) -- computes in-situ density
% @param S Salinity in PSU
% @param T In-situ temperature in degC
% @param p Pressure, in decibar (nominally, 1dbar = 1m of water)
% */
```

3. menghitung densitas

```
function z=density(S, T, p)
rho_w = 999.842594 + T * (6.793952e-2 + T * (-9.095290e-3 + T * (1.001685e-4 + T * (-1.120083e-6 + T * 6.536332e-9))));  
Kw = 19652.21 + T * (148.4206 + T * (-2.327105 + T * (1.360477e-2 - T * 5.155288e-5)));  
Aw = 3.239908 + T * (1.43713e-3 + T * (1.16092e-4 - T * 5.77905e-7));  
Bw = 8.50935e-5 + T * (-6.12293e-6 + T * 5.2787e-8);  
p1 = 0.1 * p;  
S12 = sqrt(S);  
ro = rho_w + S * (8.24493e-1 + T * (-4.0899e-3 + T * (7.6438e-5 + T * (-8.2467e-7 + T * 5.3875e-9))) + S12 * (-5.72466e-3 + T * (1.0227e-4 - T * 1.6546e-6) + S12 * 4.8314e-4));  
xkst = Kw + S * (54.6746 + T * (-0.603459 + T * (1.09987e-2 - T * 6.1670e-5)) + S12 * (7.944e-2 + T * (1.6483e-2 + T * (-5.3009e-4)))) + p1 * (Aw + S * (2.2838e-3 + T * (-1.0981e-5 + T * (-1.6078e-6)) + S12 * (1.91075e-4)) + p1 * (Bw + S * (-9.9348e-7 + T * (2.0816e-8 + T * (9.1697e-10)))));  
z = (ro / (1.0 - p1 / xkst));  
%end function
```

4. menghitung sigma tetha

```
%sigmat(S,T,p)
% @param S Salinity in PSU
% @param T In-situ temperature in degC
% @param p Pressure, in decibar (nominally, 1dbar = 1m of water)
% */
function z=sigmat(S, T, p)
z = density(S, T, 0);
%end function
```

5. menghitung cepat rambat bunyi di air

```
function z=SVEL(S,T,PO)
```

```

% ****
% Sound Speed Seawater Chen and Millero 1977,JASA,62,1129-35
% units:
%   pressure   PO   decibars
%   temperature T   deg celcius (IPTS-68)
%   salinity   S   (PSS-78)
%   sound speed SVEL meters/second
% checkvalue:SVEL=1731.995m/s,S=40(PSS-78),T=40degC,P=10000db
% ****
% scale pressure to bars
P=PO/10.0;
SR=sqrt(abs(S));
% S**2 term
D=1.727E-3-7.9836E-6*P;
% S**3/2 term
B1=7.3637E-5+1.7945E-7*T;
B0=-1.922E-2-4.42E-5*T;
B4=B0+B1*P;
% S**1 term
A3=(-3.389E-13*T+6.649E-12)*T+1.100E-10;
A2=((7.988E-12*T-1.6002E-10)*T+9.1041E-9)*T-3.9064E-7;
A1=((-2.0122E-10*T+1.0507E-8)*T-6.4885E-8)*T-1.2580E-5 )*T+9.4742E-5;
A0=((-3.21E-8*T+2.006E-6)*T+7.164E-5)*T-1.262E-2) *T+1.389;
A4=((A3*P+A2)*P+A1)*P+A0;
% s**0 term
C3=(-2.3643E-12*T+3.8504E-10)*T-9.7729E-9;
C2=(((1.0405E-12*T-2.5335E-10)*T+2.5974E-8)*T-1.7107E-6) *T+3.1260E-5;
C1=((-6.1185E-10*T+1.3621E-7)*T-8.1788E-6)*T+6.8982E-4) *T+0.153563;
C0=(((3.1464E-9*T-1.47800E-6)*T+3.3420E-4)*T-5.80852E-
    2)*T+5.03711)*T+1402.388;
C4=((C3*P+C2)*P+C1)*P+C0;
% sound speed return
z=C4+(A4+B4*SR+D*S)*S;
%End function
% theta(S,T,p) -- computes potential temperature
% @param S Salinity in PSU
% @param T In-situ temperature in degC
% @param p Pressure, in decibar (nominally, 1dbar = 1m of water)

```

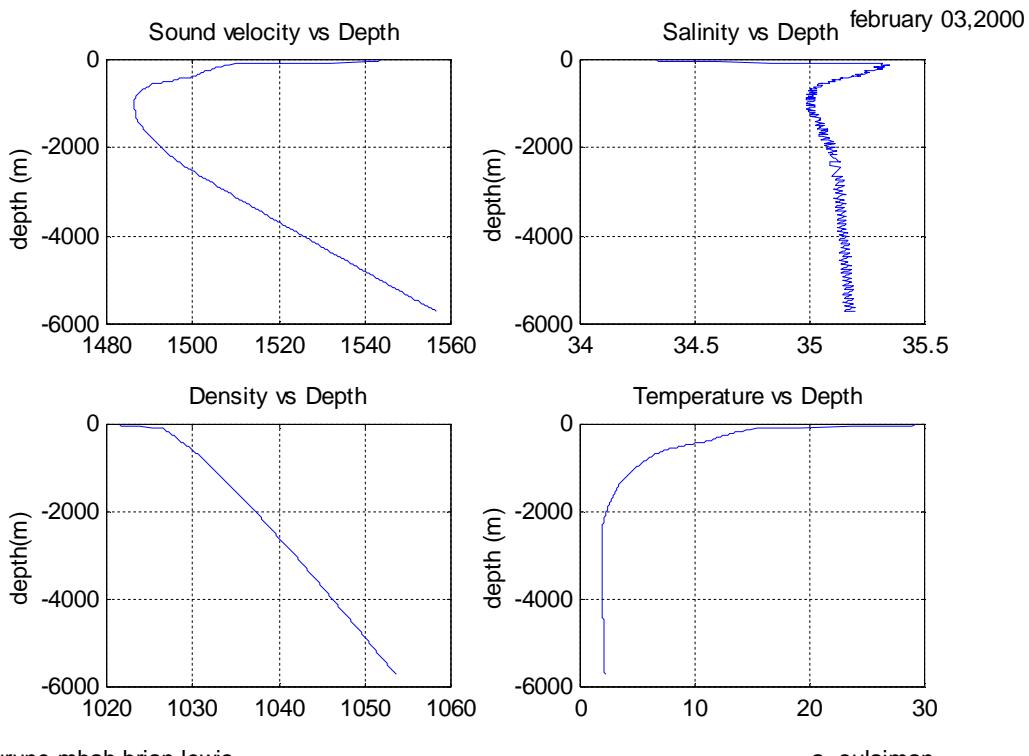
6. menghitung potensial temperatur

```

function z=theta(SS, T, pp)
S = SS- 35.00;
p = pp/10.0;
z =T - p * (((3.6504e-4 + T * (8.3198e-5 + T * (-5.4065e-7 + T *
4.0274e-9))) + S * (1.7439e-5 - T * 2.9778e-7)) + p * ((8.9309e-7
+ T * (-3.1628e-8 + T * 2.1987e-10) - S * 4.1057e-9) + p * (-1.6056e-10 + T * 5.0484e-12)));

```

Hasilnya sebagai berikut:



gurune mbah brian lewis

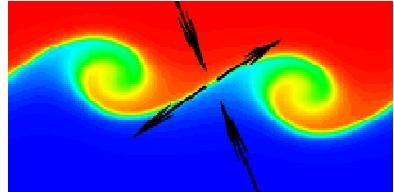
a. sulaiman

BAB IV

DIAPYCNAL MIXING di LAUT BANDA

*Suppose one knows the sea state at given moment.
How then can one use the general laws of physics
to compute the sea state at a later time?*

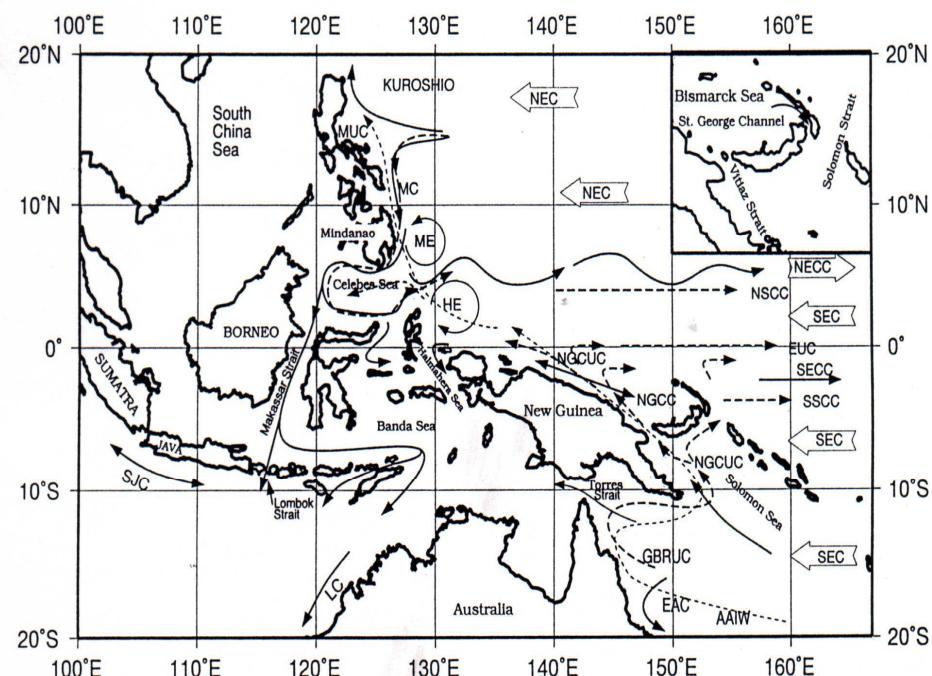
G.J Komen & K. Hasselmann



4.1 Hidrografi Laut Banda dan Sekitarnya

Laut Banda merupakan bagian penting dari sistem dinamika arus yang dinamakan arus lintas Indonesia (ARLINDO) atau Indonesian throughflow, yang menghubungkan massa air dari lautan Pasifik ke lautan India. Dinamika arus ini sangat terpengaruh oleh musim dan mempunyai variabilitas tinggi (Wyrtki 1987). Selama musim tenggara arus lintas ini menguat, dan selama musim barat arus lintas melemah. Pada lapisan permukaan dinamika massa air arus lintas ini dipengaruhi oleh angin permukaan. Selama musim tenggara massa air permukaan bergerak dari laut Banda ke laut Flores, kemudian meneruskan perjalanan ke laut Jawa dan akhirnya ke laut Cina selatan. Selama musim barat massa air bergerak dari laut Jawa dan selat Malaka kemudian memotong laut Flores dan akhirnya masuk ke laut Banda. Hasil observasi menunjukkan bahwa untuk lapisan atas, massa air laut Banda berasal dari massa air lautan Pasifik utara (Gordon et al 1994). Massa air itu masuk ke laut Banda memalui selat Makasar. Sebelum masuk ke selat Makasar massa air itu mengalami pembelokan, tubrukan, berputar-putar, memecah dan sebagainya di daerah Pasifik sebelah barat yang membentuk suatu sistem sirkulasi arus yang dinamakan arus batas barat lintang rendah Pasifik (The Pacific low latitude western boundary currents/LLWBCs). Sebelum kita masuk ke laut Banda ada baiknya kita meninjau secara singkat sistem sirkulasi arus ini secara singkat karena massa air dari sistem inilah yang merupakan asal-usul massa air di laut Banda. Menurut teori lempeng tektonik, pada jaman dahulu kala hanya ada satu lautan yaitu lautan Pasifik sekarang ini. Jadi lautan Pasifik merupakan lautan purba yang merupakan sumber utama massa air di laut Banda.

Didunia ini ada tiga buah lautan yang mempunyai sistem sirkulasi arus LLWBCs yaitu lautan Pasifik, lautan Atlantik dan lautan India. Dari ketiga lautan tersebut hanya LLBWCs di lautan Pasifik yang mempunyai dinamika paling kompleks. Pertama adalah angin (merupakan gaya penggerak utama arus) mempunyai variabilitas yang tinggi karena pengaruh monsoon. Faktor yang lain adalah daerah batasnya berupa kepulauan sehingga akan menyusun kondisi batas yang tak teratur. Bandingkan dengan lautan Atlantik dengan kondisi angin yang umumnya tunak serta batasnya berupa benua afrika dan amerika. Kedua faktor inilah yang menyebabkan dinamika sistem arus LLBWCs di Pasifik barat ini kompleks dan diminati banyak orang untuk menginvestasikan bermilyard-milyard uangnya untuk penelitian oseanografi di daerah ini. Skematik dari LLWBCs di lautan Pasifik dan arus lintas Indonesia dapat dinyatakan dalam gambar berikut:

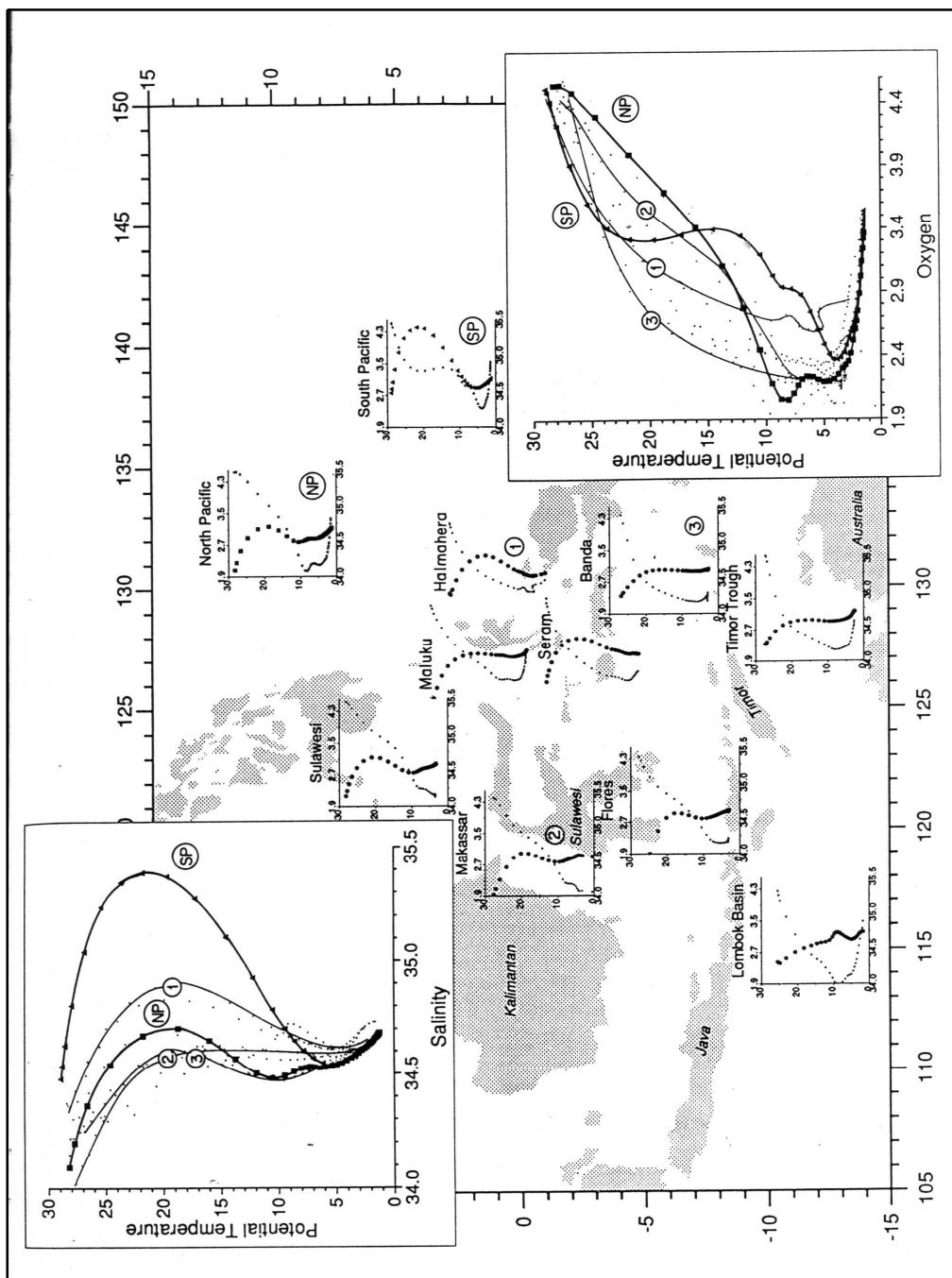


Gambar-1: Diagram skematik the Pacific low latitude western boundary currents (LLBWCs) dan arus lintas Indonesia (Arlindo).
 (sumber Lukas,R et al 1996)

Sumber utama massa air yang menopang sistem sirkulasi arus LLWBCs adalah arus pasifik selatan/South Equatorial Currents (SEC) dan arus pasifik utara/North Equatorial Currents (NEC) (Lukas et al 1996). Di belahan bumi

utara arus pasifik utara (NEC) yang bergerak ke barat pada lintang 14°N akan memecah menjadi dua, arus yang satu bergerak ke utara dan yang lain ke selatan. Arus yang ke utara menjadi arus Kuroshio yang bergerak ke perairan Jepang dan yang bergerak ke selatan menjadi arus Mindanao. Dibelahan Bumi bagian selatan arus ekuator selatan (SEC) yang bergerak kebarat akan membelah di sekitar 15°S yang satu bergerak sepanjang Great Barrier Reef dan akan menjadi Great Barrier Reef Undercurrents (GBRUC) dan kemudian mengalir ke sepanjang pantai Papua New Guenia menjadi The New Guinea Coastal Undercurrents (NGCUC). Massa air yang mengalir ke selatan menjadi arus Australia timur /East Australia Currents (EAC). Dilapisan termokline massa air dari NGCUC mengalir ke timur menjadi Equatorial Undercurrents (EUC), sebagian menjadi North Equatorial Countercurrents (NECC), sebagian lagi menjadi North Subsurface Counter Currents (NSCC) dan sebagian menjadi arus lintas Indonesia yang diduga masuk melalui laut Halmahera. Massa air dari SEC juga masuk ke kepulauan Indonesia melalui selat Torres terus ke laut Arafura. Arus Mindanao bergerak ke selatan sebagian masuk ke laut Sulawesi dan sebagian berinteraksi dengan arus ekuator selatan (SEC). Akibat interaksi ini terjadi defleksi arus ke selatan menjadi North Equatorial Counter Currents yang tak stabil. Akibat defleksi ini juga memicu timbulnya Mindanao Eddy. Arus Mindanao yang masuk ke laut Sulawesi sebagian masuk ke selat Makasar dan sebagian dibelokkan ke timur sepanjang pantai utara Sulawesi dan akhirnya masuk ke laut Halmahera. Interaksi arus ini dengan arus the New Guinea Coastal Currents (NGCC) yang bergerak sepanjang pantai Papua New Guinea akan menimbulkan adanya Halmahera Eddy. Kedua eddy ini dibatasi oleh the North Equatorial Countercurrents (NECC). North Pacific Intermediate Water (NPIW) dan Antarctic Intermediate Water (AAIW) juga terobsevasi di laut Sulawesi dan Laut Halmahera (Kashino et al 1996).

Massa air laut Pasifik utara dan massa air dari pasifik selatan mempunyai sifat yang berbeda dan mudah dibedakan dari salinitasnya atau profil oxigennya. Massa air Pasifik utara mempunyai salinitas maksimum 34.75 ‰ pada 100 meter dan massa air Pasifik selatan mempunyai salinitas maksimum 35.41 ‰ pada 150 meter. Profil oksigen dari massa air Pasifik utara mempunyai curva yang menurun dari permukaan ke dalam dengan minimum disekitar 10°C , sedangkan massa air Pasifik selatan mempunyai profil oksigen yang cenderung konstan antara $25^{\circ}\text{C}-10^{\circ}\text{C}$ (Ffield,A & A.L. Gordon 1992). Hasil analisi massa air yang dinyatakan dalam TS diagram dan profil oksigen dari hasil observasi di perairan Indonesia dapat di lihat dari gambar berikut:



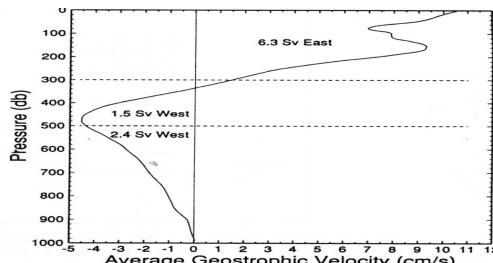
Gambar-2: Analisis massa air di perairan Indonesia bagian timur NP(north pasific) dan SP(south pacific) (sumber: Ffield,A & A. Gordon, 1992).

Selat Makasar merupakan lintasan utama dari pergerakan massa air di lautan Pasifik ke lautan India. Sumber utama massa air yang masuk ke selat Makasar adalah massa air dari Pasifik utara. Massa air ini akan bergerak dari laut Sulawesi masuk ke selat Makasar sepanjang tahun (Wyrtki, 1966). Arus yang kuat yang menuju ke selatan terdeteksi di lapisan intermediate (Waworuntu,J et al 1999). Temperatur dasar dari selat Makasar umumnya konstant dan hanya bervariasi sekitar $\pm 0.007^{\circ}\text{C}$. Untuk memahami struktur termal di selat Makasar di perlukan minimal sistem hidrodinamika tiga lapis (Waworuntu,J et al 1999). Sedangkan massa air dari Pasifik selatan akan berinfiltasi dari laut Sulawesi masuk ke laut Banda melalui selat Lifamatola. Massa air ini adalah massa air intermediate yaitu massa air dibawah temokline.

Gordon,A & A. Field 1994 mengobservasi bahwa pada musim barat yaitu pada bulan Desember di laut Flores dan laut Banda bagian barat mempunyai salinitas maksimum di sekitar 33 dbar (20°C) dan salinitas minimum disekitar 300dbar (10°C) yang merupakan ciri dari massa air Pasifik utara sub tropik dan massa air Pasifik utara intermediate. Salinitas permukaan lebih tawar dari salinitas sub permukaan, hal ini diakibatkan sebagai konsekuensi tingginya curah hujan dan adanya transport massa air tawar dari sungai.

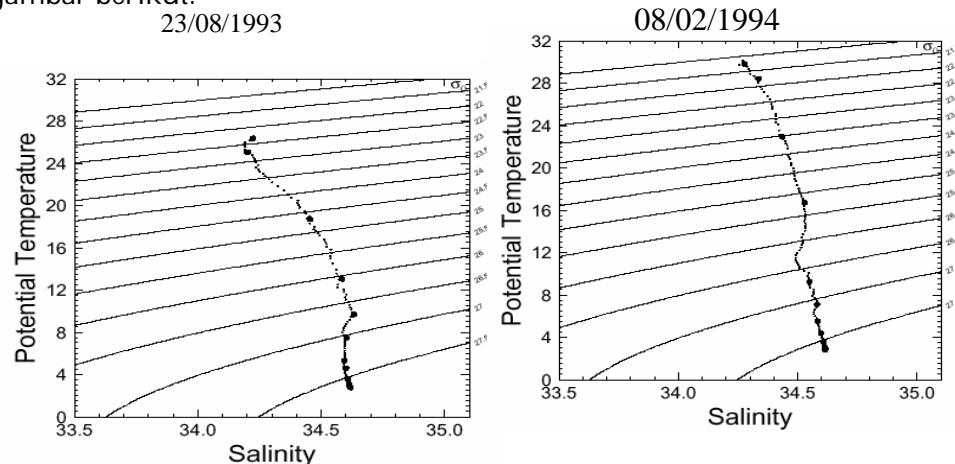
Salinitas permukaan terendah terendah berada di laut Flores bagian barat. Salinitas permukaan sebesar 34.5‰ terobservasi di laut Flores sebelah timur dan laut Banda terobservasi salinitas diatas 34.4‰ . Hal ini menunjukkan bahwa massa air dari lautan Pasifik utara masuk ke laut Banda melalui selat Flores. Selama massa transisi antara musim timur dan musim barat aliran arus permukaan berubah sesuai dengan arah angin, sedangkan aliran bawah permukaan yang bergerak akibat adanya gradien tekanan antara dua samudera akan cenderung tetap. Pada musim barat di lapisan permukaan mempunyai transport massa sebesar 6.3 Sv (1 Sv = $10^6 \text{ m}^3 / \text{det}$) yang berarak ke timur, sedangkan antara 300 sampai 1000 dbar mempunyai transport massa sebesar 3.5 Sv ke arah barat.

Transport geostropik di laut Banda dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar-3: Transport geostropik laut Banda (sumber: Gordon,A & A. Ffiled,1994)

Dibawah 300 dbar salinitas di laut Banda lebih tinggi dibandingkan di laut Flores dengan demikian massa air ini bukan berasal dari lautan Pasifik utara. Gordon,A dan A. Ffiled mengemukakan gagasan bahwa tingginya salinitas di laut Flores sebesar 34.4 ‰ -34.6 ‰ pada kedalaman 300 dbar sampai 1000 dbar diakibatkan adanya massa air dari laut Banda dengan salinitas antara 34.5 ‰ -34.6 ‰ yang bergerak ke barat menuju laut Flores akan menabrak sill (gundukan) di dekat selat Makasar sehingga massa air tadi dibelokkan kembali ke laut Banda Massa air laut Banda di bawah termoklin yang mempunyai salinitas tinggi diindikasikan berasal dari laut Pasifik selatan atau lautan India. Massa air dari laut Pasifik selatan masuk ke laut Banda melalui laut Maluku dan laut Halmahera, sedangkan massa air dari laut India masuk ke laut Banda melalui celah Alor-Wetar dan celah Timor. Analisis massa air dengan TS diagram untuk laut Banda dapat dilihat pada gambar berikut:

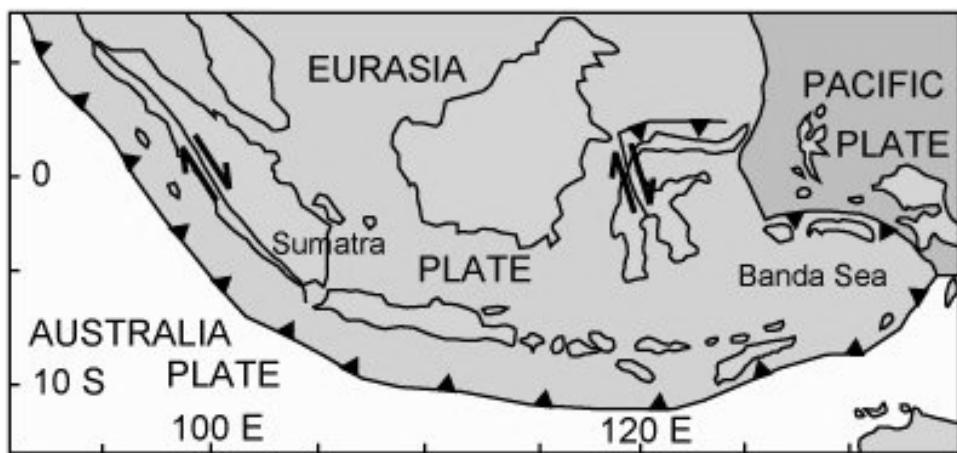


Gambar-4: TS diagram di laut Banda pada musim barat dan musim timur
(Sumber: data ARLINDO).

Di laut Banda pada musim barat mempunyai suhu muka laut rata-rata 4°C lebih panas daripada musim timur (Ilahude,A.G & A. Gordon, 1996). Di tengah laut Banda pada musim timur mempunyai suhu muka laut antara 25.7°C-26.1°C dan di musim barat suhu muka laut antara 29.6°C-30.3°C. Pada musim timur lapisan termokline lebih dangkal sekitar 40m, hal ini mengindikasikan adanya proses upwelling di laut Banda (Wyrtki,K 1961). Salinitas pada musim barat maupun musim timur cenderung sama yaitu berkisar antara 34.1 ‰ -34.4 ‰.

Dibeberapa daerah di sebelah selatan yang berdekatan dengan laut Timor mempunyai harga salinitas sebesar 34.5 ‰ . Sekarang ada baiknya kita tinjau kondisi fisik cekungan Banda.

Secara geologis laut Banda merupakan pertemuan empat lempeng lithosperik, yaitu lempeng Indo-Australia, lempeng Pasifik, lempeng Eurasia dan lempeng Philipina. Lempeng Indo-Australia bergerak ke arah utara, pergerakan lempeng ini bertemu dengan lempeng Eurasia pada sisi sebelah barat dan lempeng Pasifik pada sisi sebelah timur. Laut Banda terletak dimana ketiga lempeng tersebut saling berinteraksi, dan sebelah barat Papua. Di sebelah utara, laut Banda di tumbuk oleh lempeng Philipina. Batas antar lempeng ini masih sulit di identifikasi secara jelas. Data seismisitas menunjukkan bahwa di sebelah barat laut Banda merupakan daerah subduksi dari lempeng Indo-Australia yang bergerak ke utara. Semakin ke timur daerah subduksi ini semakin kompleks karena hadirnya Australia-Papua self.



Gambar-5: Peta tektonik kepulauan Indonesia (sumber:
<http://volcano.urd.nodak.edu>)

Dengan komplikasi tumbukan antar lempeng menyebabkan timbulnya jalur gunung api bawah laut. Beberapa gunung api yang telah teridentifikasi adalah gunung api Banda Api dengan posisi (4,52S;129,87E) bertipe Kaldera, masih aktif dan terakhir meletus tahun 1988. Gunung api ini muncul di permukaan laut dengan lebar sekitar 7 km. Letusan terakhir pada 9 Mei 1988 memuntahkan gas dan tephra setinggi 3 km. Gunung api Nila terletak pada posisi 6,73S;129,5E dengan tipe komposit dan masih aktif. Gunung api yang lain adalah gunung api Wurlali dengan posisi 7,12S;128,67E bertipe komposit, terakhir meletus tahun 1892. Gunung api yang lain adalah gunung api Wetar, gunung api Serua dan gunung api Teon.



Gambar-6: Gunung api dilaut Banda (sumber: [Http://www.geo.arizona.edu](http://www.geo.arizona.edu))

Dengan kondisi batimetri yang kompleks, laut Banda mempunyai tiga buah cekungan (basin) yang besar yaitu: Cekungan Banda Utara, cekungan ini mempunyai kedalaman 5800 m dan kedalaman sill (undukan) sekitar 3130 m. Pada kedalaman 3000 m temperatur mencapai 3,04 °C dan salinitas 34,59-34,61 ‰ dengan kandungan oksigen minimum 2.58-2.51. Cekungan yang kedua adalah cekungan Banda Selatan dengan kedalaman 5400 m dan kedalaman sill 4200 m . Pada kedalaman 2990 m diobservasi temperatur mencapai 3,08 °C dan salinitas 34,60-34,62 ‰ . Cekungan ketiga adalah cekungan Weber Dalam, dengan kedalaman cekungan mencapai 7440 m dan kedalaman sill 4300 m. Pada kedalaman 2990 m cekungan Weber Dalam ini mempunyai temperatur 3,07 °C dan salinitas 34,59-34,62 ‰. Dari cekungan Buru massa air dari dasar akan masuk ke kedalaman 3130 m yaitu pada sill Banda Utara kemudian masuk ke cekungan Banda Utara sampai kedasar cekungan pada kedalaman 5800 m. Antara cekungan Banda Utara dan cekungan Banda Selatan dihubungkan oleh celah yang sempit dengan kedalaman rata-rata 4200 m. Massa air mengalir melalui sill dengan kedalaman 4300 m kemudian mengalir menuju dasar cekungan Weber Dalam. Pada kedalaman 3000 m ketiga cekungan tersebut mempunyai temperatur dan salinitas yang relatif sama sehingga massa air pada lapisan ini dapat dikatakan homogen. Sebelum massa air tersebut masuk ke samudra India dia akan mengalir melawati cekungan Wetar dengan kedalaman 3400 m dan cekungan Sawu dengan kedalaman 3470 m.

4.2 Estimasi Mixing Diapiknal dengan Data Hidrografi

Sebelum kita membicarakan hasil pengukuran mixing diapiknal di laut Banda, kita akan meninjau lebih dahulu beberapa hasil estimasi mixing diapiknal yang telah dilakukan orang dalam rangka memprediksikan besarnya proses mixing yang terjadi di laut Banda. Estimasi proses mixing ini bermula hasil observasi tidak meratanya distribusi salinitas di perairan Indonesia. Massa air Western Pacific central dan Tropical waters yang biasanya disebut massa air subtropis bawah dikarakteristikkan oleh salinitas maksimum yang dangkal dan massa air ini masuk ke perairan Indonesia dimana di beberapa tempat mengalami atenuasi yang cukup signifikan dan muncul kembali di lain tempat (Ffield,A & A. Gordon 1992). Hal ini terjadi jika ada proses mixing yang terjadi di dalamnya. Gordon,A 1986 mengestimasi proses mixing dengan menghitung difusivitas vertikal (K_z) sebesar 3.10^{-4} m³/det di lapisan termokline. Van Aken dkk 1988 mengestimasi difusivitas vertikal sebesar 9.10^{-4} m³/det dan Berger dkk 1988 mengestimasi difusivitas vertikal sebesar 5.10^{-3} m³/det untuk massa air di celah atau sill. Ffield,A dan A. Gordon 1992 mengestimasi difusivitas vertikal berdasarkan persamaan adveksi-difusi. Jika C adalah konsentrasi (salinitas, potensial temperatur dll) maka persamaan adveksi difusi akan dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} C = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\kappa} \vec{\nabla} C) + Q_{source} \quad 4.2.1$$

dimana κ adalah tensor difusivitas diapiknal. Asumsi yang dipakai adalah evolusi dari konsentrasi pasifik di lapisan termoklin yang masuk ke perairan Indonesia akan diadveksi ke perairan Indonesia dengan tercampur secara vertikal. Suku adveksi cross-stream, kecepatan vertikal dan difusi horizontal saling meniadakan. Koefisien difusivitas vertikal konstan dan tidak adad shear vertikal serta suku sumber ditiadakan. Dengan asumsi diatas maka persamaan adveksi difusi (4.2.1) akan berubah menjadi bentuk yang lebih sederhana sebagai berikut:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \kappa_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad 4.2.2$$

Bentuk diskrit dari persamaan diatas adalah:

$$\frac{C_j^{n+1} - C_j^n}{\Delta t} = \kappa_z \left[\frac{C_{j+1}^n - 2C_j^n + C_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] \quad 4.2.3$$

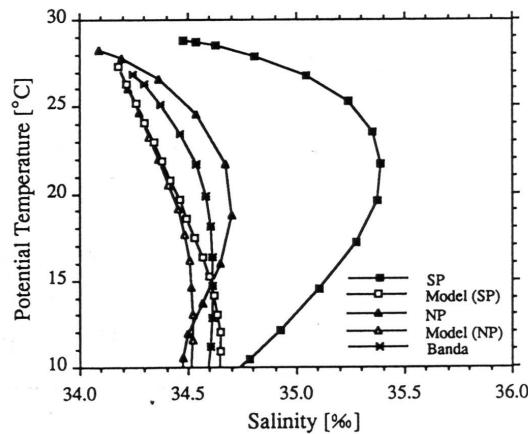
Sudah banyak program komputer yang dibuat orang untuk menyelesaikan persamaan ini. Kondisi awal dari model adalah potensial temperatur,

salinitas atau oksigen dari lautan Pasifik utara dan lautan Pasifik selatan. Batas dasar adalah tidak ada fluks dilapisan dibawah 1000m. Perhitungan rumus diatas dilakukan dengan dua cara yaitu harga difusivitas vertikal besar dengan selang waktu yang pendek dan harga difusivitas vertikal diambil kecil tetapi dengan selang waktu yang panjang. Dengan cara ini kita akan mendapatkan variasi harga difusivitas vertikal (K_z) dan selang waktu yang disebut residence time (τ). Grafik dari hasil simulasi model dinyatakan dalam tabel berikut:

Nama laut	Sumber	$\kappa_z\tau$ (m ²)	Kedalaman mixing	Residence time dgn $\kappa_z=10^{-4}$m²/s
L. Sulawesi	NP	600	24	2 bulan
S. Makasar	NP	1200	35	5 bulan
L. Flores	NP	1400	37	5 bulan
L. Halmahera	50%NP-50%SP	1700	41	6 bulan
L. Maluku	50%NP-50%SP	3100	56	1 tahun
L. Seram	50%NP-50%SP	3400	58	1.1 tahun
L. Banda	NP	5300	73	1.7 tahun
L. Banda	50%NP-50%SP	27600	166	8.7 tahun
L. Banda	SP	53600	232	17.0 tahun

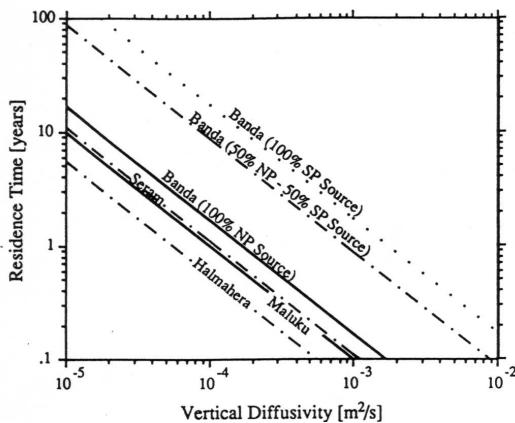
Tabel-1: Hasil model untuk beberapa kondisi laut di Indonesia. NP=north Pacific, SP=south Pacific (sumber: Ffield,A & A. Gordon 1992).

Sebagai contoh misalnya selat Makasar dengan kondisi awal adalah salinitas dari Pasifik utara maka agar gradien vertikal dari salinitas sesuai dengan observasi maka diperlukan residence time lebih besar dari lima bulan. Dengan luas daerah studi $\kappa_z\tau = 1200$ m², maka diperoleh difusivitas vertikal $\kappa_z = 1 \times 10^{-4}$ m²/s. Dengan hasil κ_z maka salinitas, temperatur dan oksigen dihitung kembali dengan persamaan adveksi difusi. Dengan harga ini dihitung TS diagram dan hasilnya di bandingkan dengan hasil observasi. Untuk laut Banda mempunyai $\kappa_z\tau = 5300$ m² dengan inisialisasi model adalah laut Pasifik utara, maka residence time sebesar dua tahun dan didapat difusivitas vertikal $\kappa_z = 1 \times 10^{-4}$ m²/s. Jika sumbernya laut Pasifik selatan dengan $\kappa_z\tau = 53600$ m² dihasilkan residence time selama 17 tahun maka difusivitas vertikal $\kappa_z = 1 \times 10^{-4}$ m²/s. Dengan harga difusivitas ini diperoleh harga salinitas dan potensial temperatur. Hasil TS diagramnya dibandingkan dengan hasil observasi dinyatakan dalam gambar berikut:



Gambar-7: TS diagram dari observasi, laut Pasifik utara, laut pasifik selatan serta hasil model dengan sumber pasifik utara dan pasifik selatan.
 (sumber: Ffield,A & A. Gordon 1992)

Berikut ini adalah hubungan antara risedence time dan difusivitas vertikal untuk beberapa laut di Indonesia.



Gambar-8: Hubungan antara residence time dan difusivitas vertikal untuk beberapa kondisi laut di Indonesia (sumber: Ffield,A & A. Gordon, 1992).

Antara transport geostropik dengan koefisien difusivitas vertikal mempunyai hubungan yang linier. Dilaut Banda dengan transport geostropik sebesar 10 Sv akan menghasilkan difusivitas vertikal sebesar $\kappa_z = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$. Dari hasil ini Ffield,A dan A. Gordon 1992 menyimpulkan bahwa massa air laut Pasifik utara masuk ke laut Banda dengan difusivitas yang besar yaitu lebih besar dari $\kappa_z = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$.

Hautala,S dkk 1996 menggunakan model yang sama untuk menghitung difusivitas diapikal di laut Banda. Hautala dkk menggunakan data historis yang diperoleh dari ekspedisi Snellius dari tahun 1929-1930 dan menggunakan data pendukung the Western Equatorial Pacific Ocean Circulation Study (WEPOCS) tahun 1985,1986 dan 1988. Mereka menghitung difusivitas diapikal dengan memanfaatkan solusi analitik persamaan (4.2.2) yang berbentuk:

$$C(z,t) = c_1 + (c_1 - c_2) \frac{z}{H} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_2 \cos n\pi - c_1}{n} \sin \frac{n\pi z}{H} e^{-\left(\frac{n\pi\lambda}{H}\right)^2} + \frac{2}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi z}{H} e^{-\left(\frac{n\pi\lambda}{H}\right)^2} \int_{s=0}^H f(s) \sin \frac{n\pi s}{H} ds \quad 4.2.4$$

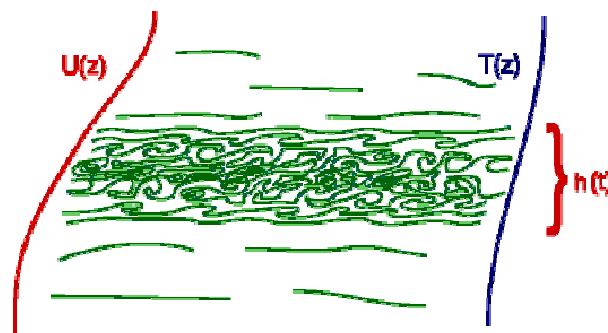
Dengan konsentrasi awal $C(z,0)=f(z)$ dan konsentrasi tetap pada batas atas dan batas bawah yaitu $C(0,t)=c_1$ dan $C(H,t)=c_2$. z adalah kedalaman perairan dan $\lambda=(\kappa t)^{1/2}$ yang merepresentasikan derajat mixing. Pada prinsipnya Hautala dkk mencapai kesimpulan bahwa di laut Banda harus mempunyai difusivitas diapikal dalam orde $\kappa_z = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$. Tentu saja hasil ini mengembirakan Ffield dan Gordon karena mereka mendapatkan hasil yang sama. Sebelum kita melangkah pada hasil observasi dengan peralatan microstructure, ada baiknya kita tinjau secara ringkas hasil pengukuran difusivitas diapikal di laut ekuator.

Di ekuator, pengukuran difusivitas diapikal telah dilakukan secara intensif di lautan Pasifik yaitu dibagian barat dan tengah serta di lautan Atlantik. Di pusat Pasifik dilakukan eksperimen yang dinamakan Tropical Heat I. Program ini menfokuskan pada turbulensi di undercurrents dan menemukan adanya shear yang kuat serta turbulensi yang kuat pada bulan November dan Desember 1984. Dalam ekspedisi ini juga diobservasi adanya variabilitas secara diurnal yang kuat di lapisan atas dengan dissipation rate bervariasi dalam orde 10^{-6} - 10^{-8} W/kg . Variabilitas harian ini disebabkan oleh adanya pemanasan yang kuat dari Matahari pada siang hari serta mixing konveksi pada malam hari (Clyayson & Kantha 1999). Fase kedua dari eksperimen ini yang dinamakan Tropical Heat II dilakukan pada bulan April 1987. Hasil ekspedisi ini menunjukkan adanya shear yang lebih kuat daripada ekspedisi pertama. Dalam ekspedisi ni juga diobservasi exintensi dari tropical instability wave. Observasi didaerah ini juga dilakukan pada tahun 1991 dengan nama Tropical Instability Wave Experiment (TIWE) pada bulan November-Desember 1991. Mereka mendapatkan dissipation rate dalam orde 10^{-6} - 10^{-8} W/kg untuk daerah dibawah mixed layer. Sedangkan di daerah mixed layer mereka mendapatkan harga difusivitas diapikal 6.5×10^{-5} . Pada saat berlangsungnya ekspedisi ElNino telah mulai di tengah lautan

Pasifik. Di daerah Pasifik Barat eksperiment turbulen dilakukan pada bulan Februari 1990 dengan nama COARE pilot cruise. Ekspedisi ini menemukan difusivitas diapiknal sebesar $5.4 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. Berikut ini adalah tabel hasil pengukuran microstructure di equatorial undercurrents (Gregg,M 1998):

Laut	Bujur	Bln	$10^{-4} K_T$	$10^{-4} K_p$	p	L	Sumber
			m^2s^{-2}	M^2s^{-1}	mPa	km	
Pas.Tengah	115	7/72	4.6;0.06;0 .14;0.03	-	0.2-5	1.3	G76
Atl. Timur	28	7/74	3.8;0.06;0 .4;0.008	4.0;0.01;3 ;.3	0-3.5	1.7	OB0a , 080
Pas. Tengah	150	1/79		8.5			C82
Pas. Tengah	140			5.3;0.01;0 .1			GPWOC S85,PGT 88
Pas. Tengah	140	4/87		2.5;0.01;0 .07			PGS91
Pasf. Barat	-147	2/90		2.5 0.009	; 0.3-2.7	165	BG96
Pas. Tengah	140	10/9		6.5;0.063; 0.064	05-2	900	LCGM95
Pasf. Barat	-156	2/93		0.54;0.03 5;0.09	0.8-3.2	7.9	GWSP95

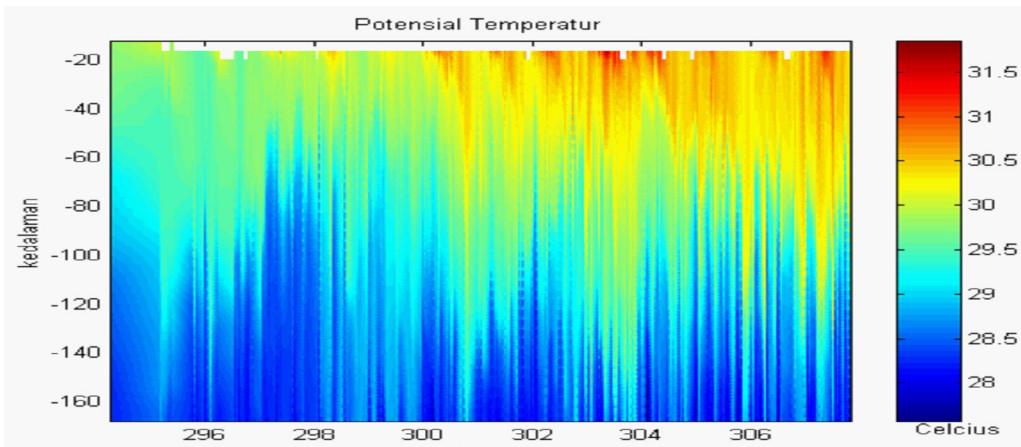
Terlihat bahwa untuk laut terbuka mempunyai tipikal difusivitas vertikal dalam orde 10^{-6} . Untuk laut terbuka umumnya turbulensi diakibatkan oleh adanya shear. Berikut ini adalah penggambaran tentang shear (W.D Smyth & J.N. Moum 2000):

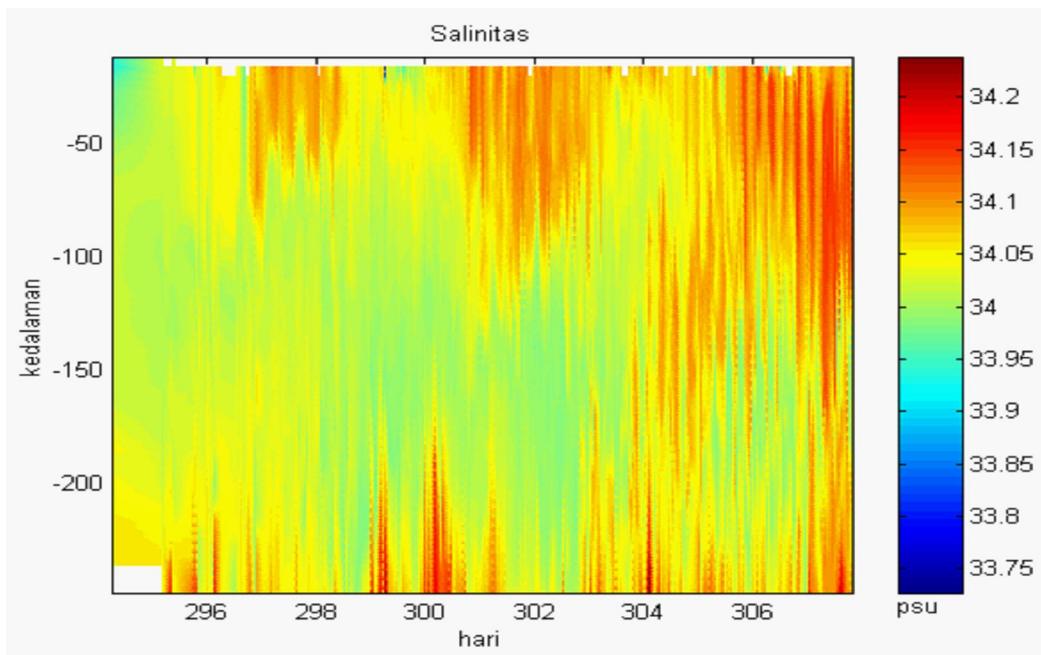


4.3 Diapicnal Mixing dan Gelombang Internal Semi-Inersia

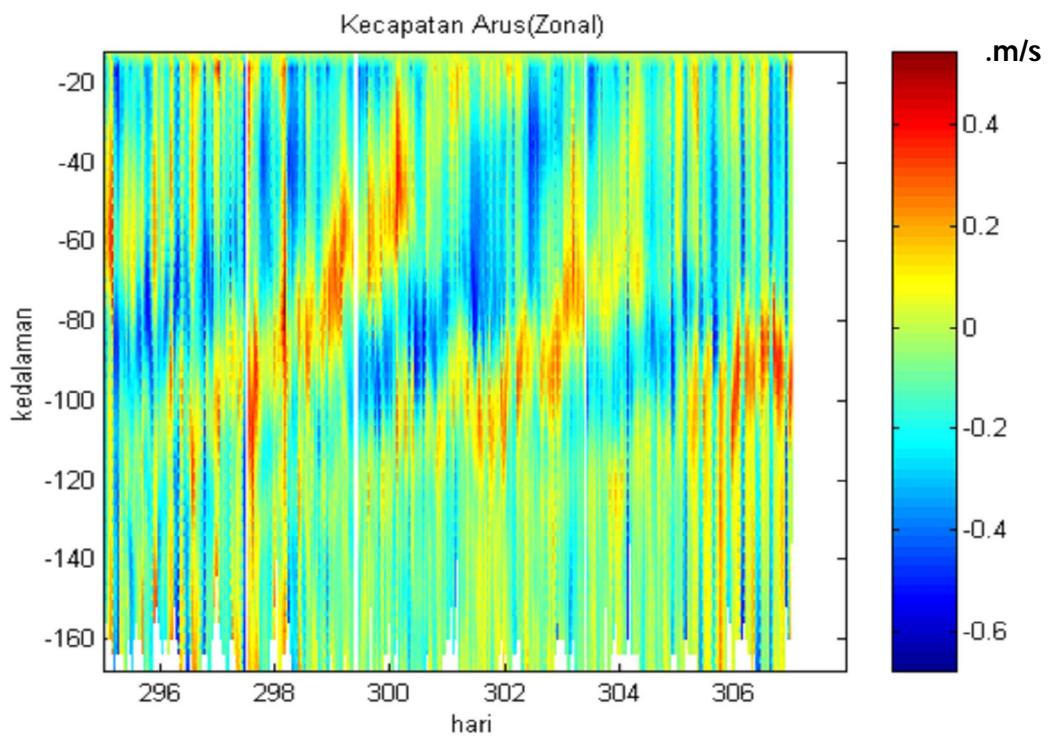
Seperti yang telah diuraikan di atas bahwa salinitas maksimum di kedalaman 200m yang merupakan ciri dari massa air lautan Pasifik utara mengalami penurunan salinitas begitu dia tiba di laut Banda (Ffield,A & A. Gordon 1992; Hautala et al 1996). Telah dibicarakan dalam sub bab 4.1 A. Field dan A. Gordon oceanographer dari LDEO Columbia University dan Hautala dkk dari Universitas Washington menggunakan model adveksi-difusi untuk menghitung sifat transport besaran skalar (salinitas, temperatur & konsentrasi oksigen), dan mereka menyimpulkan bahwa supaya perhitungan mereka cocok dengan data di lapangan maka laut Banda harus mempunyai difusivitas diapiknal (difusivitas vertikal) $\kappa_p \geq 10^{-4} \text{ m}^2/\text{det}$. Hasil ini menunjukkan tingginya difusivitas diapiknal yang harus terjadi di laut Banda. Sebagai perbandingan untuk rata-rata laut terbuka mempunyai difusivitas vertikal $\kappa_p \geq 10^{-6} \text{ m}^2/\text{det}$. Karena model mereka diintegrasikan secara vertikal maka model diatas tidak dapat menentukan dimana tingkat mixing yang kuat terjadi, apakah di dasar cekungan, digundukan (sill) atau didaerah batas dengan topografi. Sjoberg & Stigebrandt 1992 mengemukakan bahwa mixing yang kuat di perairan Indonesia diakibatkan adanya topografi yang kompleks serta pasang surut yang kuat. Ffield dan Gordon 1996 mengobservasi adanya osilasi empatbelas harian dan bulanan dari data suhu muka laut dari citra satelit serta pada temperatur di lapisan tengah (midle layer) dari data mooring. Mereka berargumen bahwa osilasi tersebut diakibatkan oleh pendinginan dari lapisan campuran (mixed layer) akibat adanya mixing yang digenerasi pasang surut.

Profil salinitas, profil potensial temperatur, profil kecepatan arus dalam arah utara-selatan, profil kecepatan arus dalam arah timur-barat, profil rate of dissipation terhadap kedalaman, profil deret waktu rate of dissipation dan divusivitas diapiknal, profil shear dalam arah timur-barat (zonal) dan profil shear dalam arah utara-selatan (meredional) dapat dilihat pada gambar berikut:

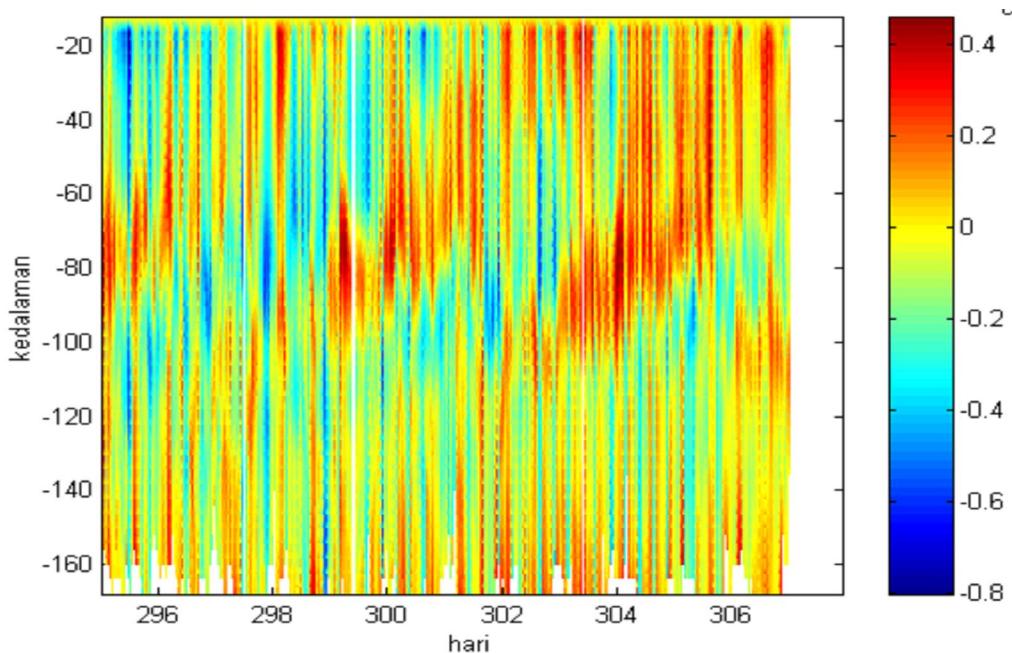




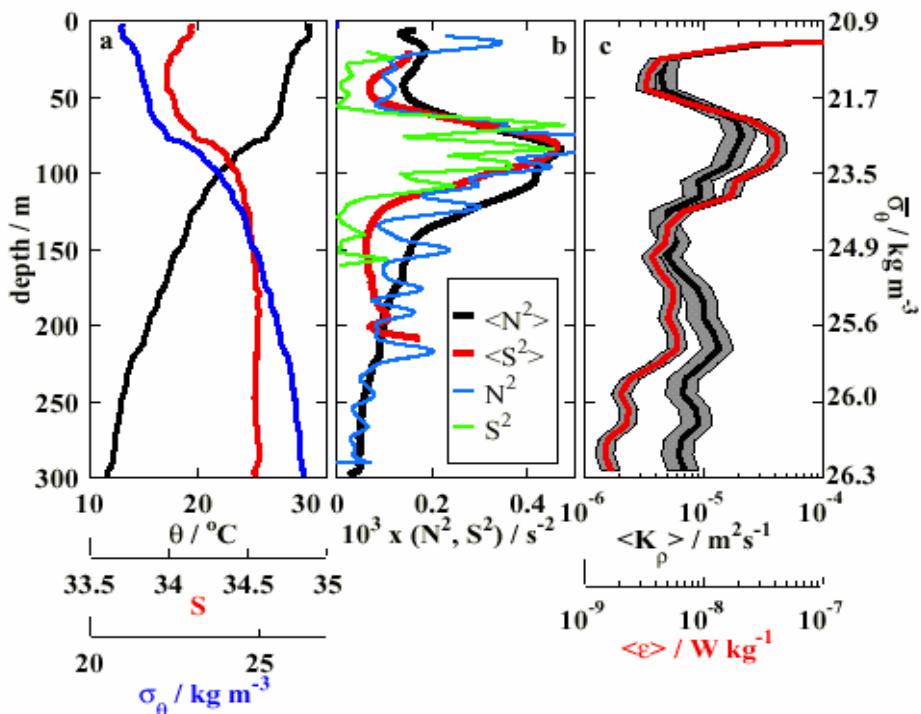
Gambar1: Profil potensial temperatur dan salinitas



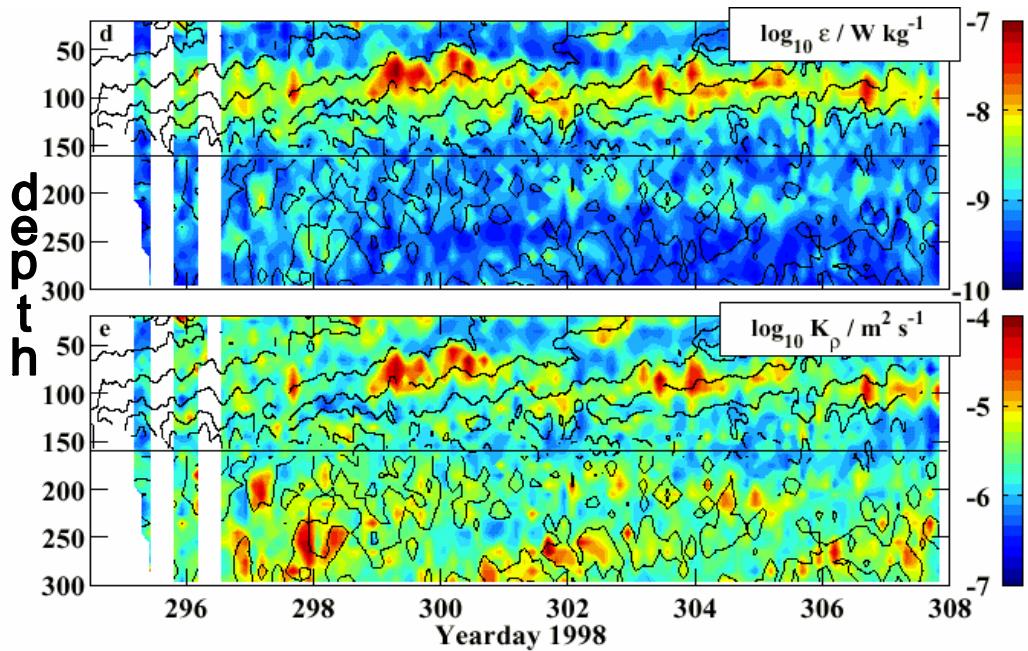
Gambar-2 Kecepatan arus dalam arah zonal



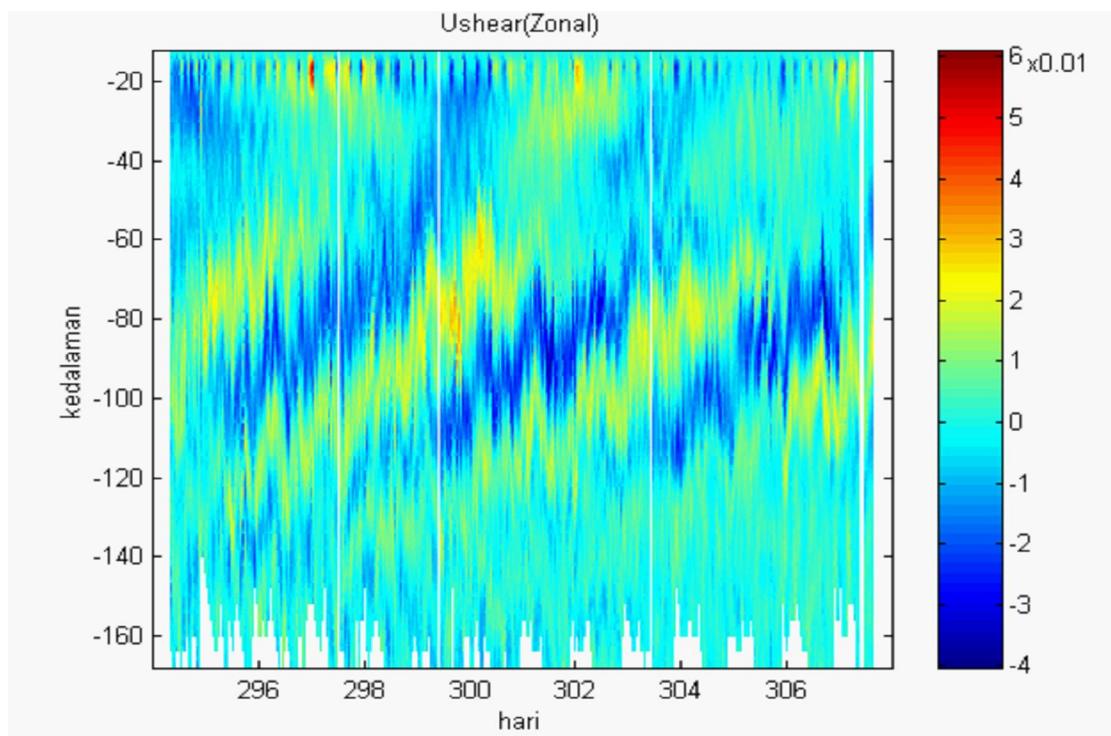
Gambar-3 Kecepatan arus dalam arah Meridional



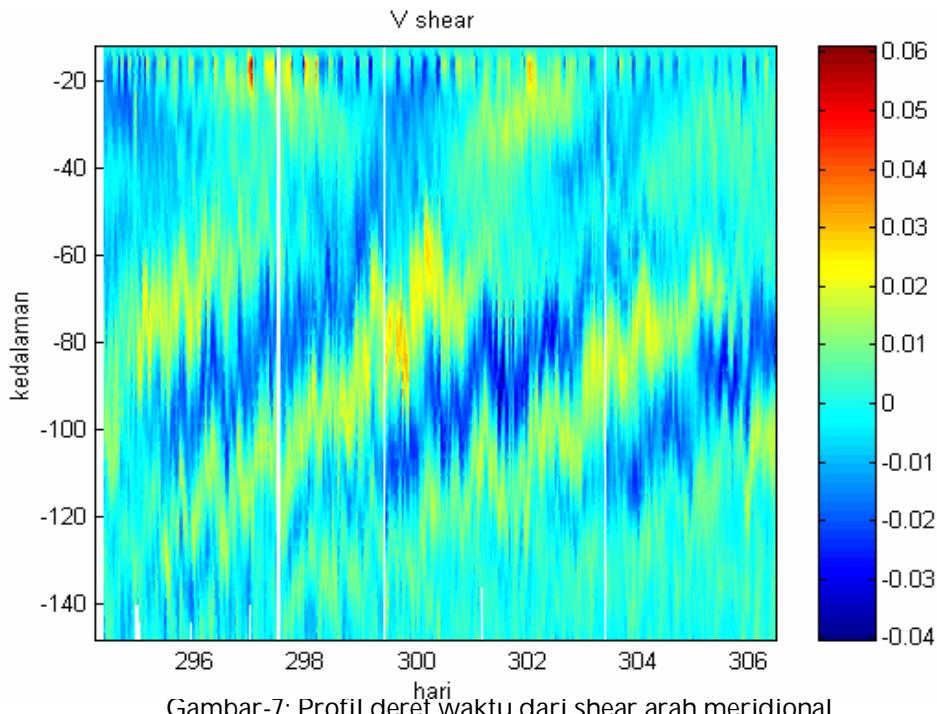
Gambar-4: Profil vertikal data dari MMP



gambar-5: Profil deret waktu dari rate of dissipation dan difusivitas vertikal.
(Alford & Gregg 2000).



Gambar-6: Profil deret waktu dari shear arah zonal.



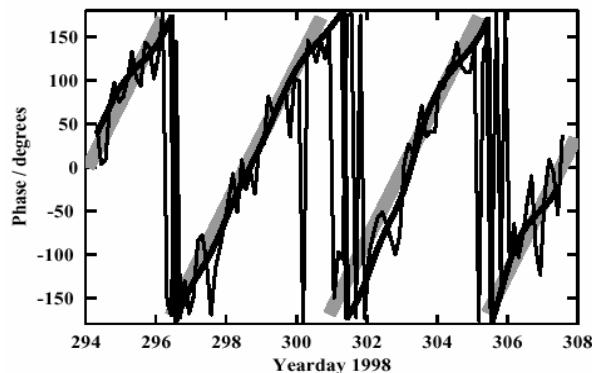
Gambar-7: Profil deret Waktu dari shear arah meridional.

Dibawah 170m terobservasi lapisan semi-isohaline seperti yang diobservasi oleh Ffield dan Gordon 1992. Data salinitas menunjukkan bahwa diatas 50m laut Banda mempunyai massa air yang relatif tawar ($S \leq 34.5$) hal ini diakibatkan adanya curah hujan dan runoff. Kesesuaian diagram TS dengan survei yang terdahulu menunjukkan bahwa sifat Bulk dari laut Banda relatif tunak.

Hasil pengukuran dengan MMP untuk parameter turbulen dinyatakan dalam gambar-4. Pada dasarnya hasil pengukuran MMP akan mendapatkan data potensial temperatur, salinitas serta rate of dissipation. Harga rata-rata kedalaman dibawah lapisan permukaan ($20m \leq z \leq 300m$) untuk rate of dissipation $\langle \epsilon \rangle = (9.57 \pm 0.34) \times 10^{-9} \text{ W/kg}$ dan difusivitas vertikal $\langle \kappa_p \rangle = (9.2 \pm 0.55) \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{det}$. Hasil juga menunjukkan bahwa $\epsilon \sim N^2$ dan $\kappa_p \sim N^0$. Kondisi ini adalah tipikal turbulensi untuk laut terbuka.

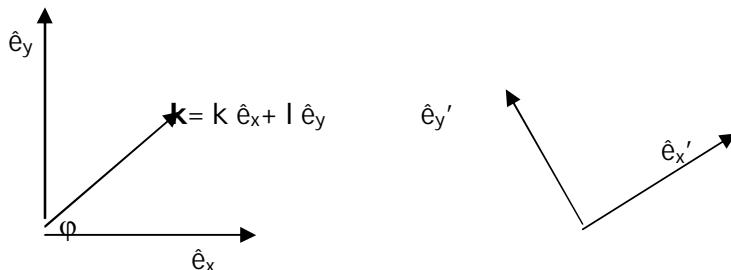
Profil deret waktu dari rate of dissipation serta difusivitas diapiknal dinyatakan oleh gambar-5. Profil ini diperoleh setelah dirata-ratakan setiap 30 menit dan kedalaman telah dirata-ratakan tiap selang 8 meter. Pola deret waktu dari rate of dissipation (ϵ) menunjukkan bahwa rate of dissipation terkonsentrasi di daerah dengan stratifikasi maksimum yaitu daerah dengan shear tinggi, sedangkan difusivitas diapiknal lebih uniform terhadap kedalaman.

Umumnya mixing dilaut dihasilkan oleh pecahnya gelombang internal. Parameterisasi mixing dalam bentuk energi gelombang internal untuk laut terbuka menunjukkan suatu fraksi kecil dari total yang diperlukan untuk mempertahankan stratifikasi abisal (jurang). Sejauh ini diyakini pada umumnya ada dua sumber gelombang internal yaitu pasang surut Bulan dan stress angin. Untuk sumber Bulan, aliran pasut barotropik yang lewat dalam topografi yang kasar akan diubah ke aliran pasut baroklinik untuk menggenerasi gelombang internal dengan frekuensi pasut. Gelombang internal mempunyai frekuensi yang kontinu. Angin akan merangsang gerakan inesia (lembam) di lapisan campuran yang menghasilkan gelombang internal semi-inersia (near-inertial internal wave). Dari total sebesar 2.1 TW (10^{12} W) energi mixing di jurang laut, 0.9 TW akibat pasang surut dan 1.2 TW akibat angin (Munk 1998). Gelombang internal yang digenerasi angin mempunyai tipikal frekuensi intrinsik (ω_i) yang sama dengan frekuensi Koriolis lokal (f_o). Gelombang ini dikendala penjalarannya diekuator. Jika frekuensinya menjadi lebih kecil dari frekuensi kritis maka dia menjadi frekuensi superinersia. Gelombang semi-inersia ini pada suatu saat akan mentransfer energinya ke skala gelombang pecah melalui mekanisme interaksi gelombang-gelombang atau melalui ketakstabilan shear. Di dalam keadaan yang ekstrim gelombang semi-inersia ini akan mencapai disuatu daerah lintang tinggi dengan frekuensi $\omega_i=2f$ dengan mekanisme parametric subharmonic instability (PSI) (Hibiya et al 1999). Disamping mekanisme pecahnya gelombang internal, angin juga merupakan sumber untuk turbulen yang biasanya disebut mixing di imbuhan angin. Pola deret waktu terhadap kedalaman menunjukkan bahwa shear didominasi oleh pita yang miring keatas. Kondisi ini merepresentasikan eksistensi gelombang internal semi inersia dengan rotasi berlawanan arah jarum jam dan berarah kebawah. Periode yang terobservasi adalah 4.4 hari (frekuensi $f=1/4.4$ hari =0.227). Frekuensi ini sama dengan $f_o = 2\Omega_o \sin \lambda$. Lintang dilaut Banda adalah $\lambda=6.5^\circ$ maka $f_o=0.22743$ dimana $\Omega_o=1/\text{hari}$. Maka kita dapatkan frekuensi observasi dinyatakan oleh $\omega_o=(1.02 \pm 0.02) f_o$. Hasil ini menunjukkan bahwa frekuensi yang terobservasi sama dengan frekuensi Coriolis lokal sehingga disebut frekuensi intrinsik. Dengan demikian kita mempunyai gelombang internal tipe semi-inersia. Karena gelombang internal semi inersia terobservasi pada kedalaman 150m dan laut mempunyai kedalaman 5000m maka dapat dihipotesakan bahwa sumber dari gelombang ini ada di permukaan yaitu oleh angin. Fase $\Phi = (\partial v / \partial z) / (\partial u / \partial z)$ menunjukkan dominasi rotasi berlawanan arah jarum jam. Fase gelombang dapat dilihat oleh gambar berikut ini:



Gambar-6 :Plot fase gelombang dalam deret waktu. Plot menunjukkan arah frekuensi gelombang -150° ke 150° yang berarti rotasi berlawanan Arah jarum jam (Alford & Gregg 2000).

Dalam kasus di laut Banda ini kita menjumpai penjalaran gelombang internal inersia yang menjalar dalam medium berlapis secara vertikal (shear). Karena umumnya sistem koordinat dari penjalaran gelombang tidak sama dengan kerangka koordinat aliran (fluida/Eulerian) maka kita harus membangun persamaan dinamika dari sistem koordinat eulerian ke sistem koordinat gelombang. Untuk itu kita harus melalukan suatu transformasi. Lihat gambar berikut:



Kecepatan arus dalam sistem koordinat eulerian dinyatakan oleh:

$$\vec{U}(z) = U(z)\hat{e}_x + V(z)\hat{e}_y$$

Hali ini menunjukkan bahwa aliran dasar adalah berlapis secara vertikal (vertically sheared). Sembarang titik dalam arah horisontal (vektor) akan dinyatakan dalam koordinat aliran dan sistem koordinat gelombang sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\vec{x}_h &= x\hat{e}_x + y\hat{e}_y \\ \vec{x}_h &= x'\hat{e}'_x + y'\hat{e}'_y\end{aligned}$$

Transformasi vektor basis dari dua sistem koordinat tersebut dinyatakan oleh:

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_x' \\ \hat{e}_y' \end{pmatrix}$$

Dengan transformasi ortogonal tersebut maka kecepatan aliran dasar dalam sistem koordinat gelombang akan dinyatakan oleh:

$$\vec{U}(z) = U\hat{e}_x + V\hat{e}_y = (U \quad V) \begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_x' \end{pmatrix} = (U \quad V) \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_x' \\ \hat{e}_y' \end{pmatrix}$$

atau

$$\vec{U}(z) = (U \cos \varphi + V \sin \varphi) \hat{e}_x' + (V \cos \varphi - U \sin \varphi) \hat{e}_y'$$

Sedangkan kecepatan partikel gelombang dalam sistem koordinat gelombang akan dinyatakan oleh:

$$\vec{u} = u' \hat{e}_x' + v' \hat{e}_y' + w' \hat{e}_z'$$

Pada dasarnya dinamika gelombang internal akan memenuhi persamaan Navier-Stokes, persamaan kontinuitas dan persamaan kekekalan gaya apung. Dalam kasus kita, skala panjang gelombang jauh lebih kecil dari skala panjang aliran. Hal ini menguntungkan karena kita dapat menggunakan suatu sistem aproksimasi dalam menyelesaikan persamaan gelombang yaitu aproksimasi WKB. Kita akan membicarakan ini nanti. Karena gelombang adalah penjalaran gangguan maka kita akan menguraikan kecepatan sebagai superposisi kecepatan rata-rata (aliran dasar) dan kecepatan gangguan (lihat pada bab-2), yaitu kita mendekomposisikan medan kecepatan sebagai $u = U + u'$. Dengan mempertahankan interaksi hanya oleh shear maka persamaan Navier-Stokes, persamaan kontinuitas dan persamaan kekekalan gaya apung dalam sistem koordinat gelombang akan dinyatakan oleh:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}') u' + u' \frac{\partial U}{\partial x'} + v' \frac{\partial V}{\partial y'} + w' \frac{\partial U}{\partial z'} - fv' = -\frac{\partial p}{\partial x'} \quad 4.3.1$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}') v' + u' \frac{\partial V}{\partial x'} + v' \frac{\partial V}{\partial y'} + w' \frac{\partial V}{\partial z'} + fu' = -\frac{\partial p}{\partial y'} \quad 4.3.2$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}') w' = -\frac{\partial p}{\partial z'} - b \quad 4.3.3$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0 \quad 4.3.4$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}') b + u' \frac{\partial B}{\partial x'} + v' \frac{\partial B}{\partial y'} - N^2 w' = 0 \quad 4.3.5$$

dalam hal ini $z=z'$. Hubungan B dengan kecepatan aliran diperoleh dengan relasi thermal wind sebagai berikut:

$$-f \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial x'} \quad ; \quad f \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial y'}$$

Untuk menyederhanakan masalah kita ambil kecepatan dasar hanya dalam arah zonal (x) saja, dengan demikian kecepatan akan dinyatakan oleh:

$$\vec{U}(z) = U(z) \hat{e}_x = U \cos \varphi \hat{e}_x' - U \sin \varphi \hat{e}_y' = U' \hat{e}_x' + V' \hat{e}_y'$$

Dengan aliran dasar seperti ini maka persamaan 4.3.1 sampai persamaan 4.3.5 menjadi:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U' \frac{\partial u'}{\partial x'} + w' \frac{\partial U}{\partial z} - fv' = - \frac{\partial p}{\partial x'} \quad 4.3.6$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U' \frac{\partial v'}{\partial x'} + w' \frac{\partial V}{\partial z} + fu' = 0 \quad 4.3.7$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + U' \frac{\partial w'}{\partial x'} = - \frac{\partial p}{\partial z} - b \quad 4.3.8$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial x'} = 0 \quad 4.3.9$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + U' \frac{\partial b}{\partial x'} + fu' \frac{\partial V}{\partial z} - fv' \frac{\partial U}{\partial z} + w' N^2 = 0 \quad 4.3.10$$

dalam persamaan 4.3.10 kita telah memanfaatkan relasi thermal wind. Himpunan persamaan 4.3.6 sampai 4.3.10 inilah yang membangun dinamika gelombang internal semi-inersia di laut Banda. Dari periodisitas 4.4 hari maka kita asumsikan gelombang internal ini adalah gelombang bidang yang sebanding dengan $\exp[i(\mathbf{k}_h \cdot \mathbf{x}_h - \omega t)]$ dengan ω adalah frekuensi yang diukur oleh pengamat di titik tetap. Frekuensi yang diukur oleh pengamat yang bergerak dengan aliran dinamakan frekuensi intrinsik yang dinyatakan oleh $\sigma = \omega - \mathbf{k}_h \cdot \mathbf{U}$ (yang selalu bernilai positif). Syarat perlu untuk hadirnya gelombang internal semi inersia adalah: $|f| \leq \sigma \leq N$, atau $|\gamma_f| \leq 1$ dan $|\gamma_N| \leq 1$ dimana $\gamma_f = f/\sigma$ dan $\gamma_N = \sigma/N$. Dengan solusi gelombang bidang maka kita mempunyai:

$$u'; w'; v'; p; b \approx \exp[i(\vec{k}_h \cdot \vec{x}_h - \omega t)] \quad 4.3.11$$

Jika solusi ini kita substitusikan ke persamaan 4.3.6 sampai persamaan 4.3.10 akan menghasilkan:

$$u' = \frac{i}{K} \frac{\partial w'}{\partial z} \quad 4.3.12$$

$$v' = \frac{i}{\sigma} \frac{\partial U}{\partial z} \sin \varphi + \frac{\gamma_f}{K} \frac{\partial w'}{\partial z} \quad 4.3.13$$

$$p = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial U}{\partial z} (i \cos \varphi + \gamma_f \sin \varphi) w' + i \frac{(\sigma^2 - f^2)}{\sigma K^2} \frac{\partial w'}{\partial z} \quad 4.3.14$$

$$b = -\frac{1}{\sigma} \left(\gamma_f \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \sin \varphi \cos \varphi + i N^2 \right) w' + \frac{\gamma_f}{K} \frac{\partial U}{\partial z} (i \gamma_f \cos \varphi - \sin \varphi) \frac{\partial w'}{\partial z} \quad 4.3.15$$

dimana $K^2 = k_x^2 + k_y^2$. Kita melihat bahwa variabel gelombang u' ; v' ; p dan b bergantung dari kecepatan vertikal w' . Jadi jika kita mengetahui solusi dari w' maka variabel lainnya dapat ditentukan. Untuk menentukan w' kita kembali menmanfaatkan solusi gelombang bidang. Dalam solusi ini kita ambil solusi w' dalam bentuk:

$$w' = \alpha(z) \hat{W}(\vec{\omega}, \vec{k}_h) \exp[i(\vec{k}_h \cdot \vec{x}_h - \omega t)] \quad 4.3.16$$

dengan \hat{W} adalah kompleks. $\alpha(z)$ adalah skalar yang menyatakan struktur vertikal dari w' . Subtitusikan persamaan 4.3.14 dan persamaan 4.3.15 ke persamaan 4.3.8 kita dapatkan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w'}{\partial t} + U' \frac{\partial w'}{\partial x'} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{K} \frac{\partial U}{\partial z} (i \cos \varphi + \gamma_f \sin \varphi) w' + i \frac{(\sigma^2 - f^2)}{K^2 \sigma} \frac{\partial w'}{\partial z} \right] - \\ \frac{1}{\sigma} \left(\gamma_f \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \sin \varphi \cos \varphi + i N^2 \right) w' &+ \frac{\gamma_f}{K} \frac{\partial U}{\partial z} (i \gamma_f \cos \varphi - \sin \varphi) \frac{\partial w'}{\partial z} \end{aligned} \quad 4.3.17$$

atau dalam bentuk yang lebih baik:

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + U \cos \varphi \frac{\partial w'}{\partial x'} = -i \frac{(\sigma^2 - f^2)}{K^2 \sigma} \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} + \frac{1}{K} \frac{\partial U}{\partial z} \left[\gamma_f (i \gamma_f \cos \varphi - \sin \varphi) - (i \cos \varphi + \gamma_f \sin \varphi) \right] \\ - \frac{\partial w'}{\partial z} - \left[\frac{1}{K} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} (i \cos \varphi + \gamma_f \sin \varphi) + \frac{1}{\sigma} \left(\gamma_f \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \sin \varphi \cos \varphi + i N^2 \right) \right] w' \\ 4.3.18$$

dengan mensubtitusikan solusi 4.3.16 maka kita dapatkan persamaan untuk $\alpha(z)$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} + M_1(z) \frac{\partial \alpha}{\partial z} + M_o(z) \alpha = 0 \quad 4.3.19$$

dimana masing-masing koefisien dinyatakan oleh:

$$M_1(z) = -\frac{2NK}{\sigma} \frac{Fr \gamma_f (\gamma_f \cos \varphi - i \sin \varphi)}{(1 - \gamma_f^2)} \\ M_o(z) = \frac{N^2 K^2 (1 - \gamma_f^2)}{\sigma^2 (1 - \gamma_f^2)} + \frac{K}{\sigma} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{(\cos \varphi - i \gamma_f \sin \varphi)}{(1 - \gamma_f^2)} - i \frac{2N^2 K^2 Fr^2 \gamma_f \sin \varphi \cos \varphi}{\sigma^2 (1 - \gamma_f^2)}$$

Dengan $Fr = (\partial U / \partial z) / N$ adalah bilangan Froude yang menyatakan perbandingan antara shear dengan gaya apung. Untuk daerah ekuator $f = 0$ sehingga $\gamma_f = 0$ sehingga persamaan 4.3.19 menjadi:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} + K^2 \frac{(N^2 - \sigma^2)}{\sigma^2} \alpha = 0 \quad 4.3.20$$

Untuk laut banda mempunyai lintang $6.5^\circ S$ sehingga gaya koriolis masih cukup signifikan. Untuk memasukkan gaya koriolis maka persamaan 4.3.20 harus dimodifikasi sebagai berikut (Alford, M 2000):

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} + K^2 \frac{(N^2 - \sigma^2)}{\sigma^2 - f^2} \alpha = 0 \quad 4.3.21$$

N adalah fungsi dari z maka secara umum persamaan 4.3.21 mempunyai bentuk (dalam oseanografi disebut persamaan Taylor-Goldstein):

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} + V(z) \alpha = 0 \quad 4.3.22$$

Dalam mekanika kuantum persamaan 4.3.22 adalah persamaan Schrodinger tak bergantung waktu. Untuk kasus dimana "potensial" $V(z)$ tidak bervariasi secara tajam dengan z maka metode aproksimasi WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin) dapat diterapkan (Merzbacher,E 1970). Suatu solusi WKB adalah mengambil solusi persamaan 4.3.22 dalam bentuk:

$$\alpha(z) = \frac{\alpha_o}{\sqrt{m}} e^{i \int^z m(s) ds} \quad 4.3.23$$

dengan subtitusi ke persamaan 4.3.20 kita mempunyai relasi dispersi:

$$m^2 = K^2 \frac{N^2(z) - \sigma^2}{\sigma^2 - f^2} \quad 4.3.24$$

Kasus yang paling sederhana adalah jika N konstan, maka m juga konstan sehingga solusi 4.3.20 mempunyai bentuk yang sederhana sebagai berikut:

$$\alpha(z) = A_{\uparrow} e^{imz} + A_{\downarrow} e^{-imz} \quad 4.3.25$$

Solusi ini menyatakan superposisi dari gelombang yang menjalar ke atas dan kebawah.

Sekarang tibalah saatnya kita memecahkan persamaan 4.3.21 dengan metode WKB. Pertama kali saya bertemu dengan metode ini adalah pada saat saya masih mahasiswa mengambil mata kuliah mekanika kuantum dimana metode ini digunakan untuk menyelesaikan persamaan Schrodinger satu demensi (1-D). Pada saat saya belajar mekanika kuantum banyak teman-teman yang mencibir saya dengan mengatakan, tidak ada gunanya belajar mekanika kuantum karena tidak ada relevansinya dengan dinamika atmosfer. Hati kecil saya mengatakan bahwa mata kuliah ini sangat berguna. Ternyata banyak teknik matematika dan gambaran fisis yang sangat berguna jika kita ingin serius belajar dinamika atmosfer dan laut. Seperti misalnya ruang vektor, (dalam mekanika kuantum kita bermain dengan ruang vektor, khususnya ruang vektor Hilbert) aproksimasi WKB fungsi Grenn dll. Saya telah membuktikan bahwa hati kecil saya berkata benar. Marilah kita kembali ke gelombang internal semi-inersia. Persamaan 4.3.21 dapat saya tuliskan kembali dalam bentuk:

$$\frac{d^2 \alpha}{dz^2} + \frac{k^2}{h^2} [N^2 - \sigma^2] \alpha = 0 \quad , \quad h^2 = \sigma^2 - f^2 , \quad N = N(z)$$

.....4.3.26

Persamaan ini mirip dengan persamaan Schrodinger 1D yang tak bergantung waktu sebagai berikut:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(z)] \psi = 0$$

Persamaan Schrodinger ini memerikan perilaku partikel (katakanlah elektron) dengan energi E yang menjalar memotong suatu penghalang yang dinyatakan oleh potensial V. Kita umumnya yakin bahwa jika energi E < V maka elektron tidak akan mampu melewati penghalang, tetapi dalam dunia mekanika kuantum ada probabilitas bahwa elektron akan menembus penghalang itu. Tentu saja gelombang kita tidak seperti elektron karena gelombang yang kita punya tidak mempunyai penghalang berupa potensial seperti itu. Karena bentuk matematisnya mirip maka kita perlakukan seolah-olah $N=N(z)$ sebagai potensial penghalang dari gelombang kita yang menjalar ke bawah. Analisis detail matematikanya sebagai berikut:

Kita tuliskan kembali persamaan 4.3.26 sebagai berikut:

$$\frac{d^2\alpha}{dz^2} + \frac{p^2}{\hbar^2} \alpha = 0 \quad , \quad p = k \sqrt{N^2 - \sigma^2} \quad 4.3.27$$

Dalam mekanika kuantum p adalah momentum. Maka kita katakan bahwa p adalah 'momentum' gelombang kita (ingat bahwa persamaan ini menyatakan dinamika amplitude gelombang). Persamaan 4.3.27 akan mempunyai solusi osilatoris [$\propto \exp(i(p/\hbar)z)$] jika p konstan. Tetapi karena p adalah fungsi dari z maka kita boleh berharap solusi 4.3.27 masih mempunyai bentuk yang mirip solusi osilatoris asalkan fungsi p tidak bervariasi secara tajam dengan z. Untuk itu kita mengambil solusi dalam bentuk:

$$\alpha(z) = \phi(z) \exp\left[\pm \frac{i}{\hbar} \int p(z) dz \right] \quad 4.3.28$$

dengan $\phi(z)$ adalah fungsi yang bervariasi secara lambat terhadap z. Jika kita substitusikan ke persamaan 4.3.27 kita dapatkan persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{h}{ip} \frac{d^2\phi}{dz^2} \pm \left(2 \frac{d\phi}{dz} + \frac{1}{p} \frac{dp}{dz} \phi \right) = 0 \quad 4.3.29$$

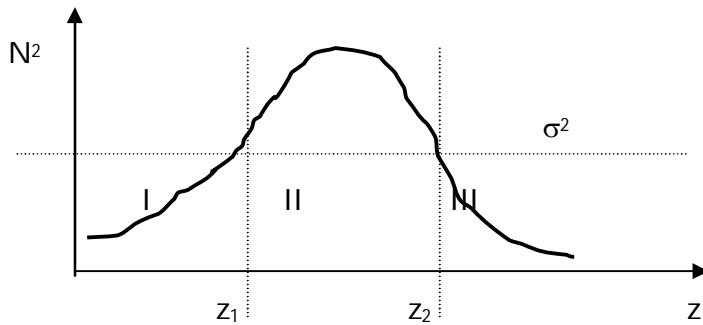
Jika kita asumsikan (aproksimasi WKB) bahwa $\hbar/p \ll 1$ maka suku pertama dapat diabaikan, sehingga persamaan 4.3.29 dan solusi menjadi:

$$\frac{2}{\phi} \frac{d\phi}{dz} + \frac{1}{p} \frac{dp}{dz} = \frac{d}{dz} [\ln(\phi^2 p)] = 0 \quad \text{solusi} \quad \phi = \frac{K}{\sqrt{p}} \quad 4.3.30$$

dimana K adalah konstanta. Maka solusi 4.3.28 akan berupa solusi WKB yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\alpha_{WKB}(z) = \frac{K}{\sqrt{p}} \exp \left[\pm \frac{i}{h} \int_z^{z_0} p(z) dz \right] \quad 4.3.31$$

dari gambar-5, kita gambarkan bentuk profil "potensial" N sebagai berikut:



Dengan melihat definisi dari $p=k\sqrt{[N^2-\sigma^2]}$, jelas bahwa untuk daerah I ($z < z_1$) karena $N^2 < \sigma^2$ maka kita mempunyai solusi eksponensial yang meluruh untuk $z \rightarrow -\infty$ (karena fungsi gelombang harus finite pada $z \rightarrow \pm\infty$). Maka untuk daerah I solusi WKB kita nyatakan sebagai berikut:

$$\alpha_I(z) = \frac{K_1}{\sqrt{|p|}} \exp \left[\frac{1}{h} \int_{z_1}^z |p(z)| dz \right] \quad 4.3.32$$

Untuk daerah II karena $N^2 > \sigma^2$ maka kita mempunyai solusi osilatoris yaitu:

$$\alpha_{II}(z) = \frac{K_2}{\sqrt{p}} \exp \left[\frac{i}{h} \int_{z_1}^z p(z) dz \right] + \frac{K_2'}{\sqrt{p}} \exp \left[-\frac{i}{h} \int_{z_1}^z p(z) dz \right] \quad 4.3.33$$

untuk daerah III ($z > z_2$) karena $N^2 < \sigma^2$ maka kita mempunyai solusi eksponensial yang meluruh untuk $z \rightarrow \infty$, yang dinyatakan dalam bentuk:

$$\alpha_{III}(z) = \frac{K_3}{\sqrt{|p|}} \exp \left[-\frac{1}{h} \int_{z_2}^z |p(z)| dz \right] \quad 4.3.34$$

Masing-masing solusi valid untuk daerahnya masing-masing (otonomi daerah barang kali), tetapi jika mendekati titik z_1 dan z_2 yang biasanya

disebut titik belok (ingat di pelajaran kalkulus) maka solusi akan buyar karena $p=0$. Karena solusi semua itu sebenarnya menyatakan perilaku satu mahluk yaitu gelombang internal-semi inersia maka mereka seharusnya saling berhubungan satu sama lain sehingga merupakan satu kesatuan yang merepresentasikan perilaku satu gelombang. Seperti pada jaman KKN, supaya mereka dapat saling berhubungan maka diperlukan koneksi. Untuk itu kita perlu menentukan rumus konesitas. Rumus itu dicari sebagai berikut: Untuk daerah titik belok z_1 dan z_2 , kita asumsikan N berbentuk fungsi linier, berturut-turut sebagai berikut:

$$N^2 \approx \sigma^2 + A(z - z_1)$$

dan

$$N^2 \approx \sigma^2 - B(z - z_1) \quad 4.3.35$$

dengan kondisi ini persamaan 4.3.27 menjadi:

$$\frac{d^2\alpha}{dz^2} + \frac{k^2}{h^2} A(z - z_1)\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad z_1 \quad 4.3.36$$

$$\frac{d^2\alpha}{dz^2} - \frac{k^2}{h^2} B(z - z_1)\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad z_2 \quad 4.3.37$$

Jika kita lakukan transformasi untuk persamaan 4.3.36 dan persamaan 4.3.37 berturut-turut sebagai berikut:

$$z \rightarrow z' = -\left(\frac{k^2}{h^2} A\right)^{\frac{1}{3}} (z - z_1)$$

$$z \rightarrow z' = \left(\frac{k^2}{h^2} B\right)^{\frac{1}{3}} (z - z_2)$$

Maka persamaan 4.3.36 dan persamaan 4.3.37 akan mempunyai bentuk yang sama yaitu:

$$\frac{d^2\alpha}{dz'^2} - z'\alpha = 0 \quad 4.3.38$$

Solusi persamaan 4.3.38 dinyatakan dalam fungsi Airy (lihat: Abramowitz, M & I. Stegun 1965 "Handbook of Mathematical Function" Dover Pub. New York). Karena fungsi gelombang harus finite pada $z \rightarrow \pm\infty$ maka fungsi Airy yang sesuai adalah:

$$Ai(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{s^2}{3} + sz'\right) ds$$

Deangan solusi asimtotiknya adalah:

$$\begin{aligned} Ai(z) &\approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}z'^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{2}{3}z'^{\frac{3}{2}}\right) \quad \rightarrow z' > 0 \\ Ai(z) &\approx \frac{1}{\sqrt{\pi}z'^{\frac{1}{4}}} \sin\left(\frac{2}{3}(-z')^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) \quad \rightarrow z' < 0 \end{aligned} \quad 4.3.39$$

Fungsi Airy tersebut secara mulus dapat lewat pada titik belok sehingga dia dapat berperan sebagai koneksi dari masing-masing fungsi gelombang daerah I, daerah II dan daerah III. Jika kita mendekati titik z_1 dari kiri (daerah I) dengan $p^2 \approx k^2 A(z-z_1) = -(k^2 A h)^{2/3} z'$. Maka integrasi menjadi:

$$\frac{1}{h} \int_{z_1}^z |p(z)| dz = \left(\frac{k^2 A}{h^2} \right)^{\frac{1}{3}} \int_{z_1}^z \sqrt{z'} dz' = - \int_0^{z'} \sqrt{z'} dz' = -\frac{2}{3} z'^{\frac{3}{2}}$$

Jika kita mendekati dari kanan (daerah II) maka integrasi menjadi:

$$\frac{1}{h} \int_{z_1}^z pdz = \left(\frac{k^2 A}{h^2} \right)^{\frac{1}{3}} \int_{z_1}^z \sqrt{-z} dz = - \int_0^{z'} \sqrt{-z'} dz' = \frac{2}{3} (-z')^{\frac{3}{2}}$$

Dengan hasil diatas dan dengan kondisi asimtotik 4.3.39 maka kita dapatkan bahwa solusi di daerah I yaitu:

$$\alpha_I(z) \approx \frac{1}{\sqrt{|p|}} \exp\left[\frac{1}{h} \int_{z_1}^z |p(z)| dz \right] \quad (z < z_1)$$

Akan mempunyai solusi padanannya untuk menghubungkan ke daerah II berbentuk:

$$\alpha(z) \approx \frac{2}{\sqrt{p}} \sin\left[\frac{1}{h} \int_{z_1}^z pdz + \frac{\pi}{4} \right] \quad (z > z_1) \quad 4.3.40$$

dengan cara yang sama maka kita dapatkan rumus konesitas untuk titik belok z_2 adalah:

$$\alpha_{III}(z) \approx \frac{1}{\sqrt{|p|}} \exp\left[\frac{1}{h} \int_{z_2}^z |p(z)| dz \right] \quad (z > z_2)$$

solusi padanannya disebelah kiri z_2 adalah:

$$\alpha(z) \approx \frac{2}{\sqrt{p}} \sin \left[\frac{1}{h} \int_{z_1}^{z_2} pdz + \frac{\pi}{4} \right] \quad (z < z_2) \quad 4.3.41$$

Karena persamaan 4.3.40 dan 4.3.41 merupakan aproksimasi untuk daerah II maka mereka harus mempunyai bentuk yang sama kecuali konstantanya saja. Pernyataan ini dituliskan sebagai berikut:

$$\sin \left[\frac{1}{h} \int_{z_1}^z pdz + \frac{\pi}{4} \right] = C \sin \left[\frac{1}{h} \int_{z_1}^{z_2} pdz + \frac{\pi}{4} \right] \quad 4.3.42$$

Untuk menentukan konstanta C ini persamaan ini kita modifikasikan dengan memanfaatkan aturan Libniz tentang integrasi sebagai berikut:

$$\int_a^b = \int_a^{a'} + \int_{a'}^b = \int_a^{a'} - \int_b^{a'}$$

Maka persamaan 4.3.42 menjadi:

$$\sin \left[\frac{1}{h} \int_{z_1}^{z_2} pdz - \frac{1}{h} \int_z^{z_2} pdz + \frac{\pi}{4} \right] = C \sin \left[\frac{1}{h} \int_z^{z_2} pdz + \frac{\pi}{4} \right] \quad 4.3.43$$

dengan rumus trigonometri elementer $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ maka persamaan 4.3.43 menjadi:

$$\sin \left[\frac{1}{h} \int_{z_1}^{z_2} pdz \right] \cos \left[\frac{1}{h} \int_z^{z_2} pdz + \frac{\pi}{4} \right] - \cos \left[\frac{1}{h} \int_{z_1}^{z_2} pdz \right] \sin \left[\frac{1}{h} \int_z^{z_2} pdz + \frac{\pi}{4} \right] = C \sin \left[\frac{1}{h} \int_z^{z_2} pdz + \frac{\pi}{4} \right] \quad4.3.44$$

Persamaan ini dipenuhi jika:

$$\sin \left[\frac{1}{h} \int_{z_1}^{z_2} pdz \right] = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{1}{h} \int_{z_1}^{z_2} pdz = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi$$

Jadi konstanta $C = (-1)^n$.

Rumus 4.3.40 dan 4.3.41 beserta konstanta C adalah rumus koneksitas yang kita cari. Jadi solusi WKB untuk sistem kita adalah:

$$\alpha_{WKB}(z) = \begin{cases} \frac{(-1)^n K_1}{\sqrt{|p|}} \exp \left[-\frac{1}{h} \int_z^{z_1} |p(z)| dz \right] & (z < z_1) \\ \frac{(-1)^n 2K_2}{\sqrt{p}} \sin \left[\frac{1}{h} \int_{z_1}^z p dz + \frac{\pi}{4} \right] & (z_1 < z < z_2) \\ \frac{K_3}{\sqrt{|p|}} \exp \left[-\frac{1}{h} \int_{z_2}^z |p(z)| dz \right] & (z_2 < z) \end{cases} \quad 4.3.45$$

Solusi 4.3.42 adalah solusi WKB yang kita inginkan, bentuk fungsi ini sekarang tergantung dari pemilihan "potensial" dari N^2 . Dari gambar-5 kata mengadakan curva fitting dengan mengambil bentuk fungsi hipergeomatrik yaitu sech . Maka bentuk "potensial" kita adalah $N=A \text{sech}(z)$, dengan bentuk seperti itu kita dapatkan "momentum" sebagai berikut:

$$p = k \sqrt{[A^2 \text{sech}^2(z) - \sigma^2]}$$

Maka intergrasi "momentum" menjadi:

$$\int pdz = kA \int [\text{sech}^2 z - \Lambda^2] dz \quad \Lambda = \frac{\sigma}{A}$$

Dengan memanfaatkan ekspansi binomial maka hasil integrasi ini (hanya tiga suku) adalah:

$$\int pdz = kA \sin^{-1}(\tanh z) - \frac{k\sigma^2}{2A} \sinh z - \frac{k\sigma^4}{18A^3} \sinh z (\cosh^2 z + 2)$$

Disini kita telah memberikan perangkat untuk menentukan fungsi gelombang internal semi-inersia secara lengkap. Pada dasarnya integrasi diatas dapat mudah diselesaikan secara numerik.

Sebuah program numeric solusi WKB dengan masukan berupa data brunt Vaisalla frekuensi dapat dilihat sebagai berikut:

```
% This program is to compute the k^th eigenvalue and
eigenfunction using WKB approximation
% for the eigenvalue problem y'' + [N^2(z)/C0^2] y = 0; -h <=
z <= 0; y(-h) = y(0) = 0.
% The function N(z) is given as a discreet vector.
clear all;
global h vz dz Nz n
% Reading the data
fid1=fopen('ARL_11.txt','r');
fid2=fopen('ARL_12.txt','r');
```

```

fid3=fopen('ARL_10.txt','r');
%fid4=fopen('PPSL20.txt','r');
fseek(fid1,0,-1);
fseek(fid2,0,-1);
fseek(fid3,0,-1);
%fseek(fid4,0,-1);
data1=fscanf(fid1,'%f',[3,inf]);
data2=fscanf(fid2,'%f',[3,inf]);
data3=fscanf(fid3,'%f',[3,inf]);
% Averaging the data
data=(data1(:,1:270)+data2(:,1:270)+data3(:,1:270))/3;%+data4(:,1:280))/4;
%Getting the size of the data
[nm nn]=size(data);
%Pressure, Temperature, Salinity
press=data(1,:);
temp=data(2,:);
sal=data(3,:);
% Computing the Depth and Density
for i=1:nn
    zdepth(i,1)=-1.0*depth(press(i,1),-11); %datapadaintang7S
    dens(i,1)=density(sal(i,1),temp(i,1),press(i,1));
end
% Comptuting Nz
ddens=diff(dens);
dz=diff(zdepth);
dy=ddens./dz;
z=zdepth(1:end-1);
a=1./dens;
b=a(1:end-1);
n2=-9.8*dy.*b;
Nz=abs(n2);
n = size(Nz)

subplot(1,2,1)
plot(Nz,z)
grid
ylabel('depth (m)')
%axis([0 0.003 -920 0])
title('Brunt-Vaisala Frequency')
% i = 1 is the surface, i = n is the bottom
for k = 1:2
    c0(k) = valuec0(k);
    for i = 1:n
        phi(k,i) = eigenf(k,i);
    end;
end;
model = phi(2,:);
for k = 1:3
    c0(k) = valuec0(k);
    for i = 1:n

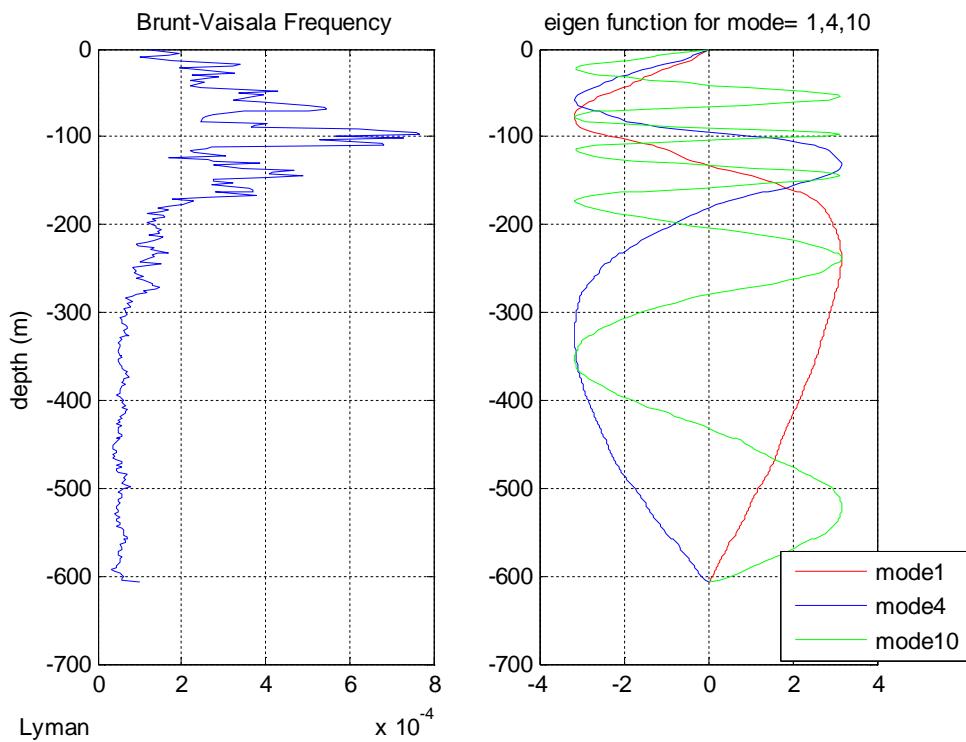
```

```

        phi(k,i) = eigenf(k,i);
    end;
end;
mode4 = phi(3,:);
for k = 1:10
    c0(k) = valuec0(k);
    for i = 1:n
        phi(k,i) = eigenf(k,i);
    end;
end;
mode10 = phi(10,:);
subplot(1,2,2)
plot(mode1,z,'r',mode4,z,'b',mode10,z,'g')
grid
h = legend('mode1','mode4','mode10',2);
%axis([-60 80 -920 0])
title('eigen function for mode= 1,4,10')
gtext('lyman')

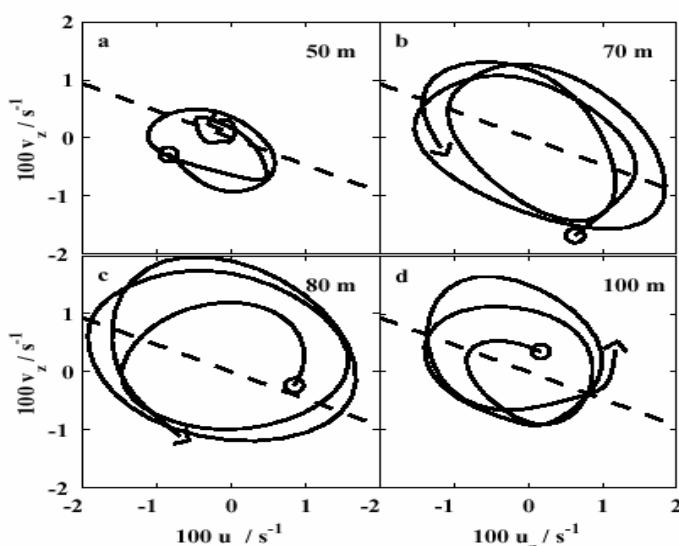
```

Hasilnya sebagai berikut:



Gambar hasil program matlan untuk , menghitung persamaan Taylor Goldstein dgn data N^2 diskrit.

Dalam solusi 4.3.16 kita melihat bahwa dalam solusi gelombang bidang maka amplitudennya tidaklah konstan, dia akan mempunyai besar dan arah dengan kata lain amplitude adalah vektor. Orientasi amplitude terhadap arah penjalanannya menyatakan polarisasi gelombang tersebut. Dari persamaan 4.3.19 kita melihat bahwa amplitude sebanding dengan shear maka jika gelombang semi inersia menjalar maka vektor shear akan berotasi. Jadi arah polarisasi akan sama dengan arah rotasi vektor shear. Arah polarisasi ini mudah kita tentukan dengan memplot $(\partial U / \partial z)$ dengan $(\partial V / \partial z)$. Hasil plot selama survei sebagai berikut:



Gambar-7 : Hodograp vektor shear untuk data deret waktu dari hari ke 294-307 dalam tahun 1998 untuk kedalaman masing-masing 50m, 70m, 80m dan 100m.
 (sumber: Alford,M & M.C. Gregg 2000)

Kita melihat bahwa umumnya arah polarisasi adalah ellips. Gelombang internal semi-inersia pada umumnya digenerasi oleh angin. Dari data sebelumnya menunjukkan bahwa angin tengara telah berhenti sebelum survei dimulai, berarti generasi oleh angin mempunyai delay waktu sebelum gelombang itu tercipta. Kita akan melihat kemungkinan generasi gelombang internal semi inersia ini oleh angin monsoon. Kita akan menggunakan metode ray tracing yaitu kita membicarakan gelombang dalam arah penjalarannya dengan kata lain arah gelombang dapat diibaratkan seperti sekelompok sinar yang memancar. Dinamika gelombang diganti dengan dinamika sinar (ray) tersebut. Sebuah sinar yang menjalar dalam aliran dasar U dibangun oleh persamaan dinamika sbb (Alford,M & M.C. Gregg, 2000):

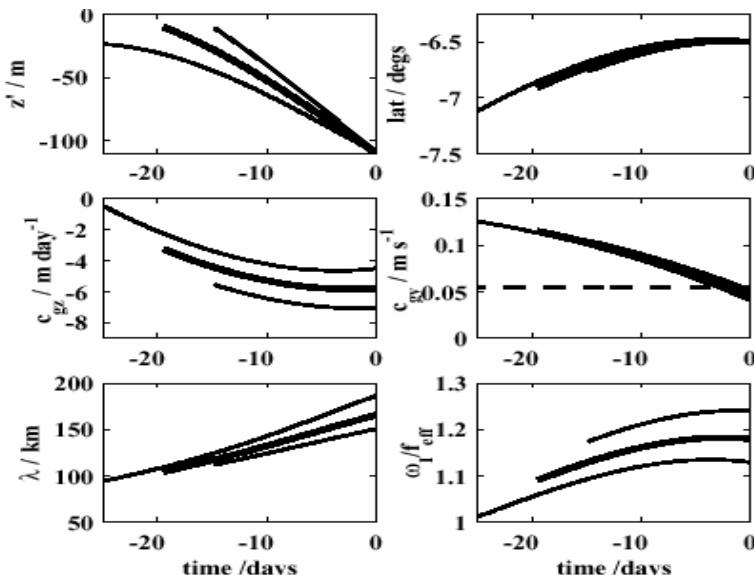
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \vec{c}_g + \vec{U} \quad 4.3.46$$

$$\frac{\partial \vec{k}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \omega$$

Dalam bentuk komponennya persamaan diatas ditulis (kita telah menggunakan aproksimasi bidang beta):

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= c_{gx} + |U| \cos(\alpha) \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= c_{gy} + |U| \cos(\alpha) \\ \frac{\partial z'}{\partial t} &= c_{gz} \\ \frac{\partial l}{\partial t} &= \frac{\partial \omega_I}{\partial y} = \frac{f_{eff}}{\omega_I} \beta \end{aligned} \quad 4.3.47$$

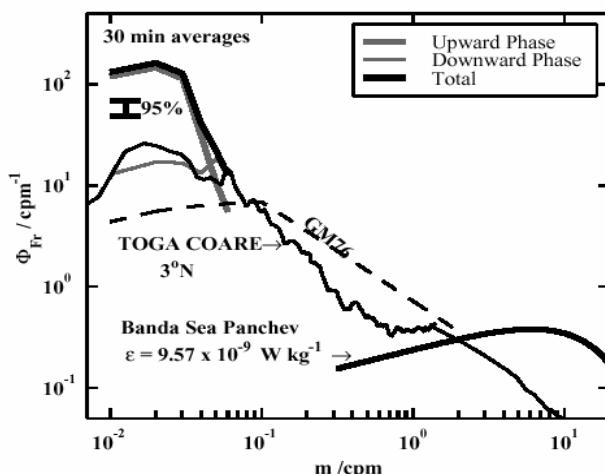
Kecapatan angin rata-rata 0.1 m/det dan $\alpha = 215^\circ$ adalah arah dari mean current (aliran dasar/kecepatan arus di laut Banda). Pada saat $t=0$ gelombang mulai digenerasi di lokasi shear tertinggi yaitu pada kedalaman 109m pada ($6.5^\circ S; 128^\circ E$). Asumsikan bahwa frekuensi intrinsik $\omega_I = 1.18 f_{eff}$ dengan arah penjalaran 295° (dari arah polarisasi). Integrasikan persamaan 4.3.35 didapat:



Gambar-8: Hasil dari perhitungan ray-tracing dengan penjalaran gelombang ke permukaan. (sumber Alford,M & M.C. Gregg, 2000)

Hasil menunjukkan bahwa gelombang mencepai kedalaman 10m selama 19.4 hari pada lintang (6.9°S ; 130.6°E), kira-kira sejauh 300 km. Perubahan lintang juga akan mempengaruhi perubahan frekuensi intrisik, dengan kata lain penjalaran gelombang juga dipengaruhi oleh lintang. Dari hasil ini dapat diduga gelombang internal semi-inersia digenerasi di salah satu sisi cekungan di sebelah barat daya pada saat musim tenggara (southeast monsoon) dan menjalar ke barat laut. Rekaman pada saat survei menunjukkan gelombang bergerak ke dasar cekungan, jadi gelombang pada penjalarannya ke atas akan dipantulkan lagi ke dasar.

Hubungan antara gelombang internal dengan mixing yang terjadi dapat dilihat dari dinamika bilangan gelombang dengan menerapkan lowpass-filter. Disini spektrum bilangan gelombang diperoleh dengan mereapkan transformasi Fourier pada shear. Dalam kalkulasi kita menggunakan teknik fast Fourier transform, untuk menerapkan teknik ini maka shear harus kita nyatakan dalam bilangan kompleks sebagai berikut $(\partial U / \partial z) + i(\partial V / \partial z)$ [teknik fast fourier transform dapat kita lakukan menggunakan Matlab]. Deret waktu kita rata-ratakan dalam selang 30 menit sehingga kita mendapatkan 144 profil Fourier transformnya. Hasil Fourier transform tersebut kita rata-ratakan. Hasil ini dengan kita plot dengan dibagi oleh besaran $\langle N^2 \rangle$ yang menghasilkan spektrum Froude. Hasil perhitungan dan dibandingkan dengan spektrum Garret-Munk 76 (GM76) yang telah terkenal itu dinyatakan oleh:



Gambar-9 : Spektrum Froude untuk laut Banda, hasilnya dibandingkan dengan eksperimen TOGA COARE dan GM76. (Alford,M & M.C. Gregg 2000)

Pada bilangan gelombang rendah, terobservasi penjalaran gelombang dengan fase ke atas. Spektrum seperti ini menyatakan signature dari gelombang internal semi inersia yang digenerasi di permukaan. Puncahnya

terletak pada 0.02 cpm yang menunjukkan konsistensi dengan shear yang kuat pada kedalaman 50m. Spektrum pada gelombang bilangan rendah ini mempunyai profil yang mirip meskipun harga secara kuantitatif lebih besar. Hal ini berarti mempunyai gambaran dinamik turbulensi yang mirip. GM76 merupakan contoh turbulensi yang telah berkembang dengan baik sehingga mempunyai sifat homogen isotropis, dengan kata lain pada kondisi diperlukan laut Banda, turbulensi telah berkembang dengan baik dan bersifat homogen isotropis. Untuk bilangan gelombang tinggi mempunyai bentuk spektrum yang berbeda dengan GM76 ataupun TOGA COARE. Spektrum TOGA COARE adalah hasil dari turbulensi pada lintang rendah. Eksperimen TOGA COARE mempunyai rate of dissipation rata-rata sebesar $\langle \varepsilon \rangle = (7.41 \pm 0.21) \times 10^{-11} \text{ W/kg}$ sedangkan untuk laut banda mempunyai rate of dissipation rata-rata sebesar $\langle \varepsilon \rangle = (9.57 \pm 0.34) \times 10^{-9} \text{ W/kg}$. Hal ini menunjukkan bahwa pada bilangan gelombang tinggi turbulensi lebih kuat di laut Banda dibandingkan TOGA COARE atupun GM76.

DISKUSI DAN PENUTUP

*If one wishes to have a maximum impact on rate or learning,
then one needs to stick one's neck out at an early time.*

Walter H. Munk

Dalam buku ini kita telah mempelajari tentang turbulensi, khususnya turbulensi yang terjadi dilaut Banda. Sebenarnya kata "turbulence" sendiri pertama kali dikemukakan oleh pelukis Italia yang sangat terkenal yaitu Leonardo da Vinci. Berhubung dia seorang pelukis maka dia merepresentasikan gagasannya melalui lukisan. Aliran fluida yang mempunyai bilangan Reynold, bilangan Froude atau bilangan Rossby yang tinggi secara alamiah akan mengalami turbulensi atau mixing. Turbulensi ini memainkan peranan yang vital baik dalam bidang engineering atau aliran fluida di sekeliling kita. Bagi manusia, turbulensi adalah mahluk yang memusingkan karena selalu berkait dengan sesuatu yang acak, random atau kacau balau. Pada umumnya kita tidak suka sesuatu yang kacau, kita menginginkan sesuatu yang teratur. Ini yang tidak kita temui dalam turbulensi, tapi kita boleh berharap ada keteraturan dalam ketidak teraturan itu. Turbulensi terjadi diseluruh penjuru alam semesta dengan skala ruang dan waktu yang berbeda, tetapi ternyata ada besaran yang bersifat universal. Sebagai contoh, dari teori Kolmogorov dapat dihitung bahwa konstanta universal turbulensi yang bersifat intermitensi, untuk laut sebesar 0.44 ± 0.01 dan untuk galaksi 0.45 ± 0.05 (Gibson,C.H 1991). Suatu hasil yang luar biasa, meskipun skala ruang dan waktu yang berbeda tetapi mempunyai konstanta universalitas yang sama. Sampai saat ini turbulensi disebut-sebut sebagai masalah terbesar dalam fisika klasik yang masih tak terselesaikan.

Dinamika laut berdampak langsung bagi kehidupan manusia, dengan salah satu contohnya adalah El Nino. Variasi tahunan dari suhu muka laut (SST) di lautan Pasifik (khususnya Pasifik tengah dan Pasifik timur) mempunyai kaitan erat dengan anomali atmosfer global. Pemanasan abnormal skala besar di samudra Pasifik ekuator di sebut El Nino. Fenomena ini berkaitan erat dengan sistem osilasi global di atmosfer yang dinamakan osilasi selatan, sehingga kedua fenomena tersebut merupakan suatu kesatuan yang sering disebut dengan nama El Nino Southern Oscillation (ENSO). Selama masa El Nino, tekanan lebih rendah dari normal diobservasi di Pasifik tropis sebelah timur dan tekanan lebih tinggi dari normal di observasi

di Indonesia dan Australia utara. Pada periode ini di Indonesia terjadi penurunan penguapan sehingga terjadi kekeringan. Siklus ENSO merupakan fluktuasi skala besar dari temperatur laut, curah hujan, sirkulasi atmosfer, gerakan vertikal dan gerakan sepanjang ekuator Pasifik. Selama periode El Nino temperatur muka laut sekitar 2°C-5°C diatas normal dan lawan dari kondisi diatas yang disebut La Nina, suhu muka laut sekitar 1°C-4°C dibawah normal. Karena fenomena ENSO berskala global maka untuk dapat memahaminya kita harus mengetahui dengan baik dinamika laut dan atmosfer skala global. Untuk laut dikenal dengan nama global ocean general circulation model (GOGCM). Pada dasarnya lautan yang mengelilingi Bumi terdiri dari tiga lautan besar yang saling berhubungan yaitu samudra Pasifik, samudra India dan samudra Atlantik. Hubungan dinamik antara samudra Pasifik dan samudra India dikontrol oleh benua maritim Indonesia yang mempunyai topografi dan jaringan selat yang kompleks. Karena merupakan kontrol dinamik dua lautan maka arus yang mengalir di kepulauan Indonesia yang dikenal dengan nama arus lintas Indonesia (Arlindo) merupakan subyek penelitian yang sangat penting dalam pemahaman kita tentang sirkulasi arus dunia. Hasil simulasi dengan GOGCM menunjukkan bahwa dengan adanya Arlindo maka pemanasan suhu muka laut di Pasifik akan bergeser ke arah barat dibandingkan tanpa kehadiran Arlindo. Lautan Pasifik juga akan lebih panas dan lautan India akan lebih dingin jika Arlindo tidak hadir. Perubahan magnitude Arlindo akan mempengaruhi pola suhu muka laut di Pasifik ekuator.

Mulai tahun 1993 telah dilakukan studi Arlindo secara intensif oleh Indonesia dan Amerika Serikat. Tujuan dari projek Arlindo ini adalah untuk mempelajari sirkulasi dan stratifikasi massa air dalam rangka untuk mengetahui sumber, pola penyebaran, transport dan proses mixing yang dominan. Pengetahuan tentang mixing sangat penting karena mixing merupakan sifat dinamik intrisik (sifat yang khas) dari suatu perairan. Sifat intrinsik ini sangat berpengaruh pada pola dinamika skala besar. Dari survei Arlindo ini menunjukkan adanya mixing yang kuat di benua maritim Indonesia. Mixing yang kuat ini diidentifikasi oleh:

1. Observasi perubahan sifat massa air di lapisan termokline atas.
2. Perairan Indonesia adalah salah satu dari tempat yang paling intensive untuk konversi energi gelombang pasang surut barotropik ke energi baroklinik.
3. Observasi adanya periode empat belas harian dan periode bulanan dari suhu muka laut.

Hasil ekspektasi dari data-data hidrografi menunjukkan bahwa kekuatan mixing di perairan Indonesia dalam orde $10^{-4} \text{ m}^2/\text{det}$. Pengukuran langsung mixing dengan Modular Microstructure Profiler (MMP) yang dilakukan di

laut Banda menunjukkan mixing yang terjadi dalam orde $10^{-6} \text{ m}^2/\text{det}$. Hal ini menunjukkan bahwa mixing yang terjadi lebih lemah dari perkiraan data hidrografi dan harga mixing dalam orde tersebut merupakan tipikal mixing untuk laut terbuka. Ada dua pemikiran untuk menjelaskan hasil diatas. Pertama, perhitungan mixing dengan data hidrografi merupakan perhitungan yang kasar yaitu kita menentukan besaran mikroskopis (skala mikro) dari besaran makroskopis (skala makro). Pemikiran kedua adalah adanya variabilitas monsoon. Seperti yang telah kita ketahui bahwa perbedaan pamanasan Matahari antara dua benua yaitu Asia dan Australia akan menggenerasi monsoon yang berubah arah dua kali dalam setahun. Sirkulasi arus permukaan pada umumnya akan mengikuti pola angin, tetapi karena distribusi daratan yang tak teratur di benua maritim Indonesia mengakibatkan perairan Indonesia mempunyai pola arus dan struktur gyre yang kompleks. Salah satu sumber utama terjadinya mixing adalah pecahnya gelombang internal. Kita telah melihat bahwa gelombang internal yang terjadi di laut Banda adalah gelombang internal tipe semi-inersia dengan angin sebagai gaya penggeraknya. Jadi variabilitas besar dan arah angin akan menyebabkan variabilitas gaya penggerak gelombang internal sebagai hasilnya dimungkinkan terjadinya variabilitas mixing. Hasil yang di dapat dari data hidrografi adalah hasil yang telah dirata-ratakan terhadap kedalaman dan dalam keadaan tunak (*steady*) sehingga variabel waktu diabaikan. Pengukuran secara deret waktu untuk beberapa musim sangat diperlukan untuk menguji hipotesis di atas. Problemlnya barangkali adalah mahalnya akusisi data serta beratnya proses akusisi data di lapangan. Tapi kita berharap bahwa misteri ini akan dapat dipecahkan. Adalah hal yang membanggakan kalau misteri ini dipecahkan oleh pemilik laut itu sendiri yaitu ilmuwan Indonesia. Semoga harapan saya menjadi kenyataan.

DAFTAR PUSTAKA

1. Alessio,S.J; K. Abdella & N.A. McFarlane 1998 "A New Second-Order Turbulence Closure Scheme for Modeling the Oceanic Mixed Layer" J.Phys.Oceanorg Vol:28,1624-1641.
2. Alford,M.H & M.C Gregg 1999 "Dyapicnal Mixcing in The banda Sea: Result of the First Microstructure Measurement in the Indonesian Througflow" J. Geophys.Lett;Vol:26,No:17, 2741-2744.
3. Alford,M.H & M.C Gregg 2000 "Near-Inertial Mixing: Modulation of Shear, strain and Microstructure at Low latitude" J. Geophys. Res. Submitted.
4. Alford,M 2000 *private communication*.
5. Brained,K & M. Gregg 1993 " Diurnal Restratification and Turbulence in the Oceanic Surface Mixed Layer" J. Geophys. Res. Vol:98, No:C12, 22.645-22.656.
6. Brainerd,K & M.Gregg 1997 "Turbulence and stratification on the Tropical Ocean-Global Atmosphere-Coupled Ocean-Atmosphere Response Experiment Microstructure Pilot Cruise" J. Geophys.Res Vol:102,No:C5, 10.437-10.455.
7. Caldwell,D & J.Moum 1995 "Turbulence and Mixing in The Ocean" Colleg of Oceanic and Atmospheric Science,OSU,Corvalis.
8. Chandrasekhar,S 1960 "Hydrodynamics & Hydromagnetic Instability " Dover, Pub. New York.
9. Clayson,C & L. Kantha 1998 "Turbulent Kinetic Energy and Its Dissipation rate in the Equatorial mixed Layer" J. Phys.Oceanorg Vol:29,2146-2164.
10. Ffield,A & A. Gordon 1992 "Vertical Mixing in The Indonesian Thermocline" J. Phys .Oceanorg Vol: 22 184-195.
11. Gaponov,A.V, Grekhov & M.I Rabinovich 1992 " Nonlinearities in Action" Springer-Verlag, Berlin.
12. Gershenfeld,N 1999 "The Nature of Mathematical Modeling" Cambridge University Press, Cambridge.
13. Gibson,C.H 1991 " Kolmogorov Similarity Hypotheses for Scalar Fields: Sampling Intermittent Mixing in the Ocean and Galaxy" Proc.Roy.Soc.Lond.A.434, 149-164.
14. Gordon,A & J. Mc Clean 1999 "Thermohaline Stratification of the Indonesian seas: Model and Observation" J. Phys. Oceanorg Vol:29, 198-216.
15. Gordon,A ; A. Ffield & A.G Ilahude 1994 "Thermocline of he Flores and Banda Sea"J. Geophys. Res Vol:99 No: C9 18.235-18.242.
16. Gordon,A; D. Susanto & A. Ffield 1999 " Througflow within Makassar Strait" Geophys.Res. Lett Vol:26, No:21, 3325-3328.

17. Gregg,M.C & E. Kunze 1991 "Shear and Strain in Santa Monica Basin" J. Geophys.Res. Vol:96, No:C9, 16.709-16.719.
18. Gregg,M.C & R.C Lien 1995 " Comparison of Turbulence Kinetic Energy Dissipation Rate Estimates from Two Ocean Microstructure Profilers" J. Atmos.Oceanic.Technol;12, No:2,346-366.
19. Gregg,M.C & T.b sanford 1988 "The Dependence of Turbulence Dissipation on stratification in a Diffusively Stable Thermocline" J. Geophys.Res. Vol:93, No:C10, 12.381-12.392.
20. Gregg,M.C 1987 "Diapycnal Mixing in the Thermocline : A Review" J. Geophys. Res. Vol: 92, No:C5 , 5249-5286.
21. Gregg,M.C 1989" Scaling Turbulent Dissipation in the Thermocline" J. Geoph.Res Vol:94, No:C7, 9686-9698.
22. Gregg,M.C 1994 "Ocean Mixing' lecture note APL-University of Washington, Seattle.
23. Gregg,M.C 1998 "Estimation and Geography of Diapycnal Mixing in the Stratified Ocean" Physical Processes in Lakes and Ocean,Coastal estuaries Studie Vol:54, 305-338.
24. Gregg,M.C, D.P. Winkel & T.B Sanford 1993" Varieties of Fully Resolved Spectra of Vertical Shear" J. Phys.Oceanorg Vol: 23, 124-142.
25. Gregg,M; H. Seim & D. Percival 1993" Statistic of Shear and Turbulent Dissipation Profile in Random Internal Wave Fields" J.Phys.Oceanorg Vol:23, No:8,1777-1799.
26. Gregg,M;D.Winkel;T.Sanford & H. Peters 1996 "Turbulence Produced by Internal wave in the Oceanic Thermocline at mid and low latitude" Dyn.Atmos.Ocea Vol:24,1-14.
27. Gregg.M.C 1991 "The Study of Mixing in The Ocean: a Brief History" Oceanography, Arpil, 39-45
28. Hautala,S; J.L Reid & N. Bray 1996 "The Distribution and Mixing of Pacific water Masses in The Indonesian Seas" J. Geophys.Res. Vol: 101, No: C5, 12.375-12.389.
29. Henyey,F & A. Hoering 1997 " Energitics of Borelike Internal Waves" J. Geophys. Res. Vol:102, No:C2, 3323-3330.
30. Huang,K 1986 " Statistical Mechanics" Wiley & Son Pub. Comp. New York.
31. Ilahude,A.G & A. Gordon 1996 " Thermocline Stratification within the Indonesian Seas" J. Geophys. Res, Vol:101, No:C5 12.401-12.409.
32. Ilyas,M; A. Sulaiman & M.C Gregg 1999 " The Water Mass Dynamics of the Banda Sea (Results from Arlindo Microstructure Survey)" Prosiding. Konferensi ESDAL'99, Jakarta.
33. Janine,H 1996 "The Small-scale sturcture of Turbulence" Ph.D Thesis, <http://tnh.phys.tue.nl/janine/thesis>.

34. Kashino,Y; E. Firing; P. Hacker; A. Sulaiman & Lukiyanto " *Direct Current Measurement in and around the Celebes Sea at February 1999.*" J. Geophys. Res. Letter. Submitted.
35. Kreyzig,E 1995 " *Advanced Engeneering Mathematics*" John Wiley & Son, New York.
36. Kundu.P.K 1990 " *Fluid Mechanics*" Academic Press, New York.
37. Kunze,E 1985 " *Near-Inertial Wave Propagation in Geostrophic Shear*" J. Phys.Oceanogr Vol:15, No:544-565.
38. Landau.L.D & E.M Lifshifz 1989 " *Fluid Mechanics*" Pergamon Press, New York.
39. Lien,R; D. Caldwell, M.C Gregg & J. Moum 1995 " *Turbulence variability at the Equatorial in the Central pacific at the Beginning of the 1991-1993 El Nino*" J. Geophys.res. Vol:100, No:C4, 6881-6898.
40. Lorenz,E 1963 " *Deterministic Nonperiodic Flow*" J. Atmos.Sci Vol:20,130-141.
41. Lukas,R; T. Yamagata; J.P McCreary 1996 " *Pacific low-latitude western boundary currents and the Indonesian throughflow*", J. Geophys. Res;Vol:101;No:C5,11.209-11.216.
42. Mack,A & D. Hebert 1999 " *Mixing Structure of High-Frequwncy Internal Waves in the Upper eastern Equatorial Pacific*" J. Phys.Oceanorg Vol:29, 3090-3100.
43. Molcard,R; M. Fieux & A.G Ilahude 1996" *The Indo-Pacific throughflow in the Timor Passage*" J. Geophys.Res Vol:101;No:C5, 12.411-12.420.
44. Monin,A.S & R.V Ozminov1985 " *Turbulence in the Ocean*" D. Reidel Pubs.Comp. Dordrecht.
45. Moum,F; D. Caldwell & C. Paulson 1989 " *Mixing in the Equatorial Surface Layer and Thermocline*" J. Geophys.Res. Vol:94, No:C2, 2005-2021.
46. Munk,W & C. Wunsch 1998 " *Energitic of Tidal and Wind Mixing*" Deep-Sea Res.I 45, 1977-2009.
47. Niwa,Y & T. Hibiya 1999 " *Response of the Deep Ocean Internal Wave Field to Traveling Midlatitude Stroms as Observed in Long-term Current Measurements*" J. Geophys. Res. Vol:104, No:C5, 10.981-10.989
48. Peters,H & M. Gregg 1988 " *Some Dynamical abd Statistical Properties of Equatorial Turbulence*" Small-Scale Turbulence and Mixing,Elsevier Science, Hthe Netherland.
49. Peters,H; Gregg,M & J. Toole 1988 " *On the Parameterization of Equatorial Turbulence*" J.Geophys.Res Vol:93,No:C2, 1119-121
50. Powell,J.L & B. Craseman, 1965 " *Quantum Mechanics*" Addison-Wesley, New York.
51. Seim,H & M.C. Gregg 1994 " *Detailed Observation of a Naturally Occurring Shear Instability*" J. Geophys.Res, Vol: 99, No:C5, 10.049-10.073.

52. Seim,H; M. Gregg & R. Miyamoto 1995 " Acoustic Backscatter from Turbulent Microstructure" J. Atmo.Ocean.Techn Vol:12, No:2, 367-380.
53. Signorini,S; C. McClain & Y. Dandonneau 1999 " Mixing and Phystoplankton Bloom in the Wake of the Marquesas Islands " J. Geophys. Res. Lett Vol: 26, No: 20, 3121-3124.
54. Sorbian,Z 1989 "Structure of the Atmospheric Boundary Layer" Prentice Hall, New Jersey.
55. Sulaiman,A ; A. Ridlo; E. Suwandana; Y. Kashino; Lukiyanto; Sutrisno & S. Praptakuncara 1999 "Data Analysis for Tropical Ocean Climate Study (TOCS)" J. Oceanica Vol-5. 25-34.
56. Sulaiman,A 1994 "Formulation of Geomagnetic Daily Variations based on the Magnetohydrodynamics Theory" B.Sc Thesis, Institut Teknologi Bandung (ITB).
57. Sulaiman,2000 "Soliton Solution of Two Layers Baroclinis Instability" Proc. Himpunan Fisikawan Indonesia XVIII, Tangerang.
58. Susanto,D 2000 " The Importance of the Maritime Continent to Global Ocean Circulation and Climate. How we should act? " Procc. Int. Conference on Ocean Science Technology and Industry, Jakarta.
59. Tomczak,M & J.S. Godfrey 1994 "Regional Oceanography: an Introduction" Pergamon Press, New York.
60. Werne,J & D. Fritts 1999 "Stratified Shear Turbulence: Evolution and Statistic" J. Geophys.Res. Lett Vol: 26, No: 4 , 439-442.
61. Wesson,J.C & M.C. Gregg 1994 " Mixing at camarinal Sill in the Strait of Gibraltar" J. Geophys.Res Vol:99, No:C5, 9847-9878.
62. Winkel,D.P 1998 " Influences of Mean Shear in the Florida Currents on Turbulent Production by Internal Waves" Ph.D Dissertation, University of Washington, Seattle.
63. Winkel,D; M. Gregg & T.Sanford 1996 " Resolving Oceanic shear and Velocity with the Multi-Scale Profiler" J. Atmos.Ocea,Techn Vol:13 No:5 1046-1072.
64. Winter,K & E. D'asaro 1996 " Diascalar flux and the rate of Fluid Mixing" J. Fluid Mech. Vol:317, 179-193.
65. Wyrtki,K 1961 "Physical Oceanography of the Southeast Asian Waters" Univ of california,La Jolla, california.
66. Waworuntu,J et al 2000 " Throughflow Dynamics in the Makassar Strait and the Western Pacific" Procc. Int. Conference on Ocean Science Technology and Industry, Jakarta.
67. Yu,Z & P.Schopf 1997"Vertical Eddy Mixing in the Tropical Upper Ocean: Its Influence on Zonal Currents"J.Phys. Oceanogr Vol:27, 1447-1458.

APENDIKS

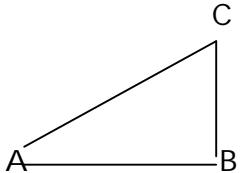
APENDIKS-A

ANALISIS VEKTOR

Pengalaman menunjukkan bahwa banyak para sarjana dalam bidang kelautan tidak menguasai metode matematika standard seperti yang terdapat dalam bukunya Kreyzig, E "Advanced Engineering Mathematics" John Wiley & Son. Buku ini adalah buku yang sudah terkenal dan telah dicetak sampai lebih dari 7 edisi. Materi yang ada dalam buku itu merupakan metode matematika minimal yang harus dikuasai jika kita ingin mempelajari dinamika atmosfer atau laut. Dalam apendiks ini diuraikan tentang analisis vektor, tetapi saya hanya menekankan pada notasinya saja karena uraian lengkap tentang analisis vektor memerlukan waktu yang cukup panjang. Untuk lengkapnya pembaca dianjurkan dengan sangat membaca buku tentang analisis vektor.

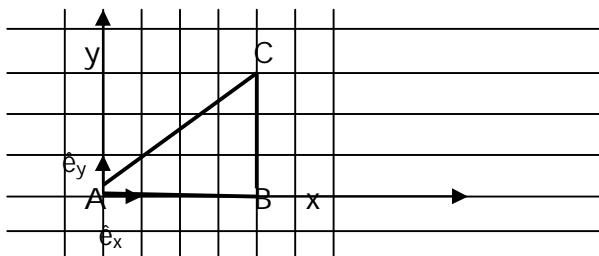
1. Aljabar Vektor

Disebuah kampung yang bernama kampung Asem, tinggalah seorang ibu dengan seorang anaknya semata wayang yang mulai menginjak dewasa. Anaknya bernama Joko Bodho, dia dinamakan demikian karena memang bodoh. Suatu hari ibunya menyuruh Joko Bodho untuk mengantarkan kue ke rumah kakaknya yang berada di kampung Cabe. Diantara kampung cabe dan kampung Asem terdapat sebuah kampung yang bernama kampung Bambu. Kampung Bambu terletak tepat lurus disebelah timur kampung Asem dengan jarak 4 km. Sedangkan kampung Cabe terletak tepat lurus disebelah utara kampung Bambu dengan jarak 3 km. Karena Joko Bodho memang bodoh maka dia berjalan dari kampung Asem ke kampung Bambu baru kemudian ke kampung Cabe, total jendral dia menempuh perjalanan sejauh 7 km. Padahal ada banyak cara menuju ke kampung Cabe. Karena lama tidak pulang maka ibunya yang sudah kebingungan menyuruh anda untuk menyusul si Joko Bodho. Berhubung anda orang cerdas dan nggak mau rugi maka anda akan mencari jalan yang terpendek untuk sampai ke kampung Cabe. Tentu saja jarak yang terpendek adalah garis lurus (dalam geometri secara umum jarak terpendek belum tentu garis lurus!!). Berapa jarak yang harus anda tempuh? Bagi orang yang ber IQ rata-rata saja, jawaban itu mudah sekali yaitu 5 km. Bagaimana kita menghitungnya? Gampang..kita gambarkan saja lokasi ketiga kampung itu sebagai berikut:



C Jarak AB = 4 km dan jarak BC 3 km maka dengan Teorema Pythagoras didapat:
 $AC^2 = AB^2 + BC^2$
 $AC^2 = 4^2 + 3^2 = 25$
 $AC = 5 \text{ km}$

Sekarang, biarkanlah anda menjadi orang iseng, yaitu kita bikin kotak-kotak bujur sangkar dengan sisinya 1 km untuk memenuhi gambar diatas. Kampung Asem kita anggap pusatnya, dalam arah timur-barat kita sebut sumbu x (dengan timur positif) dan arah utara-selatan sebagai sumbu y (dengan arah utara positif) sebagai berikut:



Jika tiap kotak dalam sumbu x kita beri simbol \hat{e}_x maka $AB = 4 \hat{e}_x$ dan jika tiap kotak dalam sumbu y kita beri simbol \hat{e}_y maka $BC = 3 \hat{e}_y$. Karena $AC = AB + BC$ maka $AC = 4 \hat{e}_x + 3 \hat{e}_y$. Kita dapat mengatakan bahwa AC mempunyai besar 5 dan arahnya ketimur 4 stuan dan ke utara 3 satuan, jadi AC suatu kuantitas yang mempunyai besar dan arah yang lazimnya disebut vektor. Suatu vektor biasanya kita beri simbol dengan huruf cetak tebal atau tanda panah diatasnya. Vektor \hat{e}_x dan \hat{e}_y yang mempunyai besar 1 disebut vektor satuan. Kedua vektor tersebut selalu memenuhi persamaan sebagai berikut:

$$\alpha \hat{e}_x + \beta \hat{e}_y = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0 \text{ dimana } \alpha, \beta \text{ skalar.}$$

Karena persamaan tersebut selalu dipenuhi untuk semua skalar maka dikatakan bahwa \hat{e}_x dan \hat{e}_y membangun sebuah ruang vektor, maka elemen dari ruang vektor yaitu \hat{e}_x dan \hat{e}_y dinamakan vektor. Karena kedua vektor tersebut tegak lurus maka dikatakan kita mempunyai suatu ruang vektor ortogonal, sehingga mereka dapat kita gunakan sebagai basis representasi atau sistem koordinat. Hal ini dapat kita perluas sampai dimensi 3 yaitu dengan menambah sumbu z. Operasi aljabar seperti penjumlahan dan pengurangan mempunyai aturan yang sama seperti halnya pada skalar. Sedangkan operasi perkalian mempunyai dua jenis yaitu operasi dot yang menghasilkan skalar dan operasi cros (rot/curl) yang menghasilkan vektor.

- Jika **A** dan **B** suatu vektor maka operasi dot akan dinyatakan sebagai berikut:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta \quad \text{A.1}$$

Dimana θ adalah sudut terpendek antara vektor **A** dan vektor **B** sedangkan tanda kurung lurus menyatakan besarnya vektor. Jika kita nyatakan kedua vektor tersebut dalam komponen basisnya untuk 3D (xyz) maka operasi dot dinyatakan oleh:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A_x \hat{e}_x + A_y \hat{e}_y + A_z \hat{e}_z & \vec{B} &= B_x \hat{e}_x + B_y \hat{e}_y + B_z \hat{e}_z \\ \vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_x \hat{e}_x + A_y \hat{e}_y + A_z \hat{e}_z) \cdot (B_x \hat{e}_x + B_y \hat{e}_y + B_z \hat{e}_z) & & \text{A.2} \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned}$$

Kita telah menggunakan definisi A.1 yaitu:

$$\begin{aligned} \hat{e}_x \cdot \hat{e}_x &= |\hat{e}_x| |\hat{e}_x| \cos 0^\circ = 1.1.\cos 0^\circ = 1 \\ \hat{e}_x \cdot \hat{e}_y &= |\hat{e}_x| |\hat{e}_y| \cos \theta = 1.1.\cos 90^\circ = 0 \quad \text{dsb} \end{aligned}$$

Hasil dari operasi ini berupa skalar, dan operasi dot adalah komutatif ($AB = BA$).

- Jika **A** dan **B** suatu vektor maka operasi cross akan dinyatakan sebagai berikut:

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta \hat{n} \quad \text{A.3}$$

Dimana \hat{n} adalah arah yang didapat dengan memutas vektor A ke vektor B searah putaran sekrup. Karena operasi cross bergantung dari arah putaran maka operasi cross tidak komutatif. Dalam komponennya operasi ini dinyatakan sebagai berikut:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x \hat{e}_x + A_y \hat{e}_y + A_z \hat{e}_z) \times (B_x \hat{e}_x + B_y \hat{e}_y + B_z \hat{e}_z)$$

Dengan aturan A.3 kita dapatkan:

$$\begin{aligned} \hat{e}_x \times \hat{e}_x &= |\hat{e}_x| |\hat{e}_x| \sin \theta \hat{n} = 1.1.\sin 0^\circ = 0 \\ \hat{e}_x \times \hat{e}_y &= |\hat{e}_x| |\hat{e}_y| \sin \theta \hat{n} = 1.1.\sin 90^\circ \hat{e}_z = \hat{e}_z \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama kita dapatkan:

$$\begin{aligned}\hat{e}_y \times \hat{e}_y &= \hat{e}_z \times \hat{e}_z = 0 \\ \hat{e}_y \times \hat{e}_x &= -\hat{e}_z \quad \hat{e}_z \times \hat{e}_x = \hat{e}_y \\ \hat{e}_y \times \hat{e}_z &= \hat{e}_x \quad \hat{e}_z \times \hat{e}_y = -\hat{e}_x\end{aligned}$$

Sehingga operasi cross menjadi:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{e}_z \quad \text{A.4}$$

Hal ini mudah dilakukan kalau kita menggunakan aturan determinan suatu matriks sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \hat{e}_x - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \hat{e}_y + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \hat{e}_z = \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{e}_z\end{aligned} \quad \text{A.5}$$

Berikut ini adalah beberapa rumus operasi aljabar vektor yang sering dipakai:

$$\begin{aligned}\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \\ (\vec{A} \times \vec{B}) (\vec{C} \times \vec{D}) &= (\vec{A} \cdot \vec{C}) (\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D}) (\vec{B} \cdot \vec{C})\end{aligned}$$

2. Diferensial Vektor

Jika saya mempunyai suatu fungsi $f(x)=x^2 + 2x$ maka turunan f terhadap x dinyatakan oleh $df/dx=2x+2$, hal ini semua orang telah tahu. Sekarang jika saya mempunyai fungsi dua variable katakanlah $f(x,y)=x^2y^3 + 3x^2y$ maka pertanyaannya berapakan turunan f terhadap x ?

Untuk satu dimensi maka df/dx menyatakan kemiringan (slope) suatu fungsi $f(x)$ di setiap titik. Dalam fungsi dua variabel maka yang ada adalah suatu turunan berarah yang dinyatakan oleh diferensial total sebagai berikut:

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \text{A.6}$$

$\partial f / \partial x$ adalah turunan parsial $f(x,y)$ terhadap x dihitung dengan mengambil y konstan dan

$\partial f / \partial y$ adalah turunan parsial $f(x,y)$ terhadap y dihitung dengan mengambil x konstan, maka diferensial total dari fungsi dua variabel diatas adalah:

$$f(x, y) = x^2 y^3 + 3x^2 y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 + 6xy \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 y^2 + 3x^2$$

$$df(x, y) = (2xy^3 + 6xy)dx + (3x^2 y^2 + 3x^2)dy$$

Jika \mathbf{A} adalah vektor dan x adalah skalar maka turunan parsial vektor \mathbf{A} terhadap x dinyatakan oleh:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial A_y}{\partial x} \hat{e}_y + \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{e}_z \quad \text{A.7}$$

Jika $f(x, y, z)$ adalah fungsi tiga variabel maka turunan total dari fungsi diatas dinyatakan oleh:

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad \text{A.8}$$

Turunan total ini dapat kita nyatakan dalam notasi vektor (yaitu dengan operasi dot) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} df(x, y, z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z \right) \cdot (dx \hat{e}_x + dy \hat{e}_y + dz \hat{e}_z) \\ &= \left(\left[\frac{\partial}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{e}_z \right] f(x, y, z) \right) \cdot (dx \hat{e}_x + dy \hat{e}_y + dz \hat{e}_z) \\ &= \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} \end{aligned} \quad \text{A.9}$$

Dimana:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{e}_z \quad \text{disebut operator del}$$

$d\vec{r} = df(x, y, z) = dx \hat{e}_x + dy \hat{e}_y + dz \hat{e}_z \quad \text{disebut inkremen jarak (displacement)}$

∇ sebenarnya bukanlah vektor riel, tetapi dia adalah operator vektor jadi dia harus bekerja pada suatu fungsi skalar atau vektor. Operator del ini mempunyai tiga macam jenis operasi yaitu gradien, divergensi dan curl.

- Gradien.

Jika φ adalah fungsi skalar maka gradien dari fungsi tersebut akan dinyatakan oleh:

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{e}_z \quad A.10$$

Jika **A** adalah vektor maka gradien **A** akan dinyatakan oleh:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\vec{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{e}_z \right) (A_x\hat{e}_x + A_y\hat{e}_y + A_z\hat{e}_z) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} & \frac{\partial A_y}{\partial z} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad A.11$$

Hasil dari operasi gradien suatu vektor adalah matrik 3x3 atau tensor rank-2.

- Divergensi

Jika **A** adalah vektor maka operasi divergensi akan dinyatakan oleh $\nabla \cdot \mathbf{A}$ yang mengukur seberapa banyak vektor **A** menyebar. Operasi ini dinyatakan oleh:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{e}_z \right) \cdot (A_x\hat{e}_x + A_y\hat{e}_y + A_z\hat{e}_z) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned} \quad A.12$$

Hasil operasi divergensi suatu vektor adalah skalar, dan kita dapat langsung mengetahui bahwa hasil divergensi skalar adalah nol dan divergensi tensor rank-2 adalah vektor.

- Curl

Jika **A** adalah vektor maka operasi curl (rotasi) akan dinyatakan oleh:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{e}_z \quad A.13$$

Hasil operasi curl dari suatu vektor adalah vektor dengan arah vektor adalah rotasi vektor **A** searah putaran sekrup, sehingga operasi curl

hanya berlaku untuk vektor. Operasi ini mengukur seberapa banyak suatu vektor berotasi.

Berikut ini beberapa rumus yang sering dipakai (jika f,g skalar dan \mathbf{A}, \mathbf{B} vektor):

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(fg) &= f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{f}\vec{A}) &= f(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot \vec{\nabla}f \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}f) &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \\ \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\end{aligned}$$

Contoh: Dalam dinamika fluida, suatu kecepatan fluida akan dinyatakan dalam fungsi vektor $\mathbf{v}(x,y,z,t)$ maka percepatan dari fluida akan dinyatakan oleh $d\mathbf{v}/dt$. Dengan teknik yang telah dikembangkan terdahulu maka kita dapat menghitung percepatan sebagai berikut:

Diferensial total dari $\mathbf{v}(x,y,z,t)$ adalah:

$$d\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} dz$$

Maka percepatan akan dinyatakan oleh (dalam notasi vektor):

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{V}}{dt} &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\frac{dx}{dt} \hat{e}_x + \frac{dy}{dt} \hat{e}_y + \frac{dz}{dt} \hat{e}_z \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \hat{e}_z \right) \\ &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V}\end{aligned}$$

Jika kita menuliskan dalam komponennya sebagai berikut:

- $\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} \hat{e}_x + \frac{d\vec{V}}{dt} \hat{e}_y + \frac{d\vec{V}}{dt} \hat{e}_z$
- $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \hat{e}_x + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \hat{e}_y + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \hat{e}_z$

- $$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = (V_x \hat{e}_x + V_y \hat{e}_y + V_z \hat{e}_z) \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \hat{e}_z \right)$$

$$= (V_x \hat{e}_x + V_y \hat{e}_y + V_z \hat{e}_z) \left(\begin{array}{l} \frac{\partial V_x}{\partial x} \hat{e}_x \hat{e}_x + \frac{\partial V_y}{\partial x} \hat{e}_x \hat{e}_y + \frac{\partial V_z}{\partial x} \hat{e}_x \hat{e}_z + \frac{\partial V_x}{\partial y} \hat{e}_y \hat{e}_x + \frac{\partial V_y}{\partial y} \hat{e}_y \hat{e}_y \\ \frac{\partial V_z}{\partial y} \hat{e}_y \hat{e}_z + \frac{\partial V_x}{\partial z} \hat{e}_z \hat{e}_x + \frac{\partial V_y}{\partial z} \hat{e}_z \hat{e}_y + \frac{\partial V_z}{\partial z} \hat{e}_z \hat{e}_z \end{array} \right)$$

Operasikan dot product menjadi:

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = \left(V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \hat{e}_x + \left(V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \hat{e}_y + \left(V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \hat{e}_z$$

Maka dalam komponennya percepatan fluida menjadi:

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \quad \text{Komponen dalam sumbu x}$$

$$\frac{dV_y}{dt} = \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \quad \text{Komponen dalam sumbu y}$$

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad \text{Komponen dalam sumbu z}$$

3. Integral Vektor

Integrasi suatu vektor berkaitan erat dengan batas integrasi. Ada tiga teorema dasar tentang integral vektor yaitu teorema gradien (integral garis), teorema divergensi (teorema Gauss) dan teorema curl (teorema Stokes). Masing-masing dinyatakan oleh:

- Teorema gradien

Jika φ adalah fungsi skalar maka teorema gradien diungkapkan oleh:

$$\int_a^b \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(b) - \varphi(a) \quad \text{A.14}$$

- Teorema divergensi atau teorema Gauss

Jika **A** adalah suatu vektor maka teorema divergensi akan dinyatakan oleh:

$$\iiint_{Volume(V)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV = \oint_{permukaan} \vec{A} \cdot \vec{n} da \quad A.15$$

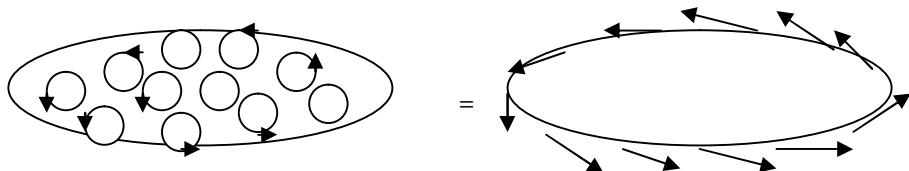
Teorema ini juga dinamakan teorema Gauss. Suku sebelah kanan menyatakan fluks dari suatu vektor **A**. Maka suatu vektor **A** disuatu permukaan adalah sama dengan penyebaran vektor A di suatu volume yang dilingkupi oleh permukaan tadi.

- Teorema curl atau teorema Stokes

Jika **A** adalah vektor maka teorema curl dinyatakan oleh:

$$\iint_{permukaan(a)} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{n} da = \oint_{keliling} \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad A.16$$

Teorema ini juga sering disebut teorema Stokes. Penggambaran geometri dari teorema tersebut dinyatakan oleh gambar berikut:



Untuk teknik perhitungan dapat dilihat di buku-buku tentang analisis vektor.

APENDIKS-B

ANALISIS FOURIER

Pada saat Napoleon berkuasa, Ilmuwan mendapat tempat yang istimewa. Salah satunya adalah Jean Baptiste Joseph Baron de Fourier. Bahkan Fourier pernah menjabat sebagai gubernur jeneral di Mesir. Pada tahun 1828 Fourier mengemukaan makalahnya yang monumental mengenai solusi persoalan konduksi termal dalam bahan dengan suatu metode yang sekarang disebut analisis Fourier. Sampai saat ini analisis Fourier mempunyai aplikasi yang luas yang berguna untuk analisis signal periodik (deret Fourier) ataupun signal yang nonperiodik (transform Fourier). Transform Fourier bersama dengan transform Laplace merupakan alat dalam pemrosesan signal digital modern.

1. Deret Fourier

Analisis dengan deret Fourier didasarkan anggapan bahwa sembarang fungsi (signal) merupakan penjumlahan (superposisi) dari fungsi-fungsi periodik. Suatu fungsi $f(t)$ dikatakan periodik dengan periode T jika memenuhi relasi $f(t)=f(t+T)$. Jika $f(t)$ adalah sembarang fungsi maka representasi fungsi tersebut dalam superposisi fungsi periodik (cosinus dan sinus) dinyatakan oleh:

$$f(t) = A_o + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nt \quad B.1$$

Asumsi ini akan berhasil baik jika $f(t)$ adalah fungsi yang periodik. Jika persamaan berikut dipenuhi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_n = B_n = 0$$

(\Leftrightarrow jika dan hanya jika) maka dikatakan bahwa $\cos(nt)$ dan $\sin(nt)$ membangun sebuah ruang vektor dengan $\cos(nt)$ dan $\sin(nt)$ adalah elemen dari ruang vektor. Elemen dari ruang vektor adalah vektor jadi $\cos(nt)$ dan $\sin(nt)$ adalah vektor. Ekspresi untuk $f(t)$ dalam deret Fourier adalah representasi fungsi $f(t)$ dalam basis representasi $\cos(nt)$ dan $\sin(nt)$. Basis representasi tersebut adalah ortogonal karena mempunyai sifat:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt = \begin{cases} 0 & \text{jika } m \neq n \\ \pi & \text{jika } m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \sin(nt) dt = \begin{cases} 0 & \text{jika } m \neq n \\ \pi & \text{jika } m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \cos(nt) dt = 0$$

Jika kita integrasikan dengan batas antara $-\pi \leq t \leq \pi$ maka persamaan B.1 menjadi:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} A_o dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} A_n \cos nt dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} B_n \sin nt dt$$

Hasil integrasinya adalah:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 2\pi A_o + 0 + 0 \quad \rightarrow \quad A_o = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

Jika kita kalikan persamaan B.1 dengan $\cos(nt)$ dan integrasikan dengan batas $-\pi \leq t \leq \pi$ maka persamaan B.1 menjadi:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \int_{-\pi}^{\pi} A_o \cos(nt) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} A_n \cos nt \cos(nt) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} B_n \sin nt \cos(nt) dt$$

Dengan bantuan sifat ortogonalitas diatas maka inetegrasi diatas menjadi:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = 0 + A_n \pi + 0 \quad \rightarrow \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

Jika kita kalikan persamaan B.1 dengan $\sin(nt)$ dan integrasikan dengan batas $-\pi \leq t \leq \pi$ maka persamaan B.1 menjadi:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \int_{-\pi}^{\pi} A_o \sin(nt) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} A_n \sin(nt) \cos(nt) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} B_n \sin(nt) \sin(nt) dt$$

Dengan bantuan sifat ortogonalitas diatas maka inetegrasi diatas menjadi:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = 0 + B_n \pi + 0 \quad \rightarrow \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

Jadi dengan definisi A_o , A_n dan B_n ini, kita dapat menyatakan sembarang fungsi $f(t)$ dalam superposisi fungsi-fungsi periodik atau kita katakan bahwa kita telah menyatakan suatu fungsi dalam representasi suatu deret yang dinamakan deret Fourier.

2. Transform Fourier

Transform Fourier pada dasarnya adalah merubah domain suatu fungsi ke domain yang alin. Untuk contoh: jika $f(t)$ adalah fungsi dalam domain waktu maka transform Fourier akan mengubah $f(t)$ dalam domain frekuensi $F(\omega)$. Bagaimana kita melakukan ini?.. caranya kita harus mengeneralisasi deret Fourier A.1 diatas. Kita tuliskan kembali deret Fourier sebagai berikut:

$$f(t) = A_o + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nt$$

Jika kita substitusikan definisi dari koefisiennya yaitu A_o , A_n dan B_n , kita dapatkan:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos(n\tau) \cos(nt) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sin(n\tau) \sin(nt) d\tau$$

Persamaan ini dapat kita tuliskan lagi dalam bentuk yang lebih sederhana sebagai berikut:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) [\cos(n\tau) \cos(nt) + \sin(n\tau) \sin(nt)] d\tau$$

Dengan rumus trigonometri:

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

Persamaan menjadi:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos n(\tau - t) d\tau$$

Dengan definisi fungsi hiperbolik:

$$\cos A = \frac{e^{iA} + e^{-iA}}{2}$$

Maka persamaan menjadi:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \left[\frac{e^{in(\tau-t)} + e^{-in(\tau-t)}}{2} \right] d\tau$$

Atau:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{in(\tau-t)} d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{-in(\tau-t)} d\tau \right]$$

Suku pertama adalah suku $n=0$ dan suku ketiga akan mempunyai eksponen positif jika n menjadi negatif yaitu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{-in(\tau-t)} d\tau = \sum_{n=-\infty}^1 \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{in(\tau-t)} d\tau$$

Dengan kondisi ini maka persamaan diatas kita susun dalam bentuk yang lebih menarik sebagai berikut:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^1 \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{in(\tau-t)} d\tau + \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{in(\tau-t)} d\tau \right]$$

Nah sekarang persamaan ini dapat kita tuliskan dalam bentuk yang lebih sederhana sebagai berikut:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{in(\tau-t)} d\tau \quad \text{B.2}$$

Ini sering disebut representasi deret Fourier dalam bentuk integral atau disebut integral Fourier. Jika batas integrasi kita ganti dengan $-L \leq t \leq L$ maka integral B.2 menjadi:

$$f(t) = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-L}^L f(\tau) e^{in(\tau-t)} d\tau$$

Jika kita perluas batas integrasi $L \rightarrow \infty$ dan $-L \rightarrow -\infty$ maka kita mempunyai integral Riemann dengan $\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n$; $\omega = \pi/L$; $n\omega = \omega_n$, maka kita dapatkan:

$$f(t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega_n}{2\pi} \left[\int_{-L}^L f(\tau) e^{i\omega_n \tau} d\tau \right] e^{-i\omega_n t}$$

Integral Reimann adalah definisi untuk integral sehingga ekspresi diatas menjadi:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau \right] e^{-i\omega t} dt$$

Dengan hasil ini kita mempunyai pasangan transform Fourier sebagai berikut:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} dt$$

dan

B.3

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

Ada beberapa sifat yang dipenuhi oleh transform Fourier sebagai berikut:

1. Transform Fourier adalah operasi linier yaitu jika $f(t)$ dan $g(t)$ adalah sembarang fungsi dan a,b skalar maka:

$$F(af(t) + bg(t)) = aF(f(t)) + bF(g(t))$$

Bukti:

$$\begin{aligned} F(af(t) + bg(t)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (af(t) + bg(t)) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt + \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= aF(f(t)) + bF(g(t)) \end{aligned}$$

2. Jika $f(t)$ kontinu dan $f(t) \rightarrow 0$ pada $|t| \rightarrow \infty$ maka:

$$F\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = i\omega F(f(t))$$

Bukti:

$$\begin{aligned} F\left(\frac{df(t)}{dt}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-i\omega t} dt \quad (\text{integral parsial}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - (-i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] \end{aligned}$$

Jadi secara umum: $F\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = (i\omega)^n F(f(t))$

Contoh:

Tentukan transform Fourier dari fungsi berikut:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{jika } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{jika lainnya} \end{cases}$$

Jawab:

$$F(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iat} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 1 e^{-iat} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-i\omega} - 1}{-i\omega} \right) = \frac{1}{\omega\sqrt{2\pi}} [\sin\omega + i(1 - \cos\omega)]$$

Hasil ini menunjukkan bahwa secara alamiah umumnya transform Fourier menghasilkan fungsi berharga kompleks. Karena dalam pengukuran kita berurusan dalam bilangan riel maka kita harus me "riel" kan fungsi kompleks tadi dengan cara mengalikan kompleks konjugatanya.

Misal:

Jika f adalah kompleks yaitu $f = a + ib$

Jika f^* adalah kompleks konjugate yaitu $f^* = a - ib$

Maka:

$$\cdot ff^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |f|^2.$$

Jika $F(f)$ adalah transform Fourier dari fungsi f maka $F(f)F^*(f) = |F(f)|^2$. Menyatakan harga absolut yang sering disebut power spectrum/spectral density yang menrepresentasikan "energi total" dari suatu sistem yang kita tinjau. Misal $f(t)$ adalah kecepatan maka power sprectrum menyatakan energi kinetiknya. Dalam oseanografi kita umumnya mempunyai data diskrit sehingga kita memerlukan transform Fourier diskrit. Tranform Fourier diskrit dinyatakan oleh:

$$F_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-i\frac{2\pi k}{N} n}$$

dan

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_N(k) e^{i\frac{2\pi n}{N} k} \quad B.4$$

Dalam Matlab telah dikembangkan algoritma untuk menghitung transform Fourier yang disebut fast Fourier transform (ff). Pada prinsipnya metode ini memecah transform Fourier diskrit ke dalam bentuk fungsi ganjil dan fungsi genap sehingga komputasinya lebih mudah. Berikut ini adalah contoh program dengan Matlab:

Program Matlab fast Fourier transform untuk fungsi:

$$f(t) = A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_2 t) + C \sin c(\omega_3 t)$$

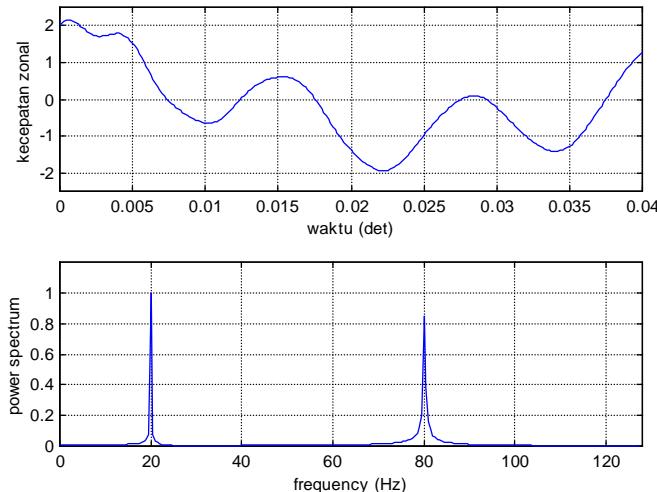
Faktor skala $n/2$, dan frekuensi nyquist $1/2$. Jumlah sampel 512. Programnya sebagai berikut:

```

clf
f1=20; f2=80; f3=80; nt=512; T=2; dt=T/nt
df=1/T;
fmax=(nt/2)*df;
t=0:dt:nt*dt;
tt=0:dt/25:nt*dt/50;
u=cos(2*pi*f1*t)+sin(2*pi*f2*t)+sinc(2*pi*f3*t);
uu=cos(2*pi*f1*tt)+sin(2*pi*f2*tt)+sinc(2*pi*f3*tt);
f=0:df:(nt/2-1)*df;
figure(1);
subplot(211)
plot(tt,uu)
grid
axis([0 0.04 -2.5 2.5])
xlabel('waktu (det)');
ylabel('kecepatan zonal');
yf=fft(u);
yp=zeros(1,(nt/2));
yp(1:nt/2)=(2/nt)*yf(1:nt/2);
subplot(212)
grid
plot(f,abs(yp))
grid
axis([0 fmax 0 1.2])
xlabel('frequency (Hz)');
ylabel('power spectrum');

```

output program dapat dilihat digambar berikut:

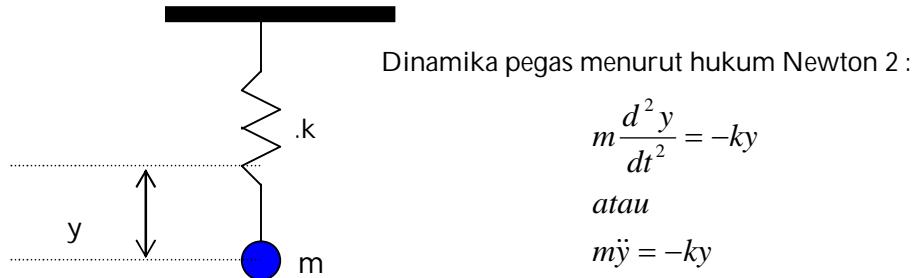


APENDIKS-C

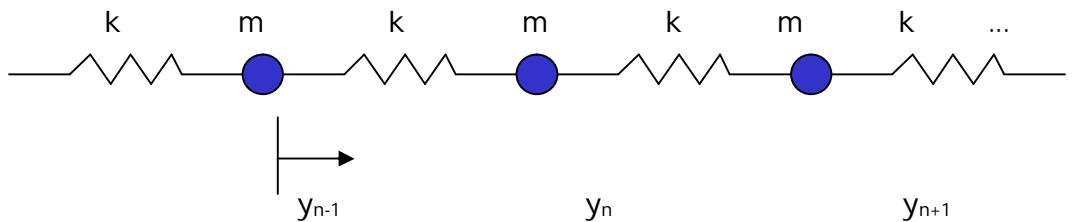
PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

Persamaan yang terdiri dari satu atau lebih turunan parsial dari fungsi dua variabel atau lebih disebut persamaan diferensial parsial (PDP). Orde dari PDP tergantung dari turunan tertingginya. Hampir semua sistem fisis yang ada didunia ini dapat diperikan dalam bentuk PDP. Pada umumnya dinamika di alam diperikan dalam PDP orde dua, karena hukum Newton-2 tentang gerak mempunyai turunan tertinggi orde dua yaitu percepatan (merupakan turunan ke dua dari jarak). Marilah kita lihat bagaimana persamaan diferensial parsial terbentuk didasarkan dari hukum Newton 2.

Misalkan kita mempunyai sebuah pegas dengan konstanta pegas k dan massa bandul m sebagai berikut:



dimana y adalah displacement terhadap titik keseimbangan. Sekarang bayangkan anda mempunyai banyak sekali (kira-kira 5 trilyun, lebih besar dari korupsinya Edi Tansil) pegas yang saling tersambung sebagai berikut:



Hukum Newton 2 untuk dinamika sistem pegas kita dinyatakan oleh:

$$m \ddot{y} = -k(y_n - y_{n+1}) - k(y_n - y_{n-1})$$

atau

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m} [y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}]$$

Kita ingat kembali definisi turunan dalam kalkulus sebagai berikut:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{\delta x}$$

dan

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} - \frac{y_{n-1} - y_n}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\Delta x^2} \approx \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\delta x^2}\end{aligned}$$

Jika sisi kanan persamaan dari sistem osilator kita kalikan dengan $(\delta x / \delta x)^2$ maka kita dapatkan:

$$\ddot{y} = k \delta x \cdot \frac{\delta x}{m} \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\delta x^2}$$

atau

$$\ddot{y} = \tau \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Persamaan ini dapat dituliskan dalam bentuk yang lebih baik (dengan menuliskan secara formal y double dot):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

dimana

$$c^2 = \frac{\tau}{\rho} \quad \text{C-1.}$$

Persamaan C-1 adalah persamaan gelombang dengan c adalah kecepatan fase. Jika τ adalah stress dan ρ adalah densitas maka c menyatakan kecepatan rambat bunyi di fluida. Disini kita mempunyai persamaan diferensial parsial orde dua dengan dua variabel yaitu (x,t) . Persamaan navier-Stokes adalah persamaan diferensial parsial orde dua yang tak linier, sedangkan persamaan difusi adalah persamaan diferensial parsial orde dua yang linier. Persamaan Navier-Stokes sampai sekarang belum ditemukan solusi analitiknya. Pada umumnya persamaan diferensial parsial orde dua yang linier dari suatu fungsi $\varphi(x,y)$ mempunyai bentuk umum:

$$A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \varphi}{\partial x} + E \frac{\partial \varphi}{\partial y} + F \varphi = G \quad \text{C-2}$$

Persamaan ini dapat dikategorikan menjadi 3 tipe berdasarkan tanda dari diskriminannya

$B^2 - 4AC$ yaitu:

- $B^2 - 4AC > 0$

Disebut tipe hiperbolik, contoh persamaan gelombang

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

- $B^2 - 4AC = 0$

Disebut tipe parabolik, contoh persamaan difusi

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

- $B^2 - 4AC < 0$

Disebut tipe eliptik, contoh persamaan Poisson

$$\nabla^2 \varphi = \rho$$

Sudah banyak teknik yang dikembangkan untuk mencari solusi persamaan-persamaan seperti diatas seperti misalnya: metode pemisahan variabel, metode transform Fourier, metode fungsi Green dsb. Misalkan kita ambil contoh solusi dengan metode transform Fourier (transform Fourier telah dikembangkan di apendiks-B) untuk mencari solusi persamaan difusi 1D sebagai berikut:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \text{C-3}$$

Ambil pasangan transform Fourier sebagai berikut:

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k, t) e^{-ikx} dk$$

dan

$$\Phi(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t) e^{ikx} dx$$

Jika kita terapkan transform Fourier pada persamaan difusi C-3, kita dapatkan:

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k, t) e^{-ikx} dk \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi(k, t)}{\partial t} e^{-ikx} dk$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k, t) e^{-ikx} dk \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k, t) \frac{\partial^2 e^{-ikx}}{\partial x^2} dk = -k^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k, t) e^{-ikx} dk$$

Maka persamaan difusi menjadi:

$$\frac{\partial \Phi(k,t)}{\partial t} = -Dk^2 \Phi(k,t) \quad C-4$$

Persamaan diferensial ini mempunyai solusi:

$$\Phi(k,t) = A(k)e^{-Dk^2 t} \quad C-5$$

Dimana:

$$A(k) = \Phi(k,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,0) e^{ikx} dx$$

Jika kita kembalikan ke transform Fourier invers dari solusi C-5 maka solusi persamaan difusi menjadi:

$$\begin{aligned} \varphi(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k,t) e^{-ikx} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{-Dk^2 t} e^{-ikx} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x',0) e^{ikx'} dx' e^{-Dk^2 t} e^{-ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x',0) e^{ik(x'-x)} e^{-Dk^2 t} dx' dk \end{aligned}$$

Selesaikan integrasi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dtk^2 + i(x'-x)k} dk = \sqrt{\frac{\pi}{Dt}} e^{-\frac{(x'-x)^2}{4Dt}}$$

Maka solusi menjadi:

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x',0) e^{-\frac{(x'-x)^2}{-4Dt}} dx' \quad C-6$$

Sejauh ini solusi yang didapat adalah solusi analitik. Solusi ini dapat dicapai untuk bentuk-bentuk tertentu saja. Pada umumnya fenomena di dunia ini dapat dinyatakan sebagai suatu struktur di dalam ruang dan waktu yang berubah setiap saat dengan cara yang beraneka ragam dan kompleks. Tentu saja hal ini biasanya diperlukan dengan persamaan yang kompleks pula sehingga solusi analitiknya sukar diperoleh. Untuk mengatasi hal ini kita memerlukan suatu hampiran yaitu kita menyelesaikan secara numerik. Salah satu metode numerik yang akan kita bahas adalah metode beda hingga (finite difference). Pada prinsipnya metode ini adalah mendiskritkan persamaan alam suatu sistem koordinat yang diskrit. Misalkan kita mempunyai suatu fungsi dua variabel $\varphi(x,t)$ maka ekspansi dalam deret

Taylor (lihat pada buku-buku tentang kalkulus) dari variabel $x \rightarrow x + \Delta x$ adalah:

$$\varphi(x + \Delta x, t) = \varphi(x, t) + \Delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x,t} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{x,t} + O[\Delta x^3]$$

Turunan pertama dapat didekati oleh beda kedepan sebagai berikut:

$$\frac{\varphi(x + \Delta x, t) - \varphi(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x,t} + O[\Delta x]$$

Jika Δx diganti dengan $-\Delta x$ maka kita dapatkan aproksimasi beda kebelakang sebagai berikut:

$$\frac{\varphi(x, t) - \varphi(x + \Delta x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x,t} + O[\Delta x]$$

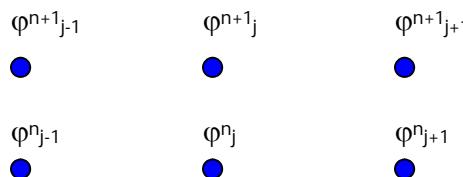
Untuk turunan yang kedua, kita terapkan rposedur yang sama terhadap turunan pertama yaitu:

$$\frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\varphi(x + \Delta x, t) - \varphi(x, t)}{\Delta x} - \frac{\varphi(x, t) - \varphi(x - \Delta x, t)}{\Delta x} \right] = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{x,t} + O[\Delta x^2]$$

atau

$$\frac{\varphi(x + \Delta x, t) - 2\varphi(x, t) + \varphi(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{x,t} + O[\Delta x^2]$$

Dalam program komputer tentu saja kita harus mendiskritkan ruang yang menjadi daerah solusi, semakin banyak grid yang kita buat, semakin halus solusi yang kita dapatkan tetapi semakin banyak iterasi yang harus kita lakukan. Lihat diskritisasi daerah solusi sebagai berikut:



Disini kita telah mendefinisikan $\varphi(j\Delta x, n\Delta t) = \varphi^n_j$

Misalkan kita mempunyai persamaan difusi dengan koefisien difusivitas konstan sebagai berikut:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

Diskritisasi persamaan ini adalah:

$$\frac{\varphi_j^{n+1} - \varphi_j^n}{\Delta t} = D \left[\frac{\varphi_{j+1}^n - 2\varphi_j^n + \varphi_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right]$$

atau

$$\varphi_j^{n+1} = \varphi_j^n + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} [\varphi_{j+1}^n - 2\varphi_j^n + \varphi_{j-1}^n]$$

Jelas disini kita mempunyai iterasi untuk mendapatkan solusi $\varphi(x,t)$. Pada dasarnya jika kita beri kondisi awal maka solusi akan didapatkan. Tetapi pada kenyataannya hal tersebut tidak selalu sukses, dalam banyak kasus hasilnya menjadi divergen. Untuk itu diperlukan suatu kriteria untuk dapat menjamin solusi tidak divergen. Kriteria ini berada dalam analisis stabilitas. Ada banyak analisis stabilitas dalam metode numerik. Dalam persamaan diatas kita ambil contoh analisis stabilitas Von Neumann, yaitu mengambil solusi dalam bentuk:

$$\varphi_j^n = A(k)^n e^{ikj}$$

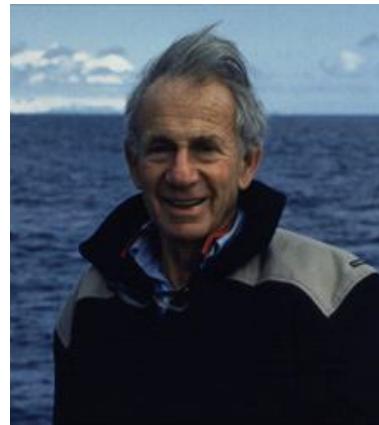
Yang menunjukkan kebergantungan osilasi terhadap ruang dan eksponen terhadap waktu. Subtitusikan ke persamaan difusi akan menghasilkan persamaan dalam $A(k)$. Jika absolut dari $A(k) > 1$ untuk beberapa k maka solusi divergen dan solusi menjadi tak stabil. Hasil substitusi fungsi diatas menghasilkan:

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} [e^{ik} - 2 + e^{-ik}] \\ &= 1 + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} [2\cos k - 2] \\ &= 1 - \frac{4D\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{k}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Jika: } |A| \leq 1 \quad \text{maka} \quad \frac{4D\Delta t}{\Delta x^2} \leq 2 \quad \text{atau} \quad \frac{2D\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1$$

Kondisi batas kita berikan, yaitu kondisi batas tetap atau periodik. Tidaklah mungkin kita menguasai metode numerik hanya dalam apendiks. Untuk persamaan-persamaan yang telah populer, telaah metode numeriknya dibahas secara baik sekali dalam sebuah buku yang terkenal dengan nama "NUMERICAL RECIPES". Buku ini baik dalam bahasa Fortran atau C dapat di download dengan alamat <http://lib-www.lanl.gov/numerical/index.html>. Pembaca dianjurkan untuk membaca buku ini untuk analisis lebih lanjut.

OCEANOGRAPHER



WALTER HENRICH MUNK

(1917-)

Walter H. Munk dilahirkan di Vienna 19 oktober 1917 dari keluarga bangsawan Austria. Ayah dan ibunya cerai ketika Munk masih anak-anak, dan Munk ikut kakeknya yang seorang Bankir kaya-raya. Setelah remaja Munk dikirim ke New York untuk didik menjadi Bankir, tetapi Munk tidak berminat pada dunia perbankan dia lebih memilih kuliah di jurusan Fisika di California Institute of Technology (Caltech). Dia menyelesaikan sarjananya pada tahun 1939 dan master pada tahun berikutnya dibawah bimbingan Prof Beno Gutenberg. Pemenang nobel fisika yaitu Prof A. Millikan (terkenal dengan percobaan tetes minyak milikan untuk menentukan muatan elektron) sangat terkesan dengan kecerdasan dan bakat Munk dalam fisika. Pada saat Munk menyelesaikan masternya, keluarganya mengalami kebangkrutan sehingga Munk secara tidak sengaja melamar pekerjaan (*summer job*) sebagai seorang teknisi oseanographer di Scripps Institution of Oceanography (SIO) di California. Di SIO ini Munk bekerja dibawah Harald U. Sverdrup (*namanya diabadikan menjadi satuan massa air yaitu Sv*) seorang oceanographer kenamaan bangsa Norwegia yang juga bekerja sebagai direktur di SIO. Di SIO Munk bertemu dengan seorang gadis cantik yang berprofesi sebagai arsitek, bernama Judith Horton yang kelak menjadiistrinya. Ternyata di SIO inilah Munk menemukan cinta sejatinya yaitu Oseanografi !!!.

Pada masa awal perang dunia Munk bersama dengan Sverdrup, Martin Johnson dan Richard Fleming menulis teksbooks oseanografi modern pertama di dunia, dengan judul "The Ocean, Their Physics, Chemistry and General Biology (New York, Prentice-Hall 1942)". Pada tahun itu juga Munk

menjadi warga negara USA. Bersama dengan Sverdrup , mereka mengembangkan metode dan formula untuk memprediksi kondisi surf. Mereka juga melayani keperluan militer khususnya dalam peramalan gelombang untuk operasi pendaratan pasukan amibi. Metodenya sukses untuk pertempuran di Afrika utara dan pantai Normandia. Sverdrup banyak mengajarkan kepada Munk bagaimana meneliti laut dari sudut pandang fisika. Munk banyak mengikuti ekspedisi dengan kapal riset. Kesenangannya melakukan ekspedisi lebih disebabkan karena jiwa petualangannya. Munk selalu menganggap dirinya petualang ilmiah. Setelah perang dunia usai, penelitian oseanografi berubah dari penelitian diatas kapal ke peralatan yang dikendalikan dari jarak jauh. Instrumen dan observasi ini terdiri dari radar, akustik, seismologi dan satelit. Dengan cara seperti itu penelitian oseanografi dapat dilakukan dalam skala sinoptik dan planeter. Dalam pengembangan metode pengendali jarak jauh, Munk bersinggungan dengan seismologi. Dia menjadi tertarik pada seismologi dan diakui sebagai salah seorang geofisikawan terkemuka di jamannya. Munk juga tertarik pada bidang astronomi. Dalam hubungannya dengan astronomi, Munk bekerja sama dengan Gordon Mc Donald menyelidiki ketakteraturan rotasi bumi. Hasil karyanya diwakili oleh buku "The Rotation of the Earth, A Geophysical Discussion" (Cambridge University Press).

Munk mengatakan: "**If you apply a significant technical innovation to a field of general interest, then you can not help but learn new things**".

Dalam penelitiannya Munk selalu menggunakan teknologi yang terbaru dan melakukan innovasi dalam instrument. Untuk itu dia bekerjasama dengan insiyur Frank Snodgrass. Carl Wunch (oceanographer kenamaan dari WHOI-MIT) mengomentari Munk sebagai berikut: "**What makes him a good scientist is his ability to see right the mathematics, to what it means physically**".

Munk dan oceanographer lain pernah terlibat dalam uji coba senjata nuklir di lagoon Bikini. Munk menyelidiki dinamika gelombang akibat ledakan nuklir. Pada fase inilah Munk mengembangkan program komputer untuk analisis gelombang dan juga mengembangkan metode statistik untuk dinamika gelombang. Disamping itu dia juga menulis paper klasik tentang sirkulasi arus yang diimbuh angin (*wind-driven ocean circulation*). Dalam kapasitasnya sebagai geofisikawan, Munk ikut mendirikan the Cecil and Ida Grenn Institute of Geophysics and Planetary Physics (IGPP) di SIO dan menjadi direkturnya untuk beberapa tahun. Ketertarikannya pada bidang geofisika menyebabkan Munk menjadi anggota dari International Geophysical Year (IGY). Bersama geofisikawan lain dia memprakarsai ekspedisi pengeboran kerak bumi untuk menembus lapisan diskontinuitas MOHO. Ini merupakan proyek kontroversial dan menjadi cikal-bakal program ocean drilling project

yang nantinya akan memberikan pemahaman revolusioner pada bidang geologi dan sejarah bumi.

Selama masa perang dingin Munk merupakan penasehat kepresidenan untuk kemiliteran dan masalah tempur di laut. Selama periode 1965-1975 Munk bersama dengan Garrets mengembangkan instrumen untuk mempelajari gelombang internal dan karyanya diabadikan dalam spektrum Garrets-Munk. Kita mengenalnya sebagai spektrum Garrets-Munk 1976 (GM-76). Dalam bidang oseanografi akustik, Munk bekerja sama dengan Carl Wunch ikut mengembangkan penelitian dalam tomografi akustik. Karyanya diwakili dalam buku "Ocean Acoustic Tomography" (Cambridge University Press).

Munk banyak membuat kontribusi mendasar dalam oseanografi. Dia penerima medali National Medals of Science dari pemerintah Amerika Serikat yang diserahkan oleh Presiden Ronald Reagen. Barangkali penghargaan yang tertinggi yang diterima Munk adalah Vetlesen Prize yang sering disebut sebagai hadiah nobelnya untuk ilmu bumi.

Munk menghabiskan seluruh kariernya di SIO University of California at San Diego. Sekarang Munk berkantor di gedung IGPP – SIO University of California. Banyak ilmuwan muda datang ke kantornya dan meminta nasehatnya. Munk selalu memberi nasehat "**"Follow your heart!"**

disarikan dari berbagai sumber.