谓词逻辑编程实验

Howling Hounds Example

- 1. Howling Hounds 符号抽象
 - 1. 所有猎犬在夜晚都会嚎叫:
 - (\forall x (\text{hound}(x) \rightarrow \text{howls}(x, \text{night})))
 - 2. 任何人如果有猫就不会有老鼠:
 - (\forall x (\text{has}(x, \text{cat}) \rightarrow \neq \text{has}(x, \text{miouse})))
 - 3. 轻睡者没有会在夜晚嚎叫的东西:
 - (\forall x (\text{light_sleeper}(x) \rightarrow \forall y (\text{howls}(y, \text{night}) \rightarrow \neg \text{has}(x, y))))
 - 4. 约翰有猫或者猎犬:
 - \text{has}(\text{John}, \text{cat}) \vee \text{has}(\text{John}, \text{hound}))

需要证明:

- 如果约翰是轻睡者,那么他没有老鼠:
- (\text{light_sleeper}(\text{John}) \rightarrow \neq \text{has}(\text{John}, \text{mouse}))
- 2. Howling Hounds 逻辑实现

抽取谓词

- Hound(x): x是一只猎犬。
- HowlsAtNight(x): x 在夜晚嚎叫。
- Has(x, y): x 拥有 y。
- Cat(y): y是一只猫。
- Mouse(y): y是一只老鼠。
- LightSleeper(x): x是一个轻睡者。

范式转换

消除蕴含和双重否定

- 1. [\forall x (\neg Hound(x) \vee HowlsAtNight(x))]
- 2. [\forall x (\neg (\exists y (Cat(y) \wedge Has(x, y))) \vee \neg \exists z (Mouse(z) \wedge Has(x, z)))]
- 3. [\forall x (\neg LightSleeper(x) \vee \forall y (\neg HowlsAtNight(y) \vee \neg Has(x, y)))]
- 4. 前提4不含蕴含,不需转换。

5. 结论:

[\neg LightSleeper(John)\vee \forall z (\neg Mouse(z) \vee \neg Has(John, z))]
#####将公式转换为前束范式(Prenex Normal Form, PNF)

德摩根律

```
[\forall x (\neg \exists y (Cat(y) \wedge Has(x, y)) \vee \neg \exists z (Mouse(z) \wedge Has(x, z))) ]
[\forall x (\forall y (\neg (Cat(y) \wedge Has(x, y))) \vee \forall z (\neg (Mouse(z) \wedge Has(x, z)))) ]
[\forall x (\neg LightSleeper(x) \vee \forall y (\neg HowlsAtNight(y) \vee \neg Has(x, y))) ]
```

消除量词嵌套,标准化变量

为了避免变量冲突,我们需要标准化变量名。

标准化前提

- 1. [\forall x (\neg Hound(x) \vee HowlsAtNight(x))]
- 2. [\forall x (\forall y (\neg Cat(y) \vee \neg Has(x, y)) \vee \forall z (\neg Mouse(z) \vee \neg Has(x, z)))]
- 3. [\forall x (\neg LightSleeper(x) \vee \forall y (\neg HowlsAtNight(y) \vee \neg Has(x, y)))]
- 4. [\exists y ((Cat(y) \wedge Has(John, y)) \vee (Hound(y) \wedge Has(John, y)))]
- 5. 结论:

[\neg LightSleeper(John) \vee \forall z (\neg Mouse(z) \vee \neg Has(John, z))]

将公式转换为合取范式 (CNF)

[\forall x (\forall y (\neg Cat(y) \vee \neg Has(x, y)) \vee \forall z (\neg Mouse(z) \vee \neg Has(x, z)))] [\forall x \forall y \forall z ((\neg Cat(y) \vee \neg Has(x, y)) \vee (\neg Mouse(z) \vee \neg Has(x, z)))]

最终的CNF表示

为了简化,我们可以将所有前提和结论转换为子句的集合。

前提子句

- 1. [\neg Hound(x)\vee HowlsAtNight(x)]
- 2. [$\ensuremath{\mathsf{Neg}}\$ \vee $\ensuremath{\mathsf{Neg}}\$ \vee $\ensuremath{\mathsf{Neg}}\$ \vee $\ensuremath{\mathsf{Neg}}\$ \vee \neg Has(x, z)]

由于存在所有组合,我们可以将其拆分为两个子句:

- o [\neg Cat(y) \vee \neg Has(x, y)]
- [\neg Mouse(z) \vee \neg Has(x, z)]

- 3. [\neq LightSleeper(x) \vee \neq HowlsAtNight(y) \vee \neq Has(x, y)]
- 4. [(Cat(y) \wedge Has(John, y)) \vee (Hound(y) \wedge Has(John, y))]

这可以拆分为两个子句:

- [Cat(y) \vee Hound(y)]
- o [Has(John, y)]
- 3. Howling Hounds 代码实现

定义符号

```
from collections import defaultdict
import copy
class Term:
    def __init__(self, name):
       self.name = name
    def is variable(self):
        # 变量以小写字母开头
        return self.name[0].islower()
    def __repr__(self):
        return self.name
    def eq (self, other):
        return isinstance(other, Term) and self.name == other.name
    def __hash__(self):
        return hash(self.name)
class Predicate:
    def __init__(self, name, args, is_negative=False):
        self.name = name
        self.args = args # list of Term
        self.is_negative = is_negative
    def negate(self):
        return Predicate(self.name, self.args, not self.is negative)
    def __repr__(self):
        sign = "¬" if self.is_negative else ""
        args_str = ", ".join([str(arg) for arg in self.args])
        return f"{sign}{self.name}({args_str})"
    def __eq__(self, other):
        return (self.name == other.name and
                self.args == other.args and
                self.is_negative == other.is_negative)
```

```
def __hash__(self):
    return hash((self.name, tuple(self.args), self.is_negative))

class Clause:
    def __init__(self, predicates):
        self.predicates = predicates # list of Predicate

def __repr__(self):
    return " v ".join([str(p) for p in self.predicates])

def is_empty(self):
    return len(self.predicates) == 0
```

定义规则

```
# 定义常量和变量
John = Term("John")
a = Term("a") # 用于存在变量
# 定义变量
x = Term("x")
y = Term("y")
z = Term("z")
# 定义谓词
def Hound(term):
    return Predicate("Hound", [term])
def HowlsAtNight(term):
    return Predicate("HowlsAtNight", [term])
def Has(term1, term2):
    return Predicate("Has", [term1, term2])
def Cat(term):
    return Predicate("Cat", [term])
def Mouse(term):
    return Predicate("Mouse", [term])
def LightSleeper(term):
    return Predicate("LightSleeper", [term])
# 定义子句 (规则)
# 1. ¬Hound(x) ∨ HowlsAtNight(x)
clause1 = Clause([Hound(x).negate(), HowlsAtNight(x)])
# 2a. \neg Cat(y) \lor \neg Has(x, y)
clause2a = Clause([Cat(y).negate(), Has(x, y).negate()])
```

```
# 2b. \neg Mouse(z) \lor \neg Has(x, z)
clause2b = Clause([Mouse(z).negate(), Has(x, z).negate()])
# 3. ¬LightSleeper(x) ∨ ¬HowlsAtNight(y) ∨ ¬Has(x, y)
clause3 = Clause([LightSleeper(x).negate(), HowlsAtNight(y).negate(), Has(x,
y).negate()])
# 4a. Cat(y) \vee Hound(y)
clause4a = Clause([Cat(y), Hound(y)])
# 4b. Has(John, y)
clause4b = Clause([Has(John, y)])
# 结论的否定
# 5a. LightSleeper(John)
clause5a = Clause([LightSleeper(John)])
# 5b. Mouse(a)
clause5b = Clause([Mouse(a)])
# 5c. Has(John, a)
clause5c = Clause([Has(John, a)])
# 收集所有子句
clauses = [clause1, clause2a, clause2b, clause3, clause4a, clause4b, clause5a,
clause5b, clause5c]
```

推理

```
def unify(x, y, subst):
   **description**
   合一算法,尝试合一两个项或谓词,并返回替换列表。
   **params**
   x: 第一个项或谓词。
   y: 第二个项或谓词。
   subst: 当前的替换列表。
   **returns**
   更新的替换列表,如果无法合一则返回 None。
   if subst is None:
       return None;
   elif x == y:
       return subst;
   elif isinstance(x, Term) and x.is_variable():
       return unify_var(x, y, subst);
   elif isinstance(y, Term) and y.is_variable():
       return unify_var(y, x, subst);
```

```
elif isinstance(x, Predicate) and isinstance(y, Predicate):
       if x.name != y.name or len(x.args) != len(y.args):
           return None;
       for a, b in zip(x.args, y.args):
           subst = unify(a, b, subst);
           if subst is None:
               return None;
       return subst;
   else:
       return None;
def unify_var(var, x, subst):
    **description**
   合一变量。
   **params**
   var: 变量项。
   x:另一个项。
   subst: 当前的替换列表。
   **returns**
   更新的替换列表,如果无法合一则返回 None。
   if var in subst:
       return unify(subst[var], x, subst);
   elif x in subst:
       return unify(var, subst[x], subst);
   else:
       if occurs_check(var, x, subst):
           return None;
       subst[var] = x;
       return subst;
def occurs_check(var, x, subst):
    **description**
   检查变量是否出现在替换中,防止无限递归。
   **params**
   var: 变量项。
   x: 另一个项。
   subst: 当前的替换列表。
   **returns**
   如果出现返回 True, 否则返回 False。
   if var == x:
       return True;
   elif isinstance(x, Term) and x.is_variable() and x in subst:
       return occurs_check(var, subst[x], subst);
   return False;
def substitute(predicate, subst):
```

```
**description**
   在谓词中应用替换。
   **params**
   predicate: 需要替换的谓词。
   subst:替换列表。
   **returns**
   应用替换后的新谓词。
   new_args = [];
   for arg in predicate.args:
       if arg in subst:
          new_arg = subst[arg];
           while new_arg in subst:
              new_arg = subst[new_arg];
           new_args.append(new_arg);
       else:
           new_args.append(arg);
   return Predicate(predicate.name, new_args, predicate.is_negative);
def substitute_clause(clause, subst):
   **description**
   在子句中应用替换。
   **params**
   clause: 需要替换的子句。
   subst:替换列表。
   **returns**
   应用替换后的新子句。
   new_predicates = [];
   for pred in clause.predicates:
       new_pred = substitute(pred, subst);
       new_predicates.append(new_pred);
   return Clause(new_predicates);
def resolution(clauses):
   1.1.1
   **description**
   主归结算法,尝试在子句集合中证明矛盾(导出空子句)。
   **params**
   clauses:初始子句集合。
   **returns**
   布尔值,表明是否成功证明矛盾。
   new = set();
   steps = ∅; # 初始化推理步数计数器
   while True:
```

```
n = len(clauses);
       pairs = [(clauses[i], clauses[j]) for i in range(n) for j in range(i + 1,
n)];
       for (ci, cj) in pairs:
           # 输出当前正在处理的子句对
           print(f"\n正在尝试归结子句对: {ci} 和 {cj}");
           resolvents = resolve(ci, cj);
           steps += 1; # 每次归结操作计为一步
           for resolvent in resolvents:
              # 明确标记涉及的子句、操作及结果
              print(f"步骤 {steps}: 将子句 {ci} 和 {cj} 归结得出新子句:
{resolvent}");
              if resolvent.is_empty():
                  print("导出空子句,证明成功!");
                  print(f"推理结束, 总步数: {steps}");
                  return True;
              new.add(resolvent);
       new_clauses = new - set(clauses);
       if not new clauses:
           print("无法继续归结,证明失败。");
           print(f"推理结束, 总步数: {steps}");
           return False;
       clauses.extend(new_clauses);
def resolve(clause1, clause2):
   **description**
   尝试对两个子句进行归结,返回新的子句列表。
   **params**
   clause1:第一个子句。
   clause2:第二个子句。
   **returns**
   归结后的新子句列表。
   resolvents = [];
   for pred1 in clause1.predicates:
       for pred2 in clause2.predicates:
           if pred1.name == pred2.name and pred1.is_negative !=
pred2.is negative:
              subst = \{\};
              pred1_subst = copy.deepcopy(pred1);
              pred2 subst = copy.deepcopy(pred2);
              # 明确指出使用unify处理的两个谓词
              print(f"尝试合一谓词 {pred1_subst} 和 {pred2_subst} 使用替换列表
{subst}");
              subst = unify(pred1_subst, pred2_subst, subst);
              if subst is not None:
                  # 输出替换的具体操作
                  print(f"替换列表更新为 {subst}, 应用到子句 {clause1} 和
{clause2}");
                  new_predicates = [substitute(p, subst) for p in
clause1.predicates + clause2.predicates
```

```
if p != pred1 and p != pred2];
    new_clause = Clause(new_predicates);
    resolvents.append(new_clause);
return resolvents;

# 开始推理
print("初始子句集合: ");
for clause in clauses:
    print(clause);

print("\n开始归结推理...");
result = resolution(clauses);
```

Drug Dealer and Customs Official Example

- 1. Drug dealer and customs official 符号抽象
 - 1. 海关官员搜查所有进入该国但不是VIP的人:
 - o (\forall x (\text{entered}(x) \wedge \neg \text{VIP}(x) \rightarrow \text{searched_by_customs}(x)))
 - 2. 一些毒贩进入了国家, 他们只被毒贩搜查:
 - (\exists x (\text{drug_dealer}(x) \wedge \text{entered}(x) \wedge \text{searched_by_drug_dealer}(x)))
 - 3. 没有毒贩是VIP:
 - (\forall x (\text{drug_dealer}(x) \rightarrow \neg \text{VIP}(x)))

需要证明:

- 一些海关官员是毒贩:
- (\exists x (\text{customs_official}(x) \wedge \text{drug_dealer}(x)))
- 2. Drug Dealer and Customs Official 逻辑实现

抽取谓词

- entered(x): x 进入该国。
- VIP(x): x是VIP。
- searched by customs(x): x 被海关官员搜查。
- drug_dealer(x): x 是毒贩。
- searched by drug dealer(x): x 被毒贩搜查。
- customs_official(x): x 是海关官员。

范式转换

消除蕴含和双重否定

- 1. [\forall x (entered(x) \wedge \neg VIP(x) \rightarrow searched_by_customs(x))] 转换为: [\forall x (\neg entered(x) \vee VIP(x) \vee searched_by_customs(x))]
- 2. [\exists x (drug_dealer(x) \wedge entered(x) \wedge searched_by_drug_dealer(x))]
- 3. [\forall x (drug_dealer(x) \rightarrow \neg VIP(x))] 转换为: [\forall x (\neg drug_dealer(x) \vee \neg VIP(x))]
- 4. [\exists x (customs_official(x) \wedge drug_dealer(x))]

将公式转换为前束范式 (Prenex Normal Form, PNF)

- 1. [\forall x (\neg entered(x) \vee VIP(x) \vee searched_by_customs(x))]
- 2. [\exists x (drug_dealer(x) \wedge entered(x) \wedge searched_by_drug_dealer(x))]
- 3. [\forall x (\neg drug_dealer(x) \vee \neg VIP(x))]
- 4. [\exists x (customs_official(x)\wedge drug_dealer(x))]

将公式转换为合取范式 (CNF)

- 1. [\neg entered(x) \vee VIP(x) \vee searched_by_customs(x)]
- 2. [drug_dealer(x) \wedge entered(x) \wedge searched_by_drug_dealer(x)]
- 3. [\neg drug_dealer(x) \vee \neg VIP(x)]
- 4. [customs_official(x) \wedge drug_dealer(x)]
- 3. Drug Dealer and Customs Official 代码实现

定义符号

```
**description**
       判断项是否为变量(名称以小写字母开头)。
       **params**
       None
       **returns**
       如果是变量返回 True, 否则返回 False。
       return self.name[0].islower();
   def __repr__(self):
       return self.name;
   def __eq__(self, other):
       return isinstance(other, Term) and self.name == other.name;
   def __hash__(self):
       return hash(self.name);
class Predicate:
   def __init__(self, name, args, isNegative=False):
       **description**
       初始化一个谓词。
       **params**
       name: 谓词名称。
       args:参数列表 (Term 对象列表)。
       isNegative: 是否为否定谓词。
       **returns**
       None
       1.1.1
       self.name = name;
       self.args = args; # list of Term
       self.isNegative = isNegative;
   def negate(self):
       **description**
       返回该谓词的否定形式。
       **params**
       None
       **returns**
       否定的 Predicate 对象。
       return Predicate(self.name, self.args, not self.isNegative);
   def __repr__(self):
       sign = "¬" if self.isNegative else "";
```

```
argsStr = ", ".join([str(arg) for arg in self.args]);
       return f"{sign}{self.name}({argsStr})";
   def __eq__(self, other):
       return (self.name == other.name and
               self.args == other.args and
               self.isNegative == other.isNegative);
   def __hash__(self):
       return hash((self.name, tuple(self.args), self.isNegative));
class Clause:
   def __init__(self, predicates):
       **description**
       初始化一个子句(由谓词组成的析取)。
       **params**
       predicates: 谓词列表。
       **returns**
       None
       self.predicates = predicates; # list of Predicate
   def __repr__(self):
       return " v ".join([str(p) for p in self.predicates]);
   def isEmpty(self):
       **description**
       判断子句是否为空(没有任何谓词)。
       **params**
       None
       **returns**
       如果为空返回 True, 否则返回 False。
       return len(self.predicates) == 0;
```

定义规则

```
# 定义常量和变量
x = Term("x");
a = Term("a"); # 用于存在量词的实例
b = Term("b");

# 定义谓词
def entered(term):
    return Predicate("entered", [term]);
```

```
def VIP(term):
    return Predicate("VIP", [term]);
def searchedByCustoms(term):
    return Predicate("searchedByCustoms", [term]);
def drugDealer(term):
    return Predicate("drugDealer", [term]);
def searchedByDrugDealer(term):
    return Predicate("searchedByDrugDealer", [term]);
def customsOfficial(term):
    return Predicate("customsOfficial", [term]);
# 定义子句 (规则)
# 1. ¬entered(x) ∨ VIP(x) ∨ searchedByCustoms(x)
clause1 = Clause([entered(x).negate(), VIP(x), searchedByCustoms(x)]);
# 2. drugDealer(a) ^ entered(a) ^ searchedByDrugDealer(a)
clause2a = Clause([drugDealer(a)]);
clause2b = Clause([entered(a)]);
clause2c = Clause([searchedByDrugDealer(a)]);
# 2. 他们只被毒贩搜查 ⇒ ¬searchedByCustoms(a)
clause2d = Clause([searchedByCustoms(a).negate()]);
# 3. ¬drugDealer(x) ∨ ¬VIP(x)
clause3 = Clause([drugDealer(x).negate(), VIP(x).negate()]);
# 4. customsOfficial(b) ∧ drugDealer(b)
clause4a = Clause([customsOfficial(b)]);
clause4b = Clause([drugDealer(b)]);
# 收集所有子句
clauses = [clause1, clause2a, clause2b, clause2c, clause2d, clause3, clause4a,
clause4b];
```

推理

```
def unify(x, y, subst):
    **description**
    合一算法, 尝试合一两个项或谓词, 并返回替换列表。

**params**
    x: 第一个项或谓词。
    y: 第二个项或谓词。
    subst: 当前的替换列表。
```

```
**returns**
   更新的替换列表,如果无法合一则返回 None。
   if subst is None:
       return None;
   elif x == y:
       return subst;
   elif isinstance(x, Term) and x.isVariable():
       return unifyVar(x, y, subst);
   elif isinstance(y, Term) and y.isVariable():
       return unifyVar(y, x, subst);
   elif isinstance(x, Predicate) and isinstance(y, Predicate):
       if x.name != y.name or len(x.args) != len(y.args):
           return None;
       for a, b in zip(x.args, y.args):
           subst = unify(a, b, subst);
           if subst is None:
               return None;
       return subst;
   else:
       return None;
def unifyVar(var, x, subst):
   **description**
   合一变量。
   **params**
   var: 变量项。
   x: 另一个项。
   subst: 当前的替换列表。
   **returns**
   更新的替换列表,如果无法合一则返回 None。
   if var in subst:
       return unify(subst[var], x, subst);
   elif x in subst:
       return unify(var, subst[x], subst);
   else:
       if occursCheck(var, x, subst):
           return None;
       subst[var] = x;
       return subst;
def occursCheck(var, x, subst):
   **description**
   检查变量是否出现在替换中,防止无限递归。
   **params**
   var: 变量项。
   x: 另一个项。
```

```
subst: 当前的替换列表。
   **returns**
   如果出现返回 True, 否则返回 False。
   if var == x:
       return True;
   elif isinstance(x, Term) and x.isVariable() and x in subst:
       return occursCheck(var, subst[x], subst);
   return False;
def substitute(predicate, subst):
   **description**
   在谓词中应用替换。
   **params**
   predicate: 需要替换的谓词。
   subst:替换列表。
   **returns**
   应用替换后的新谓词。
   newArgs = [];
   for arg in predicate.args:
       if arg in subst:
           newArg = subst[arg];
           while newArg in subst:
               newArg = subst[newArg];
           newArgs.append(newArg);
       else:
           newArgs.append(arg);
   return Predicate(predicate.name, newArgs, predicate.isNegative);
def substituteClause(clause, subst):
   **description**
   在子句中应用替换。
   **params**
   clause: 需要替换的子句。
   subst: 替换列表。
   **returns**
   应用替换后的新子句。
   newPredicates = [];
   for pred in clause.predicates:
       newPred = substitute(pred, subst);
       newPredicates.append(newPred);
   return Clause(newPredicates);
def resolution(clauses):
```

```
**description**
   主归结算法,尝试在子句集合中证明矛盾(导出空子句)。
   **params**
   clauses: 初始子句集合。
   **returns**
   布尔值,表明是否成功证明矛盾。
   new = set();
   steps = 0; # 初始化推理步数计数器
   while True:
       n = len(clauses);
       pairs = [(clauses[i], clauses[j]) for i in range(n) for j in range(i + 1,
n)];
       for (ci, cj) in pairs:
          # 输出当前正在处理的子句对
          print(f"\n正在尝试归结子句对: {ci} 和 {cj}");
          resolvents = resolve(ci, cj);
          steps += 1; # 每次归结操作计为一步
          for resolvent in resolvents:
              # 明确标记涉及的子句、操作及结果
              print(f"步骤 {steps}: 将子句 {ci} 和 {cj} 归结得出新子句:
{resolvent}");
              if resolvent.isEmpty():
                 print("导出空子句,证明成功!");
                 print(f"推理结束, 总步数: {steps}");
                 return True;
              new.add(resolvent);
       newClauses = new - set(clauses);
       if not newClauses:
          print("无法继续归结,证明失败。");
          print(f"推理结束, 总步数: {steps}");
          return False;
       clauses.extend(newClauses);
def resolve(clause1, clause2):
   **description**
   尝试对两个子句进行归结,返回新的子句列表。
   **params**
   clause1:第一个子句。
   clause2:第二个子句。
   **returns**
   归结后的新子句列表。
   resolvents = [];
   for pred1 in clause1.predicates:
       for pred2 in clause2.predicates:
          if pred1.name == pred2.name and pred1.isNegative != pred2.isNegative:
```

```
subst = {};
               pred1Subst = copy.deepcopy(pred1);
               pred2Subst = copy.deepcopy(pred2);
               # 明确指出使用unify处理的两个谓词
               print(f"尝试合一谓词 {pred1Subst} 和 {pred2Subst} 使用替换列表
{subst}");
               subst = unify(pred1Subst, pred2Subst, subst);
               if subst is not None:
                  # 输出替换的具体操作
                  print(f"替换列表更新为 {subst}, 应用到子句 {clause1} 和
{clause2}");
                  newPredicates = [substitute(p, subst) for p in
clause1.predicates + clause2.predicates
                                  if p != pred1 and p != pred2];
                  newClause = Clause(newPredicates);
                   resolvents.append(newClause);
   return resolvents;
# 开始推理
print("初始子句集合: ");
for clause in clauses:
   print(clause);
print("\n开始归结推理...");
result = resolution(clauses);
```