Lineare Algebra ZF

Knobelf

Matrizen

Axiome:

$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

$(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$

$(\alpha+\beta)A = (\alpha A) + (\beta A)$

$\alpha(A+B) = (\alpha A) + (\alpha B)$

$A+B = B+A$ (Add. kommutativ)

$(A+B)+C = A+(B+C)$ (Add. assoziativ)

$(AB)C = A(BC)$ (Mult. assoziativ)

$(A+B)C = (AC)+(BC)$ (Add./Mult. distributiv)

$A(B+C) = (AB)+(AC)$ (Add./Mult. distributiv)

$A^{m\times n}$: m, i $\begin{bmatrix} & n, j & \\ & & \end{bmatrix}$

Linearität: $A(\gamma x + \tilde{x}) = \gamma(Ax) + (A\tilde{x})$ (Additivität & Homogenität)

Identität: $I_m A = A I_n = A$

Symmetrisch: $A^T = A$ $(A^TA\ ;\ AA^T)$; $f(x,y) = f(y,x)$;

↳ Definitheit durch EW ($>0, \geq 0, \leq 0, <0$)

Schief-symmetrisch: $A^T = -A$

Transponierte: $A^T \in \mathbb{R}$: $(A^T)^T = A$; $(\alpha A)^T = \alpha A^T$; $(AB)^T = B^TA^T$; $(A+B)^T = A^T + B^T$

Hermitesche: $A^H \in \mathbb{C}$: $(A^H)^H = A$; $(\alpha A)^H = \bar{\alpha} A^H$; $(AB)^H = B^H A^H$; $(A+B)^H = A^H + B^H$

$A^H = A^T$ mit $a+bi \to a-bi$

Kommutativität: Falls gilt $AB = BA$, so sind A und B quadratisch und $A \cdot B$ symmetrisch

Inverse: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$; $(A^{-1})^{-1} = A$; $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$(A|I) \Rightarrow (I|A^{-1})$

Householdermatrix: $Q_u = I - 2uu^T$, $\|u\| = 1$

Positiv definit: $f(x) > 0$ $\forall x \neq 0$; $x = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

Positiv semidefinit: $f(x) \geq 0$ $\forall x \neq 0$

Negativ definit: $f(x) < 0$ $\forall x \neq 0$; $x = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

Negativ semidefinit: $f(x) \leq 0$ $\forall x \neq 0$

$f(x)$: x^TAx, x^HAx, $\langle x, x\rangle$

Indefinit: Keine definitheit trifft zu

Bilinearform: Additivität & Homogenität muss gelten. (in $\mathbb{R}$)

Sesquilinearform: Linearität, semilinearität und hermitesche Symmetrie muss gelten

Semilinearität: $f(\alpha x + y, z) = \bar{\alpha} f(x,z) + f(y,z)$

Hermitesche Symmetrie: $f(x,y) = \overline{f(y,x)}$

Nicht ausgeartet: $\forall y \in Y$ $\langle x, y\rangle_M = 0 \Rightarrow x = 0$

Unitär / Orthogonal: $U^H \cdot U = U \cdot U^H = I$ ist (isomorph) längentreu und (konform) winkeltreu

LR-Zerlegung:
1. $P \cdot A = L \cdot R$
2. $Lc = Pb$
3. $Rx = c$

R – Gauss $(A|b) \to (R|b')$

L – Koeff. $(II - \gamma I)$

LDR_1-Zerlegung: $\mathrm{diag}(R_1) = \mathrm{diag}(L) = 1$; $D = \mathrm{diag}(R)$

$PA = LDR_1$; $R_1 = D^{-1} \cdot R$

Block-LR-Zerlegung: $\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$, $\tilde{R} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \emptyset & S \end{array}\right)$, $\tilde{L} = \left(\begin{array}{c|c} I & \emptyset \\ \hline CA^{-1} & I \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \emptyset & S \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ \hline u \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} b \\ \hline c \end{array}\right)$ mit $S = D - CA^{-1}B$

1. $Su = c$
2. $Ax = b - Bu$

Falls $A = L \cdot R$: $\tilde{L} = \left(\begin{array}{c|c} L & \emptyset \\ \hline CR^{-1} & I \end{array}\right)$, $\tilde{R} = \left(\begin{array}{c|c} R & L^{-1}B \\ \hline \emptyset & S \end{array}\right)$

Cholesky-Zerlegung: $A \to$ symmetrisch / hermitesch

$A = LDL^T / LDL^H$ $d_{ii} = r_{ii} > \emptyset$

$\tilde{R} = D^{1/2}L^T$; $A = \tilde{R}^T\tilde{R}$; $\tilde{R}^Tc = b$; $\tilde{R}x = c$

Spur: Summe der Diagonalelemente

Affiner Teilraum: $u_0 + U = \{u_0 + u\ ;\ u \in U\}$

Affine Abbildung: $H: X \to y_0 + V$, $x \to y_0 + Fx$

Ähnlich: $B = T^{-1}AT$, T regulär

Regulär $A^{m\times n}, B^{m\times n}$

$m = n \Rightarrow$ Quadratisch

Bijektiv (injektiv & surjektiv)

$\mathrm{Rank}(A) = m$ (eindeutig, vollen Rang)

A^HA, A^{-1}, A^T, A^H, AB sind auch regulär

$\mathrm{Rank}(BA) \leq \min\{\mathrm{rank}\, B, \mathrm{rank}\, A\}$

Invertierbar

Erzeugende spaltenvektoren $\{a_1, a_2, a_3\}$

$\mathrm{im}(A) = \mathrm{span}\{a_1, a_2, a_3\}$

$\ker(A) = \{\emptyset\}$

$\mathrm{Basis}(A) = \{a_1, a_2, a_3\}$

$\det(A) \neq 0$

$EW \neq 0$

$Ax = b$ hat 1 Lsg pro b | $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$

Singulär $A^{m\times n}$

$\mathrm{Rank}(A) < n$

$\det(A) = 0$

$EW = 0$

$Ax = 0 \Rightarrow x \neq 0$

$Ax = b$:
- Keine eindeutige Lsg. für alle b
- Unendliche Lsg. für einige b
- Keine Lsg. für einige b

A ist injektiv oder surjektiv

Vektorräume

Axiome:

(V1) $x + y = y + x$
(V2) $(x+y)+z = x+(y+z)$
(V3) $(x+\emptyset) = x$
(V4) $x+(-x) = \emptyset$
(V5) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$
(V6) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$
(V7) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
(V8) $1x = x$
⋮ $\emptyset x = \emptyset$
$\alpha\emptyset = \emptyset$
$\alpha x = \emptyset \Rightarrow \alpha = \emptyset$ or $x = \emptyset$
$(-\alpha)x = \alpha(-x) = -(\alpha x)$

Polynome $\mathcal{P}_m$: $p(t) = a_0 t^0 + a_1 t^1 + \dots + a_m t^m$

Dimension: # Basisvektoren (lin. unabh. Vektoren/Spalten)

Kern: $\ker(A) = \{x \mid Ax = 0\}$ $(= \mathcal{N}(A))$

Bild: $\mathrm{im}(A) = \mathrm{span}\{\text{"Pivotkolonnen"}\}$ $(= \mathcal{R}(A))$

Rang: $\mathrm{Rank}(A) = \dim(\mathrm{im}(A)) = \#$ Pivotelemente
$=$ Kolonnenrang $=$ Zeilenrang

$\overset{m\times n}{A}: X \to Y$ $\quad \dim(X) = n$; $\dim(Y) = m$
$\dim(X) - \dim(\ker(A)) = \dim(\mathrm{im}(A)) = \mathrm{rank}(A)$

$\mathrm{rank}(A^T) / \mathrm{rank}(A^H) = \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(R) = \mathrm{rank}(R^H)$

Injektiv: $\ker(A) = \{\emptyset\}$; $\mathrm{rank}(A) = \dim(X)$ (voller Spaltenrang)

Isomorphismus: $F: X \to Y$ bijektiv $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(F) = \dim(X) = \dim(Y)$

Automorphismus: $F: X \to X$ bijektiv $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(F) = \dim(X)$ (vollen Rang) & $\ker(F) = \{\emptyset\}$

$F: X \to Y$, $G: Y \to Z$:
$\mathrm{rank}(GF) \leq \min\{\mathrm{rank}(F), \mathrm{rank}(G)\}$
G injektiv $\Rightarrow \mathrm{rank}(GF) = \mathrm{rank}(F)$
F surjektiv $\Rightarrow \mathrm{rank}(GF) = \mathrm{rank}(G)$

Surjektiv: $\mathrm{rank}(A) = \dim(Y)$ (voller Zeilenrang)

$A \in \mathbb{E}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{E}^{p\times m}$:
$\mathrm{rank}(BA) \leq \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}$
$\mathrm{rank}(B) = m \leq p \Rightarrow \mathrm{rank}(BA) = \mathrm{rank}\, A$
$\mathrm{rank}(A) = m \leq n \Rightarrow \mathrm{rank}(BA) = \mathrm{rank}\, B$

Projektion: $P^2 = P$; $\mathrm{im}(I-P) = \ker P$; $\mathrm{im}(P) = \ker(I-P)$

Orthogonalprojektion: $P^2 = P$; $P^H = P$; $\mathrm{im}(P) \perp \ker(P)$

Skalarprodukt: $\langle x, y\rangle \overset{\mathbb{R}}{=} x^T y \overset{\mathbb{C}}{=} x^H y$; $\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) = \|x\| \cdot \|y\| \cos\varphi$

- linear, bilinear; sesquilinear
- symmetrisch: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
- hermitesch: $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
- positiv definit
- Schwarz'sche Ungleichung: $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

{ Bei Beweisen $W^T = W$? falls $\langle x, y\rangle_W$ }

in $\mathcal{P}$: $\langle p, q\rangle = \int_a^b \overline{p(t)}\, q(t)\, dt$;

Matrixabhängig: $\langle x, y\rangle_M = x^H \cdot M \cdot y$; $\langle p, q\rangle_w = \int_a^b \overline{p(t)}\, q(t)\, w(t)\, dt$

Orthogonal/Unitär: $\langle x, y\rangle = 0$ $(x \perp y)$; $A^H A = I \rightarrow A^H = A^{-1}$
Q $\quad U$
$|\det U| = 1$
$\det Q = \pm 1$

Givens-Rotationsmatrix:
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Orthogonales/Unitäres F: $\|Fx\|_y = \|x\|_x \Rightarrow$ längentreu/isometrisch
$x \perp y \Rightarrow Fx \perp Fy \Rightarrow$ winkeltreu
$\ker(F) = \{0\}$
$\|F\|_2 = 1$
Falls $\dim(X) = \dim(Y) < \infty$
isomorph
Ist $\{b_n\}$ Orthonormalbasis von X, so ist $\{Fb_n\}$ von Y
$F^{-1} = F^H$, orthogonal/unitär und bijektiv

! Bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$
$\Rightarrow Q^T W Q = I$

Ähnliche Matrizen: $B = \Omega A \Omega^{-1}$
Gleiches charakteristisches Polynom
Gleiche Determinante
Gleiche Spur
Gleiche Eigenwerte & Eigenvektoren
$GVF = AVF$

$m\times n$ Matrix mit rank r:
$\ker(A) = (\mathrm{im}(A^H))^\perp \subset \mathbb{E}^n$
$\ker(A^H) = (\mathrm{im}(A))^\perp \subset \mathbb{E}^m$
$\ker(A) \oplus \mathrm{im}(A^H) = \mathbb{E}^n$
$\ker(A^H) \oplus \mathrm{im}(A) = \mathbb{E}^m$
$\dim(\mathrm{im}(A)) = r$
$\dim(\mathrm{im}(A^H)) = r$
$\dim(\ker(A)) = n - r$
$\dim(\ker(A^H)) = m - r$

Kongruente Matrizen: $A = SBS^T$
Gleiche # positiver, negativer und Null-Eigenwerte

Normal: $A^H A = A A^H$

Determinanten

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

– addition nicht!

! Zeilenvertauschen ändert das Vorzeichen der Determinante

$\det(\mu A^{n\times n}) = \mu^n \det(A^{n\times n})$

det (Dreiecksmatrizen) = Summe der Diagonalelemente

$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$

$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

$\det(A^T) = \det(A)$; $\det(A^H) = \overline{\det(A)}$

$$\left|\left(\begin{array}{c|c} a_{kk} & * \cdots * \\ \hline 0 & A_{[k,k]} \end{array}\right)\right| = a_{kk}\cdot\det(A_{[k,k]}) + \ldots \quad \text{(Vorzeichen!)}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & \cdots & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}; \quad \underbrace{\left|\begin{pmatrix} A & B \\ \emptyset & D \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} A & \emptyset \\ C & D \end{pmatrix}\right|}_{\text{nur für Dreiecks-Block-Matrizen}} = \det(A)\cdot\det(D)$$

Inverse*: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Cramer'sche Regel

Für $Ax = b$: $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$ A_i ist A mit der i-ten Spalte durch b ersetzt.

EV / EW

(Eigenvektor / Eigenwert)

GVF: # zugehörige EV zum EW (geometrische Vielfachheit)

AVF: # gleiche EW (algebraische Vielfachheit)

Spektrum: Menge aller EW einer Matrix

$A\underset{EV}{\xi} = \xi\cdot\underset{EW}{\lambda}$

Eigenraum: $E_\lambda = \ker(A - \lambda I)$

$\dim(E_\lambda) = n - \operatorname{rank}(A - \lambda I)$

EW berechnung: $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \overset{!}{=} \emptyset$

EV zu verschiedenen EW sind linear unabhängig.

$GVF \leq AVF$

Eigenwertzerlegung / Spektralzerlegung

$A = V\Lambda V^{-1}$ V - Eigenbasis $\{v_1, v_2, \ldots\}$
Λ - Diagonalmatrix aus EW $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ A ist diagonalisierbar $\Rightarrow$ GVF = AVF

$V^{-1} = \begin{pmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{pmatrix}$, $w_k^T A = \lambda_k w_k^T$

A selbstadjungiert (symmetrisch / hermitesch)

orthonormale Basis $U = (u_1, \ldots, u_n)$
(und unitär)

$U^H A U = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

ist Spezialfall der Schurzerlegung (gilt wenn A normal ist.)

Jordansche Normalform

$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_\mu \end{pmatrix}$; $J_\mu = (\lambda_\mu)$ oder $J_\mu = \begin{pmatrix} \lambda_\mu & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda_\mu \end{pmatrix}^{n\times n}$ mit n = # gleiche EW zu einem EV

Erste Kolonne von J_μ ist EV v_μ

EWZ: $A = VJV^{-1} = \sum_{k=1}^{\mu} v_k J_k w_k^T$

Orthonormalbasen

$$\forall x \quad x = \sum_{k=1}^{n} \langle b_k, x\rangle b_k$$

Reell trigonometrisches Polynom:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{m} (\alpha_k \cos(kt) + \beta_k \sin(kt)) = \tfrac{1}{2}\alpha_0 + \alpha_1\cos(t) + \beta_1 \sin(t) + \dots$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt, \quad \beta_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,dt$$

Parselvalsche Formel: $\langle x, y\rangle = \langle \xi, \eta\rangle$, $\|x\| = \|\xi\|$, $\measuredangle$, $\perp$

Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren:

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_1}{\|a_1\|}, \quad \tilde{b}_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle b_j, a_k\rangle b_j \\ b_k &= \frac{\tilde{b}_k}{\|\tilde{b}_k\|} \end{aligned}\right\} (k = 2, 3, \dots)$$

Koordinatentransformation

$$\begin{tikzcd}
x \in X \arrow[r, "F", "\text{lin. Abb.}"'] \arrow[d, shift right, "K_x"'] & y \in Y \arrow[d, shift right, "K_y"'] \\
\xi \in \mathbb{E}^n \arrow[r, "A", "\text{Abb. Matrix}"'] \arrow[d, shift right, "T^{-1}"'] & \eta \in \mathbb{E}^m \arrow[d, shift right, "S^{-1}"'] \\
\xi' \in \mathbb{E}^n \arrow[r, "B", "\text{Abb. Matrix}"'] & \eta' \in \mathbb{E}^m
\end{tikzcd}$$

(alte Basis)

(Koordinatentrafo.)

(neue Basis)

$F: X \to Y,\ x \mapsto y$ lin. Abb.

$A: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m,\ \xi \mapsto \eta$ Abb. Matrix

$T: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n,\ \xi' \mapsto \xi$ Trafomatrix in $\mathbb{E}^n$

$S: \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}^m,\ \eta' \mapsto \eta$ Trafomatrix in $\mathbb{E}^m$

$y = Fx \qquad \eta = A\xi \qquad \xi = T\xi' \qquad \eta = S\eta' \qquad \eta' = B\xi'$

$B = S^{-1}AT \qquad A = SBT^{-1}$ Falls A & B ähnlich: $S = T$

$\operatorname{Rank}(F) = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^4_{\{p_0,p_1,p_2,p_3\}} \arrow[dl, shift left, "P"] \arrow[dd, shift right, "T"'] \\
P_3 \arrow[r] & \mathbb{R}^4_{\{m_0,m_1,m_2,m_3\}} \arrow[ul, shift left, "P^{-1}"] \arrow[dl, shift right, "Q^{-1}"'] \\
 & \mathbb{R}^4_{\{q_0,q_1,q_2,q_3\}} \arrow[uu, shift right, "T^{-1}"'] \arrow[ul, shift right, "Q"']
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{K}\{1, t, t^2, t^3\}$

$T = Q^{-1}P$

$p_0 = t^3$
$p_1 = (t-1)^3$
$p_2 = (t-2)^3$
$p_3 = (t-3)^3$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -8 & -27 \\ 0 & 3 & 12 & 27 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$q_0 = 1$
$q_1 = 1 + t$
$q_2 = 1 + t + t^2$
$q_3 = 1 + t + t^2 + t^3$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

QR-Zerlegung

$AP = QR, \quad RP^T x = z, \quad Q^T y = z \quad (Q^T = Q^{-1},\ P^T = P^{-1},\ R = (\ \ ))$

$$= (Q \mid Q_\perp)\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{Q}\tilde{R}$$

└ lin unabh. zu Q

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \frac{a_1}{\|a_1\|}, \quad \tilde{q}_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} q_j \langle q_j, a_k\rangle \\ & \qquad\qquad q_k = \frac{\tilde{q}_k}{\|\tilde{q}_k\|} \end{aligned}\right\} (k = 2, \dots, n)$$

$$\left.\begin{aligned} r_{11} &= \|a_1\|, \quad r_{jk} = \langle q_j, a_k\rangle, \quad j = 1, \dots, k-1 \\ & \qquad r_{kk} = \|\tilde{q}_k\| \end{aligned}\right\} k = 2, \dots, n$$

Singulärwertzerlegung

$$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times m}{U}\ \underset{m\times n}{\Sigma}\ \underset{n\times n}{V^H} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_k = \operatorname{diag}(\overset{1.}{\sqrt{\text{EW}}} \text{ von } A^H A)$$

$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k > \lambda_n = 0$ $\quad k = \operatorname{rank}(A)$

$U = (u_1, \dots, u_n) \qquad V = (v_1, \overset{2.}{\dots}, v_n)$ (Eigenvektoren) normiert $(V^H = V^{-1})$

3. $u_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A v_i$, wenn $\lambda_i = 0$ oder nicht existent, finde lin. unabh. Vektoren

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} b \\ -a \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ finde t & normiere

$\{u_1, \dots, u_k\}$ ist Basis von $\operatorname{im}(A)$

$\{v_1, \dots, v_k\}$ ist Basis von $\operatorname{im}(A^H)$

$\{u_{k+1}, \dots, u_m\}$ ist Basis von $\ker(A^H)$

$\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ ist Basis von $\ker(A)$

U spannt Bildraum $\mathbb{E}^m$ auf

V spannt Definitionsraum $\mathbb{E}^n$ auf.

$\|A - A_p\|_2 = \min \|A - B\|_2 \qquad p = \operatorname{rank}(A)$

$\|A - A_p\|_2 = \sigma_{p+1}$

Normen

Komplexe Zahlen: $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^H x}$

Euklidische Norm / 2-Norm: $\|x\| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$

Positiv definit

Homogen: $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

Dreiecksungleichung gilt: $\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$

P-Norm: $\|x\|_p = (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}$

1-Norm: $\|x\|_1 = (|x_1| + \ldots + |x_n|)$

∞-Norm: $\|x\|_\infty = \max_{k=1\ldots n} |x_k|$

Für Funktionen: $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt$; $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$

$\|f\|_\infty = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$

Frobenius-Norm: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} |a_{kl}|^2}$

Spektralnorm: $\|A\|_2 = \max\{\sqrt{\omega}\,;\ \omega \text{ EW von } A^H A\}$

$\|A\|_2 = \max\{|\omega|\,;\ \omega \text{ EW von } A\}$

$\|A^{-1}\|_2 = \max\{\frac{1}{\sqrt{\omega}}\,;\ \omega \text{ EW von } A^H A\}$

$= \frac{1}{\min\{\sqrt{\omega}\,;\ \omega \text{ EW von } A^H A\}}$

$\|A^{-1}\|_2 = \max\{\frac{1}{|\omega|}\,;\ \omega \text{ EW von } A\}$

$= \frac{1}{\min\{|\omega|\,;\ \omega \text{ EW von } A\}}$

Matrixnorm: $\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$

$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$

2-Norm Konditionszahl: $K_2(A) = \frac{\max\{\sqrt{\omega},\ \omega \text{ EW von } A^H A\}}{\min\{\sqrt{\omega},\ \omega \text{ EW von } A^H A\}} \geq 1$

Lineare Gleichungssysteme

$\overset{m \times n}{A}x = b$: Eine Lsg. wenn $r = n$ $(r = \text{Rank}(A))$

$r < m$ und $c_{r+1} \to c_m = 0$

Mind. eine Lsg. wenn $r = m$

Lösungsschar wenn $r < n$

Gauss: $(A \mid b) \xrightarrow[\text{addition}]{\text{Zeilen-}} (\triangle \mid b')$

Homogen: Störfaktor $= \emptyset$ $(Ax = 0,\ \dot{y} = y + 0,\ \ddot{y} = \dot{y} + y + 0)$

1. Ordnung: $\dot{y}(t) = A\,y(t)$, $y(0) = y_0$

$y(t) = V e^{tA} c$; $V = (EV)$, $e^{tA} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})$

$Vc = y_0$

$= \boxed{V e^{tA} V^{-1} y_0}$

n. Ordnung: $x^{(n)}(t) - \beta_n x^{(n-1)}(t) - \ldots - \beta_2 \dot{x}(t) - \beta_1 x(t) = 0$

$y_1(t) = x(t)$, $y_2(t) = \dot{x}(t)$, ... , $y_n(t) = x^{(n-1)}(t)$

$\dot{y}(t) = A\,y(t)$, $y(0) = y_0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 1. Ordnung!

2. Ordnung ohne 1. Ableitung:

$\ddot{y}(t) = A\,y(t)$, $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = y_1$

$y(t) = V(\cos(\Omega t)a + \sin(\Omega t)b)$

$\Omega = \text{diag}(\omega_1, \ldots, \omega_n)$

$a = V^{-1} y_0$, $b = \Omega^{-1} V^{-1} y_1$

Funktionen von Matrizen: $f(A) = V f(\Lambda) V^{-1}$, $f(\Lambda) = \text{diag}(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))$

Reelle lin. DGL mit komplexen EW:

$$A\begin{pmatrix} \text{Re}(v) & \text{Im}(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Re}(v) & \text{Im}(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Re}\,\lambda & \text{Im}\,\lambda \\ -\text{Im}\,\lambda & \text{Re}\,\lambda \end{pmatrix}$$

$y(t) = (VK)(K^{-1} z(t))$; $(VK)(K^{-1} z) = y_0$

$$K = \begin{pmatrix} K_2 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} ; \quad K_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

Orthogonalprojektion

Wenn $\operatorname{rank}(A^{m\times n}) = n \ (\leq m)$: $\quad P_A = A(A^H A)^{-1} A^H$

Wenn $Q^{n\times n} = (q_1 \cdots q_n)$ orthonormale Kolonnen hat:

$$P_Q = QQ^H \ ; \quad P_Q y = \sum_{j=1}^{n} q_j \langle q_j, y\rangle \ ; \quad Q^H Q = I_n$$

Für eine Orthogonalprojektion P gilt:

$$\|y - Py\|_2 = \min_{z \in \operatorname{im} P} \|y - z\|_2$$

Methode der kleinsten Quadrate

$$\|Ax - y\|^2 = \min_{\tilde{x} \in \mathbb{C}^n} \|A\tilde{x} - y\|^2$$

$\Rightarrow \langle r, A\rangle_w \overset{!}{=} 0$

$\rightarrow$ A orthogonalisieren $\rightarrow \tilde{q}_{n+1} = \boxed{y - Ax = r}$ (Residuenvektor) $\perp \operatorname{im}(A)$

$\Rightarrow A^H A x = A^H y \quad / \quad Rx = Q^H y$

Hauptachsentransformation

Ellipse: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$

Hyperbel: $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$

Parabel: $x_1^2 - 2p x_2 = 0$

$$B(x,y) = x^H A y$$

$$B(x,x) = Q(x) = y^T I_\pm y = \sum_{k=1}^{p} y_k^2 - \sum_{k=p+1}^{r} y_k^2$$

p = # positiver EW

r = rank(A)

$r-p$ = # negativer EW

Quadratische Funktionen

$$F(x) = Q(x) - 2b^T x - \gamma$$

$$F(x) = \tilde{F}(\tilde{x}) = \tilde{Q}(\tilde{x} - d) - 2p^T\tilde{x} - \tilde{\gamma}$$

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \text{ mit } d_k = \begin{cases} \tilde{b}_k / \lambda_k, & \lambda_k \neq 0 \\ 0, & \lambda_k = 0 \end{cases}$$

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \text{ mit } p_k = \begin{cases} 0, & \lambda_k \neq 0 \\ \tilde{b}_k, & \lambda_k = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{\gamma} = \gamma + \sum_{\lambda_k \neq 0} \frac{\tilde{b}_k^2}{\lambda_k}$$

Floating Point Numbers

1	1001	1010111
Vorzeichen s	Exponent e	Mantisse m

$\ldots 1\,1\,1 . 1\,1\,1 \ldots$

$\ldots 2^2\,2^1\,2^0 \quad 2^{-1}\,2^{-2}\,2^{-3} \ldots$ (addieren)

$0 < e < 255$: $\quad \tilde{a} = (-1)^s \times \underset{\text{Basis}}{2}^{e-127} \times 1.m$

$e = 0$; $m \neq 0$: $\quad \tilde{a} = (-1)^s \times 2^{-126} \times 0.m$

$m = 0$; $s = 1$: $\quad \tilde{a} = -0$

$s = 0$: $\quad \tilde{a} = 0$

$e = 255$; $m \neq 0$: $\quad \tilde{a} = NaN$

$m = 0$; $s = 1$: $\quad \tilde{a} = -Inf$

$s = 0$: $\quad \tilde{a} = Inf$

$$eps = \frac{1}{2} B^{1-m}$$

Funktionen von Matrizen

$$f(\Lambda) = \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)) = V f(\Lambda) V^{-1}$$

e-Funktion: $\quad e^A = V \cdot e^\Lambda V^{-1} = V \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} V^{-1}$

Mathematischer Zusatz

$\mathbb{C}$: $z\bar{z} = x^2+y^2$ $\quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ $\quad \bar{z} = x - iy$

$|zw| = |z||w|$ $\quad |z+w| \leq |z|+|w|$

Fourier-Reihen: $f(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos(kt) + \beta_k \sin(kt))$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt\right)}_{=\gamma_k} \cdot e^{ikt}$$

Polarform: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r = \sqrt{x^2+y^2} = |z| = \sqrt{z\bar{z}}$

$\varphi/\hat{\varphi}$	$0°/0$	$30°/\pi/6$	$45°/\frac{\pi}{4}$	$60°/\frac{\pi}{3}$	$90°/\frac{\pi}{2}$
$\sin\varphi$	0	$1/2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\varphi$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan\varphi$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞

$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

$\sin\varphi = \tan\varphi \cdot \cos\varphi$

$1 + \tan^2\varphi = (\cos^2\varphi)^{-1}$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

$\sin\alpha \mp \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\mp\beta}{2}\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$

$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$

Rechenaufwand

LR-Zerlegung: ($n \times n$-Matrix, $AX = B$)

n Divisionen
$4/3\, n^3 + O(n)$ Multiplikationen
$4/3\, n^3 - \frac{3}{2} n^2 + O(n)$ Additionen
$O(n)$ - sind alle Terme, die linear in n oder konstant sind

Cholesky-Zerlegung:
n Divisionen
$1/6\, n^3 + 1/2\, n^2 + O(n)$ Multiplikationen
$1/6\, n^3 + O(n)$ Additionen

Für das Vor- und Rückwärtseinsetzen pro rechte Seite

$n^2 - n$ Additionen
$n^2 + n$ Multiplikationen

Gauss-Algorithmus: $1/3\, n^3$ Additionen und Multiplikationen

Kern & Bild Ergänzung

$\ker(A)$ = Menge von $Ax = 0$
$\operatorname{im}(A)$ = Menge von $Ax = b$
$\ker(D)$ = $c \in C^1[a,b] \cong \mathbb{R}$ (Menge der Konstanten)
$\operatorname{im}(D)$ = $C[a,b]$
$\ker(L)$ = Menge der Lsg. $Lf = 0$, $f \in C^m[a,b]$
$\operatorname{im}(L)$ = Menge der Fkt. $Lf = g$, $g \in C[a,b]$
$\ker(E_t)$ = $\{f \in C[a,b];\ f(t) = 0\}$
$\operatorname{im}(E_t)$ = $\mathbb{R}$
$\ker(M)$ = $\{0 \in C[a,b]\}$ = Nullfunktion
$\operatorname{im}(M)$ = $\{g \in C[a,b];\ f: \sigma \mapsto g(\sigma)/\sigma \in C[a,b]\}$;
$\ker(K_x)$ = $\{0\} \subset X$
$\operatorname{im}(K_x)$ = $\mathbb{R}^n$

A - lin. Abbildung
D - Ableitungsoperator
E_t - Evaluationsabbildung
L - Differentialoperator
M - Multiplikationsoperator
K_x - Koordinatenabbildung

Matlab

Maschinengenauigkeit	eps
Transponieren	A'
Bereich	x = Anfang:Schritt:Ende
Betrag	abs (x)
LR-Zerlegung	[L,U,P] = lu (A)
Cholesky-Zerlegung	R = chol (A)
EW-Zerlegung	[V,D] = eig (A)
Singulärwertzerlegung	[S,V,D] = svd (A)
Determinante	det (A)
1-Matrix n×n	ones (n)
0-Matrix n×n	zeros (n)
Einheitsmatrix n×n	eye (n)
Grösse einer Matrix	[m,n] = size (A)
Vektornorm	norm (x)
p-Norm	norm (x,p)
∞-Norm	norm (x, inf)
Untere Dreiecksmatrix (inkl. Diagonalen)	tril (A)
Obere Dreiecksmatrix (inkl. Diagonalen)	triu (A)
Inverse von A	A^(-1) = inv(A)
Lösung von Ax=b	x = A\b
Diagonale von A	diag (A)
Summe $\sum_{k=0}^{n} k^2$	symsum (k^2,k,0,n)

Spur von A	sum (diag (A))
$a : \frac{a-b}{n} : b$	v = linspace (a,b,n)
Polar → Kartesisch	pol2cart (φ,r)
Kartesisch → Kugel	cart2sph (x,y,z)

Elementweise Operatoren	.+, .-, .*, ./, .^
Matrizenoperatoren	+, -, *, /, ^, A'
Vergleichsoperatoren	>, <, >=, <=, ~=, ==
Boolsche Operatoren	&&, ||

Bsp.:

```
for i=1:5
end
```

```
while (a < A)
end
```

```
if (x == 1)
else if (x == 2)
else
end
```

```
function [a,b] = name (arg1, arg2)
return;          % optional
end              % optional
```

```
function summe = test1 (A)
    [m,n] = size (A);
    summe = 0;          % Initialisierung
    for i = 1:m         % i geht von 1 bis m (Zeile)
        for j = 1:n     % j geht von 1 bis n (Spalte)
            summe = summe + A(i,j);
        end
    end
```