Wahrscheinlichkeit und Statistik FS

Franz Knobel (knobelf)

Unabhängig → paarweise unabhängig ⇒ unkorreliert

korreliert → abhängig

Wahrscheinlichkeiten Rechenregeln:

$P(A^c) = 1 - P(A)$

$P(A^c|S) = 1 - P(A|S)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{=\emptyset,\ \text{disjunkt}}$

$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

$P(A \cap B) \overset{\text{unab.}}{=} P(A) \cdot P(B)$

$P(A \cap B|S) \overset{\text{unab.}}{=} P(A|S) \cdot P(B|S)$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$B_1 \cup \ldots \cup B_k = \Omega$ & $B_i \cap B_j = \emptyset \quad (i \neq j)$ disjunkt

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(A|B_j) \cdot P(B_j) \overset{k=2}{\Longrightarrow} P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c)$$

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A|B_j) \cdot P(B_j)} = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c)}$$

Allgemein:

$P(A) \geq 0 \qquad P(\Omega) = 1 = P(A) + P(A^c)$

$P(\emptyset) = 0 \qquad P(A \setminus B) = P(B \cap A^c) = P(A) - P(A \cap B)$

$A \subseteq B: \quad P(A) \leq P(B)$

$$P_{X,Y}(X|Y) = P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(x,y)}{P(y)}$$

Diskret

$\boxed{\text{i.i.d}}$ independant & identically distributed

Zufallsvariable: $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Gewichtsfunktion: $p_X : \omega(x) \to [0,1]$, $p_X(x_k) = P[X = x_k]$

Verteilungsfunktion: $F_X(t) = P[\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq t\}] = \sum_{k \text{ mit } x_k \leq t} p_X(x_k)$

Erwartungswert: $E[X] = \sum_k x_k \cdot p_X(x_k) = \sum_{x_k \in \mathrm{Im}(X)} x_k \cdot P[X = x_k]$

- $E[\sum_i X_i] = \sum_i E[X_i]$
- $E[Xa + Y + c] = a \cdot E[X] + E[Y] + c$
- $E[g(X)] = \sum_k g(x_k) \cdot p_X(x_k)$
- $E[\prod X_i] = \prod E[X_i]$

- $E(XY) = E(X) \cdot E(Y) + \mathrm{Cov}(X,Y)$

Varianz: $Var[X] = E[(X - E[X])^2] = \sum_k (x_k - E[X])^2 \cdot p_X(x_k)$

- $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$
- $Var[aX + b] = a^2 \cdot Var[X]$
- $Var[\sum X_i] = \sum Var[X_i] + 2 \cdot \sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$
- $Var[\sum X_i] = \sum Var[X_i]$

Covarianz: $Cov(X,Y) = E[(X - E[X]) \cdot (Y - E[Y])]$

$= E[X_i \cdot X_j] - E[X_i] \cdot E[X_j]$

$= 0$, unabhängig oder unkorreliert

Standardabweichung: $\sigma(X) = \sqrt{Var[X]}$

Gemeinsame Verteilungsfunktion: $F(x_1, \dots, x_n) = P[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n]$

- $F(x_1 \dots x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n)$
- $p(x_1 \dots x_n) = p_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot p_{X_n}(x_n)$
- $p_{X|Y}(x_1, y_1) = p_X(x_1) \iff X \perp Y$
- $A_i = \{X_i \in B_i\}$ $P[X_1 \in B_1 \dots X_n \in B_n] = \prod P[X_i \in B_i]$

Bernoulli-Verteilung: $X \sim Be(p)$

Wie ein Glied der Bin. Vert.

$E[X] = p$

$Var[X] = p \cdot (1-p)$

$p_X(1) = p$ $p_X(0) = 1 - p$

$F_X(k) = 1 - p$ $0 \leq k < 1$

Binomial-Verteilung $X \sim Bin(n,p)$

$X = \sum X_i$, $X_i \sim Be(p)$

$E[X] = n \cdot p$

$Var[X] = n \cdot p(1-p)$

$p_X(k) = P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$F_X(n) = 1$

$F_X(k) = \sum_{i=0}^{\lfloor k \rfloor} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$

geg # Versuche, P für k Erfolge

Negativ-Binomial-Verteilung

$p_X(k) = \binom{k-1}{r-1} \cdot p^r (1-p)^{k-r}$

$E[X] = \frac{r}{p}$

$Var[X] = \frac{r(1-p)}{p^2}$

geg: # Erfolge = r, ges: # Versuche = k

Uniforme-Verteilung (Laplace)

$P[X = x] = \begin{cases} 1/n & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$F_X(k) = \begin{cases} \frac{\lfloor k \rfloor - a + b}{n} & a \leq k \leq b \\ 1 & k > b \\ 0 & k < a \end{cases}$

$E[X] = \frac{a+b}{2}$, $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

$Var(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$

Geometrische-Verteilung $X \sim geom(p)$

$E[X] = \frac{1}{p}$ # Versuche bis zum 1. Erfolg

$Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$

$p_X(k) = p(1-p)^{k-1}$

$F_X(k) = 1 - (1-p)^k$

! Gedachtnislosigkeit

Hypergeometrische-Verteilung

$p_X(k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{m-k}}{\binom{r+s}{m}}$, $E(X) = \frac{rm}{n}$

r = # Typ 1 P für k mal Typ 1

s = # Typ 2

n = r+s

m = # Züge

Poisson-Verteilung $X \sim P(\lambda)$ pois(λ)

$E[X] = \lambda$

$Var[X] = \lambda$

$p_X(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

$F_X(k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$

Bin → Poisson $n \to \infty$

$\lambda = n \cdot p$

$\lim_{n \to \infty} P[X_n = k] = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

Summenregel

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = 1$

für $X \sim P(\lambda)$, $Y \sim P(\mu)$ X, Y unabh.

$X + Y = P(\lambda + \mu)$

Randverteilung:

$F_X(x) = P[X \leq x] = P[X \leq x, Y \leq \infty] = \lim_{y \to \infty} F(x,y)$

$p_X(x) = P[X = x] = \sum_{y_i \in \Omega(y)} P[X = x, Y = y]$

$= \sum_{y_i \in \dots} p(x, y_i)$, $x \in \Omega(x)$

Stetig

$\boxed{\text{i.i.d.}}$ independent, identically distributed

Zufallsvariable: $X : \Omega \to \cdot$

Dichtefunktion: $f_X(s) = F_X'(t)$

i) ≥ 0, $f_X = 0$ ausserhalb von $W(x)$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

Verteilungsfunktion: $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(s)\,ds = P[X \leq t] = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}\,dx\,dy$ obere Schranke!

i) wachsend, rechtsstetig

ii) $t \to -\infty \equiv 0$, $t \to \infty = 1$

Erwartungswert: $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx$

- $E[aX + Y + c] = aE[X] + E[Y] + b$
- $E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\,dx$
- $E[\prod X_i] = \prod E[X_i]$

Varianz: $Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (s - E[X])^2 \cdot f_X(s)\,ds$

- $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$
- $Var[\sum X_i] = \sum Var[X_i] + 2 \cdot \sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$
- $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$
- $Var[\sum X_i] = \sum Var[X_i]$

Covarianz Siehe Diskret

- $Cov[X, X] = Var(X)$

Standardabweichung $\sigma(x) = \sqrt{Var(x)}$

Correlation: $Corr(X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}} = \frac{E[XY] - E[X] \cdot E[Y]}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$

$E[V \cdot M] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} vm\, f(v,m)\,dv\,dm$

- $Cov[aX, bY + c] = ab\, Cov[X, Y]$
- $Cov[X + Y, Y] = Cov[X, Y] + Cov[Y, Y]$

f stetig, $X_{iid} \longrightarrow f(X)$ iid

Gemeinsame Verteilungsfunktion

$F_X(x_1 \dots x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots, t_n)\,dt_n \dots t_1 = F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n)$

$P[(x_1 \dots x_n) \in A] = \int_{(x_1 \dots x_n) \in A} f(t_1 \dots t_n)\,dt_n \dots t_1$

$f(x_1 \dots x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n)$ ← def. von unabh.!

Randverteilung

$F_X(x) = P[X \leq x, Y \leq \infty] = \lim_{y \to \infty} F(x, y)$

$f_X(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \\ 0 \end{cases}$

Faltung X, Y iid $\quad U = \frac{X + Y + \dots}{\dots} \Rightarrow Y = \dots$

$f_U(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(\quad)\,dy$

finde Grenzwerte!

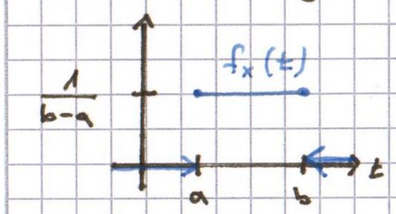
1. $F_U(t) = P[U \leq t] = P[\frac{X+Y+\dots}{\dots} \leq t]$
2. $A_u = \{(x, y, \dots) \in \mathbb{R}^{\dots} \mid \frac{x+y+\dots}{\dots} \leq u\}$
3. $F_U(t) = P[(\dots) \in A_u] = \iint_{A_u} f(x,y)\,dy\,dx$

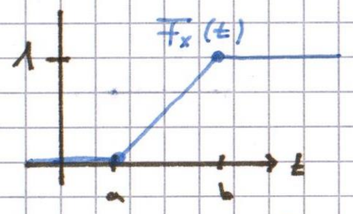
$= \int_{\dots}^{\dots}\int_{\dots}^{y=\dots} f(x,y)\,dy\,dx \quad \Big| \quad v = \frac{x+y+\dots}{\dots} \quad dv = \dot{v}\,dy$

$= \dots \int_{\dots}^{\dots}\int_{\dots}^{v} f(x, \dots)\,dx\,dv \Rightarrow f_U(t) = \frac{dF_U}{du} = \int f(x, \dots)\,dx$

Stetige Verteilungen

Gleichverteilung / Uniformverteilung $X \sim U[a,b]$





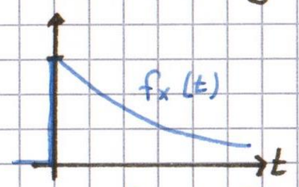
$E[X] = \frac{a+b}{2}$

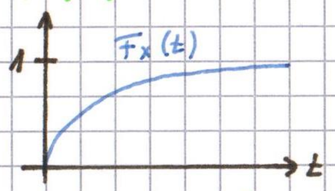
$Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 1 & t \geq b \end{cases}$$

partiell Integrieren $\omega(x) = [a,b]$

Exponentialverteilung $X \sim Exp(\lambda)$





$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

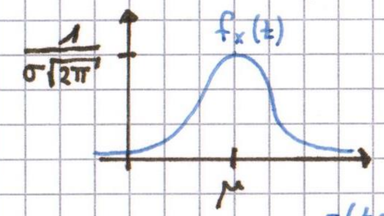
$E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $\qquad Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$ $\qquad \omega(X) = [0, \infty[$

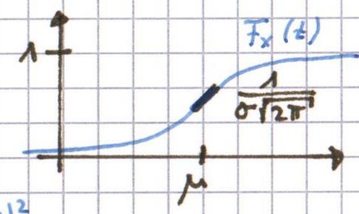
Radioaktiver Zerfall

↳ Gedächtnislosigkeit

$P[X \geq t+s \mid X \geq s] = P[X \geq t]$

Normalverteilung $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $\qquad \omega(X) = \mathbb{R}$





$E(X) = \mu$

$Var(X) = \sigma^2$

$f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $\qquad F_X(t) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$

Standard-Normalverteilung

z-Transformation $\qquad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$P[Z \geq z] = 1 - \Phi(z)$

$\Phi(t)$ = Verteilungsfunktion $= \mathcal{N}(0,1)$ $\qquad P[Z \geq -z] = 1 - \Phi(-z) = \Phi(z)$

$\varphi(t)$ = Dichtefunktion

$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-s^2/2}\, ds \qquad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t^2/2}$

- $A \sim \mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A^2)$ & $B \sim \mathcal{N}(\mu_B, \sigma_B^2)$

  $\Rightarrow C = A + B \Rightarrow C \sim \mathcal{N}(\mu_C, \sigma_C^2)$

- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ & $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

  $P(Z \leq z) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq z\right) = P(X \leq \sigma z + \mu) = \Phi(z)$

Ungleichungen

Satz: $X_1 .. X_n$ iid

$E[X_1] = .. E[X_n] = \mu$, $Var[X_1] = .. = Var[X_n] = \sigma^2$

$$P\left[\left|\frac{X_1 + .. + X_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2}$$

Bei vielen repetitionen
→ arith. mittel mit hoher W-keit nahe am Erwartungsw.

Markov-Ungleichung

$g: W(X) \to \mathbb{R}^+$, $\forall c \in \mathbb{R}$ $g(c) > 0$, g wachsend

$$P[X \geq c] \leq \frac{E[g(x)]}{g(c)}$$

Chebyshev-Ungleichung

$Y = ZV$ mit endl. Varianz

$\Rightarrow \forall b > 0$

$$P[|Y - E[Y]| \geq b] \leq \frac{Var[Y]}{b^2}$$

Das schwache Gesetz der grossen Zahlen

$X_1 .. X_n$ unabhängig

$E[X_1] = E[X_n] = \mu$, $Var[X_1] = .. = \sigma^2$

$S_n = \sum X_i$

$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \cdot S_n$

$P[|\overline{X_n} - \mu| > \varepsilon] \xrightarrow{n \to \infty} 0$ $\forall \varepsilon > 0$

↳ $\overline{X_n} \xrightarrow{n \to \infty} \mu$

! $\mu = E[X_1] = E[X_2] = .. = E[X_n]$

Das starke Gesetz der grossen Zahlen

gleiche Voraussetz. wie beim schwachen Gesetz der grossen Zahlen

$\overline{X_n} \xrightarrow{n \to \infty} \mu$ P-fastsicher (P.f.s.)

$$P\left[\left\{\omega \in \Omega \mid \overline{X_n}(\omega) \xrightarrow{n \to \infty} \mu\right\}\right] = 1$$

Zentraler Grenzwertsatz

eg: 160 Säcke Kartoffeln: Wie gross P, dass $\Sigma \geq$.

$X_1 .. X_n$ iid. $E[X_i] = \mu$ $Var[X_i] = \sigma^2$ $i \in \{1..n\}$

$S_n = \sum X_i$

$\Rightarrow S_n \sim N(E(S_n), Var(S_n))$

$$\lim_{n \to \infty} P\left[\frac{S_n - n \cdot \mu}{\sigma \cdot \sqrt{n}} \leq x\right] = \Phi(x)$$

$$Var[S_n] = Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = n \cdot \sigma^2$$

Normalisierung von S_n:

$$S_n^* = \frac{S_n - n \cdot \mu}{\sigma \sqrt{n}} = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} P[S_n^* \leq x] \approx \Phi(x) = N(0,1)$$

Grosse Abweichungen

Chernov-Schranke / momenterzeugende Funktion

→ $X_1 .. X_n$ iid , $S_n = \sum X_i$

$$M_X(t) = E[e^{t \cdot X}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$$

$$P[S_n \leq b] \leq \frac{E[g(S_n)]}{g(b)} = \frac{(M_X(t))^n}{e^{t \cdot b}} = \exp\left(\inf_{t \in \mathbb{R}} \left(n \cdot \log M_X(t) - tb\right)\right)$$

→ $X_1 .. X_n$ unabhängig , $X_i \approx Be(p_i)$, $S_n = \sum X_i$, $\mu_n = E[S_n] = \sum p_i$
$\approx Bin$
, $\delta > 0$

$$P[S_n \geq (1+\delta) \cdot \mu_n] \leq \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu_n}$$

Schätzer

$T_i = t_i(X_1 .. X_n)$ alle mögl. Schätzer

$t_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\underline{T_i(\omega)} = t_i(x_1 .. x_n) = $ Zahl

Schätzwert für Realisierung der zV

$\Theta = \{\vartheta_1, .. \vartheta_m\}$

Erwartungstreu

$E_\vartheta[T] = \vartheta$

Erwartungswert über alle mögl. Realisationen von X

Bias

$= E_\vartheta[T] - \vartheta$

unbiased $= 0$

Mittlerer quadratischer Schätzfehler MSE

$MSE_\vartheta[T] := E_\vartheta[(T-\vartheta)^2]$

$= Var_\vartheta[T] + (E_\vartheta[T] - \vartheta)^2$

konsistent $T^{(n)}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P_\vartheta[|T^n - \vartheta| > \varepsilon] = 0$

$\hookrightarrow T^{(n)}$ konvergiert gegen ϑ

für $X_1 .. X_n$ iid

$p(x_1 .. x_n; \vartheta) = \prod_{i=1}^n p_X(x_i; \vartheta)$

$f(x_1 .. x_n; \vartheta) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i; \vartheta)$

Likelyhood-Funktion

$L(x_1 .. x_n; \vartheta) = \begin{cases} p(x_1 .. x_n; \vartheta) & \text{disk.} \\ f(x_1 .. x_n; \vartheta) & \text{stetig} \end{cases}$

log-likelyhood-Funk.

$\log(L(x_1 .. x_n; \vartheta))$

Maximum-likelyhood-Schätzer

$\max \; L(x_1 .. x_n; \vartheta)$

$\hookrightarrow$ Ableiten nach $\vartheta \overset{!}{=} 0$

(Meist mit $\log(L_)$, da einfacher)

Momenten Schätzer

$T = (\underbrace{T_1}_{E[X]}, \underbrace{T_2}_{Var[X]})$

$\overline{X_n}$

siehe ML für $N(\mu, \sigma^2)$

$\frac{1}{n}\sum(X_i - \overline{X_n})^2$

⚠ Nicht erwartungstreu

Für Erwartungstreue

$T = (T_1^*, T_2^*)$

$T_1^* = \overline{X_n}$

$T_2^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2 = S^2$

empirische Stichprobenvarianz

ML für Be(ϑ)

$\vartheta = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$

ML für $N(\mu, \sigma^2)$

$T_1 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \overline{X_n}$

$T_2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i^2) - \overline{X_n}^2$

ML einsetzen und $\log(L)$ nach μ und nach $\nu = \sigma^2$ ableiten

ML für Bin(p)

$T = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$

Satz 7.1 $S_n = X_1 .. X_n$ iid $\sim N(\mu, \sigma^2)$

$\frac{1}{n}S_n$

1) $\overline{X_n} \sim N(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$ $\quad \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = N(0,1)$

2) $\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum(X_i - \overline{X_n})^2$ χ-Verteilt $n-1$ Freiheitsg.

3) $\overline{X_n}$ und S^2 unabh.

4) $\frac{\overline{X_n} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{S/\sigma} = \frac{\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \frac{n-1}{\sigma^2} \cdot S^2}}$

$\sim$ t-Verteilt, $n-1$ Freiheitsgrade

4.2.1 Bekannte Verteilungen

$X_i \overset{iid}{\sim} \text{Poisson}(\lambda_i) \Rightarrow S_n \sim \text{Poisson}(\sum \lambda_i)$

$X_i \overset{iid}{\sim} \text{Bernoulli}(p) \Rightarrow S_n \sim \text{Binomial}(n, p)$

$X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow S_n \sim \mathcal{N}(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$

4.2.2 Erwartungswerte und Varianzen

$E(S_n) = n \cdot E(X_1)$	$E(\overline{X}_n) = E(X_1)$
$Var(S_n) = n \cdot Var(X_1)$	$Var(\overline{X}_n) = \frac{1}{n} Var(X_1)$
$\sigma_{S_n} = \sqrt{n} \cdot \sigma_{X_1}$	$\sigma_{\overline{X}_n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sigma_{X_1}$

Hypothesentest

Menge aller vermuteten

Nullhypothese $H_0 := \vartheta \in \Theta_0$

Alternativhypothese $H_A := \vartheta \in \Theta_A$

	Resultat im Annahmebereich	Resultat im Verwerfungsbereich
H_0 true	✓	H_0 abgelehnt Fehler 1. Art
H_0 false	H_0 nicht verworfen Fehler 2. Art	✓

H_0 ist einfach falls $|\Theta_0| = 1$

Teststatistik $T = t(X_1 .. X_n)$

Likelyhood-Quotient

$$R(x_1 .. x_n; \vartheta_0; \vartheta_A) := \frac{L(x_1 .. x_n; \vartheta_0)}{L(x_1 .. x_n; \vartheta_A)}$$

Falls $R(..)$ klein: P_{ϑ_A} wahrscheinl.

gross: P_{ϑ_0} wahrscheinl.

Fehler 2. Art $\beta(p) = P(\text{Fehler 2. Art}) = P_{H_A}(X \notin K)$

Macht eines Tests $1 - \beta(p)$

Signifikanzniveau α

prozentualer Bereich im Verwerfungsbereich

z-Test $\mathcal{N}(\mu, \sigma_x^2)$

σ_x^2 bekannt $\quad H_0: \mu = \mu_0 \quad H_A: \mu \neq \mu_0$

Teststatistik: $z = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X_n} - \mu_0}{\sigma_x} \sim \Phi$

Verwerfungsb. $|z| > \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ für 2seitigen Test

t-Test $\mathcal{N}(T, \hat{\sigma}^2)$

$n-1$ Freiheitsgrade

$$T = \sqrt{n} \frac{\overline{X_n} - \mu_0}{S} \qquad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X_n})^2$$

$$|T| > (t_{n-1})^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

testen für Erwartungswert, bei geschätzter Varianz S^2

P-Wert:

Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnis, oder ein Extremeres zu erhalten.

→ falls P-Wert unter α

→ H_0 verworfen

sonst H_0 nicht verworfen

Modell eg: unter P_λ, X_i iid $\sim Pois(\lambda)$

$i = 1 .. 6$, λ unbekannt

Nullhypothese $H_0: \lambda = \lambda_0 = 0.5$

Alternativhypothese $H_A: \lambda = \lambda_A > \lambda_0$

Teststatistik $T = \sum_{i=1}^{6} X_i$

↳ evt. Likelyhood-Quotient

Verteilung von T unter H_0

$H_0: T \sim Pois(6\lambda_0) = Pois(3)$

Verwerfungsbereich hier: für $K = (k, \infty)$

Signifikanzniveau 2.5 %

$P_{\lambda_0}[T \in K] = P_{\lambda_0}[T > k] \leq 2.5\%$

$\Leftrightarrow P_{\lambda_0}[T \leq k] \geq 97.5\%$

k	$P_{\lambda_0}[T=k]$	$P_{\lambda_0}[T \leq k]$
5	0.101	0.916
6	0.050	0.966
7	0.022	$\boxed{0.988}$

→ Berechne $P_{\lambda_0}[T \leq k] \geq 97.5\%$

$\Rightarrow K = (7, \infty)$

Beobachteter Wert Teststatistik

$t = T(\omega) = 6$

Testentscheid: Da $6 \notin K \Rightarrow$

H_0 wird nicht verworfen

T - Test

Bedingungen: Normalv. σ unbekannt,

μ unbekannt

Modell: Pr $X_1 \dots X_6$ iid $\sim N(\mu, \sigma^2)$

μ, σ unbekannt $\rightarrow$ t - Test

H_0: $\mu = 5.8 = \mu_0$

H_A: $\mu \neq 5.8 = \mu_0$

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \cdot \sum X_i$$

$$T = \frac{\overline{X}_6 - \mu_0}{S_6} \cdot \sqrt{6}$$

$$S_6^2 = \frac{1}{6-1} \sum_i^6 (x_i - \overline{x}_6)^2$$

Verteilung unter H_0

T ist t-Verteilt,

5 Freiheitsgrade (df) $(6-1) \rightarrow (n-1)$

($\rightarrow t_{n,1-\alpha}$ Tabelle)

Verwerfungsbereich $\alpha = 1\%$

H_0 wird verworfen falls

$|T| > 4.032$

Beobachteter Wert

$\overline{x}_6 = \dots$

$S_6 = \dots$

$|t| = \dots$

Testentscheid

da $|t| < 4.032 \rightarrow H_0$ nicht verwerfen

Grenzwerte

L'Hôpital Falls $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Falls $\sqrt{n-1} - \sqrt{n+1}$ multipliziere mit $\frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}$

Wurzeltrick

$$\sqrt{n^2+1} = n \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$$

Regeln

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{k} = 1 \text{ für } k > 0 \qquad 0^n = 0 \qquad 1^n = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{a}{f(x)}\right)^{b f(x)} = \lim_{x \to 0} (1+a f(x))^{\frac{b}{f(x)}} = e^{ab}$$

Arithmetische Folgen $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\qquad \sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Arithmetische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{n} (a_0 + k\,d) = a_0(n+1) + d\,\frac{n(n+1)}{2}$

Geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{n} a_0 q^k \overset{q=1}{=} a_0(n+1) \overset{q \neq 1}{=} a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Logarithmus $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$

Exponentialreihe $e = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $\qquad e^{cx} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(cx)^k}{k!} = 1 + \frac{cx}{1!} + \frac{(cx)^2}{2!} + \ldots$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^2 (x-1)^k$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_0 q^k k \overset{q=1}{=} a_0 \frac{n(n+1)}{2} \overset{q \neq 1}{=} a_0 \frac{n q^{n+2} - (n+1) q^{n+1} + q}{(q-1)^2} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k\,q^k = \frac{q}{(1-q)^2}$$

Logarithmus

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y) \qquad \log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y) \qquad \log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

$$\log_a a = 1 \qquad \log_a 1 = 0$$

Statistik

6

6

n

si

... σ, ist für ... Stichprobe ... Zufallsvariablen ... σ

Schätzung für σ^2: $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$ (Schätzer $\widehat{\sigma}$) $X_1, \dots, X_n$ iid $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Teststatistik: $T = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\widehat{\sigma}}$ Student-t verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden

Verwerfungsbereich: $|T| > (t_{n-1})^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ für $H_A : \mu \neq \mu_0$

$T < -(t_{n-1})^{-1}(1-\alpha)$ für $H_A : \mu < \mu_0$

$T > (t_{n-1})^{-1}(1-\alpha)$ für $H_A : \mu > \mu_0$

Vertrauensintervall: $I = \left[\overline{x}_n - \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \overline{x}_n + \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ für 2-seitiges Problem

$I = \left[\overline{x}_n - \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,1-\alpha}, \infty\right]$ für $H_A : \mu < \mu_0$

P-Wert: $2 \cdot (1 - F_{t_{n-1}}(|z|))$ für 2-seitiges Problem

$1 - F_{t_{n-1}}(z)$ für 1-seitiges Problem

- Schätzer: • Parameterraum: Θ ($\vartheta \in \Theta$) → halen Verteilung
  wir suchen für Parameter $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m$ Schätzer $T_1, \dots, T_m$ (sind zufalls Variablen)
  • Schätzand: $T_j(\omega) = t_j(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) = t_j(X_1, \dots, X_n)$
  • Kritischer Bereich = Verwerfungsbereich = K

7 Statistischer Test

7.1 Allgemeines Vorgehen

Beobachtet wird $X = x$, Modell: $X \sim F_\theta$ mit unbekanntem Parameter $\theta = \vartheta$ in Θ

1. Modell: statistisches Modell für die Daten (Verteilung) wird gewählt
2. Nullhypothese: H_0: $\theta = \theta_0$ Formulieren
3. Alternativhypothese: Formulieren

$$H_A := \begin{cases} \theta \neq \theta_0 & \text{2-seitig} \\ \theta > \theta_0 & \text{1-seitig von oben} \\ \theta < \theta_0 & \text{1-seitig von unten} \end{cases}$$

4. Bestimme die Teststatistik T (z.B. $T = S_n$ oder so, dass T eine normierte Variante von X darstellt)
5. Verteilung der Teststatistik unter der Nullhypothese
6. Wahl des Signifikanzniveaus $\alpha \in [0,1]$ (grenze für den kritischen Bereich)

a) 7. Konstruiere Verwerfungsbereich K so, dass $P_{H_0}(X \in K) \leq \alpha$ → H_0 wird verworfen wenn $T(\omega)$ in K liegt.
   8. beobachteter Wert bezüglich der Teststatistik
   9. Entscheidung: verwerfe H_0 falls $x \in K$, sonst belasse H_0

b) 7. Berechne den P-Wert. Der P-Wert ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter der Nullhypothese H_0 ein zufälliger Versuch mindestens so "extrem" ausfällt, wie der beobachtete Wert t:

$$p_{\text{links}} = P_{H_0}(T \leq t) \qquad p_{\text{rechts}} = P_{H_0}(T \geq t) \qquad p_{\text{beidseitig}} = 2 \cdot \min\{p_{\text{links}}, p_{\text{rechts}}\}$$

   Anders ausgedrückt ist der P-Wert das kleinste Signifikanzniveau, bei dem bei gegebener Beobachtung t H_0 gerade noch verworfen werden kann. Daten werden benötigt, α nicht nötig
   8. Entscheidung: verwerfe H_0 falls P-Wert $\leq \alpha$, sonst belasse H_0

Fehler 1. Art

7.1.1 Fehler 1. Art

Wahrscheinlichkeit, dass der Test H_0 verwirft, obschon H_0 stimmt.

$= P_\vartheta[T \in K]$ für $\vartheta \in \Theta_0$

$$P(\text{Fehler 1. Art}) = P_{H_0}(X \in K) \leq \alpha$$

7.1.2 Fehler 2. Art

Wahrscheinlichkeit, dass der Test H_0 belässt, obschon H_A stimmt.

$$\beta(p) = P(\text{Fehler 2. Art}) = P_{H_A}(X \notin K)$$

$= P_\vartheta[T \notin K] = 1 - P_\vartheta[T \in K]$ für $\vartheta \in \Theta_A$

7.1.3 Macht/Power

Die Macht eines Tests ist definiert als

$$1 - \beta(p) = P(H_0 \text{ wird verworfen, und } H_A \text{ korrekterweise angenommen})$$

7.2 Vertrauensintervall

Das Vertrauens- oder Konfidenzintervall I ist die Menge jener Parameterwerte, welche mit der Beobachtung $X = x$ verträglich sind.

$$I = \{\theta_0 \mid \text{Test mit Alternativhypothese } H_A : \theta \star \theta_0 \text{ und Signifikanzniveau } \alpha \text{ belässt } H_0\}, \qquad \text{wobei } \star \in \{<, >, \neq\}$$

Es gilt:

$$P_\theta(\theta \in I) \geq 1 - \alpha$$

Normalapproximation (für 2-seitiges Problem):

$$X_i \sim \text{Poisson}(\lambda): \quad I = \widehat{\lambda} \pm \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\tfrac{1}{n}\widehat{\lambda}} \qquad \text{mit } \widehat{\lambda} = \overline{X}_n$$

$$X \sim \text{Binom}(n,p): \quad I = \widehat{p} \pm \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p}) \cdot \tfrac{1}{n}} \qquad \text{mit } \widehat{p} = \frac{x}{n}$$

7.3 z-Test

Normalverteilung, Test für Erwartungswert bei bekannter Varianz

$T \sim \mathcal{N}(0,1)$ unter H_0

Annahme: σ_X^2 bekannt; $X_1, \dots, X_n$ iid $\sim \mathcal{N}(\vartheta, \sigma^2)$ $H_0 : \mu = \mu_0$

Teststatistik: $T = Z = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma_X}$ $Z \sim N(0,1)$

Kritischer Bereich = Verwerfungsbereich: $\left\{\begin{array}{l} |Z| > \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ Z < -\Phi^{-1}(1-\alpha) \\ Z > \Phi^{-1}(1-\alpha) \end{array}\right\}$ wenn wird μ_0 verworfen

für $H_A : \mu \neq \mu_0$ zweiseitig

für $H_A : \mu < \mu_0$, für $H_A : \mu > \mu_0$ } einseitig

* Vertrauensintervall: $I = \left[\overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), \overline{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right]$ für 2-seitiges Problem

Fehler 2. Art: $P_\mu(Z \notin K)$ für $H_A : \mu < \mu_0$

(wenn μ der wahre Parameter ist)

$$= P_\mu\left(\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu + \mu_0 - \mu_0}{\sigma_X} > -\Phi^{-1}(1-\alpha)\right)$$

$$= P_\mu\left(\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma_X} > -\Phi^{-1}(1-\alpha) + (\mu - \mu_0)\frac{\sqrt{n}}{\sigma_X}\right)$$

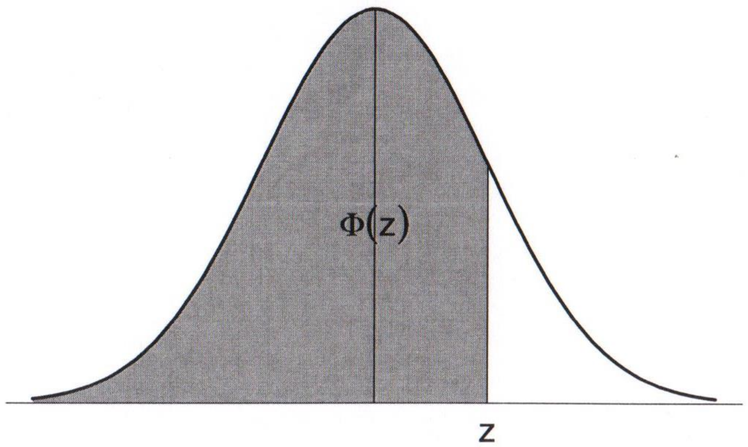
$$= 1 - \Phi\left(-\Phi^{-1}(1-\alpha) + (\mu - \mu_0)\frac{\sqrt{n}}{\sigma_X}\right)$$

- Wir wollen testen: $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$
  Mögliche Alternativen: einseitig: $H_A : \vartheta > \vartheta_0$ oder $\vartheta < \vartheta_0$
  zweiseitig: $H_A : \vartheta \neq \vartheta_0$

* einseitig: $H_A : \mu < \mu_0$ $I =]-\infty, \overline{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha)]$ } wenn $\mu_0 \in I$ → nicht verworfen

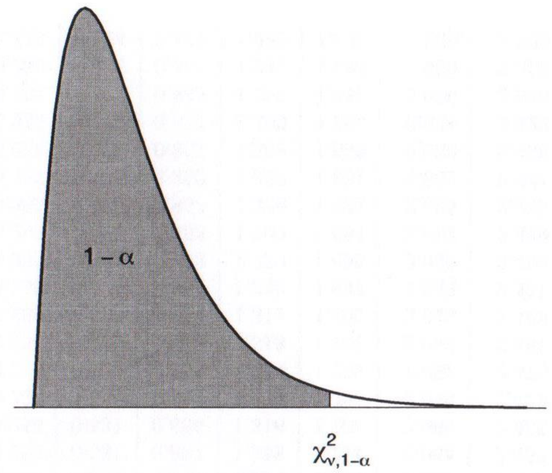
$H_A : \mu > \mu_0$ $I = [\overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha), \infty[$ } wenn $\mu_0 \notin I$ → verworfen

12 Tabellen



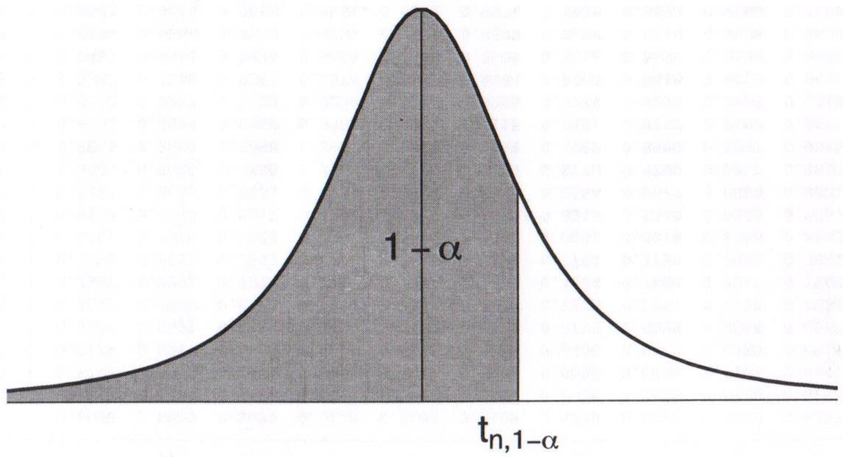
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Tabelle der Standard-Normalverteilungsfunktion $\Phi(z) = P[Z \leq z]$ mit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$



	$p = 0.90$	$p = 0.95$	$p = 0.975$	$p = 0.999$	$p = 0.9995$
$\nu = 1$	2.7055	3.8415	5.0239	10.8276	12.1157
$\nu = 2$	4.6052	5.9915	7.3778	13.8155	15.2018
$\nu = 3$	6.2514	7.8147	9.3484	16.2662	17.7300
$\nu = 4$	7.7794	9.4877	11.1433	18.4668	19.9974
$\nu = 5$	9.2364	11.0705	12.8325	20.5150	22.1053
$\nu = 6$	10.6446	12.5916	14.4494	22.4577	24.1028
$\nu = 7$	12.0170	14.0671	16.0128	24.3219	26.0178
$\nu = 8$	13.3616	15.5073	17.5345	26.1245	27.8680
$\nu = 9$	14.6837	16.9190	19.0228	27.8772	29.6658
$\nu = 10$	15.9872	18.3070	20.4832	29.5883	31.4198
$\nu = 11$	17.2750	19.6751	21.9200	31.2641	33.1366
$\nu = 12$	18.5493	21.0261	23.3367	32.9095	34.8213

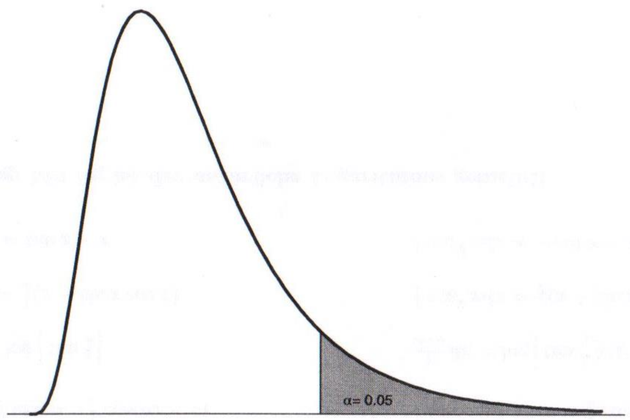
Ausgewählte Quantile $\chi^2_{\nu,1-\alpha}$ der Chiquadrat-Verteilung; in der Tabelle ist $p = 1 - \alpha$.



df	$t_{0.60}$	$t_{0.70}$	$t_{0.80}$	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
31	0.255	0.530	0.853	1.309	1.696	2.040	2.452	2.744
32	0.255	0.530	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
33	0.255	0.530	0.853	1.308	1.693	2.035	2.445	2.733
34	0.255	0.529	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
35	0.255	0.529	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Ausgewählte Quantile $t_{n,1-\alpha}$ der t-Verteilung; in der Tabelle ist $n = df$.

Für $df = \infty$ erhält man die Quantile $z_{1-\alpha}$ der Standard-Normalverteilung.



$F_{n_1,n_2,1-\alpha}$

ν_2 \ ν_1 =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	242.98	243.91	244.69	245.36	245.95
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.40	19.41	19.42	19.42	19.43
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.73	8.71	8.70
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91	5.89	5.87	5.86
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68	4.66	4.64	4.62
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.98	3.96	3.94
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	3.55	3.53	3.51
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24	3.22
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	3.05	3.03	3.01
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.89	2.86	2.85
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74	2.72
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69	2.66	2.64	2.62
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60	2.58	2.55	2.53
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.48	2.46
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.45	2.42	2.40
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42	2.40	2.37	2.35
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38	2.35	2.33	2.31
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.29	2.27
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28	2.26	2.23
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.25	2.22	2.20
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.28	2.25	2.22	2.20	2.18
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23	2.20	2.17	2.15

Kurztabelle der kritischen Werte zum 5%-Niveau der F-Verteilungen mit ν_1 Freiheitsgraden im Zähler und ν_2 Freiheitsgraden im Nenner. In der Tabelle ist

$$\nu_1 = n_1,\ \nu_2 = n_2 \text{ und } 1 - \alpha = 0.95.$$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1														
2	1	2	1													
3	1	3	3	1												
4	1	4	6	4	1											
5	1	5	10	10	5	1										
6	1	6	15	20	15	6	1									
7	1	7	21	35	35	21	7	1								
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1							
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1						
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1					
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1				
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1			
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1		
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1

Tabelle der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ bis $n = 15$

Spezielle unbestimmte Integrale (die Integrationskonstanten sind weggelassen):

$\int k dx = kx, \quad k$ konstant

$\int x^s dx = \frac{1}{s+1} x^{s+1}, \quad s \neq -1$

$\int \frac{1}{x} dx = \log|x|, \quad x \neq 0$

$\int (ax+b)^s dx = \frac{1}{a(s+1)}(ax+b)^{s+1}, \quad s \neq -1$

$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \log|ax+b|$

$\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \log(ax+b)$

$\int \frac{x}{(a+bx)^2} dx = \frac{b}{a^2 \cdot (ax+b)} + \frac{1}{a^2} \log(ax+b)$

$\int \frac{x}{(ax+b)^n} dx = \frac{1}{a^2} \left(\frac{-1}{(n-2) \cdot (ax+b)^{n-2}} + \frac{b}{(n-1) \cdot (ax+b)^{n-1}} \right), \quad n \neq 1, n \neq 2$

$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$

$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$

$\int e^{cx} dx = \frac{1}{c} e^{cx}$

$\int a^{cx} dx = \frac{1}{c \cdot \log a} a^{cx}$

$\int x e^{cx} dx = \frac{e^{cx}}{c^2}(cx-1)$

$\int x^2 e^{cx} dx = e^{cx} \left(\frac{x^2}{c} - \frac{2x}{c^2} + \frac{2}{c^3} \right)$

$\int \log|x| dx = x(\log|x| - 1)$

$\int \log_a |x| dx = x(\log_a |x| - \log_a e)$

$\int x^s \log x dx = \frac{x^{s+1}}{s+1} \left(\log x - \frac{1}{s+1} \right), \quad s \neq -1, \ x > 0$

$\int \frac{1}{x} \log x dx = \frac{1}{2} (\log x)^2, \quad x > 0$

$\int \sin x dx = -\cos x$

$\int \cos x dx = \sin x$

$\int \tan x dx = -\log|\cos x|$

$\int \cot x dx = \log|\sin x|$

$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b)$

$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b)$

$\int \frac{1}{\sin x} dx = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|$

$\frac{1}{\cos x} dx = \log \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$

$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$

$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)$

$\int \tan^2 x dx = \tan x - x$

$\int \cot^2 x dx = -\cot x - x$

Anmerkung: Mit log **ist der natürliche Logarithmus gemeint!**